Über explizite Reziprozitätsgesetze in lokalen Körpern verschiedener Charakteristik

A. Gurevich, S. Vostokov

Max-Planck-Gesellschaft zur
Förderung der Wissenschaften e.V.
AG "Algebraische Geometrie und
Zahlentheorie"
an der Humboldt Universität zu Berlin
Jägerstr. 10-11
10117 Berlin
GERMANY

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
53225 Bonn
GERMANY

MPI/95-72

A. Gurevich, S. Vostokov

Über explizite Reziprozitätsgesetze in lokalen Körpern verschiedener Charakteristik

Einführung

Gegenwärtig besteht ein erhöhtes Interesse für das Verständnis der Einordnung expliziter Reziprozitätsgesetze in der Zahlentheorie und gleichfalls für den Zusammenhang dieser Gesetze in Körpern mit verschiedenen Charakteristiken. Diesem Problem sind Arbeiten von Fontaine und Abrashkin gewidmet. Nachdem die Normkörper (Fontaine-Wintenberger) Eingang in die Folklore der Zahlentheorie gefunden haben (siehe [FW]), ist eine natürliche Möglichkeit enstanden, lokale Körper verschiedener Charakteristik mit perfekten Restklassenkörpern in Zusammenhang zu bringen. Dieser Umstand gestattet eine neue Sich auf die Natur expliziter Formel für Normpaarungen in verschiedenen Körpern. Es handelt sich dabei darum, daß in einem lokalen Körper der Charakteristik p die Formel für die Witt'sche Normpaarung eine ziemlich einfache Gestalt und einen vergleichsweise einfachen Beweis hat (siehe z.B. [S]). Dagegen hat die analoge Formel für die Hilbert'sche Normpaarung in lokalen Körpern der Charakteristik 0 eine keinesfalls triviale Gestalt und natürlich einen schwierigen Beweis (siehe [V]).

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufklärung des Zusammenhangs dieser Formeln, wobei dies zugleich für die formalen Lubin-Tate-Gruppen erfolgt. Den Anstoß zum Erscheinen vorliegender Arbeit gab ein Aufsatz von Abrashkin (siehe [A]). In ihm vollzieht der Autor mit Hilfe von Normkörpern und kristallinen Darstellungen den Übergang von Wittpaarungen in der Charakteristik p zur Hilbertpaarungen in der Charakteristik 0 für Einheiten aus der Schafarewitsch-Basis. Wir gehen in entgegengesetzter Richtung vor. Ausgangspunkt sind bei uns die Kummer'schen Gleichungen des vorgegebenen Körpers der Charakteristik 0. Wir erhalten dabei die Artin-Schreier'sche Gleichung im Normkörper. Das gibt uns die Möglichkeit, unter Verwendung der einfachen Formel für die Wittpaarung die vollständige Formel für die Hilbertpaarung von Grad p zu bekommen. Im ersten Teil der Arbeit wird explizit die Kummer'sche Erweiterung (oder ihr Analogon in formalen Lubin-Tate-Gruppen) eines lokalen Körpers der Charakteristik 0 mit der Artin-Schreier'schen Erweiterung des entsprechenden Normkörpers in Zusammenhang gebracht. Das gestattet es, die Hilbertpaarung im lokalen Ausgangskörper der Charakteristik 0 mit der Wittpaarung im Normkörper zu verbinden (siehe Satz 1 und 1a). Im zweiten Teil der Arbeit gelingt es dann unter Benutzung von Satz 1 aus dem ersten Teil, etwas elegantere explizite Formeln für die Hilbertpaarung zu erhalten, als die in der Arbeit [V]. Schließlich wird im dritten Teil der Arbeit der multiplikative Fall betrachtet, und aus den früheren Formeln werden die klassischen Formeln von Artin-Hasse abgeleitet.

Vorliegende Arbeit wurde in Arbeitsgruppe "Algebraische Geometrie und Zahlentheorie" ausgeführt, und wir sind Herrn Prof. H. Koch sehr dankbar für die gewährte Gastfreundschaft.

I. Hauptsatz

1. Es liege folgende Situation vor:

K sei ein lokaler Körper der Charakteristik 0;

O der Ring der ganzen Elemente von K;

π eine Uniformisierende von K;

k der Restklassenkörper von K, mit der Charakteristik p;

q die Anzahl der Elemente von k;

F die über der Reihe f_F konstruierte formale Lubin-Tate-Gruppe über O, wobei $f_F(x) \equiv \pi x \bmod x^2$ und $f_F(x) \equiv x^q \bmod \pi$ (siehe [LT]) ist;

$\gamma \in K^{\mathrm{alg}}$ ein Element mit $[\pi]_F(\gamma) = 0$, $\gamma \neq 0$;

$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ ein Turm von lokalen Körpern der Charakteristik 0;

$K(\gamma) \subset K_0$;

Es existiert ein Element ζ in K^{alg} derart, daß der Grad von $K_0(\zeta)/K_0$ relativ prim zu q und daß für beliebiges n die Erweiterung $K_n(\zeta)/K_{n-1}(\zeta)$ eine Galois-Erweiterung ist;

π_n sei eine Uniformisierende von K_n;

$N_{K_n/K_{n-1}}(\pi_n) = \pi_{n-1}$;

$\pi_{n-1} \equiv \pi_n^q \bmod \pi$.

Außerdem nehmen wir an, daß folgende Bedingung $(*)$ erfüllt ist: *p ist keine Uniformisierende in K.* Ohne diese Bedingung bleiben die weiter unten bewiesene Ergebnisse richtig, allerdings in einer schwächeren Form.

2. Wir wollen zwei besonders wichtige Beispiele solcher Situationen anführen.

1. K_0 sei ein beliebiger Körper, der $K(\gamma)$ enthält, π_0 eine Uniformisierende von K_0, $\pi_n = \sqrt[q]{\pi_{n-1}}$, $K_n = K_0(\pi_n)$, ζ eine primitive Einheitswurzel von Grade q.

2. Wir betrachten Elemente γ_i in K^{alg} ($i = 1, 2, \ldots$) derart, daß $[\pi]_F(\gamma_i) = \gamma_{i-1}$, $\gamma_1 = \gamma$ erfüllt ist. $\kappa \geq 1$, $K_0 = K(\gamma_\kappa)$, $\pi_n = \gamma_{\kappa+n}$, $K_n = K_0(\pi_n)$, $\zeta = 0$.

3. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
ν sei eine Normierung in K^{alg} mit $\nu(\pi) = 1$;
g_n das Minimalpolynom von π_n über K_{n-1};
O_n der Ring der ganzen Elemente von $K_n(\zeta)$;
ρ_0 eine Uniformisierende von $K_0(\zeta)$;
$\tilde{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Wegen $N_{K_n/K_{n-1}}(\pi_n) = \pi_{n-1}$ ist die Erweiterung K_n/K_{n-1} vollverzweigt, und mithin besitzen alle K_n ein und denselben Restklassenkörper, den wir mit k_0 bezeichnen.

R sei die Menge der multiplikativen Repräsentanten von k_0 in K_0.
Wir nehmen an, daß $W(k_0)$ in K_0 eingebettet ist.
U sei die Eineinheitengruppe von K_0;
M sei das maximale Ideal von K_0;
$e = 1/\nu(\pi_0)$; $d = e/(q-1)$.

Wegen $\pi_{n-1} \equiv \pi_n \bmod \pi$ sind alle Koeffizienten g_n mit Ausnahme des ersten und des letzten durch π teilbar. Deswegen gilt $\nu(\pi_{n-1} - \pi_n^q) > 1$.

Es sei $g_1(x) = x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \ldots + c_1 x - \pi_0$ und $c_m = \sum_{j=0}^{\infty} r_{m,j}\pi_0^{j+e}$ die Entwicklung von c_m nach den Potenzen von π_0, wobei $r_{m,j} \in R$ gelte.

4. Wie oben bemerkt sind alle Koeffizienten $g_n(x)$ mit Ausnahme des ersten und des letzten durch π teilbar. Mithin hat $g_n(\pi_n + x)$ dieselbe Eigenschaft. Der erste Koeffizient von $g_n(\pi_n + x)$ ist gleich 1 und der letzte gleich 0. Daraus schließen wir, daß die Normierung einer beliebigen Nullstelle des Polynoms $g_n(\pi_n + x)$ größer oder gleich $1/q$ ist. Es gilt also für beliebiges $\sigma \in \text{Gal}(K_n(\zeta)/K_{n-1}(\zeta))$: $\nu(\sigma\pi_n - \pi_n) \geq 1/q$. Weiter ist es möglich, eine Uniformisierende ρ_n von $K_n(\zeta)$ derart auszuwählen, daß $\rho_n = \pi_n^{a_n}\rho_0^{b_n}$ gilt ($a_n, b_n \in Z_n$), da ja der Grad der Erweiterung von $K_0(\zeta)/K_0$ relativ prim zu q

ist. Dann haben wir für beliebiges $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_n(\zeta)/K_{n-1}(\zeta))$: $\nu(\sigma\rho_n - \rho_n) = \nu((\sigma\pi_n - \pi_n)(\sigma\pi_n^{a_n-1} + \sigma\pi_n^{a_n-2}\pi_n + \ldots + \pi_n^{a_n-1})\rho_0^{b_n}) > 1/q - \nu(\pi_n) > 1/q^2$. Folglich gilt für beliebiges $x \in O_n$: $\nu(\sigma x - x) > 1/q^2$. Daraus schließen wir, daß die m-te Verzweigungsgruppe $G_m(K_n(\zeta)/K_{n-1}(\zeta))$ im Falle $m \geq eq^{n-2}$ mit der ganzen Gruppe $\mathrm{Gal}(K_n(\zeta)/K_{n-1}(\zeta))$ zusammenfällt. Das bedeutet, daß es sich bei $\tilde{K}(\zeta)/K_0(\zeta)$ um eine APF-Erweiterung handelt (siehe [FW]). Folglich ist $\tilde{K}/K_0$ eine APF-Erweiterung. Diese APF-Erweiterung bestimmt einen gewissen Normkörper $\mathcal{K}$. Es sei t die Folge (π_n), die die Rolle der Uniformisierenden von $\mathcal{K}$ spielen wird. Bekanntlich ist $\mathcal{K}$ kanonisch isomorph zu $k_0((t))$.

5. Lemma 1

Es gilt

a) $\nu(\pi_0^a - \pi_1^{qa} - a\pi_1^{q(a-1)} \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}\pi_1^{q(j+e)+m}) > \frac{q}{q-1}$ *im Falle* $a \geq 1$;

b) $\nu(\pi_1^a - \pi_n^{q^{n-1}a}) > \frac{q}{q-1}$ *im Falle* $a > qd$ *oder* $q \mid a$;

c) $\nu(\pi_0^{-qd} - \pi_n^{-q^{n+1}d}) > 0$.

Beweis. a) Es ist

$$\pi_0^a = (\pi_1^q + \sum_{m=1}^{q-1} c_m\pi_1^m)^a.$$

Wegen $\nu(c_m) > 1$ gilt also

$$\nu(\pi_0^a - \pi_1^{qa} - a\pi_1^{q(a-1)} \sum_{m=1}^{q-1} c_m\pi_1^m) > \frac{q}{q-1}.$$

Nun ist aber

$$\nu(c_m\pi_1^m - \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}\pi_1^{q(j+e)+m}) =$$

$$\nu((c_m - \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}\pi_0^{j+e})\pi_1^m + \sum_{j=0}^{d-1}(\pi_0^{j+e} - \pi_1^{q(j+e)})r_{m,j}\pi_1^m) > \frac{q}{q-1}.$$

b) $a > qd$: Es gilt dann

$$\nu(\pi_1^a - \pi_n^{q^{n-1}a}) = \nu(\pi_1 - \pi_n^{q^{n-1}}) + \nu(\pi_1^{a-1} + \pi_1^{a-2}\pi_n^{q^{n-1}} + \ldots + \pi_n^{q^{n-1}(a-1)}) > \frac{q}{q-1}.$$

$q \mid a$: Es gilt dann

$$\nu(\pi_1^a - \pi_n^{q^{n-1}a}) = \nu(\pi_1^a - (\pi_1^{\frac{a}{q}} - (\pi_1^{\frac{a}{q}} - \pi_n^{q^{n-1}\frac{a}{q}}))^q) > \frac{q}{q-1}.$$

c) Dies wird beweisen wie b), $q \mid a$. □

Es sei L ein lokaler Körper der Charakteristik 0, dessen Restklassenkörper den Körper k enthält; $a \in L$, $\nu(a) > \frac{q}{q-1}\nu(p)$; $\xi_1, \ldots, \xi_q$ die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^q - x - a$. Unter diesen Bedingungen gilt daß

Lemma von Artin-Schreier

a) $\nu(\xi_i) = \nu(a)/q$;

b) $\xi_i - \xi_j \in L$;

c) $\nu(\xi_i - \xi_j) = 0$ *in Falle* $i \neq j$;

d) $L(\xi_i)/L$ *ist eine Galois-Erweiterung;*

e) Für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L(\xi_i)/L)$ *gilt* $\overline{\sigma\xi_i - \xi_i} = \overline{\sigma\xi_j - \xi_j}$.

Beweis. a) ist klar. Da $x^q - x$ die Reduktion des Polynoms $f(x+\xi_i)^q = (x+\xi_i)^q - (x+\xi_i) - a = x^q + \sum_{m=1}^{q-1} C_q^m \xi_i^m x^{q-m} + \xi_i^q - x - \xi_i - a = x^q - x + \sum_{m=1}^{q-1} C_q^m \xi_i^m x^{q-m}$ im Restklassenkörper $L(\xi_i)$ ist, und $x^q - x$ sich in k in verschiedene Linearfaktoren zerlegen läßt, folgen aus dem Henselschen Lemma die Behauptungen b) und c). d) und e) sind triviale Konsequenzen aus b). □

Für das folgende Lemma 2 möge erfüllt sein: $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{q-1} \in L$, $\nu(\varepsilon_i) > -i\nu(a)/q$; ξ sei eine Nullstelle des Polynoms $f_1(x) = x^q - x - a$; η eine Nullstelle des Polynoms $f_2(x) = x^q + \varepsilon_{q-1}x^{q-1} + \ldots + \varepsilon_1 x - x + \varepsilon_0 - a$. Dann gilt

Lemma 2

a) $L(\xi) = L(\eta)$;

b) Für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L(\xi)/L)$ *gilt* $\overline{\sigma\xi - \xi} = \overline{\sigma\eta - \eta}$.

Beweis. Es ist $\nu(f_2(\xi)) > 0$, folglich gibt es eine Nullstelle η' von f_2 mit $\nu(\eta' - \xi) > 0$. Weil f_1 und f_2 die gleiche Anzahl von Nullstellen besitzen, existiert eine Nullstelle ξ' von f_1 mit $\nu(\eta - \xi') > 0$. Dann folgt aus dem Lemma von Krasner $L(\eta) = L(\xi')$, und außerdem ist $\overline{\sigma\eta - \eta} = \overline{\sigma\xi' - \xi'}$ evident. Es bleibt zu bemerken, daß $L(\xi') = L(\xi)$, $\overline{\sigma\xi' - \xi'} = \overline{\sigma\xi - \xi}$ gilt. □

Für das folgende Lemma 3 möge erfüllt sein: $a, b \in L$, $\nu(a) \geq -\nu(p)/q$, $\nu(b) > -\nu(p)$; ξ sei eine Nullstelle des Polynoms $f_1(x) = x^q - x - a - b$; η eine Nullstelle des Polynoms $f_2(x) = x^q - x - a^q - b$. Dann gilt

Lemma 3

a) $L(\xi) = L(\eta)$;

b) Für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L(\xi)/L)$ *gilt* $\overline{\sigma\xi - \xi} = \overline{\sigma\eta - \eta}$.

Beweis. Anwendung von Lemma 2 auf die Polynome $f_1(x)$ und $f_3(x) = f_2(x+a)$. $\square$

6. Auf dem maximalen Ideal eines beliebigen vollständigen Körpers, der K enthält, läßt sich die Struktur eines O-Moduls mit Hilfe der formalen Gruppe F einführen: $x +_F y = F(x,y)$, $a \cdot_F x = [a]_F x$. Es sei C der von γ erzeugte Untermodul von M.

Wir definieren die Hilbert'sche Paarung $(\cdot,\cdot) : M \times K_0^* \to C \subset M$ auf folgende Weise $(u,v) = \tau y -_F y$, wobei $[\pi]_F y = u$, $\tau = \psi_{K_0}(v)$, ψ_{K_0} die Reziprozitätsabbildung für K_0 ist. Man bestätigt unmittelbar $y \in K_0^{\mathrm{ab}}$, $(u,v) \in C$, daß (u,v) nicht von der Wahl von y abhängt und daß $(\cdot,\cdot)$ bilinear ist.

Wir definieren die Witt'sche Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{K}^+ \times \mathcal{K}^* \to k \subset k_0 \subset \mathcal{K}^+$ auf folgende Weise $\langle s,w\rangle = \tau z - z$, wobei $z^q - z = s$, $\tau = \psi_{\mathcal{K}}(w)$, $\psi_{\mathcal{K}}$ ist dabei die Reziprozitätsabbildung für den Körper $\mathcal{K}$. Wieder verifiziert man einfach $z \in \mathcal{K}^{\mathrm{ab}}$, $\langle s,w\rangle \in k$, daß $\langle s,w\rangle$ nicht von der Wahl von z abhängt und die Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Bemerkung 1. $(u,v) = 0$, wenn v eine Norm im Erweiterungskörper $K_0(y)/K$ ist, $[\pi]_F y = u$; $\langle s,w\rangle = 0$, wenn w eine Norm im Erweiterungskörper $\mathcal{K}(z)/\mathcal{K}$ ist, $z^q - z = s$.

Bemerkung 2. $\langle s,w\rangle = 0$, wenn s im maximalen Ideal von $\mathcal{K}$ liegt.

Bemerkung 3. Für die Wittpaarung gibt es eine sehr einfache explizite Formel (siehe [Witt]), nämlich $\langle s,w\rangle = \mathrm{Tr}_{k_0/k} \operatorname{Res}(s\, \partial \log w)$.

7. Wir definieren die Normabbildung $\mathcal{N} : \mathcal{K}^* \to K_0^*$ durch $\mathcal{N}((x_n)) = x_0$.

Sei F_0 die formale Lubin-Tate-Gruppe über O, die mit Hilfe der Reihe $f_{F_0}(x) = \pi x + x^q$ definiert ist. Der Isomorphismus von F in F_0 sei φ.

Es folgt das Hauptresultat dieses Teils der Arbeit.

Satz 1

Es sei $u \in M$, $w \in \mathcal{K}^*$. Dann gilt

$$(u, \mathcal{N} w) = \left[\left\langle \frac{(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)} + \left(\frac{t^c\, \partial(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)} \right)^q \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}^q\, t^{qj+m}, w \right\rangle \right]_F \gamma.$$

Dabei sei $u(x) \in xW(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \gamma$.

Wenn man auf die Bedingung $(*)$ verzichtet, so läßt sich lediglich ein schwächerer Satz beweisen, nämlich

Satz 1a
Es sei $u \in M^d$, $w \in \mathcal{K}^*$. Dann gilt

$$(u, \mathcal{N}w) = \left[\left\langle \frac{(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)} + \left(\frac{t^e\, \partial\,(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)}\right)^q \sum_{m=1}^{q-1} r^q_{m,0}\, t^m, w \right\rangle\right]_F \gamma.$$

Dabei sei $u(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)}{x^d}(0) \in R$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \gamma$.

Der Beweis von Satz 1a unterscheidet sich im wesentlichen nicht vom Beweis des Satzes 1. Deshalb werde er hier nicht ausgeführt.

Wenn $u(x) \in x^{d+1}W(k_0)[[x]]$ in den Sätzen 1 und 1a gilt, dann ist der zweite Summand in der Formel Element des maximalen Ideals von $\mathcal{K}$, und folglich kann man ihn wie oben bemerkt fortlassen.

8. Beweis von Satz 1. Bekanntlich existiert ein kanonischer Isomorphismus $\omega : \mathrm{Gal}(\tilde{K}^{\mathrm{ab}}/\tilde{K}) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{K}^{\mathrm{ab}}/\mathcal{K})$. In Arbeit [L] wurde bewiesen, daß für ein beliebiges $w \in \mathcal{K}^*$ der Automorphismus $\psi_{K_0}(\mathcal{N}w)$ mit der Einschränkung des Automorphismus $\omega^{-1}(\psi_{\mathcal{K}}(w))$ auf K_0^{ab} zusammenfällt. Deshalb genügt es zu zeigen, daß für beliebiges $\tau \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}^{\mathrm{ab}}/\tilde{K})$ $\tau y -_F y = [\omega(\tau)z - z]_F\gamma$ gilt, dabei ist $[\pi]_F y - u$, $z^q - z = \frac{(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)} + \left(\frac{t^e\, \partial\,(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)}\right)^q \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r^q_{m,j}\, t^{qj+m}$.

Für eine Reihe $f \in W(k_0)[[x]]$ bezeichne $\hat{f}$ diejenige Reihe, die man aus f erhält, wenn man alle Koeffizienten durch ihre multiplikativen Repräsentanten substituiert. f^Δ sei die Reihe, die man aus f erhält, wenn man alle Koeffizienten zur q-ten Potenz erhebt. Es ist klar, daß dabei $\hat{f} \equiv f \bmod p$ und $\widehat{f^q}(x) = \hat{f}(x^q)^\Delta$ gilt.

Wir wählen $b \in k$ so, daß $\tau y -_F y = [b]_F y$ gilt, wobei $[\pi]_F y = u$ ist.

Es gilt also $[\pi]_F y_1 = u$, $\tau y_1 = y_1 +_F [b]_F\gamma$.

Wir führen die Substitution $y_2 = \varphi(y_1)$ durch und erhalten $[\pi]_{F_0} y_2 = \varphi(u)$, $\tau y_2 = y_2 +_{F_0} [b]_{F_0}\varphi(\gamma)$. Wir schreiben die letzte Gleichung in der Gestalt

$$y_2^q + \pi y_2 = \varphi(u(\pi_0)).$$

Außerdem gilt $\tau y_2 = y_2 + (b\varphi(\gamma) + \varphi(\gamma)^2\delta_1) + y_2(b\varphi(\gamma) + \varphi(\gamma)^2\delta_1)\delta_2$, wobei $\nu(\delta_1), \nu(\delta_2) \geq 0$. Also ist $\frac{\tau y_2 - y_2}{\gamma} = b\frac{\varphi(\gamma)}{\gamma} + b\frac{\varphi(\gamma)^2}{\gamma}\delta_1 + y_2(b\frac{\varphi(\gamma)}{\gamma} + b\frac{\varphi(\gamma)^2}{\gamma}\delta_1)\delta_2$, und wegen $\nu(\frac{\varphi(\gamma)}{\gamma} - 1) > 0$ folgern wir $\nu(\frac{\tau y_2 - y_2}{\gamma}) \geq 0$ und $\overline{\frac{\tau y_2 - y_2}{\gamma}} = b$.

Wir machen die Substitution $y_3 = \frac{y_2}{\gamma}$ und erhalten $y_3^q + \frac{\pi}{\gamma^{q-1}} y_3 = \frac{\varphi(u(\pi_0))}{\gamma^q}$, $\overline{\tau y_3 - y_3} = b$. Wir definieren $h(x) \in W(k_0)[[x]]^*$ so, daß $H(x) = x^d h(x)$ gilt.

Wir schreiben die letzte Gleichung in der Gestalt

$$y_3^q + \frac{\pi}{\gamma^{q-1}} y_3 = (\varphi \circ u)(\pi_0)\, h^{-q}(\pi_0)\, \pi_0^{-qd}.$$

Aus der Gleichung

$$y_4^q - y_4 = (\widehat{\varphi \circ u})(\pi_0)\, \widehat{h^{-q}}(\pi_0)\, \pi_0^{-qd}$$

erhalten wir wegen Lemma 2 und $\nu(\frac{\pi}{\gamma^{q-1}} + 1) \geq \frac{1}{q-1}$ als Ergebnis, daß aus dieser Gleichung dieselbe Erweiterung K_0 resultiert wie aus der vorangegangenen. Dabei ist $\overline{\tau y_4 - y_4} = b$.

Aus den Lemmata 1a) und 2 folgt, daß die Gleichung

$$y_5^q - y_5 = \left((\widehat{\varphi \circ u})(\pi_1^q) + \partial\, (\widehat{\varphi \circ u})(\pi_1^q) \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j} \pi_1^{q(j+e)+m} \right) \widehat{h^{-q}}(\pi_0)\, \pi_0^{-qd}$$

dieselbe Erweiterung des Körpers K_1 ergibt wie die vorige und daß $\overline{\tau y_5 - y_5} = b$ gilt.

Wir betrachten die Gleichung

$$\tilde{z}_n^q - \tilde{z}_n =$$

$$\left((\widehat{\varphi \circ u})(\pi_n^{q^n}) + \partial\, (\widehat{\varphi \circ u})(\pi_n^{q^n}) \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}\, \pi_n^{q^{n-1}(q(j+e)+m)} \right) \widehat{h^{-q}}(\pi_n^{q^n})\; \pi_n^{-q^{n+1}d}.$$

Die Lemmata 1b), c) und 2 zeigen, daß sie dieselbe Erweiterung des Körpers K_n ergibt wie die vorangegangenen. Außerdem gilt $\overline{\tau \tilde{z}_n - \tilde{z}_n} = b$.

Wenden wir das Lemma 3 einigemal auf die letzte Gleichung an, so erhalten wir die Gleichung

$$z_n^q - z_n = (\widehat{\varphi \circ u})^{\Delta^{-n}} (\pi_n)\, \widehat{h^{-q}}^{\Delta^{-n}} (\pi_n)\, \pi_n^{-qd} +$$

$$\partial\, (\widehat{\varphi \circ u})^{\Delta^{-n+1}} (\pi_n^q) \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{d-1} r_{m,j}^{q^{-n+1}}\; \pi_n^{q(j+e)+m}\, \widehat{h^{-q}}^{\Delta^{-n+1}} (\pi_n^q)\; \pi_n^{-q^2 d},$$

die die gleiche Erweiterung von K_n ergibt wie die vorige, und außerdem ist $\overline{\tau z_n - z_n} = b$. Wir schreiben diese letzte Gleichung in folgender Gestalt:

$$z_n^q - z_n = (\widehat{\varphi \circ u})^{\Delta^{-n}} (\pi_n)\, \widehat{h^{-q}}^{\Delta^{-n}} (\pi_n)\, \pi_n^{-qd} +$$

$$\pi_n^{qe}\,\left(\partial\,(\widehat{\varphi \circ u})\right)^{q^{\Delta^{-n}}}(\pi_n)\,\sum_{m=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{d-1}(r_{m,j}^{q})^{q^{-n}}\,\pi_n^{qj+m}\,\widehat{h^{-q^2}}^{\Delta^{-n}}(\pi_n)\,\,\pi_n^{-q^2 d}.$$

Die Norm jedes Summanden auf den rechten Seiten der Gleichungen für z_n ist gleich der Norm des entsprechenden Summanden auf der rechten Seite der Gleichung für z_{n-1}. Folglich bilden die rechten Seiten dieser Gleichungen eine Folge, die Element des Normkörpers ist. Also bilden auch die Nullstellen dieser Gleichungen eine Folge (z_n), die Element des Normkörpers der APF-Erweiterung von $\tilde{K}(y)/K(y)$ ist. Dabei genügt dieses Element der Gleichung

$$z^q - z = (\varphi \circ u)(t)\,h^{-q}(t)\,t^{-qd} + t^{qe}\,(\partial\,(\varphi \circ u))^q(t)\sum_{m=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{d-1}(r_{m,j}^{q})\,t^{qj+m}\,h^{-q^2}(t)t^{-q^2 d}.$$

$\omega(\tau)$ überführt z in die Nullstelle, die der Folge (τz_n) entspricht. Es gilt also $\omega(\tau)z - z = (\tau z_n - z_n) = b$. Das vollendet den Beweis von Satz 1. □

9. Wir machen die Bemerkung, daß die Formel in Satz 1 bei fixierter formaler Gruppe F und festem Körper K_0 vom Körper K_1 abhängt, aber nicht von K_2, $K_3 \ldots$ Die Rolle, die K_1 spielt, macht man sich an folgendem Beispiel klar. Es sei $F = F_0$, $K_0 = K(\gamma)$, $\pi_0 = \pi_0' = \gamma$, $u = \gamma$. Dann ist $\varphi(x) = x$, $d = 1$, $H(x) = x$, $u(x) = x$. Wir wählen π_n so, daß $\pi_n^q = \pi_{n-1}$ gilt. Die π_n' seien so gewählt, daß $\pi_n'^{\,q} + \pi\pi_n' = \pi_{n-1}'$ gilt. Es werde $K_n = K_0(\pi_n)$ und $K_n' = K_0(\pi_n')$ gesetzt. Beide Körpertürme (K_n) und (K_n') genügen den angegebenen Bedingungen. Weiter ist $g_1(x) = x^q - \gamma$ und $r_{m,0} = 0$ für beliebiges m. Ebenfalls gilt $g_1' = x^q + \pi x - \gamma$ und $r_{m,0}' = 0$ für beliebiges von 1 verschiedenes m und $r_{1,0}' = -1$. Die Anwendung von Satz 1 auf den Turm (K_n) ergibt $(\gamma, \mathcal{N}w) = [\langle t^{-q+1}, w\rangle]_F\gamma$, was nicht immer gleich Null ist, weil die Gleichung $z^q - z = t^{-q+1}$ eine nichttriviale Erweiterung des Körpers $\mathcal{K}$ definiert. Folglich existiert ein $w \in \mathcal{K}$ mit $\langle t^{-q+1}, w\rangle \neq 0$. Wenden wir wiederum Satz 1 auf den Turm (K_n') an, so ergibt sich $(\gamma, \mathcal{N}w) = [\langle t^{-q+1} - t^{-q+1}, w\rangle]_F\gamma = 0$. Die Verschiedenheit der Resultate findet ihre Erklärung in der Tatsache, daß die Mengen $\mathcal{N}(\mathcal{K}^*)$ und $\mathcal{N}(\mathcal{K}'^*)$ nicht identisch sind. Der Umstand, daß $(\gamma, v) = 0$ im Falle $v \in \mathcal{N}(\mathcal{K}'^*)$ gilt, wird dadurch klar, daß in diesem Fall $v \in N_{K_1'/K_0}(K_1')$ gilt und folglich $\psi_{K_0}(v)|_{K_1'} = \mathrm{id}_{K_1'}$. Die Nullstelle der Gleichung $[\pi]_F y = \gamma$ gehört aber dem Körper K_1' an.

II. Eine explizite Formel

1. Es mögen dieselben K, O, π, k, q, F, γ, K_0, π_0 vorliegen wie in I 1).

Wir wählen π_n so, daß $\pi_n^q = \pi_{n-1}$ gilt. Es werde $K_n = K_0(\pi_n)$ gesetzt. Dann belinden wir uns in derselben Situation wie in Teil I. Es mögen ν, $\tilde{K}$, k_0, R, U, M, e, d, $\mathcal{K}$, t, $\mathcal{N}$, F_0, φ dieselbe Bedeutung wie in I haben.

2. Lemma 4

Es sei $\theta \in R$, $p \not| \ i$. Dann ist $\mathcal{N}(1+\theta t^i) = 1 + \theta\pi_0^i$.

Beweis. Das Element $(-\theta^{q^{-n}}\pi_n^i)$ ist eine Nullstelle des über K_{n-1} irreduziblen Polynoms $x^q + \theta^{q^{-(n-1)}}\pi_{n-1}^i$, weswegen $N_{K_n/K_{n-1}}(1+\theta^{q^{-n}}\pi_n^i) = \prod_\sigma \sigma(1+\theta^{q^{-n}}\pi_n^i) = \prod_\sigma(1-\sigma(-\theta^{q^{-n}}\pi_n^i)) = 1 + \theta^{q^{-(n-1)}}\pi_{n-1}^i$ gilt, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 5

a) Es sei $u \in M$, $\nu(u) \geq \frac{q}{q-1}$, $v \in U$. Dann gilt $(u,v)_{F_0} = 0$.

b) Es sei $u \in M$. Dann gilt $(u, u-\pi+1)_{F_0} = 0$.

Beweis. a) Wir wählen ein Element $\gamma_0 \in K^{\mathrm{alg}}$ mit $[\pi]_{F_0}(\gamma_0) = 0$, $\gamma_0 \neq 0$. Wir führen in der Gleichung $y^q + \pi y = u$ die Substitution $\tilde{y} = \frac{y}{\gamma_0}$ durch und erhalten die Gleichung $\tilde{y}^q - \tilde{y} = \frac{u}{\gamma_0^q}$, deren Reduktion im Restklassenkörper keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Folglich ist nach dem Henselschen Lemma $K_0(y)/K_0$ eine unverzweigte (möglicherweise triviale) Erweiterung, und es gilt folglich wegen $v \in U$, daß $\psi_{K_0}(v)|_{K_0(y)} = \mathrm{id}_{K_0(y)}$ ist. Somit gilt $(u,v)_{F_0} = 0$. b) Wir zerlegen das Polynom $x^q - \pi x - u$ in irreduzible Faktoren $x^q - \pi x - u = f_1(x)\dots f_m(x)$. Es sei y_i eine Nullstelle von f_i. Die Körper $K_0(y_i)$ fallen wegen $[\pi]_{F_0}y_i = 0$ und $\gamma_0 \in K_0$ zusammen. Weiter ist $N_{K_0(y_i)/K_0}(-1-y_i) = \prod_\sigma \sigma(-1-y_i) = \prod_\sigma(-1-\sigma(y_i)) = f_i(-1)$. Daraus folgt $N_{K_0(y_i)/K_0}(-\prod_{i=1}^m(-1-y_i)) = -\prod_{i=1}^m f_i(-1) = 1-\pi+u$, so daß $(u, u-\pi+1)_{F_0} = 0$ gilt. □

Lemma 6

Es sei $u \in M$, $v \in U$, $\nu(v-1) \geq \frac{q}{q-1}$. Dann ist $(u,v) = 0$.

Beweis. Da $\varphi(u,v) = (\varphi(u),v)_{F_0}$ gilt und φ bijektiv ist, genügt es, $(u,v)_{F_0} = 0$ zu zeigen. Nach Lemma 5b) gilt einerseits $(u,(u-\pi+1)v)_{F_0} = (u,v)_{F_0}$. Andererseits gilt im Falle $u = (u + (u-\pi+1)(v-1)) +_{F_0} \delta$ die Identität $\nu(\delta) = \nu(v-1)$. Mithin ist $(u,(u-\pi+1)v)_{F_0} = (\delta,(u-\pi+1)v)_{F_0} +_{F_0} (u+(u-\pi+1)(v-1),(u-\pi+1)v)_{F_0}$. Der erste Summand rechts ist nach

Lemma 5a) gleich 0, und der zweite verschwindet nach Lemma 5b) ebenfalls, und wir haben $(u,v)_{F_0} = 0$. □

3. Satz 2

Es sei $u \in M$, $v \in U$. Dann gilt

$$(u,v) = \left[\mathrm{Tr}_{k_0/k}\,\mathrm{Res}\left(\frac{(\varphi \circ u)(x)}{H^q(x)}\,\partial \log v(x)\right)\right]_F \gamma,$$

$$(u,\pi_0) = \left[\mathrm{Tr}_{k_0/k}\,\mathrm{Res}\,\frac{(\varphi \circ u)(x)}{xH^q(x)}\right]_F \gamma.$$

Dabei sei $u(x) \in xW(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \gamma$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Nachweis der ersten Formel und zeigen zuerst, daß es zu beliebigem $v \in U$ eine Reihe $v_0(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$ gibt, so daß die gesuchte Formel gilt. Dazu genügt es, diese Eigenschaft für die erzeugenden Elemente von U nachzuweisen, d.h. für die $(1+\theta\pi_0^i)$, wobei $\theta \in R$, $p \not| \, i$ oder $i = \frac{p}{p-1}\frac{\nu(p)}{\nu(\pi_0)}$ ist. Wegen Lemma 4, Satz 1 und der expliziten Formel von Witt für die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ haben wir im Falle $p \not| \, i$ also

$$(u, 1+\theta\pi_0^i) = (u, \mathcal{N}(1+\theta t^i)) = \left[\left\langle \frac{(\varphi \circ u)(t)}{H^q(t)}, 1+\theta t^i \right\rangle\right]_F \gamma =$$

$$\left[\mathrm{Tr}_{k_0/k}\,\mathrm{Res}\left(\frac{(\varphi \circ u)(x)}{H^q(x)}\,\partial \log(1+\theta x^i)\right)\right]_F \gamma.$$

Weiterhin ist nach Lemma 6

$$(u, 1+\theta x^{\frac{p}{p-1}\frac{\nu(p)}{\nu(\pi_0)}}) = 0.$$

Wegen $\partial \log(1+\theta x^{\frac{p}{p-1}\frac{\nu(p)}{\nu(\pi_0)}}) \equiv 0 \bmod p$ gilt aber

$$\left[\mathrm{Tr}_{k_0/k}\,\mathrm{Res}\left(\frac{(\varphi \circ u)(x)}{H^q(x)}\,\partial \log(1+\theta x^{\frac{p}{p-1}\frac{\nu(p)}{\nu(\pi_0)}})\right)\right]_F \gamma = 0.$$

Jetzt sei $v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$ eine beliebige Reihe mit $v(\pi_0) = v$. Wegen $\frac{(\varphi \circ u)(x)}{H^q(x)} \in x^{1-qd}W(k_0)[[x]]$ folgt, daß nur die Glieder der Reihe $\partial \log v(x)$

mit Exponenten, die kleiner als $qd-1$ sind, auf obiges Residuum Einfluß nehmen können. Deshalb genügt es, sich von der Richtigkeit der Kongruenz $\partial \log v(x) \equiv \partial \log v_0(x) \bmod (p, x^{qd-1})$ zu überzeugen. Wegen $v(\pi_0) = v(\pi_0)$ gilt $v(x) \equiv v(x) \bmod (p, x^{2e+1})$, was

$$\frac{\partial\, v(x)}{v(x)} - \frac{\partial\, v_0(x)}{v_0(x)} = \frac{\partial(v(x) - v_0(x))}{v(x)} + \frac{(v_0(x) - v(x))\,\partial\, v_0(x)}{v(x)v_0(x)} \equiv 0 \bmod (p, x^{2e})$$

impliziert. Das ist der Beweis der ersten Formel. Die zweite folgt unmittelbar aus Satz 1, aus der expliziten Witt'schen Formel für die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der Beziehung $\mathcal{N}(t) = \pi_0$. □

Verzichtet man auf die Bedingung $(*)$, so läßt sich der folgende Satz beweisen, wenn man wie beim Beweis von Satz 2 (wobei man allerdings anstelle von Satz 1 den Satz 1a benutzt) vorgeht.

Satz 2a

Es sei $u \in M^d$, $v \in U$. Dann gilt die Formel aus Satz 2, dabei ist $u(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)}{x^d}(0) \in R$, $v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \gamma$.

4. Wir betrachten jetzt einen Spezialfall unserer Situation, nämlich $K_0 = K(\gamma_\kappa)$, wobei $\gamma_i \in K^{\mathrm{alg}}$ Elemente mit $[\pi]_F \gamma_i = \gamma_{i-1}$ und $\gamma_1 = \gamma$ sind.

Satz 3

Es sei $u \in M$, $v \in U$. Dann gilt

$$(u, v) = \left[\frac{1}{\theta_0} \mathrm{Res}\left(\frac{(\varphi \circ u)(x)}{x^{q^\kappa}}\, \partial \log v(x)\right)\right]_F \gamma,$$

$$(u, \pi_0) = \left[\frac{1}{\theta_0} \mathrm{Res}\, \frac{(\varphi \circ u)(x)}{x^{q^\kappa + 1}}\right]_F \gamma.$$

Dabei sei $u(x) \in xW(k)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $v(x) \in 1 + xW(k)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$ und θ_0 ein Repräsentant γ_κ/π_0.

Beweis. Es sei $\gamma_\kappa = \theta_0\, \pi_0\, \lambda$ mit $\lambda \in U$. Dann gilt $\frac{\gamma}{\pi_0^{q^{\kappa-1}}} = \frac{\gamma}{\gamma_\kappa^{q^{\kappa-1}}}\, \lambda^{q^{\kappa-1}}\, \theta_0^{q^{\kappa-1}}$. Wegen $\nu(\lambda^{q^{\kappa-1}} - 1) \geq \nu(\pi_0^{q^{\kappa-1}})$ und $\nu(\frac{\gamma}{\gamma_\kappa^{q^{\kappa-1}}} - 1) \geq 1 - \frac{1}{q-1} \geq \nu(\pi_0^{q^{\kappa-1}})$ besteht die Möglichkeit der Wahl eines $h(x) \in W(k)[[x]]$ mit den Eigenschaften $h(\pi_0) = \frac{\gamma}{\pi_0^{q^{\kappa-1}}}$ und $h(x) \equiv \theta_0^{q^{\kappa-1}} \bmod x^{q^{\kappa-1}}$. Dann folgt $h^q(x) \equiv \theta_0 \bmod (p, x^{q^\kappa})$. Wenn wir $H(x) = x^{q^{\kappa-1}} h(x)$ nehmen, dann sind die Glieder

der Reihe $h^q(x)$ mit Potenzen, deren Exponenten größer als $q^\kappa - 1$ sind, ohne Einfluß auf die Formel aus Satz 2, und daraus folgt die Behauptung. □

Bei Verzicht auf die Bedingung $(*)$ gilt der folgende

Satz 3a

Es sei $u \in M^{q^{\kappa-1}}$, $v \in U$. *Dann gilt die Formel aus Satz 3, dabei ist* $u(x) \in x^{q^{\kappa-1}} W(k)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)}{x^{q^{\kappa-1}}}(0) \in R$, $v(x) \in 1 + xW(k)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$ *und* θ_0 *ein Repräsentant* $\overline{\gamma_\kappa/\pi_0}$.

III. Der multiplikative Fall

1. Wir betrachten eine Situation, die ein Spezialfall der Situation aus Teil II ist, nämlich, daß $K = Q_p$, $O = Z_p$, $\pi = p$, $k = F_p$, $q = p$ und F die multiplikative formale Gruppe ist, d.h. daß $F(x, y) = x + y + xy$ und $\gamma = \zeta - 1$ gilt, wobei ζ eine primitive p-Einheitswurzel ist. K_0 sei ein lokaler Körper der Charakteristik 0, der $Q_p(\zeta)$ enthält, und π_0 sei schließlich eine Uniformisierende von K_0. Wir bemerken, daß die Bedingung $(*)$ in diesem Fall nicht erfüllt ist.

2. Es sei l_0 der Logarithmus der formalen Gruppe F_0. Dann gilt $\varphi(x) = l_0^{-1}(\log(1 + x))$. Im betrachteten Fall kann Satz 2a auf folgende Weise umformuliert werden:

Satz 2m

Es sei $u, v \in U$, $\nu(u - 1) \geq \frac{1}{p-1}$. *Dann gilt*

$$(u, v) = \zeta^{\operatorname{Tr}_{k_0/F_p} \operatorname{Res}\left(\frac{l_0^{-1} \log u(x)}{H^p(x)} \, \partial \log v(x)\right)},$$

$$(u, \pi_0) = \zeta^{\operatorname{Tr}_{k_0/F_p} \operatorname{Res} \frac{l_0^{-1} \log u(x)}{x H^p(x)}},$$

wobei $u(x) \in 1 + x^d W(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)-1}{x^d}(0) \in R$,
$v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \zeta - 1$ *ist.*

Wir machen die Bemerkung, daß Satz 2m (folglich auch die Sätze 2a und 1a) in gewissen Sinn maximal allgemein ist. Es gilt nämlich folgende Behauptung: Es gibt keine Formel, die nur arithmetische Operationen, Komposition, Ableitung und Spur enthält und für eine beliebige Reihe $u(x) \in 1 + x^d W(k_0)[[x]]$ den Wert $(u(\pi_0), \pi_0)$ durch die Reihe $u(x)$ selbst ausdrückt. Gäbe es nämlich eine solche Formel, so wäre für Reihen, die in der selben

Restklasse mod p liegen, der Wert, den die Formel liefert, gleich. Aber im Falle $K_0 = Q_p(\zeta)$ und $\pi_0 = \zeta - 1$ sowie der Reihen $u_1(x) = (1+x)^p$, $u_2(x) = 1 + x^p$ gilt $u_1 \equiv u_2 \bmod p$, während $(u_1(\pi_0), \pi_0) = 1 \neq (u_2(\pi_0), \pi_0)$ ist, da die Nullstelle der Gleichung $y^p = (\zeta - 1)^p + 1$ eine nichttriviale unverzweigte Erweiterung des Körpers $Q_p(\zeta)$ liefert.

3. Zu Satz 2m haben wir das folgende

Korollar

Es sei $u, v \in U$, $\nu(u-1) \geq \frac{1}{p-1}$. *Dann gilt*

$$(u, v) = \zeta^{\mathrm{Tr}_{k_0/F_p} \mathrm{Res}\left(\frac{\log u(x)}{H^p(x)}\ \partial \log v(x)\right)},$$

$$(u, \pi_0) = \zeta^{\mathrm{Tr}_{k_0/F_p}\left(-\frac{1}{p}\frac{H(x)}{x^d}(0)^{-p}\,\frac{u(x)-1}{x^d}(0)^p + \mathrm{Res}\,\frac{\log u(x)}{xH^p(x)}\right)},$$

wobei $u(x) \in 1 + x^d W(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)-1}{x^d}(0) \in R$,
$v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$, $H(x) \in x^d W(k_0)[[x]]$, $H(\pi_0) = \zeta - 1$ *ist.*

Bemerkung. Die Reihen in diesen Formeln haben i.a. keine ganzen Koeffizienten, während die Spur einen "ganzen Ursprung" hat.

Beweis. Bekanntlich gilt $l_0(x) \equiv x - \frac{1}{p}x^p \bmod x^{p+1}$. Folglich ist

$$l_0^{-1} \log u(x) \equiv \log u(x) \bmod x^{pd},$$

$$l_0^{-1} \log u(x) \equiv \log u(x) - \frac{1}{p}\log^p u(x) \bmod x^{pd+1}.$$

Wir erhalten also aus der ersten Formel von Satz 2m und der Tatsache, daß erstens $\log u(x) - l_0^{-1} \log u(x) \in x^{pd} W(k_0)[[x]]$ und zweitens $\partial \log v(x) \in W(k_0)[[x]]$ gilt, die erste gesuchte Formel. Aus der zweiten Formel von Satz 2m und wegen $\log u(x) - \frac{1}{p}\log^p u(x) - l_0^{-1} \log u(x) \in x^{pd} W(k_0)[[x]]$ erhalten wir

$$(u, \pi_0) = \zeta^{\mathrm{Tr}_{k_0/F_p} \mathrm{Res}\,\frac{\log u(x) - \frac{1}{p}\log^p u(x)}{xH^p(x)}}.$$

Nach Berechnung des Residuums des zweiten Summanden erhalten wir nun die zweite gesuchte Formel. □

4. Lemma 7

Es sei $f(x) \in xQ_p[[x]]$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Res}\,\frac{f(x)}{x^p} \equiv \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\, f(\zeta - 1) \bmod p.$$

Beweis. Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß die Beziehungen

$$\mathrm{Tr}(\zeta(\zeta-1)^i) \equiv p\,\delta^i_{p-1} \bmod p^2$$

gelten, wobei δ^i_j das Kronecker-Symbol ist.

Im Falle $i \geq 2(p-1)$ gilt $p^2 \mid (\zeta-1)^i$ und folglich

$$\mathrm{Tr}(\zeta(\zeta-1)^i) \equiv 0 \bmod p^2.$$

Im Falle $i < p-1$ gilt wegen $\mathrm{Tr}(\zeta^m) = -1$ für $p \not| m$

$$\mathrm{Tr}(\zeta(\zeta-1)^i) = \sum_{j=0}^{i} C^j_i(-1)^{i-j}\,\mathrm{Tr}(\zeta^{j+1}) = 0.$$

Im Falle $p-1 < i < 2(p-1)$ gilt die folgende Gleichungskette:

$$\mathrm{Tr}(\zeta(\zeta-1)^i) = \sum_{j=0}^{i} C^j_i(-1)^{i-j}\,\mathrm{Tr}(\zeta^{j+1}) =$$

$$(-1)^{i-p+1}C^{p-1}_i + (-1)^{i-p+1}C^{p-1}_i\,\mathrm{Tr}(\zeta^p) = p(-1)^{i-p+1}C^{p-1}_i \equiv 0 \bmod p^2,$$

weil $p \mid C^{p-1}_i$ gilt.

Schließlich gilt $\mathrm{Tr}(\zeta(\zeta-1)^{p-1}) = pC^{p-1}_{p-1} = p$. □

Benutzt man jetzt Lemma 7, so lassen sich die klassischen expliziten Formel von Artin-Hasse erhalten (siehe [AH]).

Satz von Artin-Hasse

Es sei $K_0 = Q_p(\zeta)$, $\pi_0 = \zeta - 1$, $u, v \in U$. Dann gilt

$$(u,v) = \zeta^{\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta \log u\ \partial \log v},$$

$$(u,\zeta) = \zeta^{\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\log u},$$

$$(u,\pi_0) = \zeta^{\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\frac{\log u}{\zeta-1}}.$$

Beweis. Auf Grund der Folgerung aus Satz 2m und aus Lemma 7 wissen wir, daß

$$(u,v) = \zeta^{\mathrm{Res}\left(\frac{\log u(x)}{x^p}\ \partial \log v(x)\right)} = \zeta^{\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta \log u(\zeta-1)\ \partial \log v(\zeta-1)}$$

gilt. Auf diese Weise erhalten wir die erste Formel. Die zweite folgt unmittelbar aus der ersten. Wegen der Folgerung aus Satz 2m gilt

$$(u, \pi_0) = \zeta^{-\frac{1}{p}\frac{u(x)-1}{x^d}(0)+\mathrm{Res}\frac{\log u(x)}{x^{p+1}}}.$$

Nach Lemma 7 ist

$$\mathrm{Res}\,\frac{x^{-1}\log u\,(x)}{x^p} = \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\left(\frac{\log u(\zeta-1)}{\zeta-1} - \frac{\log u(x)}{x}(0)\right) =$$

$$\frac{1}{p}\frac{\log u(x)}{x}(0) + \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\frac{\log u}{\zeta-1}.$$

Somit gilt

$$(u, \pi_0) = \zeta^{-\frac{1}{p}\frac{u(x)-1}{x^d}(0)+\frac{1}{p}\frac{\log}{u(x)}x(0)+\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\frac{\log u}{\zeta-1}} = \zeta^{\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{Q_p(\zeta)/Q_p}\zeta\frac{\log u}{\zeta-1}},$$

was die letzte Formel beweist. □

5. Wir betrachten jetzt den spezialfall unserer Situation für $K_0 = Q_p(\zeta_\kappa)$, wobei ζ_κ eine primitive p^κ-Einheitswurzel sei. Satz 3a läßt sich dann folgendermaßen formulieren.

Satz 3m

Es sei $u, v \in U$, $\nu(u-1) \geq \frac{1}{p-1}$. Dann gilt

$$(u, v) = \zeta^{\frac{1}{\theta_0}\mathrm{Res}\left(\frac{l_0^{-1}\log u(x)}{x^{p^\kappa}}\,\partial\log v(x)\right)},$$

$$(u, \pi_0) = \zeta^{\frac{1}{\theta_0}\mathrm{Res}\frac{l_0^{-1}\log u(x)}{x^{p^\kappa+1}}},$$

wobei $u(x) \in 1 + x^{p^{\kappa-1}}W(k_0)[[x]]$, $u(\pi_0) = u$, $\frac{u(x)-1}{x^{p^{\kappa-1}}}(0) \in R$, $v(x) \in 1 + xW(k_0)[[x]]$, $v_0(\pi_0) = v$ und θ_0 ein Repräsentant $\overline{\gamma_\kappa/\pi_0}$ ist.

Es sei $l_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{p^m}}{p^m}$ und $c(\theta, i) = \exp l_a(\theta\pi_0^i)$. Mit Hilfe von Satz 3m läßt sich jetzt für $i \geq p^{\kappa-1}$ der Ausdruck $(c(\alpha, i), c(\beta, j))$ berechnen. In der Tat ist

$$(c(\alpha, i), c(\beta, j)) = \zeta^{\frac{1}{\theta_0}\mathrm{Res}\left(\frac{l_0^{-1}l_a(\alpha x^i)}{x^{p^\kappa}}\,\partial\, l_a(\beta x^j)\right)} = \zeta^{\frac{1}{\theta_0}\mathrm{Res}\left(\frac{\alpha x^i}{x^{p^\kappa}}\sum_{m=0}^{\infty}\beta j x^{jp^m-1}\right)}.$$

Es sei $i = p^a i'$, $p \not| \; i'$. Dann gilt

$$(c(\alpha, i), c(\beta, j)) = \zeta^{\frac{\alpha\beta j}{\theta_0}}$$

für den Fall $p^a j + i = p^\kappa$, und

$$(c(\alpha, i), c(\beta, j)) = 1$$

sonst.

Literaturverzeichnis

[A] Abrashkin, *A remark about Brückner-Vostokov explicit reciprocity law,* Preprint MPI/94-61, Bonn.

[AH] Artin und Hasse, *Die beiden Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), 146-162.

[FW] Fontaine und Wintenberger, *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **288** (1979), 367-370.

[L] Laubie, *Extensions de Lie et groups d'automorphismes de corps locaux,* Compositio Math. **67** (1988), 165-189.

[LT] Lubin und Tate, *Formal complex multiplication in local fields,* Ann. of Math. **81** (1965), 380-387.

[S] Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[V] Vostokov, *Symbols on formal groups,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45** (1981), 985-1014.

[W] Witt, *Zyklische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grade p^n,* J. Reine Angew. Math. **176** (1936), 126-140.