# Dualité de Tannaka supérieure $I$: Structures monoidales

B. Toen[*,†]

June 10, 2000

**Résumé**

Ceci est la première partie d'un long programme concernant la généralisation de la dualité de Tannaka aux catégories supérieures et ses relations avec l'hypothétique théorie de l'homotopie schématique imaginèe par A. Grothendieck dans [Gr]. Elle est essentiellement consacrée aux définitions nécessaires pour etablir la notion de 1-catégories de Segal Tannakiennes et du champ des automorphismes d'un foncteur fibre, ainsi qu'à l'étude de quelques exemples qui motivent la théorie.

Nous commencerons par développer la théorie des $n$-catégories de Segal monoidales et monoidales symétriques, et plus généralement des $n$-précatégories de Segal prémonoidales et prémonoidales symétriques. On montrera en particulier que ces objets forment des catégories de modèles fermées, qui sont de plus enrichies dans la catégorie de modèles des $n$-précatégories de Segal définie par C. Simpson. On étudiera ensuite les notions d'algèbres et de modules pour cette théorie, ainsi que leurs relations avec les notions usuelles de structures algébriques à homotopie près (e.g. $E_{\infty}$-algèbres).

La seconde partie de cet article est consacrée aux perspectives de la théorie, où nous définirons en particulier la notion de 1-catégorie de Segal Tannakienne. Nous terminerons par quelques exemples d'applications à la définition du foncteur de schématisation des types d'homotopie, à la théorie de Hodge non-abelienne, et aux théories homotopiques des schémas.

Mots clés: Dualité de Tannaka, $n$-catégories, théorie de l'homotopie, champs.

[*]Max Planck Institut fur Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
[†]e-mail:toen@mpim-bonn.mpg.de

# Table des matières

# 1 Introduction

La philosophie Galoisienne développée par A. Grothendieck dans les années 60 consiste à considérer les groupes fondamentaux (que se soit en topologie algébrique, théorie de Galois ou géométrie algébrique) comme des groupes d'automorphismes de certains foncteurs fibres. Poussée à son paroxisme ce point de vue aboutit à la notion de catégorie Galoisienne et à une interprétation purement catégorique de la théorie du groupoide fondamental, c'est à dire de la théorie homotopique 1-tronquée ([SGA1, $V$]). La contre partie algébrique de cette théorie est la philosophie Tannakienne, qui fournit une interprétation catégorique de la théorie homotopique des gerbes affines ([D1, Sa]). Par analogie avec la théorie Galoisienne, les gerbes de foncteurs fibres associées à des catégories Tannakiennes sont alors considérées comme des 1-type d'homotopie algébrique.

Outre leurs qualités esthétiques, ces deux théories ont eut de très fructueuses applications dans des domaines variés de la géométrie algébrique. En les examinant on peut en réalité cerner deux propriétés fondamentales qui font de ces théories des outils puissants et efficaces.

- Tout d'abord, elles permettent de définir des groupes fondamentaux dans des contextes où la notion même de lacet n'est plus disponible. Le premier exemple est bien entendu la définition du groupe fondamental étale ([SGA1]), mais on peut aussi citer le groupe fondamental algébrique ([D2]), le groupe de Galois différentiel ([D1]), le groupe de Galois motivique ([Se]), le "véritable groupe fondamental" ([No]), et en un certain sens les groupes quantiques.

- Par construction même, les groupes fondamentaux déduit du formalisme Galoisien ou Tannakien sont intimement liés à la "géométrie de la situation", ce qui permet de déduire de nombreuses de leurs propriétés. L'exemple le plus élémentaire est celui du théorème de Van Kampen en topologie algébrique, qui se déduit immédiatement du fait que les revêtements se recollent convenablement (i.e. forment un champ). Citons aussi l'invariance topologique du groupe fondamental étale ([SGA1]), les propriétés (conjecturales) du groupe de Galois motivique ([Se]), ou encore la définition de la "filtration de Hodge" sur le groupe fondamental algébrique ([S6]).

En conclusion on peut donc dire que l'interprétation Galoisienne et Tannakienne de la théorie de l'homotopie 1-tronquée permet non seulement d'élargir le cadre de la théorie de l'homotopie usuelle, mais aussi de relier intimement homotopie et géométrie.

Le but de la présente série d'articles est de développer une théorie Galoisienne et Tannakienne supérieure dont l'objet d'étude ne sera plus uniquement les groupoides fondamentaux mais des types d'homotopie généraux. Les motivations pour possèder une telle théorie sont nombreuses et proviennent de domaines divers de la topologie et de la géométrie algébrique. A titre d'exemples voici une liste de questions auquelles nous pensons pouvoir apporter une réponse. Certains éléments de réponse seront discutés dans le chapitre consacré aux applications.

- Donner une construction Galoisienne du type d'homotopie d'un espace topologique, généralisant la construction du groupe fondamental comme groupe d'automorphisme d'un foncteur fibre.

  De même, donner une construction Galoisienne du type d'homotopie étale d'un schéma défini dans [A-M].

- Généraliser la construction du groupe fondamental algébrique d'un espace topologique à tout son type d'homotopie. Montrer alors que dans le cas simplement connexe ceci fournit une interprétation Tannakienne des complétions rationnelles et $p$-adique ([Q2, Ma]).

- Pour toute bonne théorie cohomologique en géométrie algébrique (de Rham, $l$-adique, cristalline, absolue ... ), définir un type d'homotopie associé.

- La correspondance de Riemann-Hilbert implique que le complété pro-algébrique du groupe fondamental d'une variété lisse et projective sur $\mathbb{C}$ possède une description purement algébrique (comme schéma en groupes associé à la catégorie Tannakienne des fibrés vectoriels munis de connexions plates). Que peut-on dire des groupes d'homotopie supérieurs ?

Dans le même ordre d'idée, C. Simpson a défini une structure de Hodge non-abélienne sur les complété pro-réductif du groupe fondamental d'une variété lisse et projective sur $\mathbb{C}$ ([S6]). Comment généraliser cette construction à l'homotopie supérieure ?

Notre intuition se basera sur l'exemple de la théorie de l'homotopie des espaces topologiques, et il nous semble donc important d'examiner brièvement cet exemple pour donner un apperçu de la philosophie Tannakienne supérieure. Cet exemple est le point de départ de la "schématisation des types d'homotopie" que nous décrirons plus en détails au cours du chapitre consacré aux applications.

*Interprétation Galoisienne de la théorie de l'homotopie*

Signalons que cette partie est actuellement en cours de rédaction et ferra l'objet d'un article dans lequel le lecteur pourra trouver les preuves des faits annoncés (voir [To]).

Pour $(X, x)$ un espace topologique pointé (disons localement contractile et connexe) on sait que le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ classifie les revêtements sur $X$. Une conséquence remarquable de ce fait est l'existence d'un isomorphisme naturel

$$\pi_1(X, x) \simeq Aut(\omega_x),$$

où $\omega_x : Loc_0(X) \longrightarrow Ens$ est le foncteur "fibre en $x$", de la catégorie des faisceaux localement constants sur $X$ vers celle des ensembles.

L'idée pour généraliser cet isomorphisme aux groupes d'homotopie supérieurs est de remplacer les faisceaux localement constants par des $\infty$-champs en groupoides localement constants sur $X$, ou encore de façon équivalente par des fibrations sur $X$. Cette idée, qui apparait dans les lettres de Grothendieck à Breen ([Gr]) est bien naturelle quand l'on pense à la tour de Whitehead.

On considére alors $Loc(X)$ la catégorie simpliciale des préfaisceaux simpliciaux fibrants (disons pour la structure de catégorie de modèles de [Ja]) et localement constants sur $X$ (i.e. dont les faisceaux d'homotopie sont localement constants sur $X$). Le foncteur fibre en $x$ devient alors un foncteur simplicial

$$\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top,$$

où $Top$ est la catégorie simpliciale des ensembles simpliciaux fibrants. Ce foncteur est alors considéré comme un morphisme de 1-catégories de Segal, et donc définit un objet dans $\underline{Hom}(Loc(X), Top')$, où $Top \longrightarrow Top'$ est un remplacement fibrant (A.2). En utilisant le fait que $\omega_x$ est coreprésenté (voir 5.1) par le préfaisceau simplicial localement constant "universel" (i.e. celui des sections de la fibration des chemins) on peut montrer qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_m(X, x) \simeq \pi_{m-1}(\mathbb{R}End(\omega_x), Id),$$

où $\mathbb{R}End(\omega_x)$ est l'ensemble simplicial des endomorphismes de l'objet $\omega_x$ dans la 1-catégorie de Segal $\underline{Hom}(Loc(X), Top')$. Plus généralement, on peut montrer qu'il existe une équivalence de $A_\infty$-espaces

$$\Omega_x X \simeq |\mathbb{R}End(\omega_x)|.$$

Cette équivalence donne donc une interprétation Galoisienne de la théorie de l'homotopie des espaces topologiques, et permet d'affirmer que le type d'homotopie de $X$ est codé par la donnée purement catégorie que du "foncteur fibre"

$$\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top'.$$

On voit donc apparaitre ici la nécessité de possèder une théorie des catégories simpliciales Galoisiennes, voir des 1-catégories de Segal Galoisiennes, analogue à [SGA1, $V$]. Cette théorie sera l'objet d'un travail futur.

*Passage du Galoisien au Tannakien: linéarisation des coefficients*

Considérons maintenant le groupe fondamental algébrique de $(X, x)$, relativement à un corps $k$. Rappelons qu'il est définit de la façon suivante.

Soit $Loc_0(X, k)$ la catégorie des systèmes locaux de $k$-espaces vectoriels de dimension finie sur $X$. C'est une catégorie $k$-tensorielle rigide, et le foncteur fibre en $x$

$$\omega_x : Loc_0(X, k) \longrightarrow k - Vect$$

en fait une catégorie Tannakienne neutre sur $k$. On dispose donc du schéma en groupes des automorphismes tensoriels de $\omega_x$, qui par définition est le groupe fondamental algébrique de $X$ relativement à $k$. C'est un schéma en groupes affine sur $Spec\, k$, dont la catégorie des représentations linéaires est équivalente à $Loc_0(X, k)$.

Le point important ici est d'examiner le passage de la catégorie $Loc_0(X)$ à $Loc_0(X, k)$. Il s'effectue essentiellement en linéarisant les coefficients, c'est à dire en remplaçant un faisceau localement constant $E$ par le système local $Hom(E, k)$ (ceci n'est en réalité correct que si l'on se restreind au cas où $E$ est à fibres finies). On peut donc tenter de procéder de même pour la catégorie simpliciale $Loc(X)$, et remplacer un préfaisceau simplicial $E$ par son complexe de cohomologie $Hom(E, k)$. Si l'on se restreint au cas où les fibres de $E$ sont de plus de dimension cohomologique finie sur $k$, le complexe $Hom(E, k)$ est alors un complexe parfait de $k$-espaces vectoriels sur $X$. C'est à dire un complexe de préfaisceaux de $k$-espaces vectoriels sur $X$, qui est localement quasi-isomorphe à un complexe borné de $k$-espaces vectoriels de dimension finie. L'analogue algébrique de la catégorie simpliciale $Loc(X)$ semble donc être la catégorie simpliciale des complexes parfaits de $k$-espaces vectoriels sur $X$ (pour obtenir la "bonne" catégorie des complexes parfaits il faut en réalité se restreindre aux objets cofibrants et fibrants pour la structure de catégorie de modèles fermée décrite dans l'appendice C). Notons $Loc(X, k)$ cette catégorie simpliciale, et

$$\omega_x : Loc(X, k) \longrightarrow Loc(*, k)$$

son foncteur fibre. A ce niveau on aimerait pouvoir définir le champ $\underline{End}^{\otimes}(\omega_x)$, des "endomorphismes tensoriels de $\omega_x$", et montrer que la 1-catégorie de Segal $Loc(X, k)$ est alors équivalente à la catégorie des représentations de $\underline{End}^{\otimes}(\omega_x)$ dans les champs des complexex parfaits de $\mathcal{O}$-modules sur $Spec\, k$ ([S-H, 21]). Mais ceci nécessite évidemment une théorie des 1-catégories de Segal tensorielles sur $k$.

En conclusion, tout comme la dualité de Tannaka usuelle caractérise les catégories de fibrés vectoriels sur les gerbes affines, la dualité de Tannaka caractérisera les 1-catégories de Segal des complexes parfaits sur des "gerbes affines" supérieures (voir 5.20). Notons ici que le passage des fibrés vectoriels aux complexes parfaits est très naturel. En effet, les complexes parfaits possèdent beaucoup des bonnes propriétés des fibrés vectoriels, tel la bidualité, l'exitence des $Hom$ internes, la rigidité. De plus, comme le champ des complexes parfaits est un champ algébrique ([S-H]), tout comme celui des fibrés vectoriels, on s'attend donc naturellement à ce que les champs d'endomorphismes de foncteurs fibres à valeurs dans les complexes parfaits possèdent une forte nature algébrique.

*Relations avec d'autres travaux*

Les relations avec d'autres travaux sont nombreuses et en donner une liste exhaustive serait difficile. Voici tout au moins celles qui me sont plus ou moins connues. Il s'agit malheureusement de comparaisons qui ne seront pas, ou peu, discutées dans cet article.

- L'origine de ces reflexions remontent en réalité à un désir de mieux comprendre les relations entre cohomologie non-abélienne et homotopie. De nombreuses questions ont donc été motivées par les travaux de C. Simpson sur la théorie de Hodge non-abélienne ainsi que sur la théorie de l'homotopie sur $Spec\,\mathbb{C}$. Il n'est donc pas étonnant de pouvoir appliquer le formalisme Tannakien supérieur à la théorie de Hodge. Bien que la comparaison ne me semble pas encore très claire, il existe de fortes relations entre la filtration de Hodge que nous construisons (voir 6.10) et celle définie sur la "forme très présentable" ([S2, 6]).

- Il existe aussi des liens très forts avec la topologie algébrique. Ceci est évidemment du au fait que la dualité de Tannaka supérieure doit donner une réponse au problème de la "schématisation des types d'homotopie" de [Gr]. Ainsi, la théorie des modèles algébriques des types d'homotopie, que ce soit rationnel, $p$-adique ou entier ([Q2, Ma, Sm]), doit trouver une nouvelle interprétation dans le cadre Tannakien, ceci incluant en particulier un nouveau point du vue sur la théorie des $E_\infty$-algèbres (voir 4.6).

- Malgrè que nous n'ayons besoin que de la notion de 1-catégorie de Segal monoidale nous avons développé la théorie dans le cadre général des $n$-catégories de Segal monoidales. Une première raison est que la théorie n'est pas vraiment plus difficile et qu'il ne semble pas impossible de devoir utiliser par la suite la notion de 2-catégorie monoidale (par exemple on pourrait aussi définir une 1-catégorie de Segal tensorielle sur $k$ comme une algèbre dans la 2-catégorie de Segal monoidale des 1-catégories de Segal $k$-linéaires). La seconde raison est que la théorie semble digne d'intérets pour d'autres domaines, comme par exemple la théorie quantique des champs topologique. En effet, par définition même une TQFT est la donnée d'un foncteur monoidal entre la $n$-catégorie monoidale des $n$-cobordismes et celle des $n$-espaces vectoriels ([B-D]). Signalons que la construction du smash produit pour les $n$-catégories (2.26) permet alors de définir la notion de $n$-catégorie en anneaux, qui est fondamentale pour définir la $n$-catégorie des $n$-espaces vectoriels (comme celle des modules sur la $(n-1)$-catégorie en anneaux des $(n-1)$-espaces vectoriels). De plus, il semble aussi qu'un théorème de dualité de Tannaka dans ce contexte (qui est très différent de celui que nous considérerons) puisse être très utile ([C-Y]).

- Enfin la structure de 1-catégorie de Segal tensorielle semble aussi se retrouver dans les travaux sur l'interprétation homologique de la symétrie mirroir, où il est question de travailler avec les 1-catégories de complexes de $\mathcal{O}$-modules plutot qu'avec la structure plus faible de catégorie dérivée (notion de $A_\infty$-catégorie triangulée de M. Kontsevich). Dans la même direction, le champ des complexes défini dans [S-H, 21] est muni d'une structure de champ en 1-catégories monoidales (voir 2.33), ce qui possède de toute évidence des applications vers une nouvelle compréhension de la dualité de Grothendieck ou encore du théorème de Riemann-Roch.

Dans cet article on développera la théorie des $n$-catégories (de Segal) monoidales et tensorielles nécessaire pour définir la notion de 1-catégorie de Segal Tannakienne. Pour cela nous l'avons découpé en cinq chapitres et un appendice.

Le premier chapitre est consacré à la définition des $n$-précatégories prémonoidales (ainsi que prémonoidales symétriques) qui sont des "systèmes de générateurs et relations pour les $n$-catégories monoidales". On montrera en particulier qu'elles forment une catégorie admettant une structure de catégorie de modèles fermée enrichie dans celle des $n$-précatégories [S-H, S5]. Elle sera définie à l'aide de la structure de catégorie de modèles sur les $n$-préchamps de [S-H] et des résultats sur la localisation des catégories de modèles de [Hi].

Dans le chapitre suivant on étudiera tout d'abord les notions d'algèbres et de coalgèbres dans les $n$-catégories monoidales. Elles seront définies à l'aide des $n$-catégories de morphismes entre $n$-catégories monoidales. Nous définirons ensuite la notion de $n$-précatégories en prémodules, et à l'aide d'une structure de catégorie de modèles fermée définirons les $n$-catégories de modules et comodules sur les algèbres et coalgèbres.

Le troisième chapitre est consacré aux exemples. On commencera par montrer comment définir des 1-précatégories monoidales à l'aide des "précatégories prémonoidales avec équivalences" par un procédé que nous appellerons "dérivation". Ces constructions sont très importantes par la suite et permettent de définir de nombreux exemples de 1-catégories monoidales. Nous donnerons aussi quelques éléments de comparaison entre la présente théorie des algèbres et les notions déjà existantes, tel les algèbres au sens usuel, les $E_\infty$-algèbres ou encore les algèbres à homotopie près de [Le].

Dans le cinquième chapitre nous donnerons deux applications de la théorie. La première est un énoncé du type Beck, qui donne un critère pour reconnaitre des 1-catégories de Segal de comodules sur une comonade. Malheureusement cet énoncé restera pour le moment sous forme de conjecture. La seconde est la définition de la notion de 1-catégories de Segal Tannakiennes (neutralisées).

Le sixième chapitre est consacré à quelques exemples de la dualité de Tannaka conjecturale. On commence par y traiter l'exemple de la "schématisation des types d'homotopie", qui est la suite de l'exemple décrit précédemment. On énoncera aussi quelques conjectures sur les propriétés de cette construction, et on montre en particulier comment elles permettent de répondre à la question centrale de [Gr]. On étudiera aussi briévement l'exemple de la théorie de Hodge non-abélienne, et on montrera comment définir une "filtration de Hodge" sur la schématisation complexe de l'espace topologique sous-jacent à une variété algébrique, englobant toutes les filtrations de Hodge déjà existantes (sur la cohomologie, l'homotopie complexe, le groupe fondamental). Enfin, on donnera quelques exemples de construction de types d'homotopie associés à des schémas.

*Remerciements:* Je voudrais tout d'abord remercier C. Simpson et A. Hirschowitz pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail tout au long de sa rédaction, ainsi que pour leurs remarques et explications.

Je remercie aussi les personnes suivantes pour les conseils, remarques ou idées qu'ils m'ont apportés au cours de discussions: L. Katzarkov, J. Tapia, M. Spitzweck, J. Sauloy, H. Baues et T. Pantev.

Enfin, je remercie l'institut Max Planck à Bonn pour son hospitalité et ses excélentes conditions de travail.

*Notations et conventions:*

On supposera une certaine familiarité avec les notions de $n$-catégories de Segal, ainsi qu'avec les principaux résultats qui vont avec ([Ta, S-H, S2, S3, S4, S5]).

Nous noterons $Ens$ la catégorie des ensembles. Nous noterons $SEns$ celle des ensembles simpliciaux. Nous noterons $Top$ la catégorie simpliciale des objets fibrants de $SEns$. Elle sera considérée par la suite comme une 1-catégorie de Segal.

Tout au long de ce travail nous utiliserons l'expression "cmf" pour signifier "catégorie de modèles fermée" (au sens de [Ho, 1.1.4])). De plus, pour toute cmf $M$, on notera $x/M$ (resp. $M/x$) la cmf des objets au-dessous de $x$ (resp. des objets sur $x$) ([Ho, 1.1.8]). Enfin, nous parlerons de cmf monoidale ([Ho, 4.2.6]). Une cmf en modules sur une cmf monoidale $M$ ([Ho, 4.2]) sera appelée une cmf enrichie dans $M$.

Pour soulager l'écritute nous écrirons simplement "$n$-précatégorie" (resp. "$n$-catégorie") pour signifier "$n$-précatégorie de Segal" ([S-H, 2]) (resp. "$n$-catégorie de Segal"). L'expression "catégorie" sera alors réservée à la notion usuelle de catégorie. La catégorie des catégories sera notée $Cat$.

Nous noterons $n-PrCat$ la cmf des $n$-précatégories de Segal ([S-H, 2.3]), et nous désignerons par $n-Cat$ la sous-catégorie pleine formée des objets qui sont fibrants. Nous noterons comme il en est l'usage $*$ l'objet final de $n-PrCat$ (fixé une fois pour toute). Le $Hom$ interne entre deux objets $A$ et $B$ de $n-PrCat$ sera noté $\underline{Hom}(A,B) \in n-PrCat$ ([S-H, p. 17]). On notera aussi $\underline{Hom}_*$ le $Hom$ interne de $*/n-PrCat$. Nous noterons alors $n-Cat$ la $(n+1)$-catégorie des objets fibrants munie de ses $Hom$ internes.

Si $A$ et $B$ sont deux $n$-précategories on pose

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(A,B) := \underline{Hom}(A,B') \in Ho_n,$$

où $B \hookrightarrow B'$ est un remplacement fibrant.

Pour toute $n$-catégorie $A$, nous noterons $Ho(A)$ sa catégorie homotopique (notée $\tau_{\leq 1}$ dans [S-H, p. 18]). Nous noterons ainsi $Ho_n := Ho(n-Cat)$. C'est aussi la catégorie homotopique de la cmf $n-PrCat$. Si $A$ est une $n$-précatégorie $A^o$ sera la $n$-précatégorie opposée.

Enfin, si $C$ est un site, on note $n-PrCh(C)$ la cmf interne des $n$-préchamps sur $C$ munie de sa structure $HBQK$ ([S-H, 5]).

# 2 Structures monoidales

Les définitions que nous allons donner de $n$-catégories monoidales et monoidales symétrique sont basées sur l'observation, bien connue depuis longtemps, qu'une catégorie monoidale symétrique est une "$\Gamma$-catégorie spéciale" (au sens des $\Gamma$-espaces [S]). En d'autre termes un foncteur $M : \Gamma \longrightarrow Cat$, avec $M(*) = *$, et tel que pour tout $[m] \in \Gamma$ le morphisme de Segal

$$M([m]) \longrightarrow M([1])^m$$

soit une équivalence de catégories (voir par exemple [Le, 3.3]).

L'idée est alors de procéder comme dans la définition de la catégorie de modèles fermée des $n$-précatégories de [S5], et de commencer par considérer plus généralement les $n$-précatégorie prémonoidales symétriques, qui sont les foncteurs $\Gamma \longrightarrow n-PrCat$, avec $T(*) = *$. On commencera par munir la catégorie des ces objets d'une structure de cmf "niveaux par niveaux", que nous appellerons la structure forte, mais qui n'est pas la structure souhaitée. Il nous faudra par la suite localiser à gauche cette cmf afin que les objets fibrants deviennent alors automatiquement des "objets speciaux" (i.e. des $n$-précatégories monoidales symétriques). Le lecteur pourra remarquer une forte analogie avec la construction de la cmf des $n$-champs dans [S-H].

Toutes les constructions qui suivent se basent sur le fait que la catégorie $*/n-PrCat$, des $n$-précatégories pointées, est une cmf propre à gauche, monoidale symétrique (pour le produit direct) et qui est de plus cellulaire ([Hi, 15]).

Tout au long de ce paragraphe nous utiliserons les catégories d'indices suivantes.

**Définition 2.1** *Nous définissons $FS_+$ (resp. $FS$) comme la catégorie des ensembles finis (éventuellement vides) totalement ordonnés (resp. des ensembles finis).*

*Nous noterons $\Gamma_+$ (resp. $\Gamma$) la catégorie dont les objets sont les ensembles finis pointés $(I, i)$, avec un ordre total sur $I - i$ (resp. les ensembles finis pointés). Un morphisme entre deux objets $(I, i)$ et $(J, j)$ de $\Gamma_+$ (resp. $\Gamma$) est la donnée d'une application d'ensembles pointés $F : (I, i) \longrightarrow (J, j)$, telle que*

$$f : I - f^{-1}(j) \longrightarrow J - j$$

*soit croissante au sens large (resp. une application d'ensembles pointés).*

*Les objets finaux de ces catégories (fixés une fois pour toute) seront notés $*$.*

Remarquons que ces catégories sont monoidales pour la somme directe

$$I \otimes J := I \coprod J \qquad\qquad (I, i) \otimes (J, j) := (I \coprod_{i=j} J, i).$$

Les catégories $\Gamma$ et $FS$ sont de plus monoidales symétriques.

Par la suite, nous écrirons souvent $[m]$ pour $(\{0, \ldots, m\}, 0)$ (comme élément de $\Gamma_+$ ou de $\Gamma$). De même nous écrirons $[m] := \{1, \ldots, m\}$ comme élément de $FS_+$ ou de $FS$.

Pour tout $n$ et $1 \leq i \leq m$, nous disposons des morphismes dans $\Gamma_+$ et $\Gamma$

$$p_i : [m] \longrightarrow [1],$$

envoyant $i$ sur 1 et le reste sur 0.

## 2.1 $n$-Catégories monoidales

**Définition 2.2** • *On note $n - PrMon$ la catégorie des préfaisceaux $T$ sur $\Gamma_+^o$ à valeurs dans $n - PrCat$, et tels que $T(*) = *$.*

*Les objets de $n-PrMon$ seront appelés les $n$-précatégories prémonoidales.*

*Nous noterons, pour tout objet $T$ dans $n-PrMon$, $T_m$ pour $T([m])$.*

- *Un objet $T \in n-PrMon$ sera appelé une $n$-précatégorie monoidale, si pour tout $m$ le morphisme*
$$\prod_{i=1}^{i=m} p_i : T_m \longrightarrow T_1^m$$
*est une équivalence dans $n-PrCat$.*

  *Si de plus pour tout $m$, $T_m$ est une $n$-catégorie, on dira que $T$ est une $n$-catégorie monoidale.*

- *La $n$-précatégorie $T_1$ sera appelée la $n$-précatégorie sous-jacente à $T$.*

*Remarque:* Il existe une équivalence de catégorie entre $n-PrMon$ et la catégorie des préfaisceaux sur $\Gamma_+^o - *$ à valeurs dans $*/n-PrCat$.

**Lemme 2.3** *Soit $M$ une cmf monoidale symétrique, propre à gauche et cellulaire. Soit $I$ une catégorie et $M^I$ la catégorie des foncteurs de $I$ vers $M$. On munit $M^I$ de sa structure de cmf usuelle ([Hi,* 14.7.1*]).*

*Alors $M^I$ est naturellement une cmf propre à gauche et cellulaire, enrichie dans $M$.*

*Preuve:* Rappelons tout d'abord que les équivalences (resp. les fibrations) dans $M^I$ sont les morphismes $f : X \longrightarrow Y$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i : X(i) \longrightarrow Y(i)$ soit une équivalence (resp. une cofibration).

Le fait que $M^I$ soit propre à gauche et cellulaire provient de [Hi, 15.1.5].

La structure de catégorie en modules sur $M$ est définie par

$$\begin{array}{cccc} A\Box X: & I & \longrightarrow & M \\ & i & \mapsto & A\otimes X(i) \end{array}$$

pour $A \in M$ et $X \in M^I$. De plus, pour $A$ et $B$ dans $M^I$ on peut définir un $Hom$ à valeurs dans $M$ grâce à l'existence des limites dans $M$. Ceci munit clairement $M^I$ d'une structure de catégorie enrichie dans $M$.

Par définition des équivalences, pour vérifier [Ho, 4.2.6 (2)] il nous suffit de montrer que si $A$ est cofibrant dans $M$, alors pour tout $i \in I$, $A_i$ est cofibrant dans $M$. Plus généralement, si $A \longrightarrow B$ est une cofibration dans $M$, alors $A_i \longrightarrow B_i$ est une cofibration dans $M$ pour tout $i \in I$. En effet, d'après [Hi, 14.7.1] il suffit de traiter le cas des cofibrations de la forme $j_i^*(A) \longrightarrow j_i^*(B)$ (où $j_i^*$ est l'adjoint à gauche de $A \mapsto A_i$), avec $A \longrightarrow B$ une cofibration dans $M$. Or, pour $j \in I$, on a $j_i^*(A)_j = \coprod_{i\to j} A$, et comme les cofibrations sont stables par coproduits, $j_i^*(A)(j) \longrightarrow j_i^*(B)(j)$ est bien une cofibration pour tout $j \in I$.

Pour vérifier [Ho, 4.2.6 (1)] on utilise [Ho, 4.2.5]. La propriété se vérifie alors aisement à l'aide de la propriété analogue dans $M$, du fait que les $j_i^*$ sont de Quillen à gauche, et de la formule $A\Box j_i^*(X) \simeq j_i^*(A\Box X)$. $\Box$

En particulier, si on prend $I = \Gamma_+^o - *$ et $M = */n-PrCat$, on trouve que $n-PrMon$ est muni d'une structure de cmf enrichie dans $*/n-PrCat$ (toujours cellulaire). Les $Hom$ enrichis seront alors notés $Hom^{\otimes}$ (c'est le $Hom$ de préfaisceaux), et le produit externe $A\Box T$, pour tout $A \in */n-PrCat$ et $T \in n-PrMon$. Pour mémoire on a

$$\begin{array}{cccc} A\Box T: & \Gamma_+ & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & A\wedge T_m \end{array}$$

où $\wedge$ est le produit direct dans $*/n-PrCat$. Notons aussi la formule d'adjonction

$$Hom^{\otimes}(A\Box T, T') \simeq \underline{Hom}_{*}(A, Hom^{\otimes}(T, T')).$$

Enfin, si $A \in */n-PrCat$ et $T \in n-PrMon$ on dispose aussi de l'objet $T^A$ défini par

$$\begin{array}{cccc} T^A: & \Gamma_+ & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & \underline{Hom}_{*}(A, T_m) \end{array}$$

et de la formule d'adjonction

$$Hom^{\otimes}(A\Box T, T') \simeq Hom^{\otimes}(T, (T')^A).$$

Rappelons que les équivalences sont les morphismes $f: T \longrightarrow T'$ de $n-PrMon$ tels que pour tout $m$, le morphisme $f_m: T_m \longrightarrow T'_m$ est une équivalence dans $n-PrCat$. Nous les appellerons par la suite les équivalences fortes. De même, $f$ est une fibration si pour tout $m$, $f_m: T_m \longrightarrow T'_m$ est une fibration dans $n-PrCat$. Nous les appellerons naturellement les fibrations fortes. La classe des cofibrations déterminé par ces deux dernière définition (par la propriété de relèvement) sera appelée la classe des cofibrations fortes.

Nous appellerons cette structure de cmf la structure forte. Remarquons dès à présent qu'il ne sagit que d'une structure intermédiaire qui ne possède pas les propriétés souhaitées. En effet, les objets fibrants sont les objets $T$ tel que $T_m$ sot fibrant pour tout $m$, alors que l'on souhaiterait qu'ils soient de plus des $n$-catégories monoidales. Pour forcer cette condition nous allons utiliser le procédé très général de localisation des cmf de [Hi].

Comme toujours, pour $T$ et $T'$ dans $n-PrMon$, nous noterons

$$\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T, T') := Hom^{\otimes}(U, U') \in Ho(*/n-PrCat)$$

où l'on a choisit $U \longrightarrow T$ un remplacement cofibrant, et $T' \hookrightarrow U'$ un remplacement fibrant. Remarquer l'indice $f$ dans la définition précédente, qui fait référence à la structure forte.

**Définition 2.4** *Un morphisme $f: T \longrightarrow T'$ sera appelé une $B$-équivalence, si pour toute $n$-catégorie monoidale $U$, le morphisme induit*

$$f^*: \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T', U) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T, U)$$

*est un isomorphisme dans $Ho(*/n-PrCat)$.*

*La cmf des $n$-précatégories prémonoidales est la localisée de Bousfield à gauche de la structure forte sur $n-PrMon$ le long des $B$-équivalences ([Hi,* 4.1.2*]).*

*Remarque:* Dans la définition des $B$-équivalence on peut remplacer "pour toute $n$-catégorie monoidale" par "pour toute $n$-précatégorie monoidale". En effet, toute $n$-précatégorie monoidale est équivalente pour la structure forte à une $n$-catégorie monoidale.

A partir de maintenant, les termes fibrations, cofibrations et équivalences feront toujours référence à la structure de cmf définie dans 2.4. Remarquer que les cofibrations sont les cofibrations fortes. De même tout fibration est une fibration forte, et tout fibration triviale est une équivalence forte.

Par convénience pour le lecteur rappelons comment sont définies les équivalences dans $n-PrMon$.

Pour tout $A$ et $B$ objets de $n-PrMon$, on dispose de l'ensemble simplicial $Map_f(A,B)$, qui est naturellement équivalent à l'ensemble simplicial des morphismes de $A$ vers $B$ dans $L(n-PrMon)$, la localisée de Dwyer-Kan de $n-PrMon$ le long des équivalences fortes ([Hi, 19]). Un objet $U$ est $B$-local, si pour toute $B$-équivalence $f : T \longrightarrow T'$, le morphisme induit

$$f^* : Map_f(T',U) \longrightarrow Map_f(T,U)$$

est une équivalence d'ensembles simpliciaux. Nous mettons en garde le lecteur que ceci n'est pas tout à fait la définition de $B$-local utilisée dans [Hi], car on ne demande pas que l'objet soit fibrant. Quoiqu'il en soit la définition des équivalences pour l'une ou l'autre des définition est la même.

Un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ est une équivalence, si pour tout objet $B$-local $U$, le morphisme induit

$$f^* : Map_f(T',U) \longrightarrow Map_f(T,U)$$

est une équivalence d'ensembles simpliciaux.

*Remarque:* Il existe un foncteur $In : n-PrCat \longrightarrow SEns$, qui est de Quillen à droite, et qui permet de voir $n-PrCat$ comme une catégorie simpliciale (ce foncteur est noté dans [S-H, 11] par une lettre que nous n'avons pas su décripter). Ainsi, la cmf $n-PrMon$ est aussi enrichie dans $SEns$ à l'aide des $In(Hom^{\otimes})$. En particulier, ceci implique par [D-K] qu'il existe des isomorphismes naturels dans $Ho(SEns)$

$$Map_f(T,U) \simeq \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T,U)) \simeq \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T,U)^{int,0},$$

où $A^{int,0}$ est l'intérieur de la $n$-catégorie fibrante $A$ ([S-H, 2]). Cette remarque nous sera utile pour la preuve du lemme suivant.

**Lemme 2.5**

1. *Un objet $U \in n-PrMon$ est $B$-local, si et seulement si c'est une $n$-précatégorie monoidale.*

2. *Si $T \longrightarrow T'$ est une équivalence dans $n-PrMon$ et $A \in */n-PrCat$, alors*

$$A\square T \longrightarrow A\square T'$$

*est encore une équivalence.*

3. *Un morphisme de $n-PrMon$ est une équivalence si et seulement si c'est une $B$-équivalence.*

*Preuve:* (1) Soit $U$ une $n$-précatégorie monoidale, et $U \hookrightarrow U'$ un remplacement fibrant pour la structure forte. Alors chaque $U'_m$ est fibrant, et donc une $n$-catégorie (A.2). Ainsi, $U'$ est une $n$-catégorie monoidale. Pour toute $B$-équivalence $f : T \longrightarrow T'$, on a donc

$$f^* : \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T',U) \simeq \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T',U') \simeq \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T,U') \simeq \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T,U).$$

Or, comme $Map_f(-,-) \simeq \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(-,-))$, ceci implique que $U$ est bien $B$-local.

Soit $U$ un objet $B$-local. Notons $\Gamma^m_+$ l'objet de $n-PrMon$ représenté par l'objet $[m] \in \Gamma_+$. On a donc des isomorphismes fonctoriels en $T \in n-PrMon$

$$Hom^{\otimes}(\Gamma^m_+, T) \simeq T_m.$$

En particulier, par définition des $n$-précatégories monoidales, ceci implique que les morphismes $p_i : [m] \longrightarrow [1]$ de induisent une $B$-équivalence

$$\vee_i p_i : \vee_i \Gamma^1_+ \longrightarrow \Gamma^m_+.$$

Par adjonction entre $\square$ et $Hom^{\otimes}$, ceci implique aussi que pour tout objet $A \in */n-PrCat$, le morphisme

$$\vee_i A\square\Gamma^1_+ \longrightarrow A\square\Gamma^m_+$$

est encore une $B$-équivalence. Comme $U$ est $B$-local, on en déduit que le morphisme

$$\pi_0 Map_f(A\Box\Gamma_+^m, U) \longrightarrow \pi_0 Map_f(\vee_i A\Box\Gamma_+^1, U)$$

est bijectif. Or $\pi_0 Map_f$ est simplement l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique $Ho(n-PrMon)$ (pour la structure forte). Si l'on note $[-,-]$ les ensembles de morphismes dans $Ho(*/n-PrCat)$, et $[-,-]_f$ ceux dans la catégorie homotopique de $n-PrMon$ pour la structure forte, on a par adjonction

$$[A, U_m] \simeq [A\Box\Gamma_+^m, U]_f \simeq [A\Box \vee_i \Gamma_+^1, U]_f \simeq [A, U_1^m],$$

et ce pour tout $A \in Ho(*/n-PrCat)$. Par Yoneda ceci implique que le morphisme $U_m \longrightarrow U_1^m$ est une équivalence dans $*/n-PrCat$. Ainsi, $U$ est une $n$-précatégorie monoidale.

(2) Par (1) il faut montrer que pour toute $n$-précatégorie monoidale $U$, et tout $A \in */n-PrCat$, le morphisme

$$f^* : Map_f(A\Box T', U) \longrightarrow Map_f(A\Box T, U)$$

est une équivalence d'ensembles simpliciaux. Comme $Map_f(-,-) \simeq \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(-,-))$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(A\Box T', U)) \longrightarrow \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(A\Box T, U))$$

est un isomorphisme dans $Ho_n$. Par adjonction ce morphisme est isomorphe à

$$\mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T', (U')^A)) \longrightarrow \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T, (U')^A)),$$

où $U \longrightarrow U'$ est un remplacement fibrant pour la structure forte. Mais ce dernier morphisme est lui même isomorphe à

$$f^* : Map_f(T', (U')^A) \longrightarrow Map_f(T, (U')^A).$$

Or, comme $U$ est une $n$-précatégorie monoidale, et que chaque $U'_m$ est fibrant, $(U')^A$ est encore une $n$-précatégorie monoidale, et donc est $B$-local par (1). Ainsi, par définition des équivalences $f^* : Map_f(T', (U')^A) \longrightarrow Map_f(T, (U')^A)$ est un isomorphisme, et donc

$$\mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(A\Box T', U)) \longrightarrow \mathbb{R}In(\mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(A\Box T, U))$$

aussi.

(3) La condition est évidemment suffisante.

Soit $f : T \longrightarrow T'$ une équivalence, et $U$ une $n$-précatégorie monoidale. Notons comme ci-dessus $[-,-]_f$ les morphismes dans la catégorie homotopique $Ho(*/n-PrMon)$ pour la structure forte, et $[-,-]$ ceux de $Ho(*/n-PrCat)$. Par (1) et (2), on a pour tout $A \in */n-PrCat$

$$f^* : [A, \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T', U)] \simeq [A\Box T', U]_f \simeq [A\Box T, U]_f \simeq [A, \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T, U)].$$

Comme ceci est valable pour tout $A$, le lemme de Yoneda implique que le morphisme

$$f^* : \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T', U) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T, U)$$

est une équivalence dans $*/n-PrCat$. Ainsi $f$ est une $B$-équivalence. $\Box$

**Corollaire 2.6** *Notons $[-,-]_f$ l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique de $n-PrMon$ pour les équivalences fortes. Alors un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ est une équivalence si et seulement si pour toute $n$-catégorie monoidale $U$, le morphisme*

$$f^* : [T', U]_f \longrightarrow [T, U]_f$$

*est bijectif.*

*Preuve:* Cela provient des points (2) et (3) du lemme précédent, de la formule d'adjonction $[A\Box T, U]_f \simeq [A, \mathbb{R}_f Hom^{\otimes}(T,U)]_f$, et du lemme de Yoneda dans $Ho(*/n-PrCat)$. $\Box$

**Théorème 2.7** *La structure de $*/n-PrCat$-module sur $n-PrMon$ en fait une cmf enrichie dans $*/n-PrCat$.*

*Preuve:* Remarquons tout d'abord que la structure forte sur $n-PrMon$ est propre à gauche, et donc $n-PrMon$ est encore propre à gauche ([Hi, 4.1.2]).

La condition [Ho, 4.2.6] (2) provient directement du fait que les fibrations triviales sont exactement les fibrations triviales fortes, et que pour la structure forte cet axiome est vérifié.

Soit $A \longrightarrow B$ une cofibration dans $*/n-PrCat$ et $T \longrightarrow T'$ une cofibration dans $n-PrMon$. Comme les cofibrations sont aussi les cofibrations fortes, et que $n-PrMon$ est enrichie dans $*/n-PrCat$ pour la structure forte, le morphisme

$$A\Box T' \coprod_{A\Box T} B\Box T \longrightarrow B\Box T'$$

est une cofibration. Ainsi, comme $n-PrMon$ est propre à gauche, pour vérifier [Ho, 4.2.6] (1) il nous suffit de vérifier les deux assertions suivantes.

- Pour toute cofibration triviale $A \longrightarrow B$ dans $*/n-PrCat$, et tout objet $T \in n-PrMon$, le morphisme induit $A\Box T \longrightarrow B\Box T$ est une équivalence forte.
- Pour toute cofibration triviale $T \longrightarrow T'$ dans $n-PrMon$, et tout $A \in */n-PrCat$, le morphisme $A\Box T \longrightarrow A\Box T'$ est une équivalence.

La première assertion est impliqué par le fait que $A\Box T \longrightarrow B\Box T'$ est alors une équivalence forte dans $n-PrMon$, car tout objet de $*/n-PrCat$ est cofibrant. Quand à la seconde elle est déjà démontrée dans 2.5 (2). $\Box$

**Lemme 2.8** *Le foncteur $n-PrMon \longrightarrow */n-PrCat$ qui à $T$ associe $T_1$ est de Quillen à droite. De plus son adjoint à gauche préserve la structure de $*/n-PrCat$-modules.*

*Preuve:* Il est clairement de Quillen à droite pour la structure forte, et donc préserve les fibrations triviales. De plus, toute fibration est une fibration forte, et donc le foncteur préserve aussi les fibrations.

L'assertion sur la structure de $*/n-PrCat$-modules est claire, car l'adjoint à gauche $1^*$ est défini pour $A \in */n-PrCat$ par la formule

$$\begin{array}{cccc} 1^*(A): & \Gamma_+ & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & \vee_{Hom_{\Gamma}([1],[m])}A \end{array}$$

$\Box$

La dernière assertion du lemme précédent implique que pour $T$ et $T'$ dans $n-PrMon$ il existe des morphismes fonctoriels dans $*/n-PrCat$

$$Hom^{\otimes}(T,T') \longrightarrow \underline{Hom}_*(T_1, T'_1).$$

**Lemme 2.9** *Les objets fibrants de $n-PrMon$ sont exactement les $n$-catégories monoidales $T$ telles que $T_m$ est fibrant pour tout $m$.*

*Preuve:* En effet, un objet $T$ de $n-PrMon$ est fibrant si et seulement s'il est fibrant pour la structure forte et $B$-local. Par 2.5 ceci est équivalent au fait que $T$ est une $n$-précatégorie monoidale, et que les $T_m$ sont fibrants (et donc des $n$-catégories A.2). $\square$

**Définition 2.10** *Soit $T \in n-PrMon$. On définit la $(n+1)$-précatégorie $BT$ par*

$$\begin{array}{cccc} BT: & \Delta^o & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & T_m \end{array}$$

*Cette $(n+1)$-précatégorie est naturellement pointée $* \longrightarrow BT$ par son unique objet. Ceci définit donc un foncteur*

$$B : n-PrMon \longrightarrow */(n+1)-PrCat.$$

**Lemme 2.11** *Le foncteur $B : n-PrMon \longrightarrow */(n+1)-PrCat$ est de Quillen à gauche. Son adjoint à droite est*

$$\Omega_* : */(n+1)-PrCat \longrightarrow n-PrMon$$

*qui à $A$ associe*

$$\begin{array}{cccc} \Omega_*(A): & \Gamma_+ & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & A_{\underbrace{(*,\dots,*)}_{m\ fois}} \end{array}$$

*De plus, le morphisme d'adjonction $A \longrightarrow \Omega_*(B(A))$ est un isomorphisme dans $n-PrMon$.*

*Preuve:* L'assertion sur le morphismes d'adjonction est claire.

Par la propriété universelle des localisations à gauche ([Hi, 3.2.1]), il nous suffit de montrer que le foncteur dérivé pour la structure forte

$$\mathbb{L}_f B : Ho_f(n-PrMon) \longrightarrow Ho(*/(n+1)-PrCat)$$

envoie les $B$-équivalences sur des isomorphismes. Par adjonction entre $B$ et $\Omega_*$, et par le lemme 2.5 il nous suffit pour cela de montrer que $\Omega_*$ envoie des objets fibrants sur des $n$-catégories monoidales. Mais ceci est clair car une $(n+1)$-précatégorie fibrante est une $(n+1)$-catégorie (A.2). $\square$

*Remarque:* Le foncteur $B$ transforme toute $n$-catégorie monoidale en une $(n+1)$-catégorie, ainsi que toute équivalence de $n$-catégories monoidales en une équivalence de $(n+1)$-catégories.

De plus, on peut montrere qu'un morphisme dans $n-PrMon$ est une équivalence si et seulement si son image par $B$ est une équivalence dans $*/(n+1)-PrCat$. Ceci explique le choix de la terminologie de "$B$-équivalences".

**Définition 2.12** 1. *La catégorie des objets fibrants et cofibrants de $n-PrMon$ sera notée $n-Mon$.*

*A l'aide des Hom à valeurs dans $n-PrCat$, nous verrons $n-Mon$ comme une $(n+1)$-catégorie (voir A). Cette $(n+1)$-catégorie sera appelée la $(n+1)$-catégorie des $n$-catégories monoidales.*

2. *Pour $T$ et $T'$ dans $Ho(n-PrMon)$, nous noterons*

$$\mathbb{R}Hom^{\otimes}(T,T') := Hom^{\otimes}(U,U') \in Ho_n,$$

*où l'on aura choisit préalablement un remplacement fibrant $T' \hookrightarrow U'$, et un remplacement cofibrant $U \longrightarrow T$ dans $n-PrMon$.*

Il est intéressant de décrire le "premier étage" d'une $n$-catégorie monoidale $T$. Il est constitué d'un diagramme de $n$-catégories

$$\begin{tikzcd} T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \times T_1 \\ T_1 & \end{tikzcd}$$

où le morphisme horizontal est une équivalence. Ainsi, ceci définit dans la catégorie homotopique $Ho_n$ un produit

$$T_1 \times T_1 \longrightarrow T_1.$$

Si l'on considère le cran au-dessus, à savoir $T_3$, on trouve des homotopies de cohérence pour l'associativité. Quand aux crans supérieurs ils donnent des homotopies entre les homotopies, des homotopies entre homotopies d'homotopies, et ainsi de suite. Il semble cependant assez délicat (et sans doute pas très utile) d'essayer de décrire toute la structure en termes de ces cocycles supèrieurs.

En utilisant le fait que tous les objets de $*/n-PrCat$ sont cofibrants, on peut donc construire un morphisme de $(n+1)$-catégories (voir l'appendice $A$)

$$n-Mon \longrightarrow n-Cat,$$

qui à une $n$-catégorie monoidale fibrante $T$ associe sa $n$-catégorie sous-jacente $T_1$. L'importance de ce morphisme provient de la proposition suivante.

**Proposition 2.13** • *Le morphismes $n-Mon \longrightarrow n-Cat$ est conservatif (A.4).*

• *Pour toute paire d'objets $T, T' \in n-Mon$, le morphisme induit*

$$Hom^{\otimes}(T,T') \longrightarrow \underline{Hom}(T_1, T'_1)$$

*est conservatif.*

*Preuve:* (1) Il faut montrer qu'un morphisme entre objets cofibrants et fibrants $f : T \longrightarrow T'$ est une équivalence dans $n-PrMon$ si et seulement si le morphisme induit $T_1 \longrightarrow T'_1$ est une équivalence dans $n-PrCat$. Or, par 2.9 $T$ et $T'$ sont des $n$-catégories monoidales, et donc la conservation des équivalences par produits dans $n-PrCat$ (car c'est une cmf monoidale pour le produit direct) implique que pour tout $m$, le morphisme $T_m \longrightarrow T'_m$ est une équivalence. Ainsi, $f$ est une équivalence forte et donc une équivalence dans $n-PrMon$.

(2) (Comparer avec [S4, 2.5.1]) Soit $u$ un morphisme dans $Ho(Hom^{\otimes}(T,T'))$ tel que son image dans $Ho(\underline{Hom}(T_1,T'_1))$ soit un isomorphisme. Il est donc représenté par un morphisme dans $Ho(n-PrMon)$

$$u : T \longrightarrow (T')^I,$$

avec $I$ la catégorie possèdant deux objets 0 et 1 et un morphisme $0 \to 1$. Notons $\overline{I}$ la catégorie possèdant les même objets que $I$ mais avec un isomorphisme $0 \to 1$. Le morphisme naturel $I \longrightarrow \overline{I}$ induit un morphisme $(T')^{\overline{I}} \longrightarrow (T')^I$. Notons que pour tout $m$, le morphisme induit

$$(T')^{\overline{I}}_m = \underline{Hom}(\overline{I}, T'_m) \longrightarrow (T')^I = \underline{Hom}(I, T'_m)$$

est isomorphe dans $Ho_n$ au morphisme

$$T_m \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(I, T'_m)$$

induit par la projection $I \longrightarrow *$. Il est donc pleinement fidèle. De plus, par hypothèse le morphisme $u_1 : T_1 \longrightarrow (T')^I_1$ se factorise par l'image essentielle de $(T')^{\overline{I}}_1 \longrightarrow (T')^I_1$. Or, comme $T$, $(T')^I$ et $(T')^{\overline{I}}$

sont des $n$-catégories monoidales, ceci implique que pour tout $m$, le morphisme $u_m : T_m \longrightarrow (T')^I_m$ se factorise par l'image essentielle de $(T')^{\overline{I}}_m \longrightarrow (T')^I_m$. Ainsi, $u$ se factorise en un diagramme commutatif dans $Ho(n - PrMon)$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & (T')^I \\ & (T')^{\overline{I}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Ce qui équivaut à dire que $u \in Ho(Hom^{\otimes}(T, T'))$ est un isomorphisme. $\Box$

**Définition 2.14** *Soit $T \in Ho(n - Cat)$, représenté par un morphisme dans $Ho_{n+1}$*

$$T : * \longrightarrow n - Cat.$$

*On pose*

$$\mathbb{R}\underline{End}(T) := \mathbb{R}\Omega_*(n - Cat) \in Ho(n - PrMon).$$

En clair, pour tout $T \in Ho_n$, on a

$$\mathbb{R}\underline{End}(T)_m \simeq \underline{Hom}(T', T')^m,$$

où $T \longrightarrow T'$ est un remplacement fibrant. La structure de $n$-catégorie monoidale est de plus donnée par la composition des endomorphismes.

La proposition suivante montre qu'une $n$-catégorie monoidale $T$ opère naturellement sur sa $n$-catégorie sous-jacente. C'est une construction que nous n'utiliserons pas dans cet article mais qui sera utile par la suite.

**Proposition 2.15** *Pour tout objet $T \in Ho(n - Mon)$, il existe un morphisme dans $Ho(n - Mon)$*

$$A_T : T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{End}(T_1),$$

*qui est fonctoriel en $T$.*

*De plus, le morphisme induit par adjonction dans la catégorie $Ho_n$*

$$T_1 \times T_1 \longrightarrow T_1$$

*est isomorphe au "premier étage" de la $n$-catégorie monoidale $T$.*

*Preuve:* Nous allons utiliser la famille des flèches définie dans [S2, p. 82]. Pour $T \in Ho(n - Mon)$, on considère $BT \in Ho_{n+1}$, et sa famille des flèches

$$BT^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(BT, n - Cat),$$

qui est un morphisme dans $Ho_{n+1}$. L'image de $* \in (BT^o)_0$, donne un morphisme dans $Ho_{n+1}$

$$BT \simeq \mathbb{L}BT \longrightarrow n - Cat,$$

dont l'image du point $* \in (BT)_0$ dans $Ho_n$ est isomorphe à $T_1$. Ainsi, par adjonction entre $B$ et $\Omega$ (2.11), on en déduit un morphisme bien défini dans $Ho(n - Mon)$

$$A_T : T \longrightarrow \mathbb{R}\Omega_*(n - Cat) \simeq \mathbb{R}\underline{End}(T_1).$$

Par naturalité de la famille des flèches et de la construction $B$, ce morphisme est bien fonctoriel. $\Box$

Soit $T : \Gamma_+ \longrightarrow n-PrCat$ une $n$-catégorie monoidale. En appliquant le foncteur $Ho$ objets par objets, on trouve un foncteur

$$Ho(T) : \Gamma_+ \longrightarrow Cat.$$

De plus, comme $Ho$ présèrve les produits et les équivalences de $n$-catégories, les morphisme naturels

$$Ho(T)_m \longrightarrow Ho(T)_1^m$$

sont des équivalences de catégories. Ainsi, la catégorie $Ho(T_1) = Ho(T)_1$ se trouve munie d'une structure de catégorie monoidale (voir par exemple [Le, 3.3]).

Par la suite, si $T \in Ho(n-PrMon)$, on écrira $Ho(T) := Ho(T')$, où $T \longrightarrow T'$ est un remplacement fibrant. Ainsi, $Ho(T)$ est une catégorie monoidale bien définie à équivalence monoidale près, que nous appellerons la catégorie homotopique de $T$.

*Remarques:*

- En utilisant le foncteur d'induction $\Pi_1 : n-PrCat \longrightarrow (n+1)-PrCat$ (voir A), on définit un foncteur

  $$\Pi_1 : n-PrMon \longrightarrow (n+1)-PrMon$$

  par la formule $\Pi_1(T)([m]) := \Pi_1(T_m)$. A travers le foncteur $\Pi_1 : n-PrCat \longrightarrow (n+1)-PrCat$, on peut aussi voir $n-PrMon$ comme enrichie dans $(n+1)-PrCat$. De plus, l'adjoint à gauche de $\Pi_1$ devient alors en foncteur de catégories en modules sur $(n+1)-PrCat$, et donc $\Pi_1$ induit un morphisme de catégories enrichies dans $Ho_{n+1}$ (voir A)

  $$\Pi_1(n-Mon) \longrightarrow (n+1)-Mon$$

  Comme pour le cas des $n$-catégories on montre que ce morphisme est pleinement fidèle. Ainsi, il n'y a aucun danger à considérer qu'un objet $T \in n-Mon$ définit aussi un objet de $(n+1)-Mon$, que nous noterons encore $T$.

  Nous utiliserons donc le principe suivant, qui consiste à voir tout $n$-précatégorie prémonoidale fibrante comme une $m$-précatégorie prémonoidale $\forall m \leq n$. En composant tout d'abord avec un modèle fibrant, on pourra aussi voir toute $n$-précatégorie prémonoidale comme une $m$-précatégorie prémonoidale $\forall m \leq n$.

- A travers le lemme 2.11 on peut voir que la théorie des $n$-catégories monoidales est essentiellement équivalente à celle des $(n+1)$-catégories pointées. Cependant ce principe ne possède pas d'analogue immédiat pour le cas symétrique, et c'est pour cela que nous ne l'avons pas suivit.

## 2.2 $n$-Catégories monoidales symétriques

Nous allons considérer maintenant le cas symétrique, qui est sensiblement comparable au cas précédent.

**Définition 2.16**
- *On note $n-PrMon_s$ la catégorie des préfaisceaux $T$ sur $\Gamma^o$ à valeurs dans $n-PrCat$, et tels que $T(*) = *$.*

  *Les objets de $n-PrMon_s$ seront appelés les $n$-précatégories prémonoidales symétriques.*

  *Nous noterons, pour tout objet $T$ dans $n-PrMon_s$, $T_m$ pour $T([m])$.*

- *Un objet $T \in n-PrMon_s$ sera appelé une $n$-précatégorie monoidale symétrique, si pour tout $m$ le morphisme*

  $$\prod_{i=1}^{i=m} p_i : T_m \longrightarrow T_1^m$$

*est une équivalence dans $n - PrCat$.*

*Si de plus pour tout $m$, $T_m$ est une $n$-catégorie, on dira que $T$ est une $n$-catégorie monoidale symétrique.*

- *La $n$-précatégorie $T_1$ sera appelée la $n$-précatégorie sous-jacente à $T$.*

Remarquons que le foncteur naturel $j : \Gamma_+ \longrightarrow \Gamma$ (qui oublit l'ordre) induit un foncteur d'oubli de la structure symétrique

$$j_* : n - PrMon_s \longrightarrow n - PrMon.$$

Il possède un adjoint à gauche

$$j^* : n - PrMon \longrightarrow n - PrMon_s$$

qui est le foncteur de symétrisation.

Tout comme pour le cas non symétrique $n - PrMon_s$ est naturellement munie d'une structure de cmf enrichie dans $*/n - PrCat$, que nous appellerons la structure forte. Pour cette structure les équivalences (resp. fibrations) sont les morphismes $f : T \longrightarrow T'$ tels que $f_m :\longrightarrow T'_m$ soit une équivalence (resp. une fibration). C'est donc la structure de type $HBQK$ de [S-H, 5], pour les $n$-préchamps pointés sur $\Gamma^o - *$. Les $Hom$ à valeurs dans $*/n - PrCat$ seront alors notés $Hom^{\otimes,s}$, et les produits externes $A \Box T$ (pour $A \in */n - PrCat$ et $T \in n - PrMon$).

On notera de même $\mathbb{R}_f Hom^{\otimes,s}$ les $Hom$ dérivés à valeurs dans $Ho(*/n - PrCat)$ pour la structure forte.

**Définition 2.17** *Un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ sera appelé une $S$-équivalence, si pour toute $n$-catégorie monoidale symétrique $U$, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}_f Hom^{\otimes,s}(T', U) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom^{\otimes,s}(T, U)$$

*est un isomorphisme dans $Ho(*/n - PrCat)$.*

*La cmf des $n$-précatégories prémonoidales symétriques est la localisée de Bousfield à gauche de la structure forte sur $n - PrMon_s$ le long des $S$-équivalences ([Hi, 4.1.2]).*

A partir de maintenant, les termes fibrations, cofibrations et équivalences feront toujours référence à la structure précédente.

Les quatres résultats suivants se démontrent exactement de la même façon que dans le cas non symétrique, et nous les laissons en exercice.

**Lemme 2.18**
1. *Un objet $U \in n - PrMon_s$ est $S$-local, si et seulement si c'est une $n$-précatégorie monoidale symétrique.*
2. *Si $T \longrightarrow T'$ est une équivalence dans $n - PrMon_s$ et $A \in */n - PrCat$, alors*

   $$A \Box T \longrightarrow A \Box T'$$

   *est encore une équivalence.*
3. *Un morphisme de $n - PrMon_s$ est une équivalence si et seulement si c'est une $S$-équivalence.*

*Preuve:* De même que 2.5. $\Box$

**Corollaire 2.19** *Notons* $[-,-]_f$ *l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique de* $n-PrMon$ *pour les équivalences fortes. Alors un morphisme* $f : T \longrightarrow T'$ *est une équivalence si et seulement si pour toute* $n$*-catégorie monoidale symétrique* $U$*, le morphisme*

$$f^* : [T', U]_f \longrightarrow [T, U]_f$$

*est bijectif.*

*Preuve:* De même que 2.6. □

**Théorème 2.20** *La structure de* $*/n-PrCat$*-module sur* $n-PrMon_s$ *en fait une cmf enrichie dans* $*/n-PrCat$*.*

*Preuve:* De même que 2.7. □

**Lemme 2.21** *Les objets fibrants de* $n-PrMon_s$ *sont exactement les* $n$*-catégories monoidales symétriques* $T$ *telles que* $T_m$ *soit fibrant pour tout* $m$*.*

*Preuve:* De même que 2.9. □

**Corollaire 2.22** *Le foncteur* $j_* : n-PrMon_s \longrightarrow n-PrMon$ *est de Quillen à droite.*
*De plus, son adjoint à gauche préserve la structure de* $*/n-PrCat$*-modules.*

*Preuve:* Pour cela on remarque tout d'abord que $(j_*, j^*)$ est une paire de Quillen pour la structure forte (car les fibrations fortes et les équivalences fortes sont définies niveau par niveau). En utilisant [Hi, 3.4.19], il nous suffit de montrer que le foncteur dérivé

$$\mathbb{L}j^* : n-PrMon \longrightarrow n-PrMon_s$$

envoie les $B$-équivalences sur des $S$-équivalences. Par adjonction et le lemme 2.5 il suffit de vérifier que $j_*$ envoie une $n$-précatégorie monoidale symétrique sur une $n$-précatégorie monoidale. Ce qui est évident vue les défitions.

La seconde assertion se démontre comme celle de 2.8, en utilisant l'expression de l'adjoint

$$j^*(T)([m]) := Colim_{j([p])\to[m]}T([p])$$

où la limite est prise sur la catégorie $\Gamma_+/[m]$, des objets de $\Gamma_+$ au-dessus de $[m]$. □

La dernière assertion du corollaire précédent implique que pour $T$ et $T'$ dans $n-PrMon_s$ il existe des morphismes fonctoriels dans $*/n-PrCat$

$$Hom^{\otimes,s}(T,T') \longrightarrow Hom^{\otimes}(j_*T, j_*T').$$

**Corollaire 2.23** *Le foncteur* $n-PrMon_s \longrightarrow */n-PrCat$*, qui à* $T$ *associe* $T_1$ *est de Quillen à droite.*

*Preuve:* On compose 2.22 avec 2.8. □

**Définition 2.24** *1. La catégorie des objets fibrants et cofibrants de* $n-PrMon_s$ *sera notée* $n-Mon_s$*.*

*A l'aide des Hom à valeurs dans* $n-PrCat$*, nous verrons* $n-Mon_s$ *comme une* $(n+1)$*-catégorie. Cette* $(n+1)$*-catégorie sera appelée la* $(n+1)$*-catégorie des* $n$*-catégories monoidales symétriques.*

2. *Pour $U$ et $T$ dans $Ho(n-PrMon_s)$, nous noterons*

$$\mathbb{R}Hom^{\otimes,s}(U,T) := Hom^{\otimes,s}(U',T') \in Ho_n,$$

*où l'on aura choisit préalablement un remplacement cofibrant $U' \longrightarrow U$, ainsi qu'un remplacememt cofibrant $T \longrightarrow T'$ dans $n-PrMon_s$.*

**Proposition 2.25** • *Le morphisme $n-Mon_s \longrightarrow n-Cat$ est conservatif.*

• *Pour toute paire d'objets $T, T' \in n-Mon_s$, le morphisme induit*

$$Hom^{\otimes,s}(T,T') \longrightarrow \underline{Hom}(T_1,T_1')$$

*est conservatif.*

*Preuve:* De même que 2.13. $\Box$

Signalons que pour tout $n$-catégorie monoidale symétrique $T$ on dispose de sa catégorie homotopique $Ho(T)$, qui est naturellement une catégorie monoidale symétrique au sens usuel. Pour $T \in Ho(n-PrMon_s)$, on définira $Ho(T)$ comme étant $Ho(T')$ où $T \longrightarrow T'$ est un remplacement fibrant dans $n-PrMon_s$.

Nous avons vu que la catégorie $\Gamma$ est monoidale symétrique pour $[m]\otimes[n] := [n+m]$. Il existe aussi une autre structure monoidale symétrique définie au niveau des objets par la formule

$$[m]\wedge[n] := [m.n].$$

Pour la fonctorialité, on procède de la façon suivante.

Soient $u : [n] \rightarrow [p]$ et $v : [m] \rightarrow [q]$ deux morphismes de $\Gamma$. On représente $[n.m]$ par l'ensemble pointé $(\{0,1_1,2_1,\dots,n_1,1_2,\dots,n_2,\dots,1_m,\dots,n_m\},0)$. De même, on pose
$[p.q] = (\{0,1_1,2_1,\dots,p_1,1_2,\dots,p_2,\dots,1_q,\dots,p_q\},0)$. On définit

$$\begin{array}{cccc} uv : & [n.m] & \longrightarrow & [p.q] \\ & l_i & \mapsto & u(l)_{v(i)} \end{array}$$

où par convention on pose $l_0 = 0$ et $0_i = 0$.

La contrainte de commutativité est donnée par $l_i \leftrightarrow i_l$, et celle d'associativité par $(l_i)_j \leftrightarrow l_{(i_j)}$. L'élément unité est bien entendu $[1]$.

**Définition 2.26** *Soit $T$ et $T'$ deux $n$-précatégories prémonoidales symétriques. On définit le "smash produit" de $T$ avec $T'$ par*

$$\begin{array}{cccc} T\wedge T' : & \Gamma & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & Colim_{[p]\wedge[q]\rightarrow[m]} T_p \wedge T_q \end{array}$$

*où la colimite est prise suivant la catégorie des couples $([p],[q]) \in \Gamma^2$ muni de morphisme $[p]\wedge[q] \rightarrow [m]$ (i.e. $\Gamma^2/[m]$ pour le foncteur $\wedge : \Gamma^2 \longrightarrow \Gamma$).*

**Proposition 2.27** *Le foncteur $\wedge : n-PrMon_s \times n-PrMon_s \longrightarrow n-PrMon_s$ fait de $n-PrMon_s$ une catégoie monoidale symétrique fermée.*

*De plus, pour tout objet cofibrant $T \in n-PrMon_s$ le foncteur*

$$\begin{array}{cccc} -\wedge T : & n-PrMon_s & \longrightarrow & n-PrMon_s \\ & U & \mapsto & U\wedge T \end{array}$$

*présèrve les cofibrations et les équivalences entre objets cofibrants.*

*Preuve:* Tout d'abord il est clair que $\wedge$ est associatif et commutatif. Nous déterminerons son élément unité par la suite.

Définissons un foncteur $B : n-PrMon_s \longrightarrow \underline{Hom}(\Gamma, n-PrMon_s)$. Pour cela on pose pour tout $T \in n-PrMon_s$ et $[m] \in \Gamma$

$$\begin{array}{cccc} BT([m]) : & \Gamma & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [p] & \mapsto & T([m.p]) \end{array}$$

On définit alors, pour $T, T' \in n-PrMon_s$

$$\begin{array}{cccc} \underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T') : & \Gamma & \longrightarrow & n-PrCat \\ & [m] & \mapsto & Hom^{\otimes,s}(T, BT'([m])) \end{array}$$

Comme $BT'([0]) = *$, $\underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T')$ est un objet de $n-PrMon_s$.

Il est facile de vérifier que ces $\underline{Hom}^{\otimes,s}$ satisfont à la formule d'adjonction requise

$$Hom^{\otimes,s}(T, \underline{Hom}^{\otimes,s}(T',T'')) \simeq Hom^{\otimes,s}(T \wedge T', T'').$$

Notons $j_1^* : */n-PrCat \longrightarrow n-PrMon_s$ l'adjoint à gauche du foncteur $T \mapsto T_1$. En utilisant cette adjonction et l'isomorphisme $\underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T')_1 \simeq Hom^{\otimes,s}(T,T')$, on vérifie aisement que $j_1^*(1)$ est une unité pour $\wedge$ (où 1 est l'unité de $*/n-PrCat$). Ainsi, $n-PrMon_s$ munie de $\wedge$ est une catégorie monoidale symétrique fermée.

Il nous reste à montrer que $-\wedge T$ préserve les cofibrations et les équivalences d'objets cofibrants lorsque $T$ est cofibrant.

Comme les cofibrations sont aussi les cofibrations fortes on peut appliquer [Hi, 14.7.1] pour trouver un système générateurs pour les cofibrations. Notons $j_m^* : */n-PrCat \longrightarrow n-PrMon_s$ l'adjoint à gauche du foncteur $U \mapsto U_m$. Pour la même raison que 2.8, $j_m^*$ est un foncteur de Quillen à gauche. Alors si on note $J$ un ensemble de morphismes qui engendrent les cofibrations dans $*/n-PrCat$, les cofibrations de $n-PrMon_s$ sont engendrées par l'ensemble $J' := \{j_m^*(J)\}_{m\geq 1}$. Ainsi, comme $-\wedge T$ commute avec les colimites, il nous suffit de montrer qu'il transforme un élément de $J'$ en une cofibration. Or, pour tout $A \in */n-PrCat$ et $m \geq 1$, on a un isomorphisme naturel $j_m^*(A) \wedge T \simeq j_m^*(A \wedge T_m)$. Ainsi, pour toute cofibration $A \longrightarrow B$, le morphisme induit $j_m^*(A) \wedge T \longrightarrow j_m^*(B) \wedge T$ est isomorphe au morphisme $j_m^*(A \wedge T_m) \longrightarrow j_m^*(B \wedge T_m)$. Mais ce dernier morphisme est une cofibration dans $n-PrMon_s$ car $j_m^*$ est de Quillen à gauche.

Montrons enfin que $-\wedge T$ préserve les équivalences d'objets cofibrants. Soit $U \longrightarrow U'$ une telle équivalence dans $n-PrMon_s$, et $T'$ un objet fibrant de $n-PrMon_s$. Par adjonction on a

$$Hom^{\otimes,s}(U \wedge T, T') \simeq Hom^{\otimes,s}(U, \underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T'))$$

$$Hom^{\otimes,s}(U' \wedge T, T') \simeq Hom^{\otimes,s}(U', \underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T')).$$

Or, comme $T'$ est fibrant, on peut vérifier (à l'aide 2.21) que $BT'([m])$ est aussi fibrant pour tout $m$. Comme $T$ est cofibrant, ceci implique par définition que $\underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T')$ est encore fibrant dans $n-PrMon_s$. Ainsi, comme $U \longrightarrow U'$ est une cofibration triviale le morphisme induit

$$Hom^{\otimes,s}(U', \underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T')) \longrightarrow Hom^{\otimes,s}(U, \underline{Hom}^{\otimes,s}(T,T'))$$

est une équivalence dans $*/n-PrCat$. Il en est donc de même de

$$Hom^{\otimes,s}(U' \wedge T, T') \longrightarrow Hom^{\otimes,s}(U \wedge T, T').$$

Comme ceci est valable pour tout $T'$ fibrant dans $n-PrMon_s$, et que $U' \wedge T$ et $U \wedge T$ sont cofibrants, ceci implique que $U \wedge T \longrightarrow U' \wedge T$ est une équivalence dans $n-PrCat$. $\square$

**Proposition 2.28** *Pour tout $U \in n-PrMon_s$ cofibrant, le foncteur*

$$\begin{array}{rccc} \underline{Hom}^{\otimes,s}(U,-): & n-PrMon_s & \longrightarrow & n-PrMon_s \\ & T & \mapsto & \underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) \end{array}$$

*présèrve les objets fibrants ainsi que les équivalences entre objets fibrants.*

*De même, si $T \in n-PrMon_s$ est un objet fibrant, le foncteur*

$$\begin{array}{rccc} \underline{Hom}^{\otimes,s}(-,T): & n-PrMon_s & \longrightarrow & n-PrMon_s \\ & U & \mapsto & \underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) \end{array}$$

*transforme les objets cofibrants en des objets fibrants, et les équivalences entre objets cofibrants en équivalences d'objets fibrants.*

*Preuve:* C'est immédiat à partir de la définition de $\underline{Hom}^{\otimes,s}$, de la caractérisation des objets fibrants (2.21), et du fait que $n-PrMon_s$ est une cmf enrichie dans $*/n-PrCat$. $\Box$

La proposition 2.28 permet en particulier de montrer que pour tout $U,T \in n-PrMon_s$, avec $U$ cofibrant et $T$ fibrant, l'objet $\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) \in Ho(n-PrMon_s)$ ne dépend à isomorphisme près que de la classe d'isomorphie de $U$ et $T$ dans $Ho(n-PrMon_s)$. Ceci justifie la définition suivante.

**Définition 2.29**

- *Pour $U$ et $T$ dans $Ho(n-PrMon_s)$, nous noterons*

  $$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) := \underline{Hom}^{\otimes,s}(U',T') \in Ho(n-PrMon_s),$$

  *où l'on aura choisit préalablement un remplacement cofibrant $U' \longrightarrow U$, ainsi qu'un remplacememt fibrant $T \longrightarrow T'$ dans $n-PrMon_s$.*

- *Soit $j^* : n-PrMon \longrightarrow n-PrMon_s$ l'adjoint à gauche de $j_*$ (voir 2.22). Pour tout $T \in Ho(n-PrMon_s)$ et $U \in Ho(n-PrMon)$, on notera*

  $$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(\mathbb{L}j^*U,T) \in Ho(n-PrMon_s).$$

**Lemme 2.30** *Soit $U$, $T$ et $V$ trois objets de $n-PrMon_s$. Alors il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(n-PrMon_s)$*

$$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(V,T)) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(V,\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T)).$$

*Preuve:* Cela vient immédiatement de la formule d'adjonction entre $\wedge$ et $\underline{Hom}^{\otimes,s}$, ainsi que des propositions 2.28 et 2.27. $\Box$

En utilisant 2.28 et 2.27, on peut munir la catégorie $Ho(n-PrMon_s)$ d'une structure de catégorie monoidale symétrique fermée. Plus généralement, citons sans démonstrations le résultat suivant (qui est plus déclicat à démontrer). Nous ne l'utiliserons pas par la suite.

**Théorème 2.31** *La cmf $n-PrMon_s$ munie de $\wedge$ est une cmf monoidale symétrique.*

*Quelques remarques finales:*

- Par le même procédé que pour le cas non symétrique, on verra toute $n$-précatégorie prémonoidale symétrique comme une $m$-précatégorie prémonoidale symétrique $\forall m \geq n$.
- La théorie précédente a pour point de départ les structures fortes de cmf sur les catégories $n-PrMon$ et $n-PrMon_s$. Or d'après [S-H] il existe au moins deux telles structures de cmf, qui sont naturellement équivalentes. Celle que nous avons considéré est appelée la structure $HBQK$ dans [S-H, 5]. Il est tout à fait possible de réecrire les définitions et les résultats

précédents à l'aide de la seconde structure. L'avantage de celle-ci est que tous les objets deviennent alors cofibrants, ce qui peut simplifier certains arguments par la suite. D'un autre coté, il devient alors très difficile d'avoir des descriptions des objets fibrants, ce qui peut poser à son tour de nouveaux problèmes. Enfin, la catégorie $n-PrMon_s$ ne peut plus être une cmf monoidale pour le smash produit.

On voit donc que les deux structures possibles ont leurs avantages et leurs inconvénients. Il est évident que de pouvoir passer d'une structure à l'autre suivant les situations devient alors un outils très puissant. Quoiqu'il en soit nous resterons avec la structure que nous avons défini précédemment (tout au moins pour cette première partie).

- Pour les lecteurs désireux d'aller plus loin dans l'étude des $n$-catégories monoidales symétriques, citons ici l'existence d'un théorie du délaçage analogue au cas topologique ([S]). Il s'agit en réalité d'un analogue de la comparaison entre $n$-catégories monoidales et $(n+1)$-catégories pointées adapté au cas symétrique.

Pour cela on commence par définir un foncteur classifiant $\underline{B} : n-PrMon_s \longrightarrow (n+1)-PrMon_s$, de façon tout à fait standard, et qui est compatible avec le foncteur $B : n-PrMon \longrightarrow */(n+1)-PrCat$ de 2.10. Par construction, ce foncteur vérifie $T = \Omega_*(\underline{B}(T)_1)$. Ainsi, en posant

$$B^{\infty}(T)_q := \underline{B}^q(T)_1 \in */(n+q)-PrCat,$$

on obtient une $n$-catégorie en spectres $B^{\infty}(T)$. C'est à dire la donnée d'objets $U_q \in */(n+q)-PrCat$, munis de morphismes dans $*/(n+q)-PrCat$, $e_q : U_q \longrightarrow \Omega_*(U_{q+1})_1$.

Notons $n-PrSp$ la catégorie des $n$-catégories en spectres définie comme précédemment. Elle est naturellement munie d'une structure de cmf enrichie dans $*/n-PrCat$, qui est la structure niveaux par niveaux. Nous l'appellerons la structure forte. Les fibrations (resp. les équivalences) sont alors les $f : U \longrightarrow U'$ tel que chaque $f_q : U_q \longrightarrow U'_q$ est une fibration (resp. une équivalence). On dira qu'un objet $U \in n-PrSp$ est une $n$-catégorie en spectres si tous les $U_q$ sont des $(n+q)$-catégories, et les morphismes $e_q : U_q \longrightarrow \Omega_*(U_{q+1})_1$ sont des équivalences. On définit alors une notion de $S$-équivalence, tout à fait similaire à 2.17 mais relativement aux $n$-catégories en spectres. La cmf $n-PrSp$ est alors par définition la localisée de Bousfield à gauche le long des $S$-équivalences.

On peut alors montrer que $n-PrSp$ est une cmf enrichie dans $*/n-PrCat$, et que le foncteur

$$B^{\infty} : n-PrMon_s \longrightarrow n-PrSp$$

est de Quillen à gauche. En fait c'est même une équivalence de Quillen. Ici, la principale différence avec le cas topologique est qu'en travaillant avec des $n$-catégories plutôt qu'avec leurs réalisations géométriques, on évite les phénomènes de "group completions".

Il serait un travail intéressant à mon avis de reconsidérer les constructions des spectres de $K$-théorie de Waldhausen ([Wa]) à l'aide de cette théorie du délaçage.

## 2.3 Champs en $n$-catégories monoidales

Les définitions et résultats des paragraphes précédents possèdent des généralisations en famille. Les preuves étant rigoureusement similaires nous les omettrons.

Soit $C$ un site de Grothendieck, possédant un objet final ainsi que des produits fibrés. On dispose alors de la cmf des $n$-préchamps sur $C$, $n-PrCh(C)$ (par convention il s'agit de la structure $HBQK$ de [S-H, 5]). Etant une localisée de Bousfield à gauche de la cmf $n-PrCat^{C^o}$ ([S-H, Prop. 6.1]), c'est une cmf monoidale symétrique (pour le produit direct), propre à gauche et cellulaire. Ainsi, $*/n-PrCh(C)$ est encore une cmf monoidale symétrique, propre à gauche et cellulaire.

On applique alors le lemme 2.3 à $M = */n-PrCh(C)$, et $I = \Gamma_+ - *$ (resp. $\Gamma - *$). Ainsi, en notant $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) la catégorie des préfaisceaux sur $\Gamma_+ - *^o$ (resp. $\Gamma - *^o$) à valeurs dans $*/n-PrCh(C)$, on trouve que $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) est une cmf enrichie dans $*/n-PrCh(C)$, propre à gauche et cellulaire. Remarquons que $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) s'identifie naturellement à la catégorie des foncteurs $T : \Gamma_+ \longrightarrow n-PrCh(C)$ (resp. $T : \Gamma \longrightarrow n-PrCh(C)$) tels que $T(*) = *$. Les objets de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) seront évidemment appelés les $n$-préchamps prémonoidaux (resp. $n$-préchamps prémonoidaux symétriques). Les $Hom$ de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) à valeurs dans $*/n-PrCh(C)$ seront notés $Hom_C^{\otimes}$ (resp. $Hom_C^{\otimes,s}$).

Rappelons que la structure de cmf sur $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) ainsi obtenue est la structure forte. Un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ dans $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) est donc une équivalence forte (resp. une fibration forte) si et seulement si pour tout $[m] \in \Gamma_+$ (resp. $[m] \in \Gamma$), le morphisme induit $f_m : T_m \longrightarrow T'_m$ est une équivalence (resp. une fibration) dans $*/n-PrCh(C)$.

Tout comme pour les $n$-précatégories prèmonoidales on définit la notion de $n$-préchamp monoidal (resp. $n$-préchamp monoidal symétrique). Il s'agit des objets $T \in n-PrMon(C)$ (resp. $T \in n-PrMon_s(C)$) tels que les morphismes naturels $T_m \longrightarrow T_1^m$ soient des équivalences dans $n-PrCh(C)$.

**Définition 2.32** *Notons $\mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes}$ (resp. $\mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes}$) les $Hom$ dérivés pour la structure forte sur $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_c(C)$) à valeurs dans $Ho(*/n-PrCh(C))$.*

*On dira qu'un morphisme de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) $f : T \longrightarrow T'$ est une $B$-équivalence (resp. une $S$-équivalence) si pour tout $n$-préchamp monoidal (resp. $n$-préchamp monoidal symétrique) $E$, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes}(T', E) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes}(T, E) \qquad \big(resp.\ f^* : \mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes,s}(T', E) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom_C^{\otimes,s}(T, E)\big)$$

*est un isomorphisme dans $Ho(*/n-PrCh(C))$.*

Comme les cmf $n-PrMon(C)$ et $n-PrMon_s(C)$ sont propres à gauche et cellulaires on peut appliquer [Hi, 4.1.2] pour donner un sens à la définition suivante.

**Définition 2.33** *La cmf des $n$-préchamps prémonoidaux (resp. $n$-préchamps prémonoidaux symétriques) est la localisée de Bousfield à gauche de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) le long des $B$-équivalences (resp. $S$-équivalences).*

*Un objet de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) sera appelé un $n$-champ monoidal (resp. monoidal symétrique), si pour c'est un $n$-préchamp monoidal (resp. monoidal symétrique) et si pour tout $m$, $T_m \in n-PrCat(C)$ est un champ ([S-H, 9]).*

Nous laissons en exercice les preuves des faits suivants.

**Théorème 2.34** *Les cmf $n-PrMon(C)$ et $n-PrMon_s(C)$ sont des cmf enrichies dans $*/n-PrCh(C)$.*

**Lemme 2.35** *Les objets fibrants de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) sont exactement les $n$-préchamps monoidaux (resp. $n$-préchamp monoidaux symétriques) $T$ telles que $T_m \in */n-PrCh(C)$ soit fibrant pour tout $m$. En particulier se sont des $n$-champs monoidaux.*

**Lemme 2.36** *Le foncteur naturel $j_* : n-PrMon_s(C) \longrightarrow n-PrMon(C)$ est de Quillen à droite. De plus, son adjoint à gauche présèrve la structure de $*/n-PrCh(C)$-modules.*

*De même, les foncteurs $n-PrMon(C) \longrightarrow */n-PrCh(C)$ et $n-PrMon_s(C) \longrightarrow */n-PrCh(C)$ qui à $T$ associe $T_1$ sont de Quillen à droite. Leur adjoint $j_1^*$ présèrvent aussi la structure de $*/n-PrCh(C)$-modules.*

Comme la catégorie $C$ possède un objet final, le foncteur des sections globales $\Gamma(C,-) : */n-PrCh(C) \longrightarrow */n-PrCat$ est de Quillen à droite. Ainsi, les catégories $n-PrMon(C)$ et $n-PrMon_s(C)$ sont aussi munies d'une structure de cmf enrichie dans $*/n-PrCat$. Les $Hom$ à valeurs dans $*/n-PrCat$ seront alors notés

$$Hom^{\otimes} := \Gamma(C, Hom_C^{\otimes}) \qquad Hom^{\otimes,s} := \Gamma(C, Hom_C^{\otimes,s}).$$

Enfin, la catégorie $n-PrMon_s(C)$ possède aussi des $Hom$ internes et un smash produit, définit par le même procédé que pour $n-PrMon_s$. On notera ces $Hom$ internes par $\underline{Hom}_C^{\otimes,s}$. Comme ci-dessus, on pose alors

$$\underline{Hom}^{\otimes,s} := \Gamma(C, \underline{Hom}_C^{\otimes,s}).$$

**Définition 2.37** *1. La catégorie des objets fibrants et cofibrants de $n-PrMon(C)$ (resp. $n-PrMon_s(C)$) sera notée $n-Mon(C)$ (resp. $n-Mon_s(C)$).*

*A l'aide des Hom à valeurs dans $n-PrCat$, nous verrons $n-Mon(C)$ et $n-Mon_s(C)$ comme des $(n+1)$-catégories. Ces $(n+1)$-catégories seront appelées les $(n+1)$-catégorie des $n$-champs monoidaux et monoidaux symétriques.*

*2. Pour $U$ et $T$ dans $Ho(n-PrMon(C))$ (resp. $Ho(n-PrMon_s(C))$), nous noterons*

$$\mathbb{R}Hom_C^{\otimes}(U,T) := Hom_C^{\otimes}(U',T') \in Ho(n-PrCat(C)) \qquad \mathbb{R}Hom_C^{\otimes,s}(U,T) := Hom_C^{\otimes,s}(U',T') \in Ho(n-PrCat(C))$$

*où l'on aura choisit préalablement un remplacement cofibrant $U' \longrightarrow U$, ainsi qu'un remplacememt cofibrant $T \longrightarrow T'$ dans $n-PrMon(C)$ (resp. dans $n-PrMon_s(C)$).*

*De même, on pose*

$$\mathbb{R}Hom^{\otimes}(U,T) := \mathbb{R}\Gamma(C, \mathbb{R}Hom_C^{\otimes}(U',T')) \in Ho_n \qquad \mathbb{R}Hom^{\otimes,s}(U,T) := \mathbb{R}\Gamma(C, \mathbb{R}Hom_C^{\otimes,s}(U',T')) \in Ho_n$$

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_C^{\otimes,s}(U,T) := \mathbb{R}\Gamma(C, \mathbb{R}\underline{Hom}_C^{\otimes,s}(U',T')) \in Ho(n-PrMon_s(C))$$

$$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U,T) := \mathbb{R}\Gamma(C, \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(U',T')) \in Ho(n-PrMon_s)$$

*3. Si $F \in Ho(n-PrCat(C))$ est un $n$-champ, et $T \in Ho(n-PrMon_s(C))$ est un $n$-champs monoidal, on pose*

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_C^{\otimes,s}(F,T) := \mathbb{R}\underline{Hom}_C^{\otimes,s}(\mathbb{L}\mathcal{M}(F),T) \in Ho(n-PrMon_s(C)),$$

*où $\mathcal{M} : n-PrCat(C) \longrightarrow n-PrMon_s(C)$ est l'adjoint à gauche de $T \mapsto T_1$.*

*De même, on pose*

$$\mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(F,T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(\mathbb{L}\mathcal{M}(F),T) \in Ho(n-PrMon_s).$$

## 2.4 Comparaison avec la théorie usuelle

Voici en quelques mots comment intégrer la théorie usuelle des catégories monoidales dans celle des $n$-catégories monoidales. Nous nous contenterons de ne traiter que le cas non-symétrique dont la généralisation au cas symétrique est immédiate.

Notons $PrCat$ la cmf des précatégories (i.e. des 1-précatégories dans la terminologie de [S5]). Rappelons que ces objets sont les foncteurs $A : \Delta^o \longrightarrow Ens$ (i.e. les emsembles simpliciaux). Les cofibrations dans $PrCat$ sont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ tels que $f_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ soit injectif. Quand aux équivalences ce sont les morphismes induisant des équivalences sur les catégories engendrées ([S5, 3]). De plus, les objets fibrants dans $PrCat$ sont exactement les catégories (i.e. les objets $A : \Delta^0 \longrightarrow Ens$ tels que les morphismes de Segal $A_m \longrightarrow A_1 \times_{A_0} \times \cdots \times_{A_0} A_1$ soient bijectifs). Rappelons aussi que $PrCat$ est une cmf monoidale symétrique pour le produit direct ([S5, 11]).

On dispose d'un foncteur pleinement fidèle naturel

$$\psi : PrCat \longrightarrow 1 - PrCat$$

qui est obtenu par composition avec le foncteur $Ens \longrightarrow SEns$, qui envoie un ensemble sur l'ensemble simplicial constant. Ce foncteur est de Quillen à droite, d'ajoint à gauche $\tau_{\leq 1}$ ([S-H, 2]).

Notons $PrMon$ la catégorie des foncteurs $T : \Gamma_+ \longrightarrow PrCat$, tels que $T(*) = *$. Cette catégorie est munie d'une structure de cmf enrichie dans $PrCat$ exactement par le même procédé que pour $1 - PrMon$. De plus, le foncteur de Quillen $\psi$ s'étend en un nouveau foncteur de Quillen à droite (obtenu par composition)

$$\psi : PrMon \longrightarrow 1 - PrMon.$$

Comme $PrMon$ est enrichie dans $PrCat$ et que $\psi$ est de Quillen à droite, elle est aussi naturellement enrichie dans $1 - PrCat$. On peut donc formé la 2-catégorie $Mon$ des objets fibrants et cofibrants de $PrMon$. Le foncteur $\psi$ induit alors un morphisme de 2-catégories (voir A)

$$\psi : Mon \longrightarrow 1 - Mon,$$

dont il est facile de montrer qu'il est pleinement fidèle.

Maintenant, tout catégorie monoidale définit un objet de $PrMon$ (voir [Le, 3.3] par exemple). De plus, d'après l'analogue de 2.9 pour $PrMon$ un tel objet est toujours fibrant. Ainsi, pour deux catégories monoidales $N$ et $M$, on a

$$\mathbb{R}Hom^{\otimes}(N, M) \simeq Hom^{\otimes}(Q(N), M),$$

où $Q(N) \longrightarrow N$ est un remplacement cofibrant de $N$ dans $PrMon$. En choisissant un inverse à chaque foncteur $Q(N)_m \longrightarrow N_m$, on peut trouver un pseudo-foncteur (i.e. foncteur à isomorphisme naturel près) $N \longrightarrow Q(N)$ qui est inverse de $Q(N) \longrightarrow N$. Ceci implique que la catégorie des pseudo-foncteurs de $N$ vers $M$ est équivalente à celle des pseudo-foncteurs de $Q(N)$ vers $M$. Or, comme $Q(N)$ est cofibrant et $M$ fibrant il est facile de voir que la catégorie des pseudo-foncteurs de $Q(N)$ vers $M$ est en fait équivalente à $Hom^{\otimes}(Q(N), M)$. Ceci montre que $\mathbb{R}Hom^{\otimes}(N, M)$ est équivalente à la catégorie des pseudo-foncteurs entre $N$ et $M$. C'est un exercice facile de montrer que cette dernière catégorie est équivalente à la catégorie des foncteurs monoidaux entre $N$ et $M$.

La conclusion de cette discussion est que toute catégorie monoidale $M$ défini un objet $M \in PrMon$, et donc à travers le morphisme $\psi$ un objet $\psi(M) \in 1 - Mon$. De plus, si $N$ et $M$ sont deux catégories monoidales il existe une équivalence naturelle de catégories

$$\psi(Hom^{\otimes}(N,M)) \simeq \mathbb{R}Hom^{\otimes}(\psi(N),\psi(M)).$$

Ceci montrer que la théorie usuelle des catégories monoidales se plongent dans celle des 1-catégories monoidales. Ceci justifie que par la suite on considére toute catégorie monoidale $M$ comme un objet de $1-PrMon$ (et donc un objet de $n-PrMon$ par induction). Comme il y a conservation des catégories de morphismes il n'y a aucun danger à noter cet objet encore $M$.

# 3 Structures algébriques dans les $n$-catégories monoidales

## 3.1 Algébres et coalgébres

**Définition 3.1** *Soit $T \in Ho(n-Mon_s)$.*

- *Les $n$-catégories monoidales symétriques des algèbres, algèbres commutatives, coalgèbres, et coalgèbres cocommutatives, sont respectivement définies par*

$$Alg(T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes}(FS_+, T) \in Ho(n-Mon_s) \qquad Alg_c(T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(FS, T) \in Ho(n-Mon_s)$$

$$Coalg(T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes}(FS_+^o, T) \in Ho(n-Mon_s) \qquad Coalg^c(T) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(FS^o, T) \in Ho(n-Mon_s)$$

- *Les $n$-catégories des bialgèbres, bialgèbres commutatives, bialgèbres cocommutatives, et bialgebres commutatives et cocommutatives, sont respectivement définies par*

$$Bialg(T) := Alg(Coalg(T)) \qquad Bialg_c(T) := Alg_c(Coalg(T))$$

$$Bialg^c(T) := Alg(Coalg^c(T)) \qquad Bialg_c^c(T) := Alg_c(Coalg^c(T)).$$

*Remarques:* A l'aide de la propriété de symétrie de $\underline{Hom}^{\otimes,s}$ (2.30), on aurait aussi put définir les catégories de bialgèbres comme des catégories de coalgèbres dans des catégories d'algèbres.

Lorsque $T \in Ho(n-Mon)$ n'est plus symétrique, on dispose toujours de

$$Alg(T) := \mathbb{R}Hom^{\otimes}(FS_+, T) \in Ho_n$$

$$Coalg(T) := \mathbb{R}Hom^{\otimes}(FS_+^o, T) \in Ho_n$$

$$Bialg(T) := Alg(Coalg(T))$$

Pour $A : FS_+ \longrightarrow T$ une algèbre dans une $n$-catégorie monoidale $T$, on définit l'objet sous-jacent à $A$ comme étant $A_1 := A_1([1]) \in Ho(T_1)$, où $A_1 : FS_+ \longrightarrow T_1$ est le morphisme obtenu sur les $n$-catégories sous-jacentes.

De même, pour une coalgèbre $B \in Ho(Coalg(T))$, on notera $B_1 := B_1([1]) \in Ho(T_1)$ son objet sous-jacent. Enfin, si $A \in Ho(Bialg(T))$, on notera $A_{1,1}$ l'objet sous-jacent à $A_1 \in Ho(Coalg(T))$.

Plus généralement, on peut définir des morphismes dans $Ho_1$

$$Alg(T) \longrightarrow T_1 \qquad Coalg(T) \longrightarrow T_1$$

qui associent à toute algèbre ou coalgèbre leur objet sous-jacent. Ces morphismes possèdent l'importante propriété suivante.

**Lemme 3.2** *Les morphismes précédents*

$$Alg(T) \longrightarrow T_1 \qquad Coalg(T) \longrightarrow T_1$$

*sont conservatifs.*

*Preuve:* En utilisant 2.25 et la remarque qui suit A.4 on remarque tout d'abord que pour tout $U, T \in Ho(n-Mon)$, le morphisme naturel

$$\mathbb{R}Hom^{\otimes}(U, T) \longrightarrow Hom^{\otimes}(Ho(U), Ho(T))$$

est conservatif. Appliqué à $T = FS_+$ ou $FS_+^o$ on trouve que les morphismes

$$Alg(T) \longrightarrow Alg(Ho(T)) \qquad Coalg(T) \longrightarrow Coalg(Ho(T))$$

sont conservatifs. Enfin, il est clair que les foncteurs $Alg(Ho(T)) \longrightarrow Ho(T_1)$ et $Coalg(Ho(T)) \longrightarrow Ho(T_1)$ sont conservatifs, et donc les morphismes

$$Alg(T) \longrightarrow Ho(T_1) \qquad Coalg(T) \longrightarrow Ho(T_1)$$

aussi. $\Box$

**Définition 3.3** *Soit $A \in Ho_n$, et $T := \mathbb{R}\underline{End}(A) \in Ho(n{-}Mon)$. Les $n$-catégories des comonades et des monades de $A$ sont définies respectivement par*

$$Comon(A) := Coalg(T) \in Ho_n$$

$$Mon(A) := Alg(T) \in Ho_n.$$

*Remarques:*

- En se rapportant au paragraphe 2.4, si $M$ est une catégorie monoidale au sens usuel alors les notions d'algèbres, de coalgèbres, de bialgèbres de monades et comonades définies ci-dessus coincident avec les notions usuelles.
- Soit $FS' \longrightarrow FS$ un remplacement cofibrant dans $n - PrMon_s$. Le foncteur

  $$\begin{array}{cccc} \underline{Hom}^{\otimes}(FS',-): & n - PrMon_s & \longrightarrow & n - PrMon_s \\ & T & \mapsto & \underline{Hom}^{\otimes}(FS',-) \end{array}$$

  induit par 2.28 un morphisme dans $Ho_{(n+1)}$

  $$Alg_c : n - Mon_s \longrightarrow n - Mon_s,$$

  qui à une $n$-catégorie monoidale symértique fibrante et cofibrante associe sa $n$-catégorie monoidale symétrique des algèbres commutatives. On dispose de même de

  $$Alg : n - Mon_s \longrightarrow n - Mon_s.$$

## 3.2 Modules et comodules

Passons aux catégories de modules. L'idée est de construire une "famille de $n$-catégories" $\mathcal{M} \longrightarrow Alg(T)$, au-dessus de la $n$-catégorie des algèbres dans un $T \in Ho_n(Mon_s)$ fixé, dont la fibre au-dessus de $A \in Alg(T)$ sera la $n$-catégorie des $A$-modules dans $T$. Plus généralement nous nous fixerons une action $T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{End}(T')$ dans $Ho(n{-}Mon)$, et nous construirons une famille au-dessus de $Alg(T)$, dont la fibre en $A$ sera la $n$-catégorie des $A$-modules dans $T'$. Ce degré de généralité nous sera utile par la suite (pour la démonstration du théorème de Beck par exemple).

Dans les définitions qui suivent nous avons choisi de travailler uniquement avec des structures de modules à gauche. Pour passer aux modules à droite il suffit de remplacer dans les définitions de la catégorie $M\Gamma_+$ "minimal" par "maximal".

**Définition 3.4** *On définit $M\Gamma_+$ comme la sous-catégorie pleine de $[1]/\Gamma_+$ (des objets de $\Gamma_+$ au-dessous de $[1] := (\{0,1\},0)$), formée des objets $u : [1] \longrightarrow (I,i)$ tel que ou bien $u(1) = i$, ou bien $u(1)$ est l'élément minimal de $I - i$.*

On dipose d'un foncteur naturel $\Gamma_+ \longrightarrow M\Gamma_+$, qui envoi $(I,i)$ sur le morphisme constant $[1] \longrightarrow (I,i)$. On dipose aussi de "l'oubli de l'objet [1]" $M\Gamma_+ \longrightarrow \Gamma_+$.

Nous adopterons les notations suivantes. Pour $(I,i) \in \Gamma_+$, nous désignerons le morphisme constant $[1] \longrightarrow (I,i)$ encore par $(I,i)$, et le morphisme non constant par $(I,i)'$.

**Définition 3.5** *La catégorie des $n$-précatégories en prémodules est la catégorie des foncteurs*

$$T : M\Gamma_+ \longrightarrow n - PrCat$$

*tel que $T(*) = *$. Elle sera notée $n - PrMod$.*

Remarquons que le foncteur naturel $\Gamma_+ \longrightarrow M\Gamma_+$ induit un foncteur

$$n - PrMod \longrightarrow n - PrMon.$$

Pour $T \in n - PrMod$, son image dans $n - PrMon$ sera généralement notée $A(T)$, et sera appelée la $n$-précatégorie prémonoidale sous-jacente à $T$.

De même, pour $T \in n - PrMod$, nous noterons $M(T)_m := T([m]') = T((\{0, 1, \ldots, m\}, 0)') \in n - PrCat$. La $n$-précatégorie $M(T)_1$ sera appelée le module sous-jacent à $T$.

Pour $1 < i \leq m$, on dispose des morphismes $q_i : [m]' \longrightarrow [1]$, qui envoient $i$ sur 1, et tout le reste sur 0. Ceci définit pour tout $1 < i \leq m$, des morphismes

$$q_i : M(T)_m \longrightarrow A(T)_1.$$

De même, pour chaque entier $m$, on dipose d'un morphisme $[m]' \longrightarrow [1]'$, qui envoi 1 sur 1, et tout le reste sur 0. Il induit un morphisme

$$p : M(T)_m \longrightarrow M(T)_1.$$

**Définition 3.6** *Une $n$-précatégorie en prémodules $T$ est une $n$-précatégorie en modules, si elle vérifie les deux conditions suivantes.*

- *La $n$-précatégorie prémonoidale sous-jacente $A(T) \in n - PrMon$ est une $n$-précatégorie monoidale.*
- *Pour tout $m \geq 1$, le morphisme naturel*

  $$\prod_i q_i \times p : M(T)_m \longrightarrow A(T)_1^{m-1} \times M(T)_1$$

  *est une équivalence dans $n - PrCat$.*

*Si de plus $A(T)_m$ et $M(T)_m$ sont des $n$-catégories pour tout $m$, alors on dira que $T$ est une $n$-catégorie en modules.*

*Remarque:* Soit $T \in n - PrMod$ une $n$-catégorie en modules. Le "premier étage" de $T$ est un diagramme de $n$-catégories

$$\begin{tikzcd} M(T)_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & A(T)_1 \times M(T)_1 \\ M(T)_1 & \end{tikzcd}$$

où $b$ est une équivalence. Ceci définit donc un morphisme dans $Ho_n$

$$A(T)_1 \times M(T)_1 \longrightarrow M(T)_1$$

qui doit être vue comme le "premier étage" d'une action de $A(T)$ sur $M(T)_1$. Heuristiquement, il faut voir les $n$-catégories en modules comme des morphismes monoidaux $A(T) \longrightarrow \underline{End}(M(T)_1)$.

Il faut donc penser à $M(T)_m$ comme étant $A(T)_1^{m-1} \times M(T)_1$. De plus, si $f : [m]' \longrightarrow [p]'$ est un morphisme dans $M\Gamma_+$, il faut penser au morphisme $M(T)_m \longrightarrow M(T)_p$ comme à un morphisme

$$f : A(T)_1^{m-1} \times M(T)_1 \longrightarrow A(T)_1^{p-1} \times M(T)_1$$

défini par les formules

$$f(\{x_i\},y)_p = (\prod_{i\in f^{-1}(1)} x_i).y \in M(T)_1$$

$$f(\{x_i\},y)_j = \prod_{i\in f^{-1}(j)} x_i \in A(T)_1 \qquad pour\ j > 1.$$

Comme précédemment $n-PrMod$ est naturellement munie d'une structure de cmf enrichie dans $*/n-PrCat$, que nous appellerons la structure forte. Pour cette structure les équivalences (resp. fibrations) sont les morphismes $f : T \longrightarrow T'$ tels que tous les $f_m : M(T)_m \longrightarrow M(T)_m$, ainsi que $f : A(T)_m \longrightarrow A(T')_m$ soient des équivalences (resp. des fibrations). C'est donc la structure de type $HBQK$ de [S-H] pour les $n$-préchamps sur $M\Gamma_+^o$, que nous appellerons la structure forte.

Les $Hom$ à valeurs dans $*/n-PrCat$ seront alors notés $Hom^{mod}$, et les produits externes $-\Box-$. On notera aussi $\mathbb{R}_f Hom^{mod}$ les $Hom$ dérivés à valeurs dans $Ho(*/n-PrCat)$ pour la structure forte.

**Définition 3.7** *Un morphisme de $n-PrMod$, $f : T \longrightarrow T'$, sera appelé une $M$-équivalence, si pour toute $n$-catégorie monoidale en modules $U$, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}_f Hom^{mod}(T',U) \longrightarrow \mathbb{R}_f Hom^{mod}(T,U)$$

*est un isomorphisme dans $Ho(*/n-PrCat)$.*

*La cmf des $n$-précatégories en prémodules est la localisée de Bousfield à gauche de la structure forte sur $n-PrMon_s$ le long des $M$-équivalences ([Hi, 4.1.2]).*

A partir de maintenant, les termes fibrations, cofibrations et équivalences feront toujours référence à la structure précédente.

*Remarque:* Tout comme pour les cmf $n-PrMon$ et $n-PrMon_s$, il existe une autre structure de cmf sur $n-PrMod$, où les cofibrations sont les monomorphismes.

Les quatres résultats suivants se démontrent exactement de la même façon que dans le cas des $n$-catégories monoidales, et nous les laissons en exercice.

**Lemme 3.8** *1. Un objet $U \in n-PrMod$ est $M$-local, si et seulement si c'est une $n$-précatégorie en modules*

*2. Si $T \longrightarrow T'$ est une équivalence dans $n-PrMod$ et $A \in */n-PrCat$, alors*

$$A\Box T \longrightarrow A\Box T'$$

*est encore une équivalence.*

*3. Un morphisme de $n-PrMod$ est une équivalence si et seulement si c'est une $M$-équivalence.*

*Preuve:* De même que 2.5. $\Box$

**Corollaire 3.9** *Notons $[-,-]_f$ l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique de $n-PrMod$ pour les équivalences fortes. Alors un morphisme $f : T \longrightarrow T'$ est une équivalence si et seulement si pour toute $n$-catégorie en modules $U$, le morphisme*

$$f^* : [T',U]_f \longrightarrow [T,U]_f$$

*est bijectif.*

*Preuve:* De même que 2.6. $\square$

**Théorème 3.10** *La structure de $*/n - PrCat$-module sur $n - PrMod$ en fait une cmf enrichie dans $*/n - PrCat$.*

*Preuve:* De même que 2.7. $\square$

**Lemme 3.11** *Un objet fibrant de $n - PrMod$ est une $n$-catégorie en modules.*

*Preuve:* De même que 2.9. $\square$

**Lemme 3.12** *Le foncteur $n - PrMod \longrightarrow n - PrMon$, qui à $T$ associe $A(T)$ est de Quillen à droite.*

*Le foncteur $n - PrMod \longrightarrow n - PrCat$, qui à $T$ associe $M(T)_1$ est de Quillen à droite.*

*Leurs adjoints à gauche sont de plus des foncteurs de catégories en modules sur $n - PrCat$.*

*Preuve:* Ces foncteurs sont clairement de Quillen à droite pour les structures fortes. Ce qui implique déjà que le second est de Quillen à droite.

Par [Hi, 3.4.19], 2.5 et par adjonction il nous suffit alors de vérifier que le premier foncteur envoie une $n$-précatégorie en modules sur une $n$-précatégorie monoidale. Ce qui est vrai par définition.

La dernière assertion est claire. En effet, les adjoints en questions sont les foncteurs "modules vides" et "modules sur $*$". $\square$

Le fait que les adjoints des deux foncteurs du lemme précédent présèrvent les structures de $n - PrCat$-modules, implique que pour tout $T$ et $T'$ dans $n - PrMod$ il existe des morphismes fonctoriels

$$Hom^{mod}(T, T') \longrightarrow Hom^{\otimes}(A(T), A(T'))$$

$$Hom^{mod}(T, T') \longrightarrow Hom^{\otimes}(M(T)_1, M(T')_1).$$

*Remarque:* Tout comme pour le cas des catégories monoidales (voir 2.4), toute catégorie en modules sur une catégorie monoidale usuelle définit une 1-catégorie en modules, et donc un objet de $1 - PrMod$.

**Définition 3.13** *On définit $MFS_+$ comme la sous-catégorie pleine de $[1]/FS_+$, formée des objets $[1] \to [m]$ qui envoie $1$ sur $m$. Les objets de $MFS_+$ seront notés $[m]' := [1] \to [m]$.*

Remarquons que la catégorie $MFS_+$ est un module sur $FS_+$, pour l'action $[m] \otimes [p]' := [m+p]'$.

**Définition 3.14**

- *La $(n+1)$-catégorie des $n$-catégories en modules est définie comme étant la catégorie des objets fibrants et cofibrants de $n - PrMod$, munie des ses $Hom$ à valeurs dans $n - PrCat$. On la notera $n - Mod$.*

- *Pour deux objets $T$ et $U$ dans $Ho(n - PrMod)$, on pose*

$$\mathbb{R}Hom^{mod}(T, U) := Hom^{mod}(T', U') \in Ho_n$$

*où l'on a choisit un remplacement fibrant $U \hookrightarrow U'$ ainsi qu'un remplacement cofibrant $T' \longrightarrow T$.*

- *Nous noterons $\mathcal{U}$ l'objet de $n - PrMod$ correspondant à l'action de $FS_+$ sur $MFS_+$.*

- *Soit $T \in Ho(n - PrMod)$. On définit la $n$-catégorie des modules dans $T$ par*

$$Mod(T) := \mathbb{R}Hom^{mod}(\mathcal{U}, T) \in Ho_n.$$

- *Soit $T \in Ho(n-PrMod)$, et $A \in Ho(Alg(T))$. Alors, la fibre homotopique en $A$, du morphisme naturel*

$$Mod(T) := \mathbb{R}Hom^{mod}(\mathcal{U},T) \longrightarrow \mathbb{R}Hom^{\otimes}(A(\mathcal{U}),A(T)) =: Alg(T)$$

  *sera notée $A-Mod(T)$.*

- *Nous noterons $\mathcal{V}$ l'objet de $n-PrMod$ correspondant à l'action de $FS_{+}^{o}$ sur $MFS_{+}^{o}$.*

- *Soit $T \in Ho(n-PrMod)$. On définit la $n$-catégorie des comodules dans $T$ par*

$$Comod(T) := \mathbb{R}Hom^{mod}(\mathcal{V},T) \in Ho_n.$$

- *Soit $T \in Ho(n-PrMod)$, et $B \in Ho(Coalg(T))$. Alors, la fibre homotopique en $B$, du morphisme naturel*

$$Comod(T) \longrightarrow Coalg(T)$$

  *sera notée $B-Comod(T)$.*

Soit $A \in n-Cat$ une $n$-précatégorie fibrante. Alors $\underline{End}(A)$ opère naturellement sur $A$. Ceci définit un objet naturel $\mathbb{R}\underline{Mod}(A) \in n-PrMod$. Si $A \in Ho_n$, on peut définir $\mathbb{R}\underline{Mod}(A)$ comme étant $\mathbb{R}\underline{Mod}(A')$ pour $A \hookrightarrow A'$ un modèle fibrant. Ceci définit un foncteur

$$\mathbb{R}\underline{Mod} : Ho_n \longrightarrow Ho(n-PrMod).$$

Remarquons que l'on dispose alors d'un morphisme naturel dans $Ho_n$

$$Mod(\mathbb{R}\underline{Mod}(A)) \longrightarrow Alg(\mathbb{R}\underline{End}(A)) = Mon(A).$$

De même, on a

$$Comod(\mathbb{R}\underline{Mod}(A)) \longrightarrow Coalg(\mathbb{R}\underline{End}(A)) = Comon(A).$$

**Définition 3.15** *Soit $A \in Ho_n$ et $M \in Ho(Mon(A))$ une monade (resp. $C \in Ho(Comon(A))$ une comonade). On définit la $n$-catégorie des modules sur $M$ (resp. des comodules sur $C$) par*

$$M-Mod := M-Mod(\mathbb{R}\underline{Mod}(A)) \qquad (resp.\ C-Comod := C-Comod(\mathbb{R}\underline{Mod}(A))\ ).$$

Pour terminer montrons que l'action d'une $n$-catégorie monoidale sur elle même (2.15) possède un analogue dans $n-Mod$.

**Lemme 3.16** *Soit $(*,*)/(n+1)-PrCat$ la catégorie des objets bipointés de $(n+1)-PrCat$. Alors, il existe un foncteur*

$$EM : (*,*)/(n+1)-PrCat \longrightarrow n-PrMod.$$

*De plus, le foncteur naturel $(*,*)/(n+1)-PrCat \longrightarrow */(n+1)-PrCat$ qui oubli le second point induit un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (\bullet,\bullet)/(n+1)-PrCat \arrow[r, "EM"] \arrow[d] & n-PrMod \arrow[d] \\ \bullet/(n+1)-PrCat \arrow[r, "\Omega_{-}(*)"'] & n-PrMon \end{tikzcd}$$

*Preuve:* Soit $(T,a,b)\in(*,*)/n-PrCat$ une $n$-précatégorie avec deux objets. On définit une $n$-précatégorie en prémodules $EM(T;a,b)$ de la façon suivante.

$$\begin{array}{cccc} EM(T;a,b): & M\Gamma_+ & \longrightarrow & n-PrCat \\ & (I,i) & \mapsto & A_{\underbrace{(a,\dots,a)}_{I\ fois}} \\ & (I,i)' & \mapsto & A_{(b,\underbrace{a,\dots,a}_{I-i\ fois})} \end{array}$$

C'est l'objet de $n-PrMod$ correspondant à "l'action de $T_{(b,b)}$ sur $T_{(a,b)}$".

Ceci définit le foncteur cherché, $(T,a,b)\mapsto EM(T;a,b)$. $\Box$

**Lemme 3.17** *Le foncteur* $EM:(*,*)/(n+1)-PrCat\longrightarrow n-PrMod$ *possède une adjoint à gauche*

$$BM:n-PrMod\longrightarrow(*,*)/(n+1)-PrCat.$$

*Les foncteurs* $EM$ *et* $BM$ *définissent alors une paire de Quillen entre* $(*,*)/(n+1)-PrCat$ *et* $n-PrMod$*, tel que le morphisme d'adjonction* $T\longrightarrow EM(BM(T))$ *soit un isomorphisme pour tout* $T\in n-PrMod$.

*Preuve:* Soit $T\in n-PrMod$ et notons $U\in n-PrMon$ la $n$-précatégorie monoidale sous-jacente. On définit $BM(T)\in(*,*)/(n+1)-PrCat$, n'ayant que deux objets $a$ et $b$, par

$$BM(T)_{(a,a)}:=*\qquad BM(T)_{(b,b)}:=U\qquad BM(T)_{(a,b)}:=T'_1\qquad BM(T)_{(b,a)}:=\emptyset$$

les compositions étant naturellement données par la structure de $n$-précatégorie en modules sur $T$.

Les faits que $BM$ soit adjoint à gauche de $EM$ et que $T\simeq EM(BM(T))$ sont clairs par définition. $\Box$

**Proposition 3.18** *Soit* $T\in Ho(n-Mod)$ *une* $n$*-catégorie en modules, de module sous-jacent* $M(T)_1\in Ho_n$*, et de* $n$*-catégorie monoidale sous-jacente* $A(T)\in Ho(n-Mon)$*. Alors, il existe un morphisme dans* $Ho(n-Mon)$*, fonctoriel en* $T\in Ho(n-Mod)$

$$A_T:A(T)\longrightarrow\mathbb{R}\underline{End}(M(T)_1),$$

*tel que le morphisme induit* $A(T)_1\times M(T)_1\longrightarrow M(T)_1$ *soit "le premier étage" de la structure de module.*

*Preuve:* On considére $\mathbb{L}BM(T)\in(*,*)/(n+1)-PrCat$ (3.17), et sa famille des flèches

$$\mathbb{L}BM(T)^o\longrightarrow\mathbb{R}\underline{End}(\mathbb{L}BM(T),n-Cat).$$

L'image du premier point de $\mathbb{L}BM(T)$ définit donc un morphisme $\mathbb{L}BM(T)\longrightarrow n-Cat$. Ce morphisme envoi le premier point $a$ de $\mathbb{L}BM(T)$ sur $*$, et le second $b$ sur $M(T)_1$. Ainsi, on en déduit un morphisme sur les $n$-catégories monoidales d'endomorphismes

$$\Omega_b\mathbb{L}BM(T)\simeq A(T)\longrightarrow\Omega_{M(T)_1}(n-Cat)\simeq\mathbb{R}\underline{End}(M(T)_1)$$

qui est le morphisme cherché. $\Box$

*Remarques:*

- Par le même procédé que pour le cas des $n$-précatégories prémonoidales, nous verrons toute $n$-précatégorie en prémodules comme une $m$-précatégorie en prémodules $\forall m\geq n$.

- Tout comme la théorie des $n$-catégories est essentiellement celle des $(n+1)$-catégories pointées, celle des $n$-catégories en modules et essentiellement équivalente à la théorie des $(n+1)$-catégories bi-pointées $(T, a, b)$, avec $T(b, a) = \emptyset$ et $T(a, a) = *$. Les $(n+1)$-catégories bi-pointées sans aucunes conditions correspondraient à leur tour à la notion de "$n$-catégories en bi-modules".

# 4 Exemples

## 4.1 Dérivation des catégories (prè)monoidales avec équivalences

Les exemples les plus nombreux de 1-catégories monoidales proviennent des catégories monoidales munies d'une bonne notion d'équivalences, par une construction que nous appellerons "dérivation". Il s'agit en fait d'utiliser la construction de Dwyer-Kan (voir B). En particulier ceci s'appliquera aux sous catégories d'objets cofibrants des cmf monoidales, monoidales symétriques et enrichies.

**Définition 4.1** *Notons $(Cat, 1-Fl)$ la catégorie des couples $(M, S)$, avec $M$ une catégorie et $S$ un sous-ensemble de morphismes, et des foncteur $F : (M, S) \longrightarrow (M', S')$ tels que $F(S) \subset S'$.*

*Nous dirons que $(M, S) \in (Cat, 1-Fl)$ est une catégorie avec équivalences si $S$ satisfait la propriété "3 pour le prix de 2", et si $S$ contient les isomorphismes.*

*La catégorie des catégories prèmonoidales (resp. prèmonoidales symétriques) avec équivalences est la catégorie des foncteurs*

$$(M, S) : \Gamma_+ \longrightarrow (Cat, 1-Fl) \qquad (resp.\, M : \Gamma \longrightarrow (Cat, 1-Fl))$$

*tels que*

- *$M(*) = (*, Id)$.*
- *pour tout $[m] \in \Gamma_+$, $(M_m, S_m) := (M, S)([m])$ est une catégorie avec équivalences.*

*Elle sera notée $(PrMon, Eq)$.*

A partir de maintenant nous ne parlerons que du cas non symétrique et laissons le soin au lecteur de réécrire les constructions pour le cas symétrique.

L'exemple standard de catégorie prémonoidale avec équivalences est celui des catégories monoidales avec équivalences au sens de [Le, 2.1.1]. En effet, après strictification de la structure monoidale, une telle catégorie définit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} M : & \Gamma_+ & \longrightarrow & (Cat, 1-Fl) \\ & [m] & \mapsto & (M^m, S^m) \end{array}$$

qui est un objet de $(PrMon, Eq)$.

Pour toute catégorie prémonoidale avec équivalence $(M, S)$, on peut appliquer la construction de Dwyer-Kan objets par objets de $\Gamma_+$, ce qui fournit un foncteur

$$L(M, S) : \Gamma_+ \longrightarrow 1 - PrCat,$$

tel que $L(M, S)(*) = L(*) = *$. Ainsi $L(M, S) \in 1-PrMon$. Nous dirons que $L(M, S)$ est obtenue par dérivation de la catégorie prémonoidale $M$ le long des équivalences.

La construction précédente est bien évidemment fonctorielle. Ainsi tout morphisme $F : (M, S) \longrightarrow (M', S')$ induit un morphisme dans $1 - PrMon$

$$LF : L(M, S) \longrightarrow L(M', S').$$

Le point important ici est que les "foncteurs monoidaux à équivalences près" induisent eux-aussi des morphismes sur les 1-catégories monoidales dérivées.

**Définition 4.2** *Un foncteur monoidal à équivalence près à droite entre deux catégories monoidales avec équivalences $(M, S)$ et $(N, T)$ est la donnée suivante.*

- *Un foncteur $F : M \longrightarrow N$ respectant les équivalences (i.e $F(S) \subset T$).*
- *Pour toute paire d'objet $(X,Y) \in M^2$ un morphisme dans $T$*

$$\phi_{X,Y} : F(X \otimes Y) \longrightarrow F(X) \otimes F(Y),$$

*qui est fonctoriel, associatif et unitaire.*

*Un foncteur monoidal à équivalence près à gauche entre deux catégories monoidales avec équivalences $(M,S)$ et $(N,T)$ est la donnée suivante.*

- *Un foncteur $F : M \longrightarrow N$ respectant les équivalences (i.e $F(S) \subset T$).*
- *Pour toute paire d'objet $(X,Y) \in M^2$ un morphisme dans $T$*

$$\phi_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \longrightarrow F(X \otimes Y),$$

*qui est fonctoriel, associatif et unitaire.*

Nous travaillerons par convention avec des foncteurs monoidaux à équivalence près à droite. Cependant tout ce que nous dirons est valable dans les deux cas. Notons qu'il existe aussi une notion de foncteur prèmonoidal à équivalence près entre catégories prémonoidales avec équivalences, mais nous n'en aurons pas besoin.

Considérons pour un instant un foncteur $(A,S) : I \longrightarrow (Cat, 1-Fl)$ avec $I$ une catégorie, et construisons $\int_I A \longrightarrow I$. Rappelons que les objets de $\int_I A$ sont les couples $(i,x)$, avec $i \in I$ et $x \in A(i)$. Un morphisme entre $(i,x)$ et $(j,y)$ est alors la donnée d'un morphisme dans $I$, $u : i \to j$, et d'un morphisme $y \to u_*(x)$ dans $F(j)$.

Pour $i \in I$ considérons la catégorie des objets sous $i$, $i/I \longrightarrow I$, ainsi que la catégorie des foncteurs au-dessus de $I$

$$\widetilde{A}(i) := \underline{Hom}_I(i/I, \int_I A).$$

Ceci définit un nouveau foncteur

$$\widetilde{A} : I \longrightarrow Cat.$$

Les objets de la catégorie $\widetilde{A}(i)$ sont les données d'objets $x_u \in A(j)$ pour chaque $u : i \to j$, ainsi que de morphismes dans $A(k)$, $f_{u,v} : x_{vu} \to v_*(x_u)$ pour chaque $v : j \to k$ dans $I$ vérifiant une condition de cocycle. On notera $\widetilde{A}^{cart}(i)$ la sous-catégorie pleine de $\widetilde{A}(i)$ formée des objets avec $f_{u,v} \in S(k)$. De plus, notons $T(i)$ l'ensemble des morphismes $x \to y$ dans $\widetilde{A}(i)$ tel que les morphismes induits $x_u \to y_u$ soit dans $S(j)$ pour tout $u : i \to j$. Ceci définit une nouvelle catégorie prémonoidale avec équivalences

$$(\widetilde{A}^{cart}, T) : I \longrightarrow (Cat, 1-Fl).$$

On dispose d'un morphisme naturel

$$F : (A,S) \longrightarrow (\widetilde{A}^{cart}, T),$$

qui envoie $x \in A(i)$ sur $x_u := u_*(x)$ pour tout $u : i \to j$.

**Lemme 4.3** *Pour tout $i \in I$, le morphisme induit sur les localisées de Dwyer-Kan*

$$LF(i) : L(A(i), S(i)) \longrightarrow L(\widetilde{A}^{cart}(i), T(i))$$

*est une équivalence dans $1-PrCat$.*

*Preuve:* En effet, pour tout $i$ il existe un foncteur en sens inverse $G(i) : (\widetilde{A}^{cart}(i), T(i)) \longrightarrow (A(i), S(i))$ qui envoie $(x_u)$ sur $x_{id}$. Il est clair que $G(i) \circ F(i) = Id$. De plus, il existe une transformation naturelle $Id \Rightarrow F(i) \circ G(i)$, telle que pour tout objet $x \in \widetilde{A}^{cart}(i)$, $x \to F(i) \circ G(i)(x)$ soit dans $T(i)$. Ainsi le morphisme induit $LG(i) : L(\widetilde{A}^{cart}(i), T(i)) \longrightarrow L(A(i), S(i))$ est une équivalence dans $1-PrCat$ (B). $\Box$

Appliquons ce lemme à $I = \Gamma_+$ et à $(A, S) = M$ pour $M$ une catégorie monoidale avec équivalences. On en déduit donc que le foncteur naturel $M \longrightarrow \widetilde{M}^{cart}$ induit une équivalence forte (et donc une équivalence) dans $1-PrMon$

$$L(M, S) \longrightarrow L(\widetilde{M}^{cart}, T).$$

Soit $F : (M, S) \longrightarrow (N, S')$ un foncteur monoidal à équivalences près à droite. Alors, par définition de $\widetilde{N}^{cart}$, $F$ induit naturellement un morphisme dans $(PrMon, Eq)$, $(M, S) \longrightarrow (\widetilde{N}^{cart}, T')$. On obtient ainsi un diagramme dans $1-PrMon$

$$L(M, S) \longrightarrow L(\widetilde{N}^{cart}, T') \longleftarrow L(N, S').$$

Or, comme le morphisme de droite est une équivalence dans $1-PrCat$ ceci définit un morphisme bien défini dans $Ho(1-PrMon)$

$$LF : L(M, S) \longrightarrow L(N, S').$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cette construction donne un foncteur de la catégorie des catégories monoidales avec équivalences et foncteurs monoidaux à équivalence près à droite, vers la catégorie $Ho(1-PrMon)$.

## 4.2 Exemples

Les exemples les plus nombreux de catégories monoidales avec équivalences sont les catégories d'objets cofibrants des cmf monoidales avec unité cofibrante, munies des équivalences provenant de la structure de cmf. Si $(M, \otimes)$ est une telle cmf monoidale on notera

$$(LM, \otimes^{\mathbb{L}}) := L(M^c, M^c \cap Equiv.) \in Ho(1-PrMon)$$

la 1-catégorie monoidale obtenue par dérivation (où $M^c$ est la sous-catégorie des objets cofibrants). Remarquons que la 1-catégorie sous-jacente à $(LM, \otimes^{\mathbb{L}})$ est naturellement isomorphe dans $Ho_1$ à la localisée de Dwyer-Kan de $M$ le long des équivalences (ou encore, si $M$ est simpliciale à la catégorie simpliciale des objets fibrants et cofibrants).

Citons comme exemple de telle cmf $(SEns, \times)$ la cmf des ensembles simpliciaux munie du produit direct ([Ho, 4.2.10]), $(C(k), \otimes)$ la cmf des complexes de $k$-modules munie du produit tensoriel ([Ho, 4.2.13]), $(SSp, \wedge)$ la cmf des spectres symétriques munie du smash produit ([H-S-S]), $(n-PrCh(C), \times)$ la cmf des $n$-préchamps sur un site $C$ avec produits fibrés ([S-H, 3, 5]) munie du produit direct, $C(C, \mathcal{O})$ la cmf des complexes de $\mathcal{O}$-modules sur un site annelé (voir C), $(Sp^{\Sigma}_{\mathbb{T}}(k), \wedge)$ la cmf des "spectres symétriques motiviques" munie du smash produit ([Sp1]). Le procédé de localisation décrit ci-dessus fournit donc des objets de $1-PrMon_s$, notés respectivement par

$$(Top, \times^{\mathbb{L}}), (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}), (LSSp, \wedge^{\mathbb{L}}), (Ln-PrCh(C), \times^{\mathbb{L}}), (LC(C, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}), (LSp^{\Sigma}_{\mathbb{T}}(k), \wedge^{\mathbb{L}}).$$

En admettant le théorème 2.31 on peut aussi considérer $(n-PrMon_s, \wedge)$, la cmf des $n$-précatégories prémonoidales symétriques munie du smash produit. Si l'on ne veut pas admettre 2.31, il suffit d'utiliser 2.27 pour montrer que la sous-catégorie pleine de $n-PrMon_s$ formée des objets cofibrants, munie du smash produit et de la restriction des équivalences, forme une catégorie monoidale avec équivalence. Elle se dérive donc en

$$(Ln - PrMon_s, \wedge^{\mathbb{L}}) \in Ho(1 - Mon_s).$$

Noter cependant que l'on aimerait avoir un objet $(n - Mon_s, \wedge^{\mathbb{L}}) \in Ho((n+1) - Mon_s)$, dont l'objet précédent correspond à l'intérieur ([S-H, 2]).

De nombreux autres exemples de catégories monoidales avec équivalences proviennent de certaines sous-catégorie pleine stables par produits tensoriels et équivalences. En effet on vérifie aisément que si $N$ est une sous-catégorie pleine d'une catégorie monoidale avec équivalence $(M, S)$, et si de plus $N$ est stable par produits tensoriels et par équivalences (i.e. $N$ contient un morphisme de $S$ dès qu'elle contient sa source où son but), alors $(N, N \cap S)$ est naturellement une catégorie monoidale avec équivalence. De plus, le morphisme naturel $L(N, N \cap S) \longrightarrow L(M, S)$ induit un morphisme pleinement fidèle pour tout $[m] \in \Gamma_+$

$$L(N, N \cap S)_m \longrightarrow L(M, S)_m.$$

Prenons par exemple $(C, \mathcal{O})$ un site annelé et $C(C, \mathcal{O})$ la cmf monoidale des complexes de $\mathcal{O}$-modules. On considère alors la sous-catégorie pleine de $C(C, \mathcal{O})^c$ formée des objets parfaits (i.e. localement quasi-isomorphe à des complexes bornés de fibrés vectoriels). C'est une sous-catégorie de la catégorie des objets cofibrants qui est stable par produits tensoriels et quasi-isomorphismes. On en déduit donc un objet

$$(LParf(C, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}) \in Ho(1 - PrMon).$$

C'est une sous-1-catégorie monoidale pleine de $(LC(C, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})$.

Si $F : M \longrightarrow N$ est un foncteur monoidal de Quillen à gauche entre deux cmf monoidales, le foncteur induit sur les catégories d'objets cofibrants est clairement un foncteur monoidal présèrvant les équivalences. Il induit donc un morphisme dans $Ho(1 - PrMon)$

$$LF : (LM, \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LN, \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Plus généralement, si $F$ est de Quillen à gauche mais n'est que monoidal à équivalence près (à gauche ou à droite 4.2), il induit aussi un morphisme dans $Ho(1 - PrMon)$.

Prenons par exemple $M = SMod_k$, la cmf des $k$-modules simpliciaux munie du produit tensoriel. On dispose du foncteur $C : SMod_k \longrightarrow C(k)$, qui associe à chaque $k$-modules simplicial le complexe de $k$-modules où la différentielle est obtenue par somme alternèe des faces. Ce foncteur est bien un foncteur de Quillen à gauche. De plus, le théorème d'Eilenberg-Zilber implique que c'est un foncteur monoidal symétrique à équivalence près à gauche. Ainsi, on obtient un morphisme dans $Ho(1 - Mon_s)$

$$C : (LSMod_k, \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

On peut alors composer avec le foncteur de Quillen à gauche monoidal symétrique $- \otimes k : SEns \longrightarrow SMod_k$, pour obtenir un morphisme dans $Ho(1 - Mon_s)$

$$- \otimes k : (Top, \times^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Remarquer que l'existence des opération cohomologique implique que ce morphisme ne peut pas provenir d'un morphisme monoidal (au sens strict) $(SEns, \times) \longrightarrow (C(k), \otimes)$.

De même, si $(C, \mathcal{O})$ est un site annelé, on dispose d'un foncteur de Quillen à gauche qui est monoidal symétrique à équivalence près

$$- \otimes \mathcal{O} : (0 - PrCh(C), \times) \longrightarrow (C(\mathcal{O}), \otimes).$$

Il se dérive donc en un morphisme dans $Ho(1 - Mon_s)$

$$- \otimes \mathcal{O} : (L0 - PrCh(C), \times^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LC(\mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

### 4.3 Le champ des complexes

Pour toute catégorie $C$, on peut définir la notion de préfaisceaux en catégorie prémonoidales avec équivalences sur $C$. Par définition il s'agit de foncteurs $(M,S) : C^o \longrightarrow (PrMon, Eq)$. Par dérivation, un tel objet donne naissance à un foncteur $L(M,S) : C^o \longrightarrow 1-PrMon$. De même, on dispose de la notion analogue pour le cas symétrique.

**Définition 4.4** *Un préfaisceau de Quillen monoidal symértique à gauche $M$ sur une catégorie $C$, est un préfaisceau de Quillen à gauche $M : C^o \longrightarrow Cmf$ ([S-H, 17]) tel que*

- *Chaque $M(i)$ soit une cmf monoidale symétrique.*
- *Pour tout morphisme dans $C$, $u : i \to j$, le foncteur $u^* : M(j) \longrightarrow M(i)$ est monoidal symétrique.*

Par définition, si $M$ est un préfaisceau de Quillen monoidal symétrique à gauche, on peut définir

$$\begin{array}{cccc} (M^c, Equiv.): & C^o & \longrightarrow & (PrMon, Eq) \\ & i & \mapsto & (M(i)^c, Equiv. \cap M(i)^c) \end{array}$$

où $M(i)^c$ est la sous-catégorie des objets cofibrants. Cet objet est un préfaisceau en précatégories monoidales symétriques et donne par dérivation

$$(LM, \otimes^{\mathbb{L}}) := L(M^c, Equiv.) : C^o \longrightarrow 1 - PrMon_s.$$

Ceci définit donc un objet $(LM, \otimes^{\mathbb{L}}) \in 1 - PrMon_s(C)$.

Supposons maintenant que $(C, \mathcal{O})$ soit le grand site $fpqc$ d'un schéma $X$. Il s'agit donc du site $(Sch/X)_{fpqc}$ formé des schémas sur $X$, muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte et du faisceau d'anneaux $Y \mapsto \mathcal{O}(Y)$. Nous noterons $C(X, \mathcal{O})$ la cmf des complexes de $\mathcal{O}$-modules sur $(Sch/X)_{fpqc}$ (voir l'appendice C).

Il est facile de voir que pour tout morphisme de schéma $f : X \longrightarrow Y$, le foncteur d'images réciproques

$$f^* : C(Y, \mathcal{O}) \longrightarrow C(X, \mathcal{O})$$

est de Quillen à gauche et monoidal symétrique. Ainsi, $X \mapsto C(X, \mathcal{O})$ devient un préfaisceau de Quillen monoidal symétrique à gauche sur le grand site des schémas muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte. Par dérivation on obtient donc un objet

$$(LC(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}) \in 1 - PrCh(C).$$

Notons que le 1-préchamp sous-jacent à cet objet est le 1-préchamp des complexes défini dans [S-H, 21], qui est donc un champ. Comme $(LC(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})$ est un 1-préchamp monoidal symétrique ceci implique que c'est en réalité un 1-champ monoidal symétrique.

On peut aussi se restreindre aux complexes parfaits et construire $(LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})$, qui est un sous-1-champ monoidal symétrique plein de $(LC(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})$.

**Définition 4.5** *Soit $F \in Ho(n - PrCh(C))$ un $n$-champ. On définit la $n$-catégorie monoidale symétrique des complexes parfaits de $\mathcal{O}$-modules sur $F$ par (voir 2.37)*

$$(LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}}) := \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes, s}(F, (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})) \in Ho(n - Mon_s).$$

En choisissant un remplacement fibrant $(LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'$, on peut aussi construire un foncteur

$$(LParf_{\mathcal{O}}(-), \otimes^{\mathbb{L}}) : Ho(n - Ch(C)) \longrightarrow Ho(n - Mon_s),$$

qui à un $n$-champ associe sa 1-catégorie monoidale symétrique des complexes parfaits de $\mathcal{O}$-modules.

## 4.4 Comparaison avec d'autres théories

Voici trois exemples de comparaison entre différentes théories des algèbres et la présente théorie. Nous laissons le lecteur comparer les théories de modules correspondantes.

### 4.4.1 Structures strictes

Soit $(M, S)$ une catégorie monoidale avec équivalence. Notons $Alg(M)$ la catégorie des algèbres au sens usuel dans la catégorie monoidale $M$. Remarquer que $Alg(M) \simeq \mathbb{R}Hom^{\otimes}(FS_{+}, M)$ (voir 2.4). Comme le foncteur identité de $M$ envoie les isomorphismes dans $S$, il induit un morphisme dans $Ho(1-Mon)$

$$L(M, Isom) \longrightarrow L(M, S).$$

Or, comme il existe un isomorphisme dans $Ho(1-Mon)$, $M \simeq L(M, Isom)$ (B), on en déduit un morphisme dans $Ho(1-Mon)$

$$M \longrightarrow L(M, S).$$

Ce morphisme induit donc un morphisme sur les catégories d'algèbres

$$Alg(M) \longrightarrow Alg(L(M, S)).$$

En particulier, si $M$ est une cmf et $S$ l'ensemble des équivalences on en déduit un morphisme

$$Alg(M^{c}) \longrightarrow Alg(LM, \otimes^{\mathbb{L}}),$$

où $M^{c}$ est la catégorie monoidale des objets cofibrants.

De plus, tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans $Alg(M^{c})$ qui est une équivalence dans $M$ est envoyé sur un isomorphisme dans $Ho(Alg(LM, \otimes^{\mathbb{L}})$ (voir 3.2). Ainsi, d'après [S-H, 8.9] on en déduit un morphisme dans $Ho_1$

$$L(Alg(M^{c}), Equiv.) \longrightarrow Alg(LM, \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Il existe un analogue dans le cas où $M$ est monoidale symétrique, qui est un morphisme dans $Ho_1$

$$L(Alg_{c}(M^{c}), Equiv.) \longrightarrow Alg_{c}(LM, \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Prenons par exemple $M = C(k)$ la cmf monoidale symétrique des complexes de $k$-modules. On a donc un morphisme

$$L(Alg(M^{c}), Equiv.) \longrightarrow Alg(LM, \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Or, $Alg(M^{c})$ est la catégorie des $k$-algèbres différentielles graduées dont le complexe sous-jacent est cofibrant, et un morphisme dans $Alg(M^{c})$ est une équivalence si et seulement si c'est un quasi-isomorphisme. Ainsi, en passant aux catégories homotopiques on obtient

$$Ho(k-dga) \longrightarrow Ho(Alg(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})),$$

où $k-dga$ est le cmf des $k$-algèbres différentielles graduées. Pour le cas symétrique on obtient de façon tout à fait similaire

$$Ho(k-dga_{c}) \longrightarrow Ho(Alg_{c}(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})),$$

où $k-dga_{c}$ est le cmf des $k$-algèbres différentielles graduées commutatives.

### 4.4.2 Structures à homotopie près

- *$E_\infty$-algèbres*

Si $k$ est un anneau commutatif, la notion d'algèbre à homotopie prés sur $k$ est généralement associée à celle de $E_\infty$-algèbre ([K-M]). Nous allons montrer que cette dernière notion, qui joue en rôle des plus importants en topologie, n'est pas sans relation avec la notion d'algèbre commutative que nous utilisons. En réalité on conjecture même que les deux théories sont équivalentes (i.e. que le morphisme construit ci-dessous est un isomorphisme), mais nous ne considérerons pas cette question dans ce tavail.

Soit $C$ une $E_\infty$-opérade unitaire dans $(SEns, \times)$ ([K-M, $I$.1]). Rappelons qu'il s'agit de la donnée suivante.

- Pour tout entier positif $j$, un objet $\mathcal{C}(j)$ dans $SEns$, avec $\mathcal{C}(0) = *$.
- Un morphisme $\eta : * \longrightarrow \mathcal{C}(1)$.
- Pour tout entiers positifs $i$, et $j_1, \dots, j_i$, un morphisme
$$\mathcal{C}(i) \times \mathcal{C}(j_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(j_i) \longrightarrow \mathcal{C}(j),$$
où $j = \sum_p j_p$.
- Pour chaque $j$ une action du groupe symétrique $\sigma_j$ sur $\mathcal{C}(j)$.
- L'augmentation naturelle
$$\epsilon : \mathcal{C}(j) \simeq \mathcal{C}(j) \otimes \mathcal{C}(0)^j \longrightarrow *$$
fait de $\mathcal{C}(j)$ une résolution $\sigma_j$-libre de $*$.
- Les données précédentes satisfont les axiomes $(a) - (c)$ de [K-M, $I$.1.1].

Nous noterons $E_\infty - Alg$ la catégories des algèbres sur $\mathcal{C}$ dans $C(k)^c$, la sous-catégorie pleine de $C(k)$ formée des complexes cofibrants (pour la structure de [Ho, 2.3.3]).

Ces objets sont la donnée de complexes $A \in C(k)^c$ et de morphisme
$$\theta : \mathcal{C}(j) \otimes A^{\otimes j} \longrightarrow A$$
satisfaisant aux conditions $(a) - (c)$ de [K-M, $I$.2.1] (on a noté $E \otimes C$, le produit externe d'un complexe de $k$-modules $C$ par un ensemble simplicial $E$).

Nous dirons qu'un morphisme $(A, \theta_A) \longrightarrow (B, \theta_B)$ dans $E_\infty - Alg$ est une équivalence si le morphisme induit sur les complexes $A \longrightarrow B$ est un quasi-isomorphisme. On notera alors $LE_\infty - Alg \in 1 - PrCat$ la localisée de Dwyer-Kan de $E_\infty - Alg$ le long des équivalences.

**Proposition 4.6** *Il existe un morphisme dans $Ho_1$*
$$LE_\infty - Alg \longrightarrow Alg_c((LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})).$$

*Preuve:* Soit $M := \hat{\mathcal{C}}$ la "catégorie monoidale symétrique libre engndrée par $\mathcal{C}$" ([Le, 1.6]). C'est en fait une catégorie simpliciale monoidale symétrique, et donc un objet de $1 - PrMon_s$. Rappelons comment elle est définie.

Les objets de $M$ sont les entiers naturels $0, \dots, m, \dots$. L'ensemble simplicial des morphismes entre $n$ et $m$ est définie par
$$M_{n,m} := \coprod_{u \in Hom_{FS}([n],[m])} \mathcal{C}(u^{-1}(1)) \times \cdots \times \mathcal{C}(u^{-1}(m)).$$

La structure monoidale sur $M$ est donnée par addition, $n \otimes m := n + m$. On renvoit à [Le, 1.6] pour les cohérences d'associativité de commutativité et d'unité.

Considérons $C(k)^c$ munie de sa structure simpliciale. L'objet $M \in 1-PrMon_s$ possède alors la bonne propriété qu'il existe une équivalence de catégories

$$E_\infty - Alg \simeq Hom_s^{\otimes,s}(M, C(k)^c),$$

où ici $Hom_s$ signifie la catégorie des morphismes de catégories monoidales symétriques simpliciales. Remarquons que comme tout objet de $C(k)$ est fibrant, la catégorie simpliciale monoidale symétrique $C(k)^c$ est isomorphe dans $Ho(1-Mon_s)$ à $(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})$. Ainsi, le morphisme précédent induit un morphisme dans $Ho_1$

$$E_\infty - Alg \longrightarrow \mathbb{R}Hom^{\otimes,s}(M, (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})).$$

Remarquons que les morphismes d'augmentation $\mathcal{C}(j) \longrightarrow *$ induisent un foncteur monoidal symétrique entre catégories simpliciales monoidales symétriques

$$M \longrightarrow FS.$$

Le morphisme induit sur les catégories simpliciales sous-jacente est de plus clairement une équivalence dans $1-PrMon_s$. Ceci implique qu'il existe un isomorphisme dans $Ho(1-Mon_s)$, $M \simeq FS$. Ainsi, le morphisme ci-dessus donne un morphisme dans $Ho_1$

$$E_\infty - Alg \longrightarrow \mathbb{R}Hom^{\otimes,s}(FS, (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})) = Alg_c(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Il est facile de vérifier à l'aide de 3.2 que ce morphisme envoie les équivalences sur des isomorphismes dans $Ho(Alg_c(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$, et donc par [S-H, 8.9] il se factorise en

$$LE_\infty - Alg \longrightarrow \mathbb{R}Hom^{\otimes,s}(FS, (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})) = Alg_c(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

$\square$

*Remarques:* Il est conjecturé que le morphisme de 4.6 est en fait un isomorphisme, tout au moins lorsque $\mathcal{C}$ est une opérade cofibrante ([Hin]). Plus généralement, pour toute cmf simpliciale monoidale symétrique $M$ il se peut que la 1-catégorie des algèbres commutatives dans $M$ soit équivalente à la localisée de Dwyer-Kan de la catégorie des $E_\infty$-algèbres cofibrantes (sur une $E_\infty$-opérade cofibrante). Cependant, il est à noter que la théorie des algèbres que nous avons développée semble indispensable pour les applications futures. Ceci est du au fait qu'il semble difficile de définir une bonne notion de $A_\infty$-monade dans une cmf simpliciale $M$, alors que cette notion est centrale pour les applications du théorème de Beck. En effet, il n'y a aucune raison pour que la 1-catégorie $\mathbb{R}\underline{Hom}(LM, LM)$ provienne par dérivation d'une cmf.

- *Algèbres à homotopie près*

Soit $P$ une opérade (disons non-symétrique pour fixer les idées), $\hat{P}$ la catégorie monoidale qu'elle définie ([Le, 1.6]) et $M$ une catégorie monoidale avec équivalences. Dans [Le], T. Leinster définit la catégorie des $P$-algèbres à homotopie près dans $M$ (notée $HtyAlg(P, M)$) comme la catégorie des foncteurs monoidaux à équivalences près à gauche $\hat{P} \longrightarrow M$. Cette catégorie est elle même munie d'un ensemble de morphismes que nous appelerons équivalences. Ce sont les transformations naturelles (monoidales) $F \longrightarrow F'$ telle que pour tout $x \in \hat{P}$ le morphisme $F(x) \longrightarrow F'(x)$ soit une équivalence dans $M$.

On a vu que tout objet $F \in HtyAlg(P, M)$ définit naturellement un morphisme dans $Ho_1$ obtenu par dérivation

$$LF : \hat{P} \longrightarrow L(M, S).$$

Le lecteur vérifiera sans peine que la construction de $LF$ que nous avons donnée permet de définir plus généralement un morphisme de 1-précatégories

$$HtyAlg(P,M) \longrightarrow Hom^{\otimes}(\hat{P}, L(\widetilde{M}^{cart}, T)).$$

De plus, toute équivalence dans $HtyAlg(P,M)$ se projète sur un isomorphisme dans $Ho(\mathbb{R}Hom^{\otimes}(\hat{P}, L(\widetilde{M}^{cart}, T)))$. Ainsi on en déduit un morphisme bien définit dans $Ho_1$ ([S-H, 8.9])

$$L(HtyAlg(P,M), Equiv.) \longrightarrow \mathbb{R}Hom^{\otimes}(\hat{P}, L(\widetilde{M}^{cart}, T)) \simeq \mathbb{R}Hom^{\otimes}(\hat{P}, L(M,T)).$$

Ce morphisme ne semble pas être un isomorphisme en général, et nous proposons donc $\mathbb{R}Hom^{\otimes}(\hat{P}, L(M,T))$ comme candidat pour la "bonne notion" de $P$-algèbres à homotopie près dans $M$ (voir [Le, 6]).

Sans entrer dans les détails signalons l'existence d'une notion de catégories avec équivalences en modules sur une catégorie monoidale avec équivalences. Le lecteur se convaincra que toute cmf $U$ enrichie dans une cmf monoidale $M$ donne lieu par un procédé de dérivation analogue au précédent à un objet

$$(LU, LM) \in Ho(1 - PrMod).$$

De plus, la 1-catégorie monoidale sous-jacente à $(LU, LM)$ est naturellement isomorphe à $(LM, \otimes^{\mathbb{L}})$, et le module sous-jacent à $LU$.

Bien entendu il existe aussi une notion de foncteur en modules à équivalences près, et on montre qu'ils induisent des morphismes bien définis dans $Ho(1 - PrMod)$. De facçon analogue à 4.6, on montre de même qu'il existe un morphisme naturel de la catégorie des modules sur une $E_{\infty}$-algèbres localisée suivant les quasi-isomorphismes, vers la 1-catégorie des modules au sens de 3.14. Tout cela est laissé à la discretion du lecteur et ne sera pas utilisé par la suite.

# 5 Perspectives

Au cours de ce chapitre nous allons indiquer sans preuves deux théorèmes fondamentaux utilisant la théorie précédente. Bien qu'énoncés sous forme de conjectures il nous ont semblés être de très bonnes illustrations de la théorie des $n$-catégories monoidales. Ils donnent aussi de nombreuses motivations pour poursuivre la théorie dans cette direction.

Le premièr est le théorème de Beck, qui donne un critère pour reconnaitre les 1-catégories de comodules sur une coalgèbre. Sa preuve n'est théoriquement pas plus compliquée que celle du cas des catégories ([M-M, $IV$.4]), mais il est délicat d'écrire tous les détails techniques.

La seconde application est la dualité de Tannaka. C'est une version enrichie du théorème de Beck, qui donne un critère pour reconnaitre les 1-catégories monoidales de comodules sur une bialgebre commutative. Ici encore, la preuve est sensiblement équivalente à celle de [Sa, 3.1.4.1], mais encore une fois les détails techniques sont assez lourds.

Les preuves de ces deux conjectures devraient apparaitre dans la seconde partie faisant suite à cet article.

## 5.1 Le théorème de Beck

Commençons par quelques rappels sur la notion de morphismes adjoints, ainsi que quelques unes de leurs propriétés essentielles. Les définitions et les preuves de ce paragraphe sont largement inspirées de [S-H, 8] et [S3].

Soit $T \in Ho_n$ une $n$-catégorie. Rappelons que l'on dispose de la famille des flèches

$$T^o \times T \longrightarrow (n-1)-Cat$$

qui est un morphisme dans $Ho_n$ ([S2, 5]).

**Définition 5.1** *Les objets dans l'image essentielle du morphisme déduit par adjonction*

$$T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T^o, (n-1)-Cat)$$

*seront appelés les morphismes représentables.*

*Ceux dans l'image essentielle du morphisme*

$$T^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T, (n-1)-Cat)$$

*seront appelés les morphismes coreprésentables.*

Au niveau des notations, l'image d'un objet $x \in T$ sera notée

$$Hom(-,x) : T^o \longrightarrow (n-1)-Cat.$$

De même, pour $y \in T^o$, on notera

$$Hom(y,-) : T \longrightarrow (n-1)-Cat.$$

Rappelons enfin que pour $n=1$, on dispose du lemme de Yoneda ([S3, Thm. 2]). Il affirme que les morphismes

$$T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T^o, Top)$$

$$T^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T, Top)$$

sont pleinement fidèles.

Pour tout morphisme $\omega : T \longrightarrow T'$ dans $Ho_n$, on en déduit un morphisme composé

$$\underline{Hom}(\omega,-) :\ T^o \times T' \xrightarrow{Id\times\omega} (T')^o \times T' \longrightarrow (n-1)-Cat$$

bien défini dans $Ho_n$.

De façon duale, si $p : T' \longrightarrow T$ est un morphisme dans $Ho_n$, on construit

$$\underline{Hom}(-,p) : T^o \times T' \longrightarrow (n-1)-Cat.$$

**Définition 5.2** *Un morphisme $\omega : T \longrightarrow T'$ dans $Ho_n$ possède un adjoint à droite, s'il existe un morphisme $p : T' \longrightarrow T$ dans $Ho_n$, tel que les morphismes $\underline{Hom}(\omega,-)$ et $\underline{Hom}(-,p)$ soient égaux dans $Ho_n$.*

*Le morphisme $p$ sera alors appelé un adjoint à droite de $\omega$, et $\omega$ un adjoint à gauche de $p$.*

L'importance de la définition précédente vient du fait suivant.

**Proposition 5.3** *Soit $F : M \longrightarrow N$ un foncteur de Quillen à droite entre deux cmf simpliciales, et $G : N \longrightarrow M$ son adjoint à gauche. Si $G$ est un foncteur simplicial (i.e. de catégories en modules sur $SEns$), alors les morphismes dans $Ho_1$ obtenus par dérivation le long des équivalences (voir C)*

$$LF : LM \longrightarrow LN \qquad LG : LN \longrightarrow LM$$

*sont tels que $LF$ est adjoint à droite de $LG$.*

*Preuve:* (Voir aussi [S-H, 8.11]) Notons $Hom_s$ les $Hom$ simpliciaux de $M$ et $N$, et $M^{cf}$ (resp. $N^{cf}$) la catégorie des objets cofibrants et fibrants dans $M$ (resp. dans $N$). Comme $G$ est un foncteur simplicial, les foncteurs

$$Hom_s(G(-),-) : (N^{cf})^o \times M^{cf} \longrightarrow SEns^f$$

$$Hom_s(-,F(-)) : (N^{cf})^o \times M^{cf} \longrightarrow SEns^f$$

s'étende naturellement en des foncteurs simpliciaux, et sont de plus isomorphes par hypothèses. Or, leurs images dans $Ho_1$ sont égales respectivement à $Hom(LG,-)$ et $Hom(-,LF)$. Ainsi, ce deux derniers morphismes sont bien isomorphes, et $LF$ est bien adjoint à droite de $LG$. $\square$

**Proposition 5.4** *Un morphisme $\omega : T \longrightarrow T'$ dans $Ho_1$ possède un adjoint à droite, si et seulement si pour tout objet $y \in T'$, le morphisme*

$$Hom(\omega(-),y) : T^o \longrightarrow Top$$

*est représentable.*

*Preuve:* La nécessité est claire, car le morphisme en question est représenté par $p(y)$.

Pour la suffisance on considère le morphisme

$$T' \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T^o,Top)$$

déduit par adjonction de $\underline{Hom}(\omega,-)$. L'hypothèse implique que le morphisme précédent se factorise par l'image essentielle du morphisme de Yoneda $T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(T^o,Top)$. Comme ce morphisme est pleinement fidèle, le morphisme se factorise en fait par un morphisme $p : T' \longrightarrow T$. Par constuction $p$ est adjoint à droite de $\omega$. $\square$

**Définition 5.5** *Une $n$-catégorie $T \in Ho_n$ est petitement engendrée s'il existe une sous-catégorie pleine $U \hookrightarrow T$ qui est petite, et tel que le morphisme naturel*

$$T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(U^o, Top)$$

*soit pleinement fidèle.*

**Théorème 5.6** *Soit $F : T^o \longrightarrow Top$ un morphisme dans $Ho_1$. Supposons que $T$ admette des petites colimites ([S4]) et que $F$ commute avec elles ([S4,* 3.3.12*]). Si $T$ est petitement engendrée alors $F$ est représentable.*

*Preuve:* (Voir aussi la preuve de [S3, Thm. 14]) Soit $U \hookrightarrow T$ une petite sous-1-catégorie pleine qui engendre $T$. Nous noterons $\hat{U} := \mathbb{R}\underline{Hom}(U^o, Top)$ et $\hat{T} := \mathbb{R}\underline{Hom}(T^o, Top)$.

**Lemme 5.7** *Tout objet de $T$ est une petite colimite d'objets de $U$.*

*Preuve:* Soit $X \in T$ et $h_X \in \hat{U}$ le morphisme qu'il représente par restriction à $U$. Comme $U$ est petite, on sait d'après [S3, Lem. 11] que $h_X = Colim^{\hat{U}}_{j\in J} Z_j$, avec $Z_j \in U$. Cette colimite est prise dans $\hat{U}$, mais se trouve dans l'image essentielle de $T \longrightarrow \hat{U}$. Comme ce dernier morphisme est pleinement fidèle $X$ est aussi égal à $Colim^{T}_{j\in J} Z_j$, prise dans $T$. $\Box$

Notons $G : U^o \longrightarrow Top$ la restriction de $F$ à $U$. Comme $U$ est petite on peut écire $G = Colim^{\hat{U}}_{j\in J} Z_j$, avec $Z_j \in U$ ([S3, Lem. 11]). On pose $R(F) := Colim^{T}_{j\in J} Z_j \in T$, et $H \in \hat{U}$ le foncteur qu'il représente.

Comme $F$ commute avec les colimites dans $T$, on a des isomorphismes dans $Ho(Top)$ (où les limites sont prises dans la 1-catégorie $Top$)

$$Hom(R(F), F) \simeq Lim_{j\in J} Hom(Z_j, F) \simeq Lim_{j\in J} F(Z_j) \simeq Hom(Colim^{\hat{U}}_{j\in J} Z_j, G).$$

Ainsi, l'identité $G = Colim^{\hat{U}}_{j\in J} Z_j$ donne un morphisme bien défini dans $Ho(\hat{T})$

$$a : R(F) \longrightarrow F.$$

Par le lemme 5.7 et le fait que $R(F)$ et $F$ commutent avec les colimites, il nous suffit de montrer que le morphisme induit dans $Ho(\hat{U})$

$$a : H \longrightarrow G$$

est un isomorphisme. Les morphismes naturels dans $T$, $Z_j \longrightarrow R(F)$ induisent un morphisme dans $\hat{U}$

$$b : Colim^{\hat{U}} Z_j = G \longrightarrow H.$$

En utilisant le fait que $F$ commute avec les colimites dans $T$, il est facile de vérifier que $b$ est un inverse de $a$ dans $Ho(\hat{U})$. $\Box$

**Corollaire 5.8** *Soit $\omega : T \longrightarrow T'$ un morphisme de $Ho_1$. Supposons que $T$ soit petitement engendrée, admette des petites colimites et que $\omega$ commute avec les colimites. Alors $\omega$ possède un adjoint à droite.*

*Preuve:* On applique le théorème précédent et la proposition 5.4. $\Box$

**Corollaire 5.9** *Soit $T \in Ho_1$ une 1-catégorie qui est petitement engendrée. Si $T$ admet des petites colimites alors elle admet des petites limites.*

*Preuve:* Soit $I$ une petite 1-catégorie. On considère $\omega : T \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(I,T)$ le morphisme "diagramme constant". Il est déduit par adjonction de la première projection $T \times I \longrightarrow T$. Par le corollaire 5.8 il possède un adjoint à droite $p : \mathbb{R}\underline{Hom}(I,T) \longrightarrow T$. Par définition des limites, si $f : I \longrightarrow T$ est un morphisme, $p(f)$ est une limite le long de $f$. $\Box$

**Conjecture 5.10** *(Théorème de Beck) Soit $\omega : T \longrightarrow T'$ un morphisme dans $Ho_1$. Supposons que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

1. *Le morphisme $\omega$ possède un adjoint à droite $p : T' \longrightarrow T$.*
2. *Les 1-catégories $T$ et $T'$ possèdent des limites suivant $\Delta$.*
3. *Le morphisme $\omega$ est conservatif et commute avec les limites suivant $\Delta$.*

*Alors il existe une comonade $C \in Comon(T')$ et un isomorphisme dans $Ho_1$*

$$\beta : T \longrightarrow C - Comod,$$

*rendant commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\omega"'] & C - Comod \arrow[dl] \\ T' & \end{tikzcd}$$

*De plus, l'endomorphisme $C_1 \in Ho(\mathbb{R}\underline{End}(T'))$ sous-jacent à la comonade $C$ est isomorphe à $\omega \circ p$.*

*Remarque:* La conjecture ci-dessus est une généralisation immédiate du théorème de Beck pour les catégories ([M-M, *IV*.4]). En réalité la preuve est même tout à fait analogue.

En utilisant 5.8 et 5.9 on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 5.11** *Supposons que 5.10 soit vraie.*

*Soit $\omega : T \longrightarrow T'$ un morphisme dans $Ho_1$ et supposons que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

1. *Les 1-catégories $T$ et $T'$ sont petitement engendrées.*
2. *Les 1-catégories $T$ et $T'$ possèdent des petites colimites et $\omega$ commute avec elles.*
3. *Le morphisme $\omega$ est conservatif et commute avec les limites suivant $\Delta$ (qui existent dans $T$ et $T'$ d'après (1) et (2)).*

*Alors il existe une comonade $C \in Comon(T')$ et un isomorphisme*

$$\beta : T \longrightarrow C - Comod,$$

*rendant commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\omega"'] & C - Comod \arrow[dl] \\ T' & \end{tikzcd}$$

*De plus, l'endomorphisme $C_1 \in Ho(\mathbb{R}\underline{End}(T'))$ sous-jacent à la comonade $C$ est isomorphe à $\omega \circ p$.*

## 5.2 Dualité de Tannaka

### 5.2.1 $n$-Catégorie tensorielles

Le lemme suivant nous sera utile par la suite.

**Lemme 5.12** *Soit $M$ une cmf monoidale symétrique, tel que son élément unité soit cofibrant est final dans $M$. Soit $U$ une cmf enrichie dans $M$ est $X \in U$ un de ses objets. Alors la catégorie $X/U$, des objets sous $X$, est naturellement une cmf enrichie dans $M$.*

*Preuve:* La structure de cmf de $X/U$ est bien connue ([Ho]). Sa structure enrichie dans $M$ est définie de la façon suivante.

Soit $X \rightarrow Y$ un objet de $X/U$, et $A \in M$. Comme l'unité est final dans $M$, on dispose d'un morphisme naturel $A \square X \longrightarrow 1 \square X \simeq X$. L'objet $A \square_X Y$ de $X/U$ est alors défini par le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
A \square X \arrow[r] \arrow[d] & A \square Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & A \square_X Y.
\end{tikzcd}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier ceci munit la catégorie $X/U$ d'une structure de cmf enrichie dans $M$. $\square$

**Définition 5.13** *Soit $A \in n - PrMon_s$ une $n$-précatégorie prémonoidale symétrique. On définit la cmf des $n$-précatégories $A$-prétensorielles par*

$$n - PrTens_A := A/n - PrMon_s.$$

*Par 5.12 elle sera munie de sa structure naturelle de cmf enrichie dans $n - PrCat$.*

*Un objet $T$ de $n - PrTens_A$ sera appelé une $n$-catégorie $A$-tensorielle, si $A$ et $T$ sont des $n$-catégories monoidales symétriques.*

Soit $T \in Ho(1 - Mon_s)$ une $n$-catégorie monoidale symétrique, et $y, z$ deux objets de $T_1$. On dispose du morphisme dans $Ho_n$, déduit de la structure monoidale sur $T$

$$T_1 \times T_1 \longrightarrow T_1$$

que l'on notera $\otimes$. En particulier, en fixant la seconde variable, on obtient

$$- \otimes y : T_1 \longrightarrow T_1.$$

On compose se dernier morphisme avec $Hom(-, z) : T_1^o \longrightarrow Top$, déduit de la famille des flèches de $T_1$ ([S2, 5]), pour obtenir

$$Hom(- \otimes y, z) : T_1^o \longrightarrow (n-1) - Cat.$$

**Définition 5.14** *Une $n$-catégorie monoidale symétrique $T \in Ho(1 - Mon_s)$ sera appelée interne, si pour toute paire d'objet $(x, y)$ dans $T_1$, le morphisme $Hom(- \otimes y, z)$ est représentable (5.1).*

*Si tel est le cas, nous noterons généralement $Hom_T(y, z)$ un objet de $T_1$ qui représente $Hom(- \otimes y, z)$.*

*Remarque:* En utilisant le lemme de Yoneda, on peut montrer que pour toute 1-catégorie monoidale symétrique interne $T$, il existe un morphisme dans $Ho_1$

$$Hom_T(-, -) : T_1^o \times T_1 \longrightarrow T_1,$$

tel que pour tout $(y, z)$, $Hom_T(y, z)$ représente $Hom(- \otimes y, z)$.

Soit $s : A \longrightarrow T$ une $n$-catégorie $A$-tensorielle. Pour $y$ et $z$ deux objets de $T_1$ on peut considéré le morphisme dans $Ho_n$

$$Hom(s(-) \otimes y, z) : A^o \longrightarrow (n-1) - Cat,$$

construit à l'aide des familles de flèches comme ci-dessus.

**Définition 5.15** *Soit $s : A \longrightarrow T$ une $n$-catégorie $A$-tensorielle. On dira que $T$ est fermée si $T$ et $A$ sont des $n$-catégories monoidales symétriques internes, et si pour tout $y$ et $z$ dans $T_1$, le morphisme $Hom(s(-) \otimes y, z)$ est représentable.*

*Si tel est le cas nous noterons généralement $Hom_A(y, z)$ un objet qui représente $Hom(s(-)\otimes, y, z)$ dans $T_1$.*

*Remarques:*

- Comme précédemment, si $n = 1$ on peut conctruire un morphisme dans $Ho_1$

  $$Hom_A(-,-) : T^o \times T \longrightarrow A,$$

  tel que $Hom_A(y, z)$ représente $Hom(s(-) \otimes y, z)$.

- Si $A$ est une n-catégorie monoidale symétrique interne, alors $Ho(A)$ devient naturellement une catégorie monoidale symétrique munie de $Hom$ internes.

  De plus, si $A \longrightarrow T$ est une $n$-catégorie $A$-tensorielle fermée, alors $Ho(T)$ devient une catégorie en algèbres sur $Ho(A)$, enrichie dans $Ho(A)$ ([Sa, $I$.3]).

**Proposition 5.16** *Soit $s : M \longrightarrow N$ un foncteur de Quillen à gauche monoidal symétrique entre deux cmf monoidales symétriques simpliciales. Alors le morphisme induit sur les localisées de Dwyer-Kan (B)*

$$Ls : (LM, \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LN, \otimes^{\mathbb{L}})$$

*fait de $(LN, \otimes^{\mathbb{L}})$ une 1-catégorie $(LM, \otimes^{\mathbb{L}})$-tensorielle fermée.*

*Preuve:* Montrons tout d'abord que pour toute cmf monoidale symétrique simpliciale $M$, la 1-catégorie monoidale symétrique $(LM, \otimes^{\mathbb{L}})$ est interne.

Pour cela soit $y$ et $z$ deux objets de $LM$. Le morphisme $Hom(-\otimes y, z)$ est obtenu par dérivation (voir le paragraphe 4.1) du foncteur de Quillen à droite

$$Hom_s(- \otimes y', z') : M^o \longrightarrow SEns$$

où $y' \longrightarrow y$ est un remplacement cofibrant et $z \longrightarrow z'$ un remplacement fibrant, et $Hom_s$ est le $Hom$ à valeurs dans $SEns$ provenant de la structure simpliciale sur $M$. Or, par adjonction ce foncteur est isomorphe au foncteur

$$Hom_s(-, \underline{Hom}(y', z')) : M^o \longrightarrow SEns.$$

Ceci montre que $Hom(- \otimes y, z) : LM^o \longrightarrow Top$ est représenté par l'objet $\underline{Hom}(y', z') \in M$.

Soit $y$ et $z$ deux objets de $LM$. Alors comme ci-dessus, le morphisme $Hom(s(-) \otimes y, z)$ est isomorphe dans $Ho(\mathbb{R}\underline{Hom}(LM^o, Top))$ à $Hom(s(-), \underline{Hom}(y', z'))$. Soit $G : N \longrightarrow M$ l'adjoint à droite de $s$. Alors on sait que $LG : LN \longrightarrow LM$ est un adjoint à droite de $Ls$ (5.3). Ainsi $Hom(s(-), \underline{Hom}(y', z'))$ est isomorphe à $Hom(-, G(\underline{Hom}(y', z')))$. Ce qui montre que $Hom(s(-)\otimes$

$y, z)$ est représenté par l'objet $G(\underline{Hom}(y', z'))$. $\Box$

Soit $k$ un anneau commutatif (unitaire et associatif) et $(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ la 1-catégorie monoidale symétrique obtenue par dérivation de la cmf monoidale symétrique des complexes de $k$-modules munie du produit tensoriel ([Ho, 2.3.3]).

Notons $LParf(k)$ la sous-1-catégorie pleine de $LC(k)$ formée des complexes parfaits (i.e. quasi-isomorphe à des complexes bornés de $k$-modules projectifs de rang fini). Comme la propriété d'être parfait et cofibrant est stable par produit tensoriel dans $C(k)$, ceci définit natuellement une 1-catégorie monoidale symétrique $(LParf(k), \otimes)$. Il existe de plus un morphisme naturel $(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ qui est pleinement fidèle.

**Définition 5.17** *La cmf enrichie dans $1-PrCat$ des 1-précatégories $k$-prétensorielles est définie par*

$$1 - PrTens_k := 1 - PrTens_{(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})}.$$

*Ses $Hom$ à valeurs dans $1-PrCat$ seront notés $Hom_k^{\otimes, s}$.*

1. *La catégorie des objets fibrants et cofibrants de $1-PrTens_k$ sera notée $1-Tens_k$.*

   *A l'aide des $Hom$ à valeurs dans $1-PrCat$, nous verrons $1-Tens_k$ comme une 2-catégorie. Cette 2-catégorie sera appelée la 2-catégorie des 1-catégories $k$-tensorielles.*

2. *Pour $T$ et $T'$ dans $Ho(1-PrTens_k)$, nous noterons*

$$\mathbb{R}Hom_k^{\otimes, s}(T, T') := Hom_k^{\otimes, s}(U, U') \in Ho_1,$$

   *où l'on aura choisit préalablement un remplacement fibrant $T' \hookrightarrow U'$, et un remplacement cofibrant $U \longrightarrow T$ dans $1-PrTens_k$.*

Remarquons que grâce à 2.21 les objets fibants de $1-PrTens_k$ sont automatiquement des 1-catégories $(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$-tensorielles.

*Remarque:* Bien que la notion de 1-catégorie $k$-tensorielle de 5.17 ne soit pas sans relations avec la notion usuelle, elle ne la généralise pas. Le lecteur est donc invité à considérer cette terminologie avec précautions.

### 5.2.2 Champs des foncteurs fibres (cas pointé)

Soit $C = (Sch/k)_{fpqc}$, la gros site des schémas sur $Spec\, k$ muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte. On notera par la suite $n-PrCh(k) := n-Prch(C)$, $n-PrMon(k) := n-PrMon(C)$ et $n-PrMon_s(k) := n-PrMon_s(C)$ (voir 2.33). On notera alors $Hom_k^{\otimes, s}$ les $Hom$ des $n-PrTens_k(k)$ à valeurs dans $n-PrCh(k)$.

Notre but est alors de construire pour tout morphisme $\omega : T \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ dans $Ho(1-PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$, le 0-champ monoidal des endomorphismes $k$-tensoriels de $\omega$.

Il existe un foncteur de Quillen à gauche

$$j^* : n-PrMon_s \longrightarrow n-PrMon_s(k)$$

qui est l'adjoint à gauche du foncteur des sections globales $T \mapsto T(Spec\, k)$. Pour tout $A \in n-PrMon_s$ ce foncteur induit un foncteur de Quillen à gauche

$$j^* : n-PrTens_A \longrightarrow j^*(A)/n-PrMon_s(k) =: n-PrTens_{j^*A}(k).$$

Remarquer que l'unité de $n-PrCh(k)$ est bien l'objet final (qui est cofibrant) et donc le membre de droite est une cmf enrichie dans $n-PrMon_s(k)$ (par 5.12).

En particulier, si on prend $A = (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$, on trouve

$$j^* : 1 - PrTens_k \longrightarrow 1 - PrTens_k(k) := 1 - PrTens_{j^*A}(k).$$

Ce foncteur se dérive enfin en un foncteur

$$\mathbb{L}j^* : Ho(1 - PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})) \longrightarrow Ho(1 - PrTens_k(k)/\mathbb{L}j^*(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})).$$

D'après [S-H, 21.1], on sait que $(LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})$ est un champ sur $(Sch/k)_{fpqc}$ (i.e. $S$-local). Ainsi, si $(LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'$ est un remplacement fibrant dans $1 - PrMon_s(k)$, il existe une équivalence naturelle pour toute $k$-algèbre $k'$

$$(LParf(k'), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'(Spec\, k').$$

Elle est induite par le foncteur monoidal de Quillen à gauche $\widetilde{\cdot}(C(k'), \otimes) \longrightarrow C(Spec\, k', \mathcal{O})$, qui à un $k'$-module $M$ associe le faisceau quasi-cohérent $\widetilde{M}$ sur $Spec\, k'$. En particulier on dispose d'une équivalence dans $1 - PrMon_s$

$$(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'(Spec\, k).$$

Par adjonction, ce omorphisme correspond à un morphisme dans $1 - PrMon_s(k)$

$$j^*(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'.$$

Soit maintenant $\omega : T \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ un morphisme dans $1 - PrTens_k$ (où le membre de doite est dans $1 - PrTen_k$ à l'aide de l'identité). En prenant l'image par $j^*$ et en composant avec le morphisme précédent on obtient

$$j^*(\omega) : j^*(T) \longrightarrow (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})'$$

dans $1 - PrTens_k(k)$. Cet élément est une section globale du 1-préchamp des morphismes

$$j^*(\omega) \in Hom_k^{\otimes, s}(j^*(T), (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})')(Spec\, k).$$

En dérivant à gauche $j^*$ ceci définit pour tout $\omega : T \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ dans $Ho(1{-}Tens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$, un objet

$$\mathbb{L}j^*(\omega) \in Ho(\mathbb{R}Hom^{\otimes, s}(\mathbb{L}j^*(T), (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}}))).$$

Ceci correspond à un objet bien défini à isomorphisme près dans $Ho(*/1 - PrCh(k))$

$$\omega : * \longrightarrow \mathbb{R}Hom_k^{\otimes, s}(\mathbb{L}j^*(T), (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})).$$

Remarquons ici que les foncteurs $B$ et $\Omega_*$ de 2.10 et 2.11 possède des analogues

$$B : n - PrMon(k) \longrightarrow */n - PrCh(k) \qquad \Omega_* : */n - PrCh(k) \longrightarrow n - PrMon(k)$$

qui sont défini objets par objets de $(Sch/k)$. De plus, $B$ est de Quillen à gauche et d'adjoint à droite $\Omega_*$.

On applique alors le foncteur $\mathbb{R}\Omega_*$ pour obtenir

$$\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes, s}(\omega) := \mathbb{R}\Omega_\omega \, \mathbb{R}Hom_k^{\otimes, s}(\mathbb{L}j^*(T), (LParf(-, \mathcal{O}), \otimes^{\mathbb{L}})) \in Ho(0 - PrMon(k)).$$

Ainsi, on dispose de

$$\mathbb{L}B(\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes, s}(\omega)) \in Ho(*/1 - PrCh(k)).$$

La définition qui suit est l'analogue de la gerbe des foncteurs fibres (pointée) d'une catégorie $k$-tensorielles.

**Définition 5.18** *Soit* $\omega : T \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ *un morphisme dans* $Ho(1{-}Tens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$. *Le champ des foncteurs fibres de* $T$ *pointé en* $\omega$ *est défini par*

$$\mathcal{FIB}(T, \omega) := \mathbb{L}B(\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes, s}(\omega)) \in Ho(*/1 - PrCh(k)).$$

La construction précédente est de toute évidence fonctorielle en $(T, \omega)$ et fournit donc un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \left(Ho(1 - PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))\right)^o & \longrightarrow & Ho(*/1 - PrCh(k)) \\ \left(\omega : T \to (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})\right) & \mapsto & \mathcal{FIB}(T, \omega) \end{array}$$

Il existe un foncteur en sens inverse

$$\begin{array}{cccc} (LParf_{\mathcal{O}}(-), \otimes^{\mathbb{L}}) : & Ho(*/1 - PrCh(k)) & \longrightarrow & \left(Ho(1 - PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))\right)^o \\ & (F, *) & \mapsto & (LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}})) \end{array}$$

Le morphisme naturel $F \longrightarrow *$ induit un morphisme

$$(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \simeq (LParf_{\mathcal{O}}(Spec\, k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}})$$

qui fait de $(LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}})$ un objet de $Ho(1 - PrTens_k)$. Enfin, le morphisme $* \longrightarrow F$ induit à son tour un morphisme

$$(LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf_{\mathcal{O}}(Spec\, k), \otimes^{\mathbb{L}}) \simeq (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$$

qui fait de $(LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}})$ un objet de $Ho(1 - Tens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$.

C'est alors un exercice de montrer que ces deux foncteurs sont adjoints l'un de l'autre. On dispose donc pour tout $(T, \omega) \in Ho(1 - PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$ et $(F, *) \in Ho(*/1 - PrCh(k))$ d'un isomorphisme naturel

$$Hom_{Ho(1-Tens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))}((T, \omega), (LParf_{\mathcal{O}}(F), \otimes^{\mathbb{L}})) \simeq Hom_{Ho(*/1-PrCh(k))}((F, *), \mathcal{FIB}(T, \omega)).$$

En particulier, ceci nous donne un morphisme naturel dans $Ho(1 - Tens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$

$$(T, \omega) \longrightarrow (LParf_{\mathcal{O}}(\mathcal{FIB}(T, \omega)), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

### 5.2.3 1-Catégories Tannakiennes

Pour définir la notion de 1-catégorie Tannakienne nous aurons besoin d'introduire la notion de 1-champs affines, qui est une généralisation de champs classifiants de schémas en monoides affines. Nous n'en dirons pas grand chose car cette notion sera reprise en profondeur lors d'un travail futur.

Pour cela notons $Alg_c(k) := Alg_c(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ et $Bialg_c(k) := Coalg(Alg_c(k))$.

On commence par considérer la famille des flèches ([S2, 5])

$$Alg_c(k)^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(Alg_c(k), Top).$$

En remarquant que la structure monoidale sur $Alg_c(k)$ est en fait donnée par la somme directe, il est clair que le morphisme précédent préserve les produits directs. Il provient donc d'un morphisme bien défini dans $Ho(1 - Mon)$

$$Alg_c(k)^o \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{Hom}(Alg_c(k), Top), \times).$$

On compose alors avec le morphisme naturel $(Sch/k)^o \longrightarrow Alg_c(k)$ qui à $X$ associe $\mathcal{O}(X)$ pour obtenir un morphisme dans $Ho(1 - Mon)$

$$Alg_c(k)^o \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}((Sch/k)^o, Top), \times).$$

Or, d'après [S-H, 12.1] le membre de droite s'identifie à $(L0-PrCh(Sch/k), \times^{\mathbb{L}})$, où $(Sch/k)$ est muni de la topologie discrète. On utilise alors le morphisme naturel $(L0-PrCh(Sch/k), \times^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (L0-PrCh(k), \times^{\mathbb{L}})$ de changement de topologie. En fin de compte, on obtient un morphisme dans $Ho(1-Mon)$

$$Spec : Alg_c(k)^o \longrightarrow (L0-PrCh(k), \times^{\mathbb{L}}).$$

Remarquer que pour $S \in (Sch/k)$, il existe des isomorphismes dans $Ho(Top)$

$$Spec\, A(S) \simeq Alg_c(k)_{(A,\mathcal{O}(S))}.$$

En passant aux catégories d'algèbres on en déduit un morphisme dans $Ho_1$

$$Spec : Bialg_c(k)^o \longrightarrow Alg(L0-PrCh(k), \times^{\mathbb{L}}).$$

**Conjecture 5.19** *Il existe un isomorphisme naturel dans* $Ho_n$

$$Alg(Ln-PrCh(k), \times^{\mathbb{L}}) \simeq n-Mon(k).$$

Modulo la conjecture précédente on vient donc de construire un morphisme

$$Spec : Bialg_c(k)^o \longrightarrow 0-Mon(k).$$

Enfin, on compose avec $\mathbb{L}B : Ho(0-PrMon(k)) \longrightarrow Ho(*/1-PrCh(k))$, ce qui nous donne un foncteur

$$\mathbb{L}BSpec : Ho(Bialg_c(k)^o) \longrightarrow Ho(*/1-PrCh(k)).$$

Pour la définition suivante, rappelons qu'un complexe de $k$-modules $D \in Ho((LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$ est de $Tor$-dimension positive si pour tout $k$-module $M$, on a

$$H^i(D \otimes^{\mathbb{L}} M) = 0 \qquad pour\ i < 0.$$

On dira alors que $A \in Ho(Bialg_c(k))$ est de $Tor$-dimension positive, si son complexe sous-jacent $A_{1,1}$ l'est.

**Définition 5.20** *Une gerbe affine pointée est un objet* $F \in Ho(*/1-PrCh(k))$ *isomorphe à* $\mathbb{L}BSpec\,A$*, où* $A \in Ho(Bialg_c(k))$ *est de* $Tor$*-dimension positive.*

**Définition 5.21** *Soit* $\omega : T \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$ *un objet dans* $Ho(1-PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$*. Nous dirons que le couple* $(T,\omega)$ *est une* 1*-catégorie Tannkienne si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. *La* 1*-catégorie* $k$*-tensorielle* $T$ *est fermée (5.15), petite et possède des limites et colimites finies.*

2. *Le moprhisme naturel* $(T,\omega) \longrightarrow (LParf_{\mathcal{O}}(\mathcal{FIB}(T,\omega)), \otimes^{\mathbb{L}})$ *est un isomorphisme dans* $Ho(1-PrTens_k/(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}))$*.*

3. *Le* 1*-champ pointé* $\mathcal{FIB}(T,\omega)$ *est une gerbe affine pointée (5.20).*

4. *Le* 1*-champ pointé* $\mathcal{FIB}(T,\omega)$ *est "*0*-groupique".*

*Remarque:* Pour la condition (4), un 1-champ pointé $(F,*)$ est dit 0-groupique si le faisceau en monoides $\pi_0(\Omega_* F)$ est un faisceau en groupes sur $(Sch/k)_{fpqc}$.

# 6 Applications

Nous terminerons ce travail par trois exemples où l'on espère trouver des 1-catégories Tannakiennes. Ces trois exemples feront l'objets d'études plus complètes ultérieurement, et nous nous contenterons d'énoncer un certain nombres de conjectures.

## 6.1 "A la poursuite des champs": Schématisation des types d'homotopie

A ma connaissance, l'expression "théorie schématique de l'homotopie" apparait pour la première fois dans le manuscrit non-publié de Grothendieck [Gr]. Dans ce dernier, il conjecture l'existence de certains types d'homotopie schématiques sur un schéma $S$. Ces objets sont des $\infty$-champs en groupoides sur $S$ qui possèdent certaines propriétés d'algébricité, et jouent le rôle des types d'homotopie dans le cadre de la géométrie algébrique. La "schématisation des types d'homotopie" est alors un foncteur qui à un type d'homotopie $X$ associe son type d'homotopie schématique sur $S$, $X \otimes S$.

Cependant, bien que cette vision très générale ne date que du début des années 80, la recherche de ce foncteur de schématisation remonte en réalité aux travaux de D. Quillen et de D. Sullivan sur l'homotopie rationnelle ([Q2, Su]). En effet, on sait aujourd'hui que la catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles positivement graduées simplement connexes et de type fini est équivalente à celle des champs très présentables et simplement connexes sur $Spec\,\mathbb{Q}$ ([S2, 6]). La théorie de l'homotopie rationnelle possède donc une interprétation entièrement dans le language des champs. Ainsi, la construction $X \mapsto X \otimes S$ doit être pensée comme une complétion (au sens de la topologie algébrique) de $X$ relativement à $S$, généralisant le procédé de rationnalisation de la topologie algébrique.

La construction que je propose ici ne semble pas avoir été considérée jusqu'à présent. Elle possède l'avantage de garder un sens sur tout schéma de base $S$, et aussi de traiter le cas non-simplement connexe et même non-nilpotent. Ainsi, même pour $S = Spec\,\mathbb{Q}$, notre construction produit un objet nouveau dont nous avons pas trouver de trace dans la littérature.

Soit $k$ un anneau commutatif noethérien, et soit $X$ un $CW$ complexe fini et connexe, muni d'un point de base $x \in X$. On considère $C(X,k)$ la cmf monoidale symétrique simpliciale des complexes de $k$-modules sur $X$. Le morphisme $p : X \longrightarrow *$ induit un foncteur monoidal symétrique de Quillen à gauche

$$p^* : C(*,k) = C(k) \longrightarrow C(X,k).$$

Ainsi par 5.16, le morphisme induit par dérivation sur les 1-catégories monoidales symétriques

$$(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LC(X,k), \otimes^{\mathbb{L}})$$

fait de $(LC(X,k), \otimes^{\mathbb{L}})$ une 1-catégorie $(LC(k), \otimes^{\mathbb{L}})$-tensorielle fermée.

**Définition 6.1** *Un objet $E \in C(X,k)$ est appelé parfait s'il est localement quasi-isomorphe sur $X$ à un complexe borné de $k$-modules projectifs de rang finis.*

On note $Parf(X,k)$ la sous-catégorie pleine de $C(X,k)^c$ formée des objets parfaits. Comme cette sous-catégorie est stable par produits tensoriels et équivalences on en déduit une sous-1-catégorie monoidale symétrique pleine

$$(LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}) \hookrightarrow (LC(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Comme de plus le foncteur $p^* : C(k) \longrightarrow C(X,k)$ préserve les objets parfaits, il induit un morphisme dans $Ho(1 - Mon_s)$

$$(LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}})$$

qui fait de $(LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}})$ une 1-catégorie $k$-tensorielle.

Enfin le point $x \in X$ définit un foncteur fibre

$$\omega_x : (LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(\{x\},k),\otimes^{\mathbb{L}}) \simeq (LParf(k),\otimes^{\mathbb{L}})$$

qui est naturellement un morphisme dans $Ho(1-Tens_k/(LParf(k),\otimes^{\mathbb{L}}))$.

**Conjecture 6.2** *Le couple* $((LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}}),\omega_x)$ *est une* 1*-catégorie Tannakienne neutralisée sur* $k$*.*

Admettons pour la suite cette conjecture.

**Définition 6.3** *La schématisation de l'espace pointé* $(X,x)$ *sur* $k$ *est la gerbe affine pointée*

$$(X\otimes k,x) := \mathcal{FIB}(LParf(X,k),\omega_x).$$

*Les "groupes" d'homotopie schématiques de* $X$ *pointés en* $x$ *sont les faisceaux sur* $(Sch/k)_{fpqc}$

$$\pi_m^{Sch}(X,x) := \pi_m(X\otimes k,x).$$

*Remarque:* On dispose d'un isomorphisme dans $Ho(1-Tens_k)$

$$(LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}}) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}^{\otimes,s}(j^*\Pi_1 X, LParf(k)),$$

où $\Pi_1(X)$ est la 1-catégorie associé par induction à l'ensemble simplicial $Sing(X)$ ([S-H, 2]), et $j^* : 1-PrCat \longrightarrow 1-PrMon_s$ est l'adjoint à gauche de $T\mapsto T_1$.

Par adjonction, cet isomorphisme donne un morphisme dans $Ho_1$

$$\Pi_1 X \longrightarrow \mathbb{R}Hom_k^{\otimes,s}((LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}}),(LParf(k),\otimes^{\mathbb{L}}))(Spec\, k).$$

En considérant le morphisme induit sur les endomorphismes de $x\in\Pi_1 X$ on trouve un morphisme dans $Ho(0-Mon)$

$$\Omega_x Sing(X) \longrightarrow \mathbb{R}End_k^{\otimes,s}(\omega_x)(Spec\, k),$$

ou encore en morphisme dans $Ho(*/1-Ch(k))$

$$u : j^*B\Omega_x Sing(X) \simeq j^*\Pi_1 X \longrightarrow (X\otimes k,x).$$

On peut alors vérifier que le morphisme naturel $(LParf(X,k),\otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow Parf_{\mathcal{O}}(\mathcal{FIB}(LParf(X,k),\omega_x))$ a pour inverse

$$u^* : Parf_{\mathcal{O}}(X\otimes k) \longrightarrow Parf_{\mathcal{O}}(j^*\Pi_1 X).$$

Comme $u^*$ est une équivalence, on peut donc penser à $(X\otimes k,x)$ comme à une complétion (au sens de la topologie algébrique) pour la théorie cohomologique non-abélienne $X\mapsto LParf(X,k)$.

Le morphisme $u : j^*\Pi_1 X \longrightarrow (X\otimes k,x)$ possède les deux propriétés fondamentales suivantes. Elle se déduisent directement du fait que $u$ induit une équivalence sur les catégories dérivées de complexes parfaits.

- Notons $Vect(X\otimes k)$ la catégorie des fibrés vectoriels sur le champ $(X\otimes k,x)$. C'est par définition la sous-catégorie pleine de $Parf_{\mathcal{O}}(X\otimes k,x)$ formée des complexes réduit à un fibré vectoriel en degré 0. Notons aussi $Vect(X,k)$ la catégories des systèmes locaux de $k$-modules projectifs et de rang fini sur $X$. Alors, le foncteur $u^* : Vect(X\otimes k) \longrightarrow Vect(X,k)$ est une équivalence de catégorie.

- Pour tout fibré vectoriel $\mathbb{V} \in Vect(X \otimes k)$, le morphisme naturel

$$u^* : H^m((X \otimes k, x), \mathbb{V}) \longrightarrow H^m(X, u^*\mathbb{V})$$

  est un isomorphisme. En particulier

$$H^m((X \otimes k, x), \mathcal{O}) \longrightarrow H^m(X, k).$$

Pour tout morphisme entre $CW$-complexes finis et connexes $f : Y \longrightarrow X$ il existe une image réciproque

$$f^* : (LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(Y,k), \otimes^{\mathbb{L}}).$$

Ce morphisme induit pour tout $y \in Y$ un morphisme de 1-champs pointés

$$f_* : (Y \otimes k, y) \longrightarrow (X \otimes k, f(x)).$$

Ceci définit donc un foncteur

$$- \times k : */CWF \longrightarrow Ho(*/1 - Ch(k)),$$

de la catégorie des $CW$-complexes finis et pointés vers celle des 1-champs pointés sur $(Sch/k)_{fpqc}$.

**Lemme 6.4** *Pour tout CW-complexe fini et connexe $X$, quelque soit $x$ et $y$ dans $X$ les deux morphismes*

$$\omega_x, \omega_y : (LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})$$

*sont égaux dans $Ho(1 - Tens_k)$.*

*Preuve:* Soit $p : P \longrightarrow X$ une fibration avec $P$ un $CW$ contractile, et $x' \in P$ un point tel que $p(x') = x$. On dispose d'un diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[rr, "p^*"] \arrow[dr, "\omega_x"'] & & (LParf(P,k), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[dl, "\omega_{x'}"] \\ & (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}}) & \end{tikzcd}$$

Or, comme $P$ est contractile le morphisme $\omega_{x'}$ est un isomorphisme dans $Ho(1-Tens_k)$. De plus son inverse est $q^*$, où $q : P \longrightarrow *$ est la projection sur le point.

Ainsi, le diagramme précédent montre que $\omega_x = (q^*)^{-1} \circ p^*$, ce qui est indépendant de $x$. $\Box$

**Corollaire 6.5** *Pour tout CW-complexe fini et connexe et $x,y \in X$, les champs $(X \otimes k, x)$ et $(X \otimes k, y)$ sont isomorphes (non canoniquement) dans $Ho(*/1 - Ch(k))$.*

*Preuve:* En effet le choix d'un isomorphisme entre $\omega_x$ et $\omega_y$ dans

$$Ho(\mathbb{R}Hom_k^{\otimes,s}((LParf(X,k), \otimes^{\mathbb{L}}), (LParf(k), \otimes^{\mathbb{L}})))$$

donne un isomorphisme entre les champs $\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes,s}(\omega_x)$ et $\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes,s}(\omega_y)$. $\Box$

Le champ $(X \otimes k, x)$ est donc essentiellement indépendant du choix de $x$.

**Définition 6.6** *Un morphisme entre deux CW-complexes finis et connexes $f : Y \longrightarrow X$ est une $k$-équivalence si le foncteur induit sur les catégories homotopiques*

$$f^* : Ho(LParf(X,k)) \longrightarrow Ho(LParf(Y,k))$$

*est une équivalence.*

Le foncteur précédent se factorise donc par la catégorie homotopique de $*/CWF$ localisée suivant les $k$-équivalences

$$- \otimes k : Ho(*/CWF)_k \longrightarrow Ho(*/1 - Ch(k)).$$

De plus, comme $LParf(X,k) \simeq \mathbb{R}Hom(Ind_0^1(X), LParf(k))$, toute équivalence d'homotopie est aussi une $k$-équivalence. Lorsque $k$ est un corps on possède de plus le critère suivant.

Un morphisme $f : (Y,y) \longrightarrow (X,x)$ est une $k$-équivalence si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées.

- Le morphisme de groupes $f_* : \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(X,x)$ induit un isomorphisme sur les complétés pro-algébriques sur $k$.
- Pour tout système local de $k$-espaces vectoriels de dimensions finis $L$ sur $X$, le morphisme naturel
$$f^* : H^*(X,L) \longrightarrow H^*(Y, f^*L)$$
est un isomorphisme.

**Conjecture 6.7** *Si $k$ est un corps, alors pour tout CW-complexe fini, connexe et pointé $(X,x)$ les groupes $\pi_m(X \otimes k, x)$ sont représentés par des schémas en groupes affines.*

On peut même espérer "calculer" les groupes $\pi_m(X \otimes k, x)$ dans certains cas.

**Conjecture 6.8** *Soit $k$ un corps et $X$ un CW-complexe fini, et connexe.*

- *Si $k$ est de caractéristique nulle et $X$ simplement connexe, alors on a*
$$\pi_m(X \otimes k, x) \simeq \pi_m(X,x) \otimes \mathcal{O}.$$
- *Si $k$ est de caractéritique positive $p$ et $X$ simplement connexe, alors*
$$\pi_m(X \otimes k, x) \simeq \pi_m(X,x)_p^{\wedge},$$
*(où $M_p^{\wedge}$ désigne le complété $p$-adique du groupe $M$).*
- *En général $\pi_1(X \otimes k, x)$ est le complété pro-algébrique du groupe $\pi_1(X,x)$, et les $\pi_m(X \otimes k, x)$ sont des schémas en groupes pro-unipotents.*

*Remarques:*

- La conjecture précédente prévoit que pour $X$ simplement connexe $(X \otimes \mathbb{Q}, x)$ est un modèle pour l'homotopie rationnelle de $X$. Ceci implique en particulier que $(X \otimes \mathbb{Q}, x)$ peut-être décrit à l'aide de l'algèbre différentielle gradué $C^*(X,\mathbb{Q})$. Plus précisemment, si $\mathbb{Q} - dga_c$ est la cmf des algèbres différentielles graduées commutatives on doit avoir pour tout $S \in (Sch/\mathbb{Q})$
$$(X \otimes \mathbb{Q}, x)(S) \simeq \mathbb{R}Hom(C^*(X,\mathbb{Q}), \mathcal{O}(S)),$$
où $\mathbb{R}Hom$ est le "function complex" dans $\mathbb{Q} - dga_c$ ([Ho, 5.4]).

  De la même façon, toujours pour $X$ simplement connexe, $(x \otimes \mathbb{F}_p, x)$ est un modèle pour l'homotopie $p$-adique de $X$. On doit donc avoir
$$(X \otimes \mathbb{F}_p, x)(S) \simeq \mathbb{R}Hom(C^*(X, \mathbb{F}_p), \mathcal{O}(S)),$$
où le membre de droite est le $Hom$ simplicial dérivé dans la catégorie des $E_\infty$-algèbres sur $\mathbb{F}_p$.

- Modulo la conjecture reliant les $E_\infty$-algèbres aux algèbres au sens où nous l'utilisons, la conjecture précédente permet probablement de donner une nouvelle preuve du théorème de Mandell [Ma]. En fait, totalement indépendemment des $E_\infty$-algèbres, elle implique que le foncteur $X \mapsto X \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ induit un plongement de la catégorie homotopique des $CW$ finis et simplement connexes modulo les $\mathbb{F}_p$-équivalences dans la catégorie $Ho(*/1 - Ch(\overline{\mathbb{F}}_p))$.

- On ne peut pas attendre que $\pi_m(X \otimes \mathbb{Q}, x) \simeq \pi_m(X, x) \otimes \mathbb{Q}$ pour $X$ non simplement connexe. En effet, il apparait ici le même phénomène que pour le complétions profinies d'espaces topologiques, à savoir que le morphisme naturel $\pi_m(X, x) \longrightarrow \pi_m(X \otimes k, x)$ peut-être nul et ce même si $\pi_m(X, x)$ est sans torsion. On peut par exemple trouver des espaces $X$ tels que $\pi_2(X, x) = 0$ mais $\pi_2(X \otimes k, x) \neq 0$.

- Il est important de remarquer que bien que $X \otimes \mathbb{Q}$ coincide conjecturalement avec l'homotopie rationnelle lorsque $X$ est simplement connexe, ce n'est plus le cas pour le cas non simplement connexe. En effet, le groupe fondamental du type d'homotopie rationnel de $X$ est isomorphe au complété pro-unipotent du groupe $\pi_1(X, x)$. Ainsi, l'homotopie rationnelle de $X$ ne voit pas les représentations réductives du groupes fondamental. Or, la conjecture précédente prévoit que $\pi_1(X \otimes \mathbb{Q}, x)$ possède les mêmes représentations linéaires que $\pi_1(X, x)$. Le lecteur se convaincra sans difficultés que le groupe $\pi_1(X \otimes \mathbb{Q}, x)$ est alors beaucoup plus gros que le complété pro-unipotent. De façon plus générale, si $X^{nil}$ est le type d'homotopie rationnelle de $X$ ([Q2]), alors les groupes $\pi_m(X^{nil}, x)$ sont des représentations unipotentes de $\pi_1(X, x)$. En contre partie les groupes $\pi_m(X \otimes \mathbb{Q}, x)$ sont des représentations linéaires quelconques de $\pi_1(X, x)$. La conclusion est que le champ $X \otimes \mathbb{Q}$ contient généralement beaucoup plus d'informations que $X^{nil}$. Il en est évidemment de même dans le cas où $k = \overline{\mathbb{F}}_p$, le champ $(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, x)$ contient beaucoup plus d'information que le type d'homotopie $p$-adique de $X$.

Signalons enfin la conjecture suivante concernant la compatibilité avec certains changement de bases. Notons dès à présent que $X \mapsto X \otimes k$ ne peut pas être compatible avec tous les changements de bases. En effet, si $X = S^1$, alors $\pi_1(X \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ est le complété pro-algébrique de $\mathbb{Z}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il est donc isomorphe à $\mathbb{G}_a \times D(\overline{\mathbb{Q}}^*)$ (où $D(M)$ est le schéma en groupes diagonalisable avec $M$ comme groupe des caractères). De même, $\pi_1(S^1 \otimes \mathbb{C}) \simeq \mathbb{G}_a \times D(\mathbb{C}^*)$. On voit donc que

$$\pi_1(S^1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}) \times_{Spec\, \overline{\mathbb{Q}}} Spec\, \mathbb{C} \neq \pi_1(S^1 \otimes \mathbb{C}).$$

**Conjecture 6.9** *Soit $k$ un anneau régulier et $p \in Spec\, k$ un idéal premier. Alors le morphisme naturel*

$$(X \otimes k/p, x) \longrightarrow (X \otimes k, x) \times_{Spec\, k} Spec\, k/p$$

*est un isomorphisme dans $Ho(*/1 - Ch(k/p))$.*

Plus généralement on s'attend à ce que $(X \otimes k) \times_{Spec\, k} Spec\, k' \simeq X \otimes k'$ dès que $f : Spec\, k' \longrightarrow Spec\, k$ est un morphisme parfait (i.e. $f_*$ préserve les complexes parfaits).

Prenons par exemple $X$ simplement connexe. Alors par 6.8 et la conjecture ci-dessus, le champs $X \otimes \mathbb{Z}$ est tel que $(X \otimes \mathbb{Z}) \times_{Spec\, \mathbb{Z}} Spec\, \mathbb{Z}/p$ soit un modèle pour le type d'homotopie $p$-adique de $X$, et $(X \otimes \mathbb{Z}) \times_{Spec\, \mathbb{Z}} Spec\, \mathbb{Q}$ un modèle pour son type d'homotopie rationnelle. Le champ $X \otimes \mathbb{Z}$ joue donc le rôle d'une famille continue dont les fibres spéciales sont les complétions $p$-adique de $X$ et la fibre générique est la complétion rationnelle. De plus il est raisonnable d'attendre que $X \otimes \mathbb{Z}$ détermine $X$, dans le sens où $X \otimes \mathbb{Z} \simeq Y \otimes \mathbb{Z}$ implique $X \simeq Y$. La construction $X \otimes \mathbb{Z}$ est d'un certain point de vue dual à celle de [Sm], mais possède l'avantage d'être compatible avec la réduction modulo $p$.
Pour donner un exemple, si $X$ est simplement connexe avec $\pi_2(X) = \mathbb{Z}$, alors le groupe $\pi_2(X \otimes \mathbb{Z})$ est un schéma en groupes plat sur $\mathbb{Z}$, dont la fibre générique est $\mathbb{G}_a$, et la fibre en $p$ est le groupe profini $\mathbb{Z}_p^\wedge$. Ce groupe avait utérieurement déjà été identifié comme le "complété pro-unipotent du groupe $\mathbb{Z}$ sur $Spec\, \mathbb{Z}$" ([Sau, *A*.1.7.]).

## 6.2 Théorie de Hodge non-abélienne

Supposons que $X$ soit une variété lisse et projective sur $\mathbb{C}$. La théorie de Hodge non-abélienne peut-être pensée comme l'étude des restrictions obtenue sur le type d'homotopie de $X_{top}$ de part sa structure algébrique. Les résultats les plus spectaculaires étant les restrictions sur les groupes fondamentaux obtenues par C. Simpson dans [S3]. Celles-ci passent par l'existence d'une structure de Hodge non-abélienne sur le quotient réductif du complété pro-algébrique du groupe fondamental de $X$. Nous donnerons ici la construction d'une "filtration de Hodge" sur $(X \otimes \mathbb{C}, x)$, généralisant ainsi celle définie sur le complété pro-algébrique de $\pi_1(X, x)$. Tout comme la structure de Hodge non-abelienne permet de donner des restrictions sur les groupes fondamentaux, on peut imaginer donner des restrictions sur le type d'homotopie en utilisant une "structure de Hodge non-abelienne" sur le champ $(X \otimes \mathbb{C}, x)$. La filtration de Hodge décrite ci-dessous en est un des premiers ingrédients. Siganlons que la construction de la structure de Hodge non-abélienne complète fait actuellement l'objet d'un travail en commun avec L. Katzarkov.

Rappelons que pour $X$ une variété projective lisse (connexe) on construit le champ $X_{Dol}$ ([S2, 9.2]), qui est le 1-champ classifiant du schéma en groupes formel $\hat{TX} \longrightarrow X$ (le complété du schéma en groupes tangent le long de la section nulle). Ce champ, qui vit naturellement dans $Ho(1-Ch(\mathbb{C}))$, est muni d'une action du groupe discret $\mathbb{C}^*$, c'est à dire qu'il existe un morphisme dans $Ho(1-Mon)$

$$B\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}End(X_{Dol}).$$

Cette action fixe les objets de $X_{Dol}$ est opère par multiplication dans les fibres de $\hat{TX} \longrightarrow X$. On en déduit donc une action sur les 1-catégories de complexes parfaits

$$B\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}End_k^{\otimes,s}(\mathbb{L}Parf_{\mathcal{O}}(X_{Dol}), \otimes^{\mathbb{L}}),$$

Il est démontré dans [S6, 3.4] qu'il existe un morphisme pleinement fidèle

$$(LParf(X_{top}, \mathbb{C}), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (Parf_{\mathcal{O}}(X_{Dol}), \otimes^{\mathbb{L}})$$

dont l'image essentielle est la sous-1-catégorie $\mathbb{C}$-tensorielle pleine formée des complexes parfaits dont les faisceaux de cohomologie sont des fibrés de Higgs $E$ semi-stables avec des classes de Chern rationnellement nulles. Cette sous-1-catégorie $\mathbb{C}$-tensorielle est donc stable par l'action du groupe $\mathbb{C}^*$, et on en déduit donc une action

$$B\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}End_k^{\otimes,s}((LParf(X_{top}, \mathbb{C}), \otimes^{\mathbb{L}})).$$

Soit $x \in X(\mathbb{C})$ un point de base. Alors le foncteur fibre $\omega_x : (LParf(X_{top}, \mathbb{C}), \otimes^{\mathbb{L}}) \longrightarrow (LParf(\mathbb{C}), \otimes^{\mathbb{L}})$ est fixe par l'action de $\mathbb{C}^*$, et donc $\mathbb{C}^*$ opère sur son champ des endomorphismes $\mathbb{C}$-tensoriels, et donc sur le champ $(X_{top} \otimes \mathbb{C}, x)$

$$B\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}End(X_{top} \otimes \mathbb{C}, x).$$

**Définition 6.10** *La filtration de Hodge non abélienne est l'action de $\mathbb{C}^*$ sur le champ $(X_{top} \otimes \mathbb{C}, x)$ définie précédemment.*

Par fonctorialité l'action de $\mathbb{C}^*$ induit une action sur les groupes d'homotopie de $(X_{top} \otimes \mathbb{C}, x)$ ainsi que sa cohomologie à coefficients dans $\mathcal{O}$. La définition précédente est alors justifiée par la conjecture suivante.

**Conjecture 6.11** *Suuposons que les conjectures 6.2, 6.7 et 6.8 soient vraies.*

- *L'action de $\mathbb{C}^*$ sur $H^m(X_{top} \otimes \mathbb{C}, \mathcal{O}) \simeq H^m(X_{top}, \mathbb{C})$ est compatible avec la filtration de Hodge sur $H^m(X_{top}, \mathbb{C})$.*

- *L'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\pi_1(X_{top}\otimes\mathbb{C},x)$ est l'action définie dans [S6, Thm. 6].*
- *Si $X$ est simplement connexe, l'action de $\mathbb{C}^*$ sur les groupes $\pi_m(X_{top}\otimes\mathbb{C},c)\simeq\pi_m(X,x)\otimes\mathbb{C}$ est compatible avec la filtration de Hodge définie dans [Mo].*

Ainsi, l'objet $(X\otimes\mathbb{C},x)$, muni de son action de $\mathbb{C}^*$, doit contenir toutes les filtrations de Hodge que l'on sait définir sur les invariants d'homotopie de $X_{top}$. En un certain sens, $(X_{top}\otimes\mathbb{C},x)$ est "la plus grande partie du type d'homotopie de $X_{top}$" sur laquelle on peut espérer définir une filtration de Hodge.

## 6.3 Homotopie des schémas

Le formalisme Tannakien possède la propriété d'être applicable dans de nombreux autres contextes que celui de la théorie de l'homotopie usuelle. Dans ce dernier paragraphe nous citerons deux des exemples standards où l'on devrait pouvoir trouver des 1-catégories Tannakiennes.

- *Type d'homotopie de De Rham*

  On se fixe $X$ un schéma lisse sur un corps $k$ de caractéristique nulle, que l'on supposera algébriquement clos. On dispose alors du champ sur $Spec\, k$, $X_{DR}$, défini par $X_{DR}(Y):=Hom(Y_{red},X)$ ([S2, 9.1]). On sait alors que

  $$H^*(X_{DR},\mathcal{O})\simeq H^*_{DR}(X)$$

  est la cohomologie de De Rham algébrique de $X$. On considére $(LParf_{\mathcal{O}}(X_{DR}),\otimes^{\mathbb{L}})$, la 1-catégorie $k$-tensorielle des complexe parfaits de $\mathcal{O}$ sur $X_{DR}$. Alors, si $x\in X(k)$ on obtient un foncteur fibre

  $$\omega_x^{DR}:(LParf_{\mathcal{O}}(X_{DR}),\otimes^{\mathbb{L}})\longrightarrow(LParf(k),\otimes^{\mathbb{L}}).$$

  **Définition 6.12** *Le type d'homotopie de De Rham de $X$ est le champ*

  $$(X^{DR},x):=\mathbb{L}B\mathbb{R}\underline{End}_k^{\otimes,s}(\omega_x^{DR}).$$

  **Conjecture 6.13** *Le couple $((LParf_{\mathcal{O}}(X_{DR}),\otimes^{\mathbb{L}}),\omega_x^{DR})$ est une 1-catégorie Tannakienne neutralisée sur $k$.*

  Cette conjecture impliquerait par exemple que

  $$H^m(X^{DR},\mathcal{O})\simeq H^m_{DR}(X).$$

  Si $k=\mathbb{C}$ et $X$ est lisse et projective, la correspondance de Riemann-Hilbert permet d'affirmer que

  $$(X^{DR},x)\simeq(X_{top}\otimes\mathbb{C},x).$$

  En particulier ceci donne un moyen purement algébrique de décrire $(X_{top}\otimes\mathbb{C},x)$. C'est un analogue non abélien du théorème reliant cohomologie de De Rham algébrique et cohomologie transcendante. Cependant, si $X$ n'est plus projective, la présence des singularités non régulières à l'infini implique que $(X^{DR},x)$ n'est pas équivalent à $(X_{top}\otimes\mathbb{C},x)$ en général. Par exemple, le groupe $\pi_1(X^{DR},x)$ est isomorphe au groupe de Galois-différentiel du schéma $X$, et est donc à prioris beaucoup plus gros que le complété pro-algébrique de $\pi_1(X_{top},x)$. C'est pourquoi $X^{DR}$ portera aussi le nom de type d'homotopie Galois-différentiel de $X$. Je dois préciser que les groupes $\pi_m(X^{DR},x)$ pour $m>1$ reste pour moi très mystérieux, et je ne connais aucune références bibliographiques où ils sembleraient apparaitre. Il est cependant possible que $\pi_2(X^{DR}, x)$ puisse jouer un rôle dans l'étude des familles de groupes de Galois-différentiels, en apparaissant dans certaines suites exactes longues d'homotopie associées à des fibrations.

- *Type d'homotopie $l$-adique*

Soit $X$ un schéma, $l$ un nombre premier avec $l$ inversible sur $X$, et tel que $X$ soit de dimension cohomologique (étale) fini pour les faisceaux de $l$-torsion. On suppose aussi que tous les $H^i(X_{et}, F)$ sont de type fini pour tout faisceau de $l$-torsion $F$. Soit $x$ un point géométrique de $X$.

Considérons la catégorie $C(X, m)$ des complexes de préfaisceaux de $\mathbb{Z}/l^m$-modules sur $X_{et}$. C'est une cmf monoidale symétrique (voir C), et on dispose pour tout $m$ d'un foncteur de Quillen à gauche

$$- \otimes \mathbb{Z}/l^{m-1} : C(X, m) \longrightarrow C(X, m-1).$$

Si on note $\omega_x : C(X, m) \longrightarrow C(\mathbb{Z}/l^m)$ le foncteur fibre en $x$, et $p^* : C(\mathbb{Z}/l^m) \longrightarrow C(X, m)$ le foncteur "complexe constant", on dispose d'un diagramme de foncteurs de Quillen à gauches monoidaux symétriques

$$\begin{tikzcd}
C(\mathbb{Z}/l^m) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & C(\mathbb{Z}/l^{m-1}) \arrow[d, "p^*"] \\
C(X, m) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_x"'] & C(X, m-1) \arrow[d, "\omega_x"] \\
C(\mathbb{Z}/l^m) \arrow[r] & C(\mathbb{Z}/l^{m-1})
\end{tikzcd}$$

Notons que les composées verticales sont des identités. Par dérivation on obtient donc un diagramme de 1-catégories monoidales symétriques

$$\begin{tikzcd}
(LC(\mathbb{Z}/l^m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & (LC(\mathbb{Z}/l^{m-1})\otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[d, "p^*"] \\
(LC(X, m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_x"'] & (LC(X, m-1), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[d, "\omega_x"] \\
(LC(\mathbb{Z}/l^m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] & (LC(\mathbb{Z}/l^{m-1}), \otimes^{\mathbb{L}})
\end{tikzcd}$$

On se restreint maintenant aux sous-1-catégories monoidales pleines formées des complexes parfaits. On obtient ainsi un diagramme dans $1 - Mon_s$

$$\begin{tikzcd}
(LParf(\mathbb{Z}/l^m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & (LParf(\mathbb{Z}/l^{m-1})\otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[d, "p^*"] \\
(LParf(X, m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_x"'] & (LParf(X, m-1), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[d, "\omega_x"] \\
(LParf(\mathbb{Z}/l^m), \otimes^{\mathbb{L}}) \arrow[r] & (LParf(\mathbb{Z}/l^{m-1}), \otimes^{\mathbb{L}})
\end{tikzcd}$$

En passant à la limites sur $m$ (les limites existent dans $1-Mon_s$) ceci donne

$$lim_m(LParf(\mathbb{Z}/l^m),\otimes^{\mathbb{L}})) \longrightarrow lim_m(LParf(X,m),\otimes^{\mathbb{L}}) \xrightarrow{\omega_x} lim_m(LParf(\mathbb{Z}/l^m),\otimes^{\mathbb{L}})),$$

dont le morphisme composé est l'identité. Or, on peut vérifier que

$$lim_m(LParf(\mathbb{Z}/l^m),\otimes^{\mathbb{L}})) \simeq (LParf(\mathbb{Z}_l),\otimes^{\mathbb{L}}),$$

où $\mathbb{Z}_l$ est l'anneau des entier $l$-adique. Ainsi, le diagramme précédent munit le membre du milieu d'une structure de 1-catégorie $\mathbb{Z}_l$-tensorielle avec foncteur fibre.

**Conjecture 6.14** *La 1-catégorie des complexes parfaits $l$-adique sur $X$ est par définition*

$$(LParf(X,l),\otimes^{\mathbb{L}}) := lim_m(LParf(X,m),\otimes^{\mathbb{L}}).$$

*Munie du foncteur fibre $\omega_x$ c'est une 1-catégorie Tannakienne neutralisée sur $\mathbb{Z}_l$.*

**Définition 6.15** *Le type d'homotopie $l$-adique de $X$ pointé en $x$ est défini par*

$$(X_l,x) := \mathbb{L}B\mathbb{R}\underline{End}^{\otimes,s}_{\mathbb{Z}_l}(\omega_x).$$

On s'attend par exemple aux faits suivants.

- Le groupe $\pi_1(X_l,x)$ a pour fibre générique le groupe de Tannaka de la catégorie des faisceaux $\mathbb{Q}_l$-adique lisses sur $X$. Plus généralement, la catégorie des fibrés vectoriels sur $(X_l,x)$ est équivalente à celle des représentations continues $\pi_1^{et}(X,x) \longrightarrow Gl_m(\mathbb{Z}_l)$. De plus, pour $L$ une telle représentation, et $\mathbb{L}$ le fibré correspondant sur $X_l$, on a

$$H^*((X_l,x),\mathbb{L}) \simeq H^*_{et}(X,L).$$

- Les groupes $\pi_m(X_l,x)$ sont par définition les groupes d'homotopie $l$-adiques de $X$. Leurs fibres génériques sont des $\mathbb{Q}_l$-epaces vecoriels linéairement compacts, sur lequel $\pi_1(X_l,x)\times_{Spec\,\mathbb{Z}_l} Spec\,\mathbb{Q}_l$ opère continuement.
- On a

$$\pi_m(X_l,x)\times_{Spec\,\mathbb{Z}_l} Spec\,\mathbb{Z}/l \simeq \pi_m^{et,l}(X,x),$$

  où $\pi_m^{et,l}(X,x)$ est le $m$-ème groupe d'homotopie du complété $l$-adique du type d'homotopie étale de $X$ ([F]).
- La sous-1-catégorie $\mathbb{Z}_l$-tensorielle pleine de $(LParf(X,l),\otimes^{\mathbb{L}})$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont unipotents (i.e. extensions successives de faisceaux $l$-adiques constants), munie de la restriction du foncteur fibre $\omega_x$ est encore Tannakienne. Elle correspond à un champ $(X_l^{uni},x)$, muni d'un morphisme $(X_l,x)\longrightarrow(X_l^{uni},x)$. La fibre générique de $(X_l^{uni},x)$ est alors équivalent au spectre de la $\mathbb{Q}_l$-algèbre différentielle graduée définie dans [D3, $V$] (voir aussi [Sp2]).

Bien entendu il existe de nombreux autres contextes d'applications. Citons par exemple les complexes parfaits de $F$-isocrystaux, les complexes parfaits de modules de Hodge mixtes, ou encore dans le meilleur des mondes des complexes parfaits motiviques.

# A $n$-Catégories

Cet appendice regroupe quelque définitions de la théorie des $n$-catégories. Pour les détails nous renvoyons à [Ta, S-H, S3, S4, S5].

Les définitions qui suivent utilisent une récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, $0 - PrCat$ est la cmf des ensembles simpliciaux, et tous les objets sont des 0-catégories.

**Définition A.1** • *Une $n$-précatégorie de Segal ($n$-précatégorie par la suite) est la donnée d'un foncteur*

$$\begin{array}{rccc} A : & \Delta^o & \longrightarrow & (n-1) - PrCat \\ & [p] & \mapsto & A_p \end{array}$$

*tel que $A_0$ soit en ensemble.*

- *Une $n$-précatégorie $A$ est une $n$-catégorie si $A$ vérifie les conditions suivantes.*
  1. *Pour tout $[p] \in \Delta^o$, $A_p$ est une $(n-1)$-catégorie.*
  2. *Pour tout $[p]$ le morphisme de Segal ([S-H])*

     $$A_p \longrightarrow A_1 \times_{A_0} A_1 \times \cdots \times_{A_0} A_1$$

     *est une équivalence de $(n-1)$-catégories.*
- *Pour toute $n$-catégorie $A$ on définit sa catégorie homotopique $Ho(A)$ comme la catégorie ayant $A_0$ comme ensemble d'objets, et l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $Ho(A_1)$ comme morphismes.*
- *Un morphisme de $n$-catégories $f : A \longrightarrow B$ est une équivalence s'il vérifie les deux conditions suivantes.*
  1. *Pour tout $[p] \in \Delta^o$, le morphisme*

     $$f_p : A_p \longrightarrow B_p$$

     *est une équivalence de $(n-1)$-catégories.*
  2. *Le morphisme induit $f : Ho(A) \longrightarrow Ho(B)$ est une équivalence de catégories.*

*La catégorie des $n$-précatégories sera notée $n - PrCat$.*

Pour $A$ une $n$-précatégorie, et $(x,y) \in A_0^2$ une paire d'objets, on notera $A_{(x,y)}$ la sous-$(n-1)$-précatégorie de $A_1$ des objets de source $x$ et but $y$ ([S-H, p. 17]). Remarquons alors que l'on a

$$A_1 = \coprod_{(x,y)\in A_0^2} A_{(x,y)}.$$

Il nous arrivera très souvent de définir une $n$-précatégorie par un ensemble d'objets $A_0$, des $(n-1)$-précatégories $A_{(x,y)}$ pour tout $(x,y) \in A_0^2$, et des compositions

$$A_{(x,y)} \times A_{(y,z)} \longrightarrow A_{(x,z)}.$$

C'est à dire comme une catégorie enrichies dans $(n-1) - PrCat$. L'objet $A_p$ est alors défini par

$$A_p := \coprod_{(x_0,\ldots,x_p)\in A_0^{p+1}} A_{(x_0,x_1)} \times A_{(x_1,x_2)} \times \cdots \times A_{(x_{p-1},x_p)}.$$

Comme $0 - PrCat = SEns$, ceci permet de voir toute catégorie simpliciale, et à fortiorie toute catégorie, comme une 1-précatégorie (et même une 1-catégorie). Cependant, il est important de noter que toutes les $n$-précatégories ne sont pas de ce type là.

De façon générale la composition dans une $n$-catégorie de Segal $A$ n'est définie qu'à équivalence près. C'est à dire que pour trois objets $(x,y,z) \in A_0$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_{(x,y,z)} \arrow[r] \arrow[d] & A_{(x,y)} \times A_{(y,z)} \\ A_{(x,z)} & \end{tikzcd}$$

où le morphisme horizontal est une équivalence dans $(n-1)-PrCat$. C'est la structure simpliciale pour les $A_p$ qui donne des cohérences supérieures pour les différentes compositions d'un élément dans $A_{(x_0,\dots,x_p)}$.

Remarquons aussi que la catégorie homotopique $Ho(A)$ d'une $n$-catégorie est naturellement munie d'une structure de catégorie enrichie dans $Ho((n-1)-PrCat)$.

Le fait central de [S-H, S5] est qu'il existe une opération $n-SeCat : n-PrCat \longrightarrow n-PrCat$ qui tranforme toute $n$-précatégorie en la $n$-catégorie qu'elle engendre. Ainsi, d'après [S5], les $n$-précatégories peuvent être vues comme des systèmes de générateurs et relations pour les $n$-catégories.

L'opération $n-SeCat$ satisfait en particulier les trois propriétés suivantes ([S5]).

1. Pour tout $A \in n-PrCat$, $n-SeCat(A)$ est une $n$-catégorie, munie d'un morphisme fonctoriel en $A$
$$A \longrightarrow n-SeCat(A).$$

2. Si $A$ est une $n$-catégorie, alors le morphisme
$$A \longrightarrow n-SeCat(A)$$
est une équivalence de $n$-catégories.

3. Pour tout $A \in -PrCat$, le morphisme $A \longrightarrow n-SeCat(A)$ induit une équivalence de $n$-catégories
$$n-SeCat(A) \longrightarrow n-SeCat(n-SeCat(A)).$$

La catégorie $n-PrCat$ est alors munie d'une structure de cmf, pour laquelle les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences sont les morphismes $f : A \longrightarrow B$ induisant une équivalence de $n$-catégories

$$f : n-SeCat(A) \longrightarrow n-SeCat(B).$$

**Théorème A.2** *([S-H, Thm. 2.3]) Pour ces définitions, la catégorie $n-PrCat$ est une cmf propre à gauche et cellulaire. De plus, le produit direct la munit d'une structure d'une cmf monoidale symétrique. Enfin, tout objet fibrant dans $n-PrCat$ est une $n$-catégorie.*

**Définition A.3** *Si $A \in Ho_n$ on note $Ho(A) \in Ho_1$ la catégorie homotopique d'un modèle fibrant pour $A$.*

Soit $M$ une cmf enrichie dans $n-PrCat$. On peut alors former la catégorie des objets cofibrants et fibrants dans $M$. Elle est naturellement munie d'une structure de catégorie enrichie dans $n-PrCat$, et donc définit une $(n+1)$-catégorie.

Par exemple le théorème précédent permet de définir la $(n+1)$-catégorie des $n$-catégories. C'est la $(n+1)$-catégorie dont les objets sont les objets fibrants de $n-PrCat$, et dont les morphismes sont les $Hom$ internes provenant de la structure de cmf monoidale.

Supposons que $F : M \longrightarrow N$ soit un foncteur de Quillen à droite entre deux cmf enrichies dans $n-PrCat$, tel que tous les objets de $N$ soient cofibrants. Notons $G : N \longrightarrow M$ son ajoint à gauche, et supposons que $G$ soit un foncteur de catégories en modules sur $n-PrCat$. Alors par adjonction on dispose de morphime naturel dans $n-PrCat$

$$Hom(A,B) \longrightarrow Hom(F(A),F(B)).$$

Ceci permet alors de définir un foncteur de catégories enrichies dans $n-PrCat$

$$E(F) : E(M) \longrightarrow E(N).$$

Par exemple, dans [S-H, 2] il est défini des foncteurs d'induction

$$\Pi_1 : n-PrCat \longrightarrow (n+1)-PrCat,$$

qui sont des foncteurs de Quillen à droite. Son adjoint à gauche est donné par le foncteur "réalisation au dernier degré"

$$Re : (n+1)-PrCat \longrightarrow n-PrCat.$$

Ceci permet de voir $n-PrCat$ comme une cmf enrichie dans $(n+1)-PrCat$, et $Re$ est alors un foncteur de catégories en modules sur $(n+1)-PrCat$. On déduit donc un morphisme de $(n+2)$-catégories

$$\Pi_1(n-Cat) \longrightarrow (n+1)-Cat.$$

Enfin, comme le morphisme d'adjonction $Re\Pi_1 A \longrightarrow A$ est une équivalence ([S-H, 2]), le morphisme précédent est pleinement fidèle. Ceci montre que $n-Cat$ s'identifie naturellement à une sous-$(n+1)$-catégorie pleine de $(n+1)-Cat$, et donc justifie que par la suite toute $n$-précatégorie fibrante sera aussi considérée comme une $m$-précatégorie $\forall m > n$. En prenant tout d'abord un remplacement fibrant, on verra aussi toute $n$-précatégorie comme une $m$-précatégorie $\forall m > n$.

Dans le cas où l'on a un foncteur de Quillen à droite $F : M \longrightarrow N$ comme précédemment, mais que l'on ne dispose plus de l'hypothèse que tous les objets de $N$ sont cofibrants, on peut tout de même construire un foncteur de catégories enrichies dans $Ho_n$

$$Ho(M) \longrightarrow Ho(N).$$

**Définition A.4** *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme entre deux $n$-catégories.*

- *On dit que $f$ est pleinement fidèle si pour tout $(x,y) \in A_0^2$ le morphisme induit*

$$f_{x,y} : A_{(x,y)} \longrightarrow A'_{(f(x),f(y))}$$

  *est une équivalence dans $(n-1)-PrCat$.*

- *On dit que $f$ est conservatif le foncteur induit $f : Ho(A) \longrightarrow Ho(A')$ est conservatif (i.e. un morphisme dans $Ho(A)$ est un isomorphisme si et seulement si son image dans $Ho(A')$ est un isomorphisme).*

*Soit $f : A \longrightarrow A'$ dans $Ho_n$. On dira que $f$ est pleinement fidèle (resp. conservatif) si un représentant $f : B \longrightarrow B'$, où $A \longrightarrow B$ et $A' \longrightarrow B'$ sont des modèles fibrants, est pleinement fidèle (resp. conservatif).*

Rappelons le fait important, que pour $A$ et $B$ dans $n-PrCat$, le morphisme naturel dans $Ho_1$

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(A,B) \longrightarrow Hom(Ho(A),Ho(B))$$

est conservatif ([S4, 2.5.8]).

Siganlons aussi l'existence des notions de limites et colimites dans les $n$-catégories (voir [S4]).

# B Localisation de Dwyer-Kan et 1-catégories

Soit $C$ une catégorie, et $S$ un ensemble de morphismes. D'après [D-K] il existe une catégorie simpliciale $L(C,S)$, qui dépend fonctoriellement du couple $(C,S)$, et tel que la catégorie homotopique de $L(C,S)$ soit équivalente à la catégorie localisée $S^{-1}C$. De plus, il existe aussi un diagramme de catégorie simpliciales

$$\begin{tikzcd} L(C,Isom) \arrow[r] \arrow[d] & L(C,S) \\ C & \end{tikzcd}$$

et $L(C,Isom) \longrightarrow C$ est une équivalence dans $1-PrCat$. En particulier, on en déduit un morphisme fonctoriel dans $Ho_1$

$$C \longrightarrow L(C,S).$$

Ce morphisme possède de la propriété universelle suivante ([S-H, 8.9]). Pour tout $A \in Ho_1$, le morphisme

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(L(C,S),A) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(C,A)$$

est pleinement fidèle. Son image essentielle est constituée des morphismes tel que le foncteur induit $C \longrightarrow Ho(A)$ envoie le éléments de $S$ sur des isomorphismes.

Les trois propriétés fondamentales que nous utiliserons implicitement sont les suivantes.

- Si $F : (C,S) \longrightarrow (D,T)$ et $G : (D,T) \longrightarrow (C,S)$ sont deux foncteurs préservant les équivalences, tel qu'il existe des transformations naturelles $Id \Rightarrow FG$ et $GF \Rightarrow Id$ telles que $A \rightarrow FG(A)$ et $GF(B) \rightarrow B$ sont dans $T$ et $S$ (pour tout $A \in D$ et $B \in C$), alors $LF$ et $LG$ sont inverses l'un de l'autre dans $Ho_1$.

  En particulier, si $M^c$ est la catégorie des objets cofibrants dans une cmf $M$, alors le morphisme naturel

  $$L(M^c, Equiv. \cap M^c) \longrightarrow L(M, Equiv.),$$

  est un isomorphisme dans $Ho_1$ (où $Equiv.$ est l'ensemble des équivalences). De même, si $M^f$ est la catégorie des objets fibrants dans $M$, alors le morphisme naturel

  $$L(M^f, Equiv. \cap M^c) \longrightarrow L(M, Equiv.)$$

  est un isomorphisme dans $Ho_1$. Ou encore

  $$L(M^{cf}, Equiv. \cap M^{cf}) \simeq L(M, Equiv.).$$

- Soit $M$ une cmf simpliciale, et $E(M)$ la catégorie simpliciale des objets fibrants et cofibrants de $M$. Alors il existe un isomorphisme naturel dans $Ho_1$

  $$E(M) \simeq L(M, Equiv.)$$

  où $Equiv.$ est l'ensemble des équivalences dans $M$.

- Le morphisme naturel

  $$L(C \times D, S \times T) \longrightarrow L(C,S) \times L(D,T)$$

  est un isomorphisme dans $Ho_1$.

Lorsque $M$ est une cmf, nous noterons généralement $LM$ la 1-catégorie associée à la catégorie simpliciale $L(M, Equiv.)$. Notons qu'elle est donc naturellement isomorphe dans $Ho_1$ aux 1-catégories $E(M)$, $L(M^c, Equiv.)$, $L(M^f, Equiv.)$ et $L(M^{cf}, Equiv.)$.

# C Structure de cmf monoidale sur les complexes de $\mathcal{O}$-modules

Nous donnerons rapidement ici la définition d'une structure de cmf monoidale symétrique sur la catégorie des complexes de $\mathcal{O}$-modules sur un site annelé $(C, \mathcal{O})$, tel que $C$ admette des produits fibrés. La construction suit celle de la cmf monoidale des $n$-champs de [S-H] et est certainement bien connue, mais nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature. Cependent nous ne donnerons que sa définition, et pour des arguements de preuves nous renvoyons au cas analogue des $n$-champs de [S-H, 5].

Nous noterons $C(C, \mathcal{O})$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur $C$, et $C(k)$ la cmf des complexes de $k$-modules (pour la structure [Ho, 2.3.3]).

Nous dirons qu'un morphisme $f : E \longrightarrow F$ dans $C(C, \mathcal{O})$ est une fibration (resp. équivalence) forte si pour tout objet $X \in C$ le morphisme induit $f_X : E(X) \longrightarrow F(X)$ est une fibration (resp. une équivalence) dans $C(\mathcal{O}(X))$. Alors, par [S-H, 17.1 $(I)$] les classes des fibrations et équivalences fortes définissent une structure de cmf engendrée par cofibrations sur $C(\mathcal{O})$. Cette structure sera appelée la structure forte.

**Définition C.1**
- *Un morphisme dans $C(C, \mathcal{O})$ est une cofibration si c'est une cofibration pour la structure forte.*
- *Un morphisme dans $C(C, \mathcal{O})$ est une équivalence s'il induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie associés.*

**Proposition C.2** *Munie des définitions précédentes de cofibrations et équivalences, la catégorie $C(C, \mathcal{O})$ est une cmf engendrée par cofibration. De plus le produit tensoriel en fait une cmf monoidale symétrique.*

Cette proposition sera essentiellement utilisée dans le cas où $(C, \mathcal{O})$ est le grand site $fpqc$ d'un schéma $X$. Il s'agit donc du site $(Sch/X)_{fpqc}$ formé des schémas sur $X$, muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte et du faisceau d'anneaux $Y \mapsto \mathcal{O}(Y)$. Nous noterons $C(X, \mathcal{O})$ la cmf des complexes de $\mathcal{O}$-modules sur $(Sch/X)_{fpqc}$.

Il est facile de voir que pour tout morphisme de schéma $f : X \longrightarrow Y$, le foncteur d'images réciproques

$$f^* : C(Y, \mathcal{O}) \longrightarrow C(X, \mathcal{O})$$

est de Quillen à gauche et monoidal symétrique. Ainsi, $X \mapsto C(X, \mathcal{O})$ devient un préfaisceau de Quillen monoidal symétrique à gauche ([S-H, 17]) sur le grand site des schémas muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte.

## Références


[A-M] M. Artin, B. Mazur, "Etale homotopy", Lecture Notes in Math. **100**, Springer 1969.

[B-D] J. Baez, J. Dolan, "Higher dimensional algebra and topological quantum field theory", J. Math. Phys. **36** (1995), 6073 − 6105.

[C-Y] L. Crane, D. Yetter, "On algebraic structures implicit in topological quantum field theory", Journal of knots theory and its relations, vol. **8**, (1999), 125 − 163.

[D1] P. Deligne, "Catégories Tannakiennes", in *Grothendieck Festschrift Vol. II*, progress in math. **87**, Birkhauser Boston 1990.

[D2] P. Deligne, "Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points", in *Galois groups over* $\overline{\mathbb{Q}}$ Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, Springer 1989.

[D3] P. Deligne, "La conjecture de Weil $II$", Publ. Math. I.H.E.S. No. **52** (1980), 137 − 252.

[D-K] W. Dwyer, D. Kan, "Simplicial localisations of categories", J. Pure and Appl. Algebra **17** (1980), 267 − 284.

[F] E. Frielander, "Etale homotopy of simplicial schemes", Annals of Math. studies **104**, Princeton university press 1982.

[Gr] A. Grothendieck, "Pursuing stacks", munuscript non publié.

[Hin] V. Hinich, "Virtual operad algebras and realization of homotopy types", preprint $math.QA/9907115$.

[Hi] P. Hirschorn, "Localisation of model categories", livre en préparation; disponible à http://www-math.mit.edu/ psh

[Ho] M. Hovey, "Model categories", Mathematical surveys and monographs, vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[Ja] J. F. Jardine, "Simplicial presheaves", J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), 35 − 87.

[K-M] I. Kritz, J.P. May, "Operads, algebras, modules and motives", Astérisque **233**, Soc. Math. de France 1995.

[M-M] S. Mac Lane, I. Moerdijk, "Sheaves in geometry and logic", Springer-Verlag 1992.

[Le] T. Leinster, "Homotopy algebras for operads", preprint $math.QA/0002180$.

[Ma] M. Mandell, "$E_\infty$-alegbras and $p$-adic homotopy theory ", preprint.

[H-S-S] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, "Symmetric spectras", preprint $math.AT/9801077$.

[Mo] J. Morgan, "The algebraic topology of smooth algebraic varieties", Publ. Math. I.H.E.S. **48** (1978) pp. 137 − 204.

[No] M. Nori, "On the representations of the fundamental group", Compositio Math. **33** (1976) 29 − 41.

[Q1] D. Quillen, "Homotopical algebra", Springer Lecture Notes in Math. **43**, Springer 1967.

[Q2] D. Quillen, "Rational homotopy theory", Ann. of Math. **90** (1969) 205 − 295.

[SGA1] "Revêtements étales et groupe fondamental", Lecture notes in Math. **224**, Springer 1971.

[Sa] N. Saavedra, "Catégories Tannakiennes", Lecture Notes in Math. **265**, Springer 1972.

[Sau] J. Sauloy, "Théorie de Galois des équatiosn aux $q$-différences fuschsiennes", thèse de l'université Paul Sabatier 1999.

[S] G. Segal, "Categories and cohomology theories", Topology Vol. **13**, pp. $293 - 312$ (1974).

[Se] J. P. Serre, "Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques", in *Motives* Proc. Sympos. Pure Math. **55** part 1, Amer. Math. Soc. Providence 1994.

[S-H] C. Simpson, A. Hirschowitz, "Descente pour les $n$-champs", preprint $math.AG/9807049$.

[S2] C. Simpson, "Algebraic aspects of higher nonabelian Hodge theory", preprint $math.AG/9902067$.

[S3] C. Simpson, "A giraud-type characterisation of the simplicials categories associated to closed model categories as $\infty$-pretopoi, preprint $math.AT/9903167$.

[S4] C. Simpson, "Limits in $n$-categories", preprint $alg - geom/9708010$.

[S5] C. Simpson, "A closed model structure for $N$-categories, internal Hom, $N$-stacks and generalized Seifert-Van Kampen", preprint $alg - geom/9704006$.

[S6] C. Simpson, "Higgs bundle and local systems", Publ. Math. I.H.E.S, No. **75**, 1992, $5 - 95$.

[Sm] J. R. Smith, "$M$-structure determines integral homotopy type", preprint $math.AT/9809151$.

[Sp1] M. Spitzweck, "Some constructions for Voevodsky's triangulated categories of motives", manuscript non publié.

[Sp2] M. Spitzweck, "$DG$-Hopf algebras and triangulated categories fo sheaves", manuscript non publié.

[Su] D. Sullivan, "Infinitesimal computations in topology", Publ. Math. $I.H.E.S.$, **47** (1978), $269 - 331$.

[Ta] Z. Tamsamani, "Sur des notions de $n$-catégories et $n$-groupoides non-stricte via des ensembles multi-simpliciaux" Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse (1996).

[To] B. Toen, "Interprétation Galoisienne de la théorie de l'homotopie", en préparation.

[Wa] F. Waldhausen, "Algebraic $K$-theory of spaces", in "Algebraic and geometric topology", Ed. A. Ranicki, N. Levitt, F. Quinn, Lecture Notes in Mathematics **1126**, Springer 1981.