Gültigkeit des Hasseprinzips und Berechnung der Tamagawazahlen für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen symplektischer Ähnlichkeiten

M. Schröder

Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik
und Informatik

D-68131 Mannheim - A5

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

D-53225 Bonn

Germany

MPI / 94-147

Gültigkeit des Hasseprinzips und Berechnung der Tamagawazahlen für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen symplektischer Ähnlichkeiten

Michael Schröder

Die Arbeit in der vorliegenden Fassung hat zwei Ziele. Die Motivation kommt von der Spurformel von Arthur mit dem Endziel einer konkreten und stabilisierten Form dieser Identität für gegebene reduktive Gruppen. In dieser Richtung werden in der vorliegenden Arbeit insbesondere die Terme kohomologischer Natur in der L^2–Spurformel von Arthur für die Gruppen symplektischer Ähnlichkeiten vollständig bestimmt.

Das zweite Ziel der Arbeit ist allgemeinerer Natur. Konzepte wie die Gültigkeit des Hasseprinzips oder wie Tamagawazahlen waren grundlegend für die Theorie der algebraischen Gruppen und haben über lange Zeit die Fragestellungen dieses Gebietes geprägt. Speziell in der Theorie der Tamagawazahlen wurden im Fall halbeinfacher Gruppen ein befriedigender Zustand erst durch die Arbeiten von Kottwitz Ende der achtziger Jahre erreicht. Insbesondere aus der Interpretation der Tamagawazahlen als Volumina von Fundamentalbereichen ergeben sich hier mögliche neue Anwendungen.

Wir gehen daher in Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit genauer auf Tamagawazahlen und Methoden zu ihrer konkreten Berechnung ein. Im vierten Abschnitt wenden wir diese Resultate an und berechnen die Tamagawazahlen der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen symplektischer Ähnlichkeiten und den symplektischen Gruppen. Das setzt einmal die Kenntnis der Struktur dieser Zentralisatoren voraus. Zum anderern führen die Rechnungen insbesondere auf die Frage nach der Gültigkeit des Hasseprinzips für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente dieser Gruppen. In Abschnitt 1 dieser Arbeit klären wir die Struktur der Zentralisatoren oben und beweisen in Abschnitt 2, daß für sie das Hasseprinzip gilt.

Diese Arbeit entstand während eines Aufenthaltes am Max–Planck–Institut für Mathematik in Bonn. Der Autor bedankt sich herzlich für die Unterstützung durch ein Post–Doc Stipendium des MPI und für die ihm am Institut gewährte Gastfreundschaft.

Inhaltsverzeichnis

0. Notation: Falls nicht anders gesagt, sei F im folgenden ein Zahlkörper. Es bezeichnet I die Involution auf den $2n \times 2n$ Matrizen $M(2n, F)$ mit Einträgen in F, die durch

$$I(g) = J^{-1} \cdot {}^t g \cdot J \qquad \text{mit} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Gruppe $GSp(2n, F)$ der symplektischen Ähnlichkeiten ist die Menge aller g in $M(2n, F)$, so daß ${}^t g \cdot J \cdot g = \mu(g) \cdot J$ oder dazu äquivalent $I(g) \cdot g = \mu(g) \cdot E_{2n}$ für $\mu(g)$ in F^* gilt. Die symplektische Gruppe $Sp(2n, F)$ besteht aus allen Elementen g der $GSp(2n, F)$ mit Ähnlickeitsfaktor $\mu(g) = 1$.

1. Die Struktur der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente der $GSp(2n)$: Ziel dieses Abschnittes ist die Klassifikation der stabilen Konjugationsklassen der Zentralisatoren halbeinfacher, F–rationaler Elemente in der Gruppe $GSp(2n)$. Die Ergebnisse dieses Abschnittes gelten allgemeiner bereits für einen perfekten Körper. Sei im folgenden aber F ein Zahlkörper. Unsere Analyse basiert auf folgendem Resultat:

(1.1) Satz: *Sei s ein halbeinfaches, F–rationales Element der $GSp(2n)$. Der Zentralisator von s in den $2n \times 2n$ Matrizen $M(2n, F)$ ist eine halbeinfache F–Algebra, die invariant ist unter der symplektischen Involution I auf $M(2n, F)$.*

Der Zentralisator von s in $A = M(2n, F)$ ist nämlich identisch mit dem Zentralisator in A der von s in A erzeugten Teilalgebra $F[s]$. Diese wiederum ist isomorph zu $F[X]$ modulo dem von dem charakteristischen Polynom von s erzeugten Ideal. Insbesondere ist die Algebra $F[s]$ damit halbeinfach. Der Zentralisator einer halbeinfachen Teilalgebra einer zentralen, einfachen Algebra ist wieder halbeinfach. Das zeigt die erste Aussage des Satzes. Die zweite Aussage ist klar.

(1.2) Definitionen und grundlegende Konstruktionen: Sei s ein im folgenden fixiertes F–rationales, halbeinfaches Element aus der $GSp(2n)$.

Die Indexmenge $\mathcal{A}$ und ihre Komponenten $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{G}$: Der Zentralisator $C_{M(2n,F)}(s)$ von s in $M(2n, F)$ ist eine halbeinfache Algebra nach (1.1). Er sei das direkte Produkt der Familie $\mathcal{A}$ einfacher F–Algebren:

$$C_{M(2n,F)}(s) = \prod \{A : A \in \mathcal{A}\}. \tag{1}$$

Wir zerlegen $\mathcal{A}$ in drei disjunkte Teilmengen. Als Involution restringiert nämlich I für jede Algebra aus $\mathcal{A}$ entweder zu einem Automorphismus I_A von A oder bildet A auf einen anderen direkten Summanden aus $\mathcal{A}$ ab. Im letzten Fall sei $(A, I(A))$ aus $\mathcal{G}$. Wir unterscheiden im ersten Fall weiter, ob I_A trivial auf dem Zentrum $Z_A = Z(A)$ von A ist oder nicht. Restringiert I_A zu einem Automorphismus der Ordnung zwei von Z_A, dann sei A aus $\mathcal{U}$. Ist I_A trivial auf Z_A, dann sei A aus $\mathcal{S}$. Auf diese Weise stellen wir $\mathcal{A}$ als disjunkte Vereinigung in der Form

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} \bigcup \mathcal{S} \bigcup \mathcal{U} \tag{2}$$

dar. Die Vereinigung von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{S}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\text{aut}}$.

Die Gruppen $G(E)$ und $G^{(1)}(E)$: Sei E eine unter I invariante K–Algebra. Bezeichne I_E die Restriktion von I auf E. Dann seien $G(E) = G(E, I_E)$ und $G^{(1)}(E) = G^{(1)}(E, I_E)$ die für jede kommutative F–Algebra K durch

$$G(E)(K) = \{x \in E \otimes_F K : (I_E \otimes id_K)(x) \cdot x \in K^*\}, \tag{3}$$

$$G^{(1)}(E)(K) = \{x \in E \otimes_F K : (I_E \otimes id_K)(x) \cdot x = 1_K\} \tag{4}$$

gegebenen algebraischen Gruppen über F. Für jedes Element x aus $G(E)(K)$ sei $\mu(x) = (I_E \otimes id_K)(x) \cdot x$. Der so definierte Ähnlichkeitscharakter μ von $G(E)$ ist ein Morphismus über F definierter algebraischer Gruppen. Folgende Sequenz ist exakt

$$1 \longrightarrow G^{(1)}(E) \longrightarrow G(E) \xrightarrow{\mu} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1. \tag{5}$$

Diskussion der Gruppen $G(A)$ zu A in $\mathcal{A}$: Wir beginnen unsere Diskussion mit den Gruppen $G(A)$ zu $(A, I(A))$ aus $\mathcal{G}$. Hier ist $A \oplus I(A)$ invariant unter I und es gilt $I(a,b) = (I(b), I(a))$. Zu lösen ist so $\mu = I(b)a = I(a)b$ für μ aus F^*. Daher definiert

$$R_{Z_A/F}(GL(A)) \times (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow G(A)(\overline{F}), \ (a, \mu) \longmapsto (a, \mu \cdot I(a^{-1})), \tag{6}$$

einen Isomorphismus über F definierter algebraischer Gruppen. Nach geeigneter Wahl einer Basis lässt sich dabei $I(g) = {}^t g$ voraussetzen. Weiter ist $GL(A)$ die für jede kommutative Z_A–Algebra K durch $GL(A)(K) = (A \otimes_{Z(A)} K)^*$ gegebene **allgemeine lineare Gruppe** zu A. Sie ist definiert über Z_A. Die **spezielle lineare Gruppe** $SL(A)$ zu A ist definiert als der Kern der reduzierten Norm RN von A in $GL(A)$. Ihre Weilrestriktion von $Z(A)$ auf F ist insbesondere die derivierte Gruppe $G^{(1)}(A)$ von $G(A)$.

Die Konstruktion der Gruppen zu Algebren A aus $\mathcal{A}_{\text{aut}}$ unterteilen wir in jeweils zwei Schritten.Zuerst wird die Multiplikatorgleichung $\mu = I(x)x$ für μ im Zentrum von A gelöst. Wie in (3) und (4) beschrieben erhalten wir so die Gruppen $H^{(1)}(A)$ und $H(A)$. Diese sind über dem Fixkörper Z_A^+ von I_A im Zentrum Z_A von A definiert.
Liegt A in $\mathcal{U}$, dann ist $H(A) = GU(A)$ die Gruppe der **unitären Ähnlichkeiten**. Für A in $\mathcal{S}$ werden wir zeigen, daß I_A nicht vom orthogonalen Typ ist. Somit ist dann $H(A) = GSp(A)$, die Gruppe der **symplektischen Ähnlichkeiten** zu A, eine Gruppe über $Z_A = Z_A^+$. Als Gruppen $H^{(1)}(A)$ erhält man die **unitäre Gruppe** $U(A)$ und die **symplektische Gruppe** $Sp(A)$ respektive.
Die über F definierten Gruppen $G(A) = G(A, I_A)$ erhält manin einem zweiten Konstruktionsschritt. Intuitiv ist $G(A)$ die F–Gruppe, deren F–wertigen Punkte das Urbild von F^* in $H(A)(Z_A^+)$ unter μ sind. Präziser ist $G(A)$ definiert als die F–Gruppe, die folgendes Pullback–Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & R_{Z^+/F}(H^{(1)}(A)) & \longrightarrow & G(A) & \xrightarrow{\mu_A} & (\mathbf{G}_m)_F & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow e_A & & \downarrow \Delta_F & & \\ 1 & \longrightarrow & R_{Z^+/F}(H^{(1)}(A)) & \longrightarrow & R_{Z^+/F}(H(A)) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{R}_{Z^+/F}(\mathbf{G}_m)_{Z^+} & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{7}$$

kommutativ macht. Dabei bezeichnet e_A die kanonische Inklusion und Δ_F ist die Einbettung von $(\mathbf{G}_m)_F$ auf der Diagonalen von $\mathrm{R}_{Z^+/F}(\mathbf{G}_m)_{Z^+}$. Insbesondere gilt dann $G^{(1)}(A) = R_{Z^+/F}(H^{(1)}(A))$.

Die beiden Haupresultate dieses Abschnittes formulieren sich jetzt wiefolgt.

(1.3) GSp**–Klassifikationssatz:** *Der Zentralisator $C_{GSp(2n)}(s)$ des F–rationalen, halbeinfachen Elementes s in der $GSp(2n)$ hat folgende Struktur: Die Abbildung*

$$\Phi : C_{aut} \times \prod \left\{ R_{Z_A/F}(GL(A)) : A \in \mathcal{G} \right\} \longrightarrow C_{GSp(2n)}(s)$$
$$\left(a, (a_A)_{A \in \mathcal{G}}\right) \longmapsto \left(a, \left(a_E, \mu(a) \cdot I(a_A^{-1})\right)_{A \in \mathcal{G}}\right)$$

ist ein Isomorphismus über F definierter algebraischer Gruppen. Im Fall $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ sei dabei $C_{aut} = (\mathbf{G}_m)_F$ und μ sei die identische Abbildung von $(\mathbf{G}_m)_F$ in sich. Andernfalls ist C_{aut} definiert durch folgendes kommutative Pullback–Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \prod_{A \in \mathcal{A}_{\mathrm{aut}}} G^{(1)}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_{aut} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & (\mathbf{G}_m)_F \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \prod_{A \in \mathcal{A}_{\mathrm{aut}}} G^{(1)}(A)) \arrow[r] & \prod_{A \in \mathcal{A}_{\mathrm{aut}}} G(A) \arrow[r, "\prod \mu_A"] & \prod_{A \in \mathcal{A}_{\mathrm{aut}}} (\mathbf{G}_m)_F \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne μ den Ähnlichkeitscharakter und Δ sei die Einbettung von $(\mathbf{G}_m)_F$ auf der Diagonalen von $\Pi\{(\mathbf{G}_m)_F : A \in \mathcal{A}_{\mathrm{aut}}\}$. Insbesondere restringiert I auf einer Algebra A in $\mathcal{A}_{\mathrm{aut}}$ nur dann zu einer symplektischen Involution, wenn A nicht kommutativ ist.

(1.4) Sp**–Klassifikationssatz:** *Sei s ein F–rationales, halbeinfaches Element der $GSp(2n)$. Dann ist*

$$1 \longrightarrow C_{Sp(2n)}(s) \longrightarrow C_{GSp(2n)}(s) \xrightarrow{\mu} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$$

eine exakte Sequenz über F definierter, zusammenhängender algebraischer Gruppen. Für den Zentralisator $C_{Sp(2n)}(s)$ von s in der $Sp(2n)$ gilt

$$C_{Sp(2n)}(s) = \prod_{A \in \mathcal{S}} R_{Z_A/F}(Sp(A)) \times \prod_{A \in \mathcal{U}} R_{Z_A^+/F}(U(A)) \times \prod_{A \in \mathcal{G}} R_{Z_A/F}(GL(A)).$$

Insbesondere ist die derivierte Gruppe jedes Zentralisators in $GSp(2n)$ eines F–rationalen, halbeinfachen Elementes der $GSp(2n)$ einfach zusammenhängend und zusammenhängend.

Beweis von (1.3) und (1.4): Zu zeigen bleibt hier nur, daß I_A für jede Algebra A in $\mathcal{S}$ nicht orthogonal ist und daß keine Algebra in $\mathcal{S}$ kommutativ ist. Dazu notieren wir zuerst, daß der Schnitt $C^{(1)}$ des Zentralisators von s in $GSp(2n)$ mit $Sp(2n)$ wieder zusammenhängend ist: Über dem algebraischen Abschluß von F schreibt man dafür s als Produkt eines Elementes des Zentrums von $GSp(2n)$ und eines Elementes s_0 aus $Sp(2n)$. Dann ist $C^{(1)}$ identisch mit dem Zentralisator in $Sp(2n)$ von s_0. Nach dem Satz von Steinberg ist $C^{(1)}$ daher zusammenhängend.

Jetzt ist $C^{(1)}$ über F isomorph zu dem Produkt der Gruppen $G^{(1)}(A)$ mit A in $\mathcal{A}$. Auszuschließen ist deshalb, daß eine der Gruppen $G^{(1)}(A)$ zu A in $\mathcal{S}$ Form einer speziellen orthogonalen Gruppe ist. Dies kann über dem algebraischen Abschluß von F entschieden werden. Daher liege s bereits im zerfallenden maximalen Torus T_{split} von $GSp(2n)$. Gelte explizit $s = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, \mu a_1^{-1}, \ldots, \mu a_n^{-1})$. Dann ist $C^{(1)}$ der Zentralisator in $Sp(2n)$ von $s_0 = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$. Die Wurzeln $\Phi(s)$ von $C_{GSp(2n)}(s)$ bezüglich T_{split} sind genau die Wurzeln von $GSp(2n)$ bezüglich T_{split}, in deren Kern s enthalten ist. Sie

restringieren zu verschiedenen Wurzeln auf $Sp(2n)$. Diese bilden die Wurzeln $\Phi(s_0)$ von $C^{(1)}$ bezüglich des zerfallenden maximalen Torus der $Sp(2n)$.
Auf jeder Teilalgebra der Liealgebra von $Sp(2n)$, die zu einem einfachen Faktor A des Zentralisators $C^{(1)}$ von s_0 in der $Sp(2n)$ gehört, restringiert das ad–invarianten Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ auf der Liealgebra der $Sp(2n)$ zu einer ad–invarianten, nicht ausgearteten Form. Die Cartanzahlen von $G^{(1)}(A)$ und die Kanten des Dynkindiagrammes von $G^{(1)}(A)$ werden auf diese Weise bereits durch das $Sp(2n)$–Wurzelsystem bestimmt. Es existiert keine Einbettung eines B_k–Wurzelsystems mit $k \geq 3$ oder D_k–Wurzelsystems mit $k \geq 4$ in ein C_n–Wurzelsystem. Damit ist jeder einfache Faktor des Zentralisators $C^{(1)}$ Form entweder einer speziell linearen oder einer symplektischen Gruppe. Da die einzige kommutative symplektische Gruppe μ_2 nicht zusammenhängend ist, folgt hieraus auch, daß jede Algebra in S nicht kommutativ ist. Das beendet den Beweis der beiden Sätze.

2. Das Hasseprinzip für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $GSp(2n)(F)$: Ziel dieses Abschnittes ist insbesondere, die Gültigkeit des Hasseprinzips für die Zentralisatoren halbeinfacher, F–rationaler Elemente von $GSp(2n)$ zu zeigen. Für jede Stelle v des Zahlkörpers F sei im folgenden eine Einbettung der Zerlegungsgruppe von v in $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ fixiert.

(2.1) Definitionen: Sei G eine über F definierte lineare algebraische Gruppe. Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n sei, wenn sinnvoll,

$$(1) \qquad h_G^n : H^n(F,G) \longrightarrow \prod\nolimits_v H^n(F_v, G)$$

das Produkt der Restriktionsabbildungen $h_v^n : H^n(F,G) \longrightarrow H^n(F_v, G)$. Dabei läuft v über alle Stellen von F. Den Kern von h_G^n bezeichnen wir mit $\ker^n(F,G)$.
Sei G zusätzlich zusammenhängend. Dann liegt nach [**Oe**, pp.47f] zuerst das Bild jeder Abbildung h_G^n im Koprodukt von $H^n(F_v, G)$. Dieses Koprodukt ist weiter zu $H^n(\mathbb{A}_F, G) = H^n(\mathrm{Gal}(\overline{F}|F), G(\mathbb{A}_{\overline{F}}))$ isomorph. Somit gilt

$$(2) \quad \ker^n(F,G) = \ker\Big(H^n(F,G) \longrightarrow \prod\nolimits_v H^n(F_v,G)\Big) = \ker\Big(H^n(F,G) \longrightarrow H^n(\mathbb{A}_F, G)\Big).$$

Dabei sei G stets zusätzlich kommutativ im Fall $n \geq 2$. Die Abbildung h_G^1 bezeichnen wir als die **Hasseabbildung** von G. Für die Gruppe G gilt das **Hasseprinzip**, wenn $\ker^1(F,G)$ trivial, also die Hasseabbildung von G injektiv ist.

(2.2) Dem Begriff des Hasseprinzips für algebraische Gruppen liegt der **Normensatz von Hasse** [**Neu**, p.89, Corollary (5.2)] zugrunde: sei L eine zyklische Erweiterung des Zahlkörpers F. Genau dann ist ein Element von F Norm eines Elementes aus L, wenn es für jede Stelle v in F und alle Stellen w in L, die über v liegen, Norm in K_v eines Elementes von L_w ist.

(2.3) Bemerkung: Für jede zyklische Körpererweiterung Z von F erfüllt nach dem Normensatz von Hasse die durch die Exaktheit der Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{R}_{Z/F}((\mathbf{G}_m^1)_Z) \longrightarrow \mathrm{R}_{Z/F}\,(\mathbf{G}_m)_Z \xrightarrow{N_{Z/F}} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$$

definierte Gruppe $\mathrm{R}_{Z/F}((\mathbf{G}_m^1)_Z)$ das Hasseprinzip.

Hauptsächliches Ziel dieses Abschnittes ist jetzt ein Beweis folgender beider Resultate

(2.4) Satz: *Jeder Zentralisator in der Gruppe $GSp(2n)$ eines halbeinfachen, F-rationalen Elementes der Gruppe $GSp(2n)$ erfüllt das Hasseprinzip.*

(2.5) Satz: *Jeder Zentralisator in der Gruppe $Sp(2n)$ eines halbeinfachen, F-rationalen Elementes der Gruppe $GSp(2n)$ erfüllt das Hasseprinzip.*

Im Rest dieses Abschnittes übernehmen wir die Bezeichnungen und Konventionen von Abschnitt 1. Weiter bezeichnen C den Zentralisator in $GSp(2n)$ des F-rationalen, halbeinfachen Elementes s der $GSp(2n)$ und $C^{(1)}$ den durch die Exaktheit von

$$1 \longrightarrow C^{(1)} \longrightarrow C \xrightarrow{\mu} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$$

gegebene Zentralisator von s in der $Sp(2n)$.

Wir benutzten zwei weitere Resultate im Beweis der beiden Sätze. Da diese Resultate von unabhängigem Interesse sind, gehen wir zunächst auf sie ein.

(2.6) Lemma: *Sei G eine über dem Zahlkörper F definierte, zusammenhängende reduktive Gruppe. Wenn es eine zyklische Erweiterung E von F gibt, so daß $\mathrm{Gal}(E|F)$ trivial auf dem Zentrum $Z(\widehat{G})$ der dualen Gruppe von G operiert, dann erfüllt G das Hasseprinzip.*

Beweise nach [**Rog**, p.25, 3.5.1(b)] benutzen die Verallgemeinerung der Tate–Nakayama Dualität auf reduktive Gruppen von Kottwitz. Wir skizzieren die Idee. Ausgangspunkt des Argumentes ist die Beobachtung

$$\ker^1(F, G) = \ker^1(F, Z(\widehat{G}))^D$$

von Kottwitz. Da E trivial auf $Z(\widehat{G})$ operiert, gilt $H^1(E, Z(\widehat{G})) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{E}|E), Z(\widehat{G}))$. Die gleiche Identität gilt für alle Lokalisierungen von F. Nach Tschebotarev ist damit $\ker^1(E, Z(\widehat{G}))$ trivial. Die Inflation–Restriktion Sequenz zeigt $\ker^1(F, Z(\widehat{G})) = \ker^1(E/F, Z(\widehat{G}))$. Die letzte Gruppe ist wieder nach Tschebotarev trivial. Dies beendet den Beweis von (2.6).

(2.7) Lemma: *Jede unitäre Gruppe $U(E)$ und jede Gruppe $GU(E)$ unitärer Ähnlichkeiten erfüllt das Hasseprinzip.*

Wir erinnern, daß $1 \longrightarrow U(E) \longrightarrow GU(E) \longrightarrow (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$ in der Notation von (1.2) exakt ist. Nach [**KoSTF**, p.616, (3.8.1)] ist dann die assoziierte Sequenz von Zentren der dualen Gruppen

$$1 \longrightarrow Z((\mathbf{G}_m)_K{}^\wedge) \longrightarrow Z(GU(E)^\wedge) \longrightarrow Z(U(E)^\wedge) \longrightarrow 1$$

exakt. Das Lemma ist so eine Konsequenz von (2.6).

Beweis von Satz (2.5): Nach (1.4) ist $C^{(1)}$ isomorph zu einem Produkt von Formen speziell linearer, symplektischer und unitärer Gruppen. Die erste Galoiskohomologie von Formen speziell linearer und symplektischer Gruppen ist trivial. Satz (2.5) resultiert somit aus Lemma (2.7).

Beweis von Satz (2.4): Wir zeigen, daß die Gültigkeit des Hasseprinzips für C aus der Gültigkeit des Hasseprinzips für $C^{(1)}$ folgt. Unser Argument basiert auf der Exaktheit folgender Sequenz algebraischer Gruppen

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow C^{(1)} \times (\mathbf{G}_m)_F \xrightarrow{m} C \longrightarrow 1,$$

wobei m die durch $m(c,\lambda) = (\lambda \cdot \mathrm{id}_{2n}) \cdot c$ definierte Abbildung ist. Das folgende Diagramm aus den assoziierten Hasseabbildungen ist dann kommutativ

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\ker^1(F,\mu_2) \arrow[r] \arrow[d] & \ker^1(F, C^{(1)} \times (\mathbf{G}_m)_F) \arrow[r] \arrow[d] & \ker^1(F,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \ker^2(F,\mu_2) \arrow[d] \\
H^1(F,\mu_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F, C^{(1)} \times (\mathbf{G}_m)_F) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^2(F,\mu_2) \arrow[d] \\
H^1(\mathbb{A}_F,\mu_2) \arrow[r] & H^1(\mathbb{A}_F, C^{(1)} \times (\mathbf{G}_m)_F) \arrow[r] & H^1(\mathbb{A}_F,C) \arrow[r, "\delta_A"] & H^2(\mathbb{A}_F,\mu_2)
\end{tikzcd}$$

und seine Zeilen und Spalten sind exakt. Nach (2.6) gilt das Hasseprinzip für $C^{(1)}$ und $H^1(F,(\mathbf{G}_m)_F)$ ist trivial nach Hilbert 90. Der Verbindungshomomorphismus δ induziert daher eine Injektion $\ker^1(F,C) \longrightarrow \ker^2(F,\mu_2)$. Der Satz folgt jetzt aus der bekannten Tatsache, daß μ_2 das Hasseprinzip für H^2 erfüllt. Wir erinnern an den Beweis dieses Resultates. Wegen der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow (\mathbf{G}_m)_F \xrightarrow{x \mapsto x^2} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$$

ist $H^2(F,\mu_2)$ isomorph zur Gruppe der Elemente der Ordnung zwei in der Brauergruppe $H^2(F,(\mathbf{G}_m)_F)$ von F. Analog gilt $H^2(F_v,\mu_2) = H^2(F,(\mathbf{G}_m)_F)_2$ für jede Stelle v von F. Folglich liegt $\ker^2(F,\mu_2)$ in $\ker^2(F,(\mathbf{G}_m)_F)$. Das beendet jetzt den Beweis, denn diese letzte Gruppe $\ker^2(F,(\mathbf{G}_m)_F)$ ist trivial nach dem

(2.8) Hauptsatz der Algebrentheorie: *Für jeden Zahlkörper F ist die Sequenz*

$$1 \longrightarrow H^2(F,(\mathbf{G}_m)_F) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}_F,(\mathbf{G}_m)_F) \xrightarrow{\mathrm{inv}_F} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 1$$

exakt.

Einen Beweis dieses letzten Resultates findet man zum Beispiel in [**NeuA**, p.244, (5.8)].

3. Tamagawazahlen algebraischer Gruppen: Falls nicht anders gesagt, seien im folgenden alle algebraischen Gruppen über dem Zahlkörper F definiert, zusammenhängend und reduktiv.

(3.1) Definition der Tamagawazahl: Wir erinnern an die Definition der Tamagawazahl einer über F definierten, zusammenhängenden, linearen algebraischen Gruppe G.

Für eine F–rationale, invariante Differentialform ω auf G bezeichne ω_v für jede Stelle v von F das von ihr auf $G(F_v)$ definierte Haarsche Maß. Durch das konvergente Produkt

$$(1) \qquad dG_A = \frac{1}{\rho_G \cdot \sqrt{|D(F)|^n}} \prod\nolimits_{v|\infty} \omega_v \otimes \prod\nolimits_{v \text{ endlich}} L_v(1,\chi_G) \cdot \omega_v$$

wird ein invariantes Maß auf $G(\mathbb{A}_F)$ definiert. Dabei bezeichne n die Dimension von G. Die Diskriminante von F sei $D(F)$. Weiter bezeichnet χ_G den Charakter des $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$–Moduln $X^*(G)(F)$. Bezeichnet $L_v(s,\chi_G)$ den lokalen Faktor an der Stelle v der Artinschen L–Reihe zu χ_G, dann sei schließlich ρ_G sein Residuum an der Stelle 1.

Die freie abelsche Gruppe $X^*(G)(F)$ der über F definierten rationalen Charaktere auf G habe den Rang ℓ und sei mit der Basis $\xi_1,\ldots,\xi_\ell$ versehen. Dann gilt insbesondere $\rho_G = \lim_{s\to 1}(1-s)^\ell \cdot L(s,\chi_G)$. Weiter definiert $\psi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbf{R}^\ell$, $x \longmapsto (\ldots, \log\|\xi_i(x)\|, \ldots)$

einen Homomorphismus. Der Kern von ψ sei die Teilgruppe $G^1(\mathbb{A}_F)$ von $G(\mathbb{A}_F)$. Diese besteht so aus allen Elementen x mit $\|\xi(x)\| = 1$ für alle χ in $X^*(G)(F)$.

Das **Tamagawamaß** sei dann das durch

$$(2) \qquad dG_A = d(G_A/G_A^1) \cdot d(G_A^1/G_F) \cdot dG_F \overset{\text{def}}{=} d(G_A/G_A^1) \cdot d\mu_T \cdot dG_F$$

gegebene invariante Maß μ_T auf $G^1(\mathbb{A}_F)/G(F)$. Dabei seien die Masse wiefolgt: dG_F sei das Zählmaß auf $G(F)$. Das invariante Maß auf $G(\mathbb{A}_F)/G^1(\mathbb{A}_F)$ mit dem Lebesguemaß auf $\mathbf{R}^\ell$ als Bildmaß unter ψ sei $d(G_A/G_A^1)$.

Nach einem Satz von Borel [**B**, p.22, Théorème 5.8] hat $G^1(\mathbb{A}_F)/G(F)$ endliches Volumen bezüglich jedes invarianten Maßes.

Die **Tamagawazahl** $\tau(G) = \tau_F(G)$ von G ist definiert als das Volumen von $G^1(\mathbb{A}_F)/G(F)$ bezüglich des Tamagawamaßes μ_T.

(3.2) Beispiel: *Die Tamagawazahlen der Gruppen* $(\mathbf{G}_m)_F$ *und* $(\mathbf{G}_a)_F$ *sind Eins.*

Das ist [**WBN**, p.128, VII§6, Proposition 12] und [**Oe**, p.25, I(5.14)(1)]. Wesentlich tiefliegender ist folgender

(3.3) Satz: *Jede über einem Zahlkörper definierte, einfach zusammenhängende, zusammenhängende halbeinfache Gruppe hat die Tamagawazahl Eins.*

Weil zeigte dies durch explizites Rechnen für einige klassische Gruppen und vermutete, daß dieser Satz allgemein richtig ist. Langlands konnte diese Vermutung von Weil für zerfallende Gruppen zeigen. Später verallgemeinerte Lai die Methode von Langlands auf den quasizerfallenden Fall. Der letzte Schritt zum Beweis der Vermutung wurde von Kottwitz Ende der 80er Jahre gemacht. Er zeigte, daß die Tamagawazahl einer über einem Zahlkörper definierten, einfach zusammenhängenden, zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe G identisch ist mit der Tamagawazahl ihrer quasizerfallenden inneren Form G^*. Sein Beweis beruht auf einem Vergleich der Spurformeln von Arthur zur G und G^*, die er an von ihm konstruierten Funktionen mit besonderen Eigenschaften auswertet.

Wir erinnern an einige funktorielle Eigenschaften der Tamagawazahlen. Fast nach Definition gilt

(3.4) Lemma: $\tau_K(G \times G') = \tau_K(G) \cdot \tau_K(G')$.

Analysiert man das Verhalten aller in (1.1) eingeführten Gruppen und Maße unter der Weilrestriktion, dann erhält man nach [**Oe**, p.27, Théorème II(1.3)] das

(3.5) Lemma: *Sei F ein Teilkörper des Zahlkörpers E. Dann gilt*

$$\tau_K(\mathrm{R}_{E/F}(G)) = \tau_E(G)$$

für jede über E definierte, zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe G.

Das folgende Resultat [**Oe**, p.40f, Théorème III(5.2), Théorème III(5.3)] oder [**Sans**, p.74, (10.4)] ist der Ausgangspunkt zu einer kohomologischen Deutung der Tamagawazahlen reduktiver Gruppen. Es zeigt weiter, daß Tamagawazahlen im allgemeinen nicht funktoriell bezüglich kurzer exakter Sequenzen sind.

(3.6) Satz: *Für jede exakte Sequenz* $1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{e} G_2 \xrightarrow{p} G_3 \longrightarrow 1$ *über* F *definierter, zusammenhängender, reduktiver Gruppen gilt*

$$\tau_F(G_2) = \tau_F(G_1) \cdot \tau_F(G_3) \cdot \Delta$$

mit

$$\Delta = \frac{\left|\ker\left(\ker^1(F, G_1) \xrightarrow{e^1} \ker^1(F, G_2)\right)\right|}{\left|\operatorname{koker}\left(X^*(G_2)(F) \xrightarrow{e^*} X^*(G_1)(F)\right)\right| \cdot \left[G_3(\mathbb{A}_F) : p_A\left(G_2(\mathbb{A}_F)\right) \cdot G_3(F)\right]}$$

Dabei ist $X^*(G)(F)$ *für eine über* F *definierte Gruppe* G *die Teilgruppe aller über* F *definierten Charaktere von* $X^*(G) = \operatorname{Hom}(G, (\mathbf{G}_m)_F)$.

Eine sofortige Konsequenz von (3.6) ist nach [**Sans**, p.77, 10.5] folgender

(3.7) Satz: *Sei* $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 1$ *eine exakte Sequenz über dem Zahlkörper* F *definierter, zusammenhängender reduktiver Gruppen. Dann gilt*

$$\tau_F(G_2) = \frac{\tau_F(G_1) \cdot \tau_F(G_3)}{\#\operatorname{koker}\left(X^*(G_2)(F) \longrightarrow X^*(G_1)(F)\right)},$$

wenn G_1 *das Hasseprinzip erfüllt und* $H^1(F_v, G_1)$ *trivial ist für alle endlichen Stellen* v *von* F.

Beweisskizze für Satz (3.6): Ein späteres Argument wird entscheidend auf Satz (3.6) basieren. Wir geben daher eine Beweisidee. Verwendet wird die folgende Darstellung der Tamagawazahl einer Gruppe G:

$$\tau(G) = \frac{\displaystyle\int_{G(\mathbb{A}_F)/G(F)} h(\psi(x))\, d\left(G_A/G_F(F)\right)}{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^\ell} h(t)\, dt}$$

für jede integrierbare Abbildung h auf $\mathbf{R}^\ell$ mit einem von Null verschiedenen Integral. Das Argument basiert jetzt auf einer Integralformel von Mars, die sich in unserer Situation in der offensichtlichen Notation zu

$$\int_{G_2(\mathbb{A}_F)/G_2(F)} h(\psi_2(x_2))\, dx_2 = \int_{p_A(G_2(\mathbb{A}_F))/p(G_2(F))} dp(x_2) \int_{G_1(\mathbb{A}_F)/G_1(F)} h(\psi_2(x_2 x_1))\, dx_1$$

übersetzt. Die Integrale auf deren rechten Seite werden sukzessiv ausgewertet. Zuerst gilt

$$\int_{G_1(\mathbb{A}_F)/G_1(F)} h(\psi_2(x_2 x_1))\, dx_1 = \frac{\tau(G_1)}{\#\operatorname{koker}(e^*)} h_3(\psi_2(x_2)).$$

Dabei kommt $\#\operatorname{koker}(e^*)$ als Faktor durch Variablentransformation auf dem Niveau der Gruppen $X^*(G_i)(F) \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^{\ell_i}$ herein. Weiter bezeichnet h_3 den für alle t in $\mathbf{R}^{\ell_2}$ durch

$$h_3(t) = \int_{\mathbf{R}^{\ell_1}} h(t + t_1)\, dt_1$$

gegebenen Pullback von h auf den Quotienten $\mathbf{R}^{t_3}$. Es gilt nach Konstruktion bereits $h_3(\psi_2(x_2)) = h_3(\psi_3(p(x_2)))$. Für $H_3 = h_3 \circ \psi_3$ hat man weiter allgemein

$$\int_{p_A(G_2(\mathbb{A}_F))/p(G_2(F))} H_3(p_A(x_2))\, dp(x_2) = \mathrm{index}(\mu) \int_{G_3(\mathbb{A}_F)/G_3(F)} H_3(x_3)\, dx_3.$$

Dabei ist μ die kanonische Abbildung $\mu : p_A(G_2(\mathbb{A}_F))/p(G_2(F)) \longrightarrow G_3(\mathbb{A}_F)/G_3(F)$ und

$$\mathrm{index}(\mu) = \frac{[G_3(\mathbb{A}_F) : p_A(G_2(\mathbb{A}_F)) \cdot G_3(F)]}{[p(G_2(F)) : G_3(F) \cap p_A(G_2(\mathbb{A}_F))]}.$$

Eine (offensichtliche) Diagrammjagd zeigt, daß der Index im Nenner gleich der Kardinalität von $\ker(\ker^1(F, G_1) \longrightarrow \ker^1(F, G_2))$ ist. Schließlich gilt

$$\int_{G_3(\mathbb{A}_F)/G_3(F)} H_3(x_3)\, dx_3 = \tau(G_3) \int_{\mathbf{R}^{t_3}} h_3(t_3)\, dt_3 = \tau(G_3) \int_{\mathbf{R}^{t_2}} h(t_2)\, dt_2,$$

wobei sich die letzte Gleichheit nach Fubini ergibt. Tautologisches Umschreiben der linken Seite der Integralformel von Mars beendet den Beweis.

In einem letzten Schritt soll auf eine kohomologische Interpretation der Tamagawazahlen eingegangen werden. Wir werden in dieser Richtung folgendes Resultat benutzen.

(3.8) Satz (Ono): *Die Tamagawazahl eines über dem Zahlkörper F definierten Torus T ist gegeben durch*

$$\tau_K(T) = \frac{|\ \mathrm{koker}(h_T^1)\ | \,.\, |\ \ker^2(F, T)\ |}{|\ \ker^1(F, T)\ |} = \frac{|\ H^1(F, X^*(T))\ |}{|\ \ker^1(F, T)\ |}.$$

Dabei bezeichnet $X^*(T)$ die Gruppe $\mathrm{Hom}(T, (\mathbf{G}_m)_F)$ *aller Charaktere von T.*

Beweisskizze von Satz (3.8): Wir skizzieren im folgenden einen Beweis dieses Resultates nach [**Oe**, pp. 54ff]. Zuerst zur die Gleichheit der beiden Zähler. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow T(\overline{F}) \xrightarrow{h_T} T(\mathbb{A}_{\overline{F}}) \longrightarrow T(\mathbb{A}_{\overline{F}})/T(\overline{F}) \longrightarrow 1$$

ist exakt. Die Exaktheit der assoziierten langen exakten Kohomologiesequenz an den Verbindungshomomorphismen zwischen nullter und erster sowie erster und zweiter Kohomologie zeigt dann, daß

$$1 \longrightarrow \mathrm{koker}(h_T^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}_F, T(\mathbb{A}_{\overline{F}})/T(\overline{F})) \longrightarrow \ker^2(F, T) \longrightarrow 1$$

exakt ist. Die Kohomologiegruppe in der Mitte ist nach Tate-Nakayama [**KoSTF**, p.621] dual zu $H^1(F, X^*(T))$.

Der eigentliche Beweis des Satzes beruht jetzt darauf, daß

$$\eta(T) = \tau(T) \frac{|\ \ker^1(F, T)\ |}{|\ \mathrm{koker}^1(h_T^1)\ | \,.\, |\ \ker^2(F, T)\ |}.$$

kompatibel ist mit exakten Sequenzen: für jede exakte Sequenz $1 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 1$ von über F definierten Tori ist also $\eta(T_2) = \eta(T_1) \cdot \eta(T_3)$.

Setzt man das für einen Augenblick voraus, erhält man die Aussage des Satzes wiefolgt. Nach (3.5) ist für jede endliche Erweiterung L von F die Tamagawazahl der Weilrestriktion $T = \mathrm{R}_{L/F}(\mathbf{G}_m)_L$ mit der Tamagawazahl von $(\mathbf{G}_m)_L$ über L identisch und ist damit Eins. Weiter verschwindet die erste Kohomologiegruppe von T nach Hilbert 90. Nach dem Hauptsatz der Algebrentheorie (2.8) ist $\ker^2(K,T)$ trivial. Daher ist $\eta(T) = 1$. Folglich induziert η eine Abbildung auf den Isomorphieklassen von F–Tori, die Eins auf jeder Weilrestriktion von $(\mathbf{G}_m)_L$ nach F ist und ihre Werte in einer kommutativen Gruppe ohne Torsion annimmmt. Nach den bekannten Argumenten in [**Ono** 4, p.126] oder [**Mil**, p.152] ist $\eta(T) = 1$ für jeden F–Torus T wie im Satz behauptet.

Der Beweis der Kompatibilität von η verwendet einige weitere Resultate aus der Tate-Nakayama Dualität, auf die wir zuerst eingehen. Jeder F–Charakter von T induziert einen Homomorphismus von $\mathrm{koker}(h_T^2) = \mathrm{koker}(H^2(F,T) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}_F, T))$ nach $\mathrm{koker}(h_F^2) = \mathrm{koker}(H^2(F,(\mathbf{G}_m)_F) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}_F,(\mathbf{G}_m)_F))$. Die Abbildung inv_F faktorisiert nach dem Hauptsatz der Algebrentheorie (2.8) über die Brauergruppe $H^2(F,(\mathbf{G}_m)_F)$ von F. Man erhält so die Bilinearform

$$\begin{aligned} X^*(T)(F) \times \mathrm{koker}(h_T^2) &\longrightarrow \mathrm{koker}(h_F^2) \xrightarrow{\mathrm{inv}_F} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (\chi,[a]) &\longmapsto \mathrm{inv}_F([\chi(a)]) \end{aligned}$$

mit assoziiertem Homomorphismus

$$\lambda_T : \mathrm{koker}(h_T^2) \longrightarrow X^*(T)(F)^D = \mathrm{Hom}(X^*(T)(F), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Nach weiteren Resultaten der Tate–Nakayama Dualität [**KoSTF**], p.622] ist λ_T ein Isomorphismus und sind die Abbildungen h_T^n für $n \geq 3$ bijektiv. Daher folgt mit einem Argument wie zu Anfang des Beweises schließlich

$$H^2(F, T(\mathbb{A}_{\overline{F}})/T(\overline{F})) = \mathrm{koker}(h_T^2).$$

Für den Beweis der Kompatibilitätseigenschaft von η komplettieren wir die zu den beiden kurzen exakten Sequenzen

$$1 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{e} T_2 \xrightarrow{p} T_3 \longrightarrow 1$$

und

$$1 \longrightarrow T_1(\mathbb{A}_{\overline{F}}) \xrightarrow{e_A} T_2(\mathbb{A}_{\overline{F}}) \xrightarrow{p_A} T_3(\mathbb{A}_{\overline{F}}) \longrightarrow 1$$

korrespondierende lange exakte Kohomologiesequenz durch die Kerne und Kokerne der Abbildungen $h_i^n = h_{T_i}^n$. Indem man die oben beschriebenen Dualitätsaussagen verwendet, erhält man mit

$$Q_1 = \frac{T_3(F) \cap p_A(T_2(\mathbb{A}_F))}{p(T_2(F))} \qquad \text{und} \qquad Q_2 = \frac{T_3(\mathbb{A}_F)}{T_3(F).p_A(T_2(\mathbb{A}_F))}$$

das kommutative Diagrammm

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & \dfrac{T_3(F)}{p(T_2(F))} & \longrightarrow & \dfrac{T_3(\mathbb{A}_F)}{p_A(T_2(\mathbb{A}_K))} & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^1(F,T_1) & \longrightarrow & H^1(F,T_1) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{A}_F,T_1) & \longrightarrow & \mathrm{koker}(h_1^1) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^1(F,T_2) & \longrightarrow & H^1(K,T_2) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{A}_F,T_2) & \longrightarrow & \mathrm{koker}(h_2^1) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^1(F,T_3) & \longrightarrow & H^1(F,T_3) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{A}_F,T_3) & \longrightarrow & \mathrm{koker}(h_3^1) & \longrightarrow & 1. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^2(F,T_1) & \longrightarrow & H^2(F,T_1) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{A}_F,T_1) & \longrightarrow & X^*(T_1)(F)^D & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^2(F,T_2) & \longrightarrow & H^2(F,T_2) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{A}_F,T_2) & \longrightarrow & X^*(T_2)(F)^D & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker^2(F,T_3) & \longrightarrow & H^2(F,T_3) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{A}_F,T_3) & \longrightarrow & X^*(T_3)(F)^D & \longrightarrow & 1,
\end{array}
$$

dessen Zeilen exakt, dessen Spalten aber nicht notwendigerweise exakt sind. Das alternierende Produkt der Euler–Poincaré Reihen der Zeilen ist somit Eins. Das alternierende Produkt der Euler–Poincaré Reihen der Spalten ist einerseits gleich dem alternierenden Produkt der Euler–Poincaré Reihen der Zeilen, also Eins. Andererseits ist es gleich dem folgenden Ausdruck

$$
\left[\mid \ker^1(F,e) \mid \frac{\mid \ker^1(F,T_2) \mid}{\mid \ker^1(F,T_1) \mid . \mid \ker^1(F,T_3) \mid} . \frac{\mid \ker^2(F,T_1) \mid . \mid \ker^2(F,T_3) \mid}{\mid \ker^2(F,T_2) \mid}\right]
$$
$$
\left[\mid \mathrm{koker}(H^2(F,T_2) \longrightarrow H^2(F,T_3)) \mid\right]^{-1} \times \left[\mid \ker(H^3(\mathbb{A}_F,T_1) \longrightarrow H^3(\mathbb{A}_F,T_2)) \mid\right]
$$
$$
\times \left[\mid T_3(\mathbb{A}_F)/T_3(F).p_A(T_2(\mathbb{A}_F)) \mid \frac{\mid \mathrm{koker}(h_2^1) \mid}{\mid \mathrm{koker}(h_1^1) \mid . \mid \mathrm{koker}(h_3^1) \mid} \mid \mathrm{koker}(e^*) \mid\right]^{-1}.
$$

Es gilt $\mathrm{koker}(H^2(F,T_2) \longrightarrow H^2(F,T_3)) = \ker((H^3(F,T_1) \longrightarrow H^3(F,T_2))$. Wie oben bemerkt sind die Abbildungen h_i^3 bijektiv. Deshalb ist $\ker(H^3(\mathbb{A}_F,T_1) \longrightarrow H^3(\mathbb{A}_F,T_2))$ identisch mit $\ker(H^3(F,T_1) \longrightarrow H^3(F,T_2))$. Es folgt so $\eta(T_2) = \eta(T_1) \cdot \eta(T_3)$ aus der Relation

$$
\frac{\tau(T_1).\tau(T_3)}{\tau(T_2)} = \frac{\mid T_3(\mathbb{A}_F)/T_3(F).p_A(T_2(\mathbb{A}_F)) \mid}{\mid \ker^1(F,e) \mid} \mid \mathrm{koker}(e^*) \mid .
$$

von (3.6). Das beendet den Beweis.

4. Die Tamagawazahlen der Zentralisatoren halbeinfacher, Elemente von $GSp(2n)(F)$: Ziel dieses Kapitels ist es, die Tamagawazahlen der Zentralisatoren halbeinfacher, F–rationaler Elemente der $GSp(2n)$ zu bestimmen. Dies reduziert sich darauf, die Tamagawazahlen der in (1.3) aufgeführten Repräsentanten zu berechnen.

(4.1) Notation: Wir fixieren im folgenden ein halbeinfaches, F–rationales Element s von $GSp(2n)$. Nach (1.1) ist der Zentralisator von s in $M(2n,F)$ das direkte Produkt einer

Familie $\mathcal{A}$ einfacher F–Algebren. Wie in (1.2) beschrieben, sei $\mathcal{A}$ disjunkte Vereinigung der Form $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{U}$. Dabei besteht $\mathcal{U}$ aus allen Algebren A, auf denen die symplektische Involution I zu einer Involution der zweiten Art restringiert. Anders gesagt besteht $\mathcal{U}$ aus allen Algebren A in $\mathcal{A}$, für die $G^{(1)}(A)$ die unitäre Gruppe (über F) zu A ist.

Die Tamagawazahlen der Zentralisatoren von s in $GSp(2n)$ und $Sp(2n)$ respektive berechnen sich dann wiefolgt.

(4.2) Satz: *Die Tamagawazahl des Zentralisators $C_{Sp(2n)}(s)$ von s in der $Sp(2n)$ ist gegeben durch*

$$\tau_F\Big(C_{Sp(2n)}(s)\Big) = 2^{\#\mathcal{U}}.$$

(4.3) Satz: *Die Tamagawazahl des Zentralisators $C_{GSp(2n)}(s)$ von s in der $GSp(2n)$ ist gegeben durch*

$$\tau_F\Big(C_{GSp(2n)}(s)\Big) = \frac{2^{\#\mathcal{U}}}{[F_{\mathfrak{u}} : F]}.$$

Dabei ist $F_{\mathfrak{u}}$ der Klassenkörper zur Gruppe

$$\mathfrak{u} = F^* \cdot \bigcap \{\mathbb{J}_F \cap N_{Z(A)/Z^+(A)}(\mathbb{J}_{Z(A)}) : A \in \mathcal{U}\}$$

und es bezeichnet $Z^+(A)$ für A in $\mathcal{U}$ den Fixkörper der symplektischen Involution I im Zentrum $Z(A)$ von A. Den von den Zentren $Z(A)$ aller der A in $\mathcal{U}$ mit $[Z(A) : F] = 2$ erzeugten Körper enthält $F_{\mathfrak{u}}$ als Teilkörper.

Den Beweisen dieser beiden Sätze voranstellen wollen wir einige technische Resultate.

(4.4) Lemma: *Seien E eine endliche abelsche Erweiterung des Zahlkörpers F und $(\mathbf{G}_m^1)_E$ der durch die Exaktheit der Sequenz*

$$1 \longrightarrow \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E) \longrightarrow \mathrm{R}_{E/F}(\mathbf{G}_m)_E \xrightarrow{N} (\mathbf{G}_m)_F \longrightarrow 1$$

definierte Torus mit N der Weilrestriktion der Körpernorm von E nach F. Dann gilt

$$\tau_F((\mathbf{G}_m^1)_E) = \frac{[E : F]}{\#\ker^1(E, (\mathbf{G}_m^1)_E)}.$$

Insbesondere ist $\tau((\mathbf{G}_m^1)_E) = [E : F]$, wenn E eine zyklische Erweiterung von F ist.

Wie in (2.3) bemerkt ist $\ker^1(F, (\mathbf{G}_m^1)_E)$ trivial, wenn E zyklisch über F ist. Eingesetzt in die allgemeine Formel des Lemmas zeigt das die zweite Aussage.

Die Formel für die Tamagawazahl von $(\mathbf{G}_m^1)_E$ erhalten wir aus der Formel (3.8) von Ono. Für unserere Zwecke sind dort einzig die Zählerterme relevant. Deren Werte bestimmen wir separat im folgenden klassenkörpertheoretischen

(4.5) Lemma: *In der Situation von (4.4) gelten folgende Aussagen*

(1) *Die Hasseabbildung $h^1 : H^1(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E)) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E))$ hat einen zur Gruppe $\mathbb{J}_F / F^* \cdot N_{E/F}(\mathbb{J}_E)$ isomorphen Kokern der Kardinalität $[E : F]$.*

(2) *Die beiden Gruppen $H^2(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E))$ und $H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E))$ sind trivial.*

Als Teilsequenzen von langen exakten Kohomologiesequenzen und nach Hilbert 90 sind nämlich die Zeilen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & (E^*)^1 \arrow[r] \arrow[d, "h^0"] & E^* \arrow[r, "N_{E/F}"] \arrow[d, "h^0_E"] & F^* \arrow[r] \arrow[d, "h^0_F"] & H^1(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) \arrow[r] \arrow[d, "h^1"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{J}_E{}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{J}_E \arrow[r, "N_{E/F}"] \arrow[d] & \mathbb{J}_F \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{koker}(h^0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{J}_E/E^* \arrow[r, "N_{E/F}"] \arrow[d] & \mathbb{J}_F/F^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{koker}(h^1) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

exakt. Nach Konstruktion sind seine Spalten exakt. Somit ist $\mathrm{koker}(h^1)$ isomorph zum Quotienten der Idelklassengruppe $\mathbb{J}_F/F^*$ nach dem Bild von $N_{E/F}(\mathbb{J}_E)$ in ihr. Die erste Aussage des Lemmas erhalten wir jetzt aus dem Reziprozitätsgesetz von Artin [**Neu**, p.94, Theorem (6.5)].

Um die zweite Aussage zu beweisen, betrachten wir die Teilsequenz

$$1 \longrightarrow H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) \longrightarrow H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E) \xrightarrow{N_2} H^2(F, (\mathbf{G}_m)_F)$$

der langen exakten Kohomologiesequenz zur $(\mathbf{G}^1_m)_E$ definierenden exakten Sequenz. Wir behaupten, daß N_2 injektiv ist. Bezeichne für alle n dazu explizit $sh_n : H^n(E, (\mathbf{G}_m)_E) \longrightarrow H^n(F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E)$ den Isomorphismus aus dem Lemma von Shapiro [**Sh**, p.29ff]. Die Komposition der Abbildungen

$$H^0(E, (\mathbf{G}_m)_E) \xrightarrow{sh_0} H^0(F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E) \xrightarrow{N_0} H^0(F, (\mathbf{G}_m)_F)$$

ist dann die Einbettung von E^* auf der Diagonalen gefolgt von der Normabbildung, die über alle Einbettungen von E nach $\overline{F}$ mittelt. Sie ist also die Körpernorm von E^* nach F^*. Aus Funktorialitätsgründen ist deshalb nach [**Sh**, p.33f, Proposition 8] für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n die Komposition der Abbildungen

$$H^n(E, (\mathbf{G}_m)_E) \xrightarrow{sh_n} H^n(F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E) \xrightarrow{N_n} H^n(F, (\mathbf{G}_m)_F)$$

die Korestriktionsabbildung $Cor_n : H^n(E, (\mathbf{G}_m)_E) \longrightarrow H^n(F, (\mathbf{G}_m)_F)$. Im lokalen Fall ist die Abbildung $Cor_2 : H^2(E, (\mathbf{G}_m)_E) \longrightarrow H^2(F, (\mathbf{G}_m)_F)$ nach [**SeLF**, p.167, Proposition 1] injektiv. Da sh_2 bijektiv ist, ist N_2 im lokalen Fall injektiv. Insbesondere verschwindet daher $H^2(F_v, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E))$ für alle Stellen v von F. Deshalb ist die Gruppe $H^2(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) = \oplus_v\, H^2(F_v, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E))$ trivial. Weiterhin ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E) \arrow[d, "h^2_E"] \\
1 \arrow[r] & H^2(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}^1_m)_E)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inv}_E"] & H^2(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}\,(\mathbf{G}_m)_E) \arrow[d, "\mathrm{inv}_E"] \\
 & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[d] \\
 & & 1
\end{tikzcd}$$

kommutativ und hat exakte Zeilen. Nach dem Hauptsatz der Algebrentheorie (2.8) ist seine letzte Spalte exakt. Da $H^2(\mathbb{A}_F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E))$ trivial ist, liegt jedes Element aus $H^2(F, \mathrm{R}_{E/F}((\mathbf{G}_m^1)_E))$ im Kern von h_E^2. Folglich verschwindet auch diese Gruppe. Das beendet den Beweis von (4.5).

Im folgenden Resultat übernehmen wir die Notation von (1.2).

(4.6) Lemma: *Die Tamagawazahlen der Gruppen $SL(A)$, $GL(A)$, $Sp(A)$, $GSp(A)$ und $SU(A)$ sind Eins. Es gilt $\tau(U(A)) = 2$.*

Daß die Tamagawazahlen von $SL(A)$, $Sp(A)$ und $SU(A)$ Eins sind erhält man aus der Vermutung von Weil (3.3). Die Tamagawazahlen der restlichen Gruppen werden nach (3.7) berechnet.

Wir notieren dazu, daß Gruppen G mit $G_{der} = G$ wie $SL(A)$, $Sp(A)$ und $SU(A)$ nur triviale Charaktere besitzen. Weiter ist die erste Galoiskohomologie der Gruppen $SL(E)$ und $Sp(E)$ trivial, so daß sie insbesondere das Hasseprinzip erfüllen. Die Gruppen $SU(E)$ erfüllen nach [**Kn**, p.77, Theorem 1] das Hasseprinzip und ihre erste Galoiskohomologie ist trivial über allen nichtarchimedischen Körpern nach [**Kn**, p.60, Theorem 1].

Daß die Tamagawazahlen von $GL(A)$ und $GSp(A)$ Eins sind folgt jetzt, indem man auf die exakten Sequenzen

$$1 \longrightarrow SL(A) \longrightarrow GL(A) \xrightarrow{RN} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

und

$$1 \longrightarrow Sp(A) \longrightarrow GSp(A) \xrightarrow{\mu} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1$$

respektive (3.7) anwendet. Wir berechnen die Tamagawazahl der unitären Gruppe $U(A)$. Wegen der exakten Sequenz $1 \longrightarrow SU(A) \longrightarrow U(A) \longrightarrow \mathbf{G}_m^1 \longrightarrow 1$ gilt hier nach (3.7)

$$\tau(U(A)) = \tau(\mathbf{G}_m^1).$$

Bezeichnen Z das Zentrum von A und Z^+ den Fixkörper von I_A in Z, ist dabei $\mathbf{G}_m^1$ präziser durch die Exaktheit der Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{R}_{Z/Z^+}((\mathbf{G}_m^1)_Z) \longrightarrow \mathrm{R}_{Z/Z^+}(\mathbf{G}_m)_Z \xrightarrow{N} (\mathbf{G}_m)_{Z^+} \longrightarrow 1$$

definiert. Dabei ist N die Weilrestriktion der Körpernorm von Z nach Z^+. Wegen $[Z : Z^+] = 2$ folgt so die Aussage des Lemmas aus (4.4).

Beweis von Satz (4.2): Die Struktur des Zentralisators von s in der $Sp(2n)$ haben wir in (1.4) beschrieben. Er ist isomorph zu einem Produkt von (inneren Formen) speziell linearer, symplektischer und unitärer Gruppen. Die Aussage des Satzes ergibt sich mithin aus dem vorangehenden Lemma (4.6).

Beweis von Satz (4.3): Wir berechnen die Tamagawazahl des Zentralisators von s in der $GSp(2n)$ aus der exakten Sequenz

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow C^{(1)} = C_{Sp(2n)}(s) \xrightarrow{e} C = C_{GSp(2n)}(s) \xrightarrow{\mu} (\mathbf{G}_m)_K \longrightarrow 1$$

über F definierter reduktiver Gruppen. Nach (3.6) gilt zuerst allgemein

$$(2) \qquad \tau(C) = \frac{\tau(C^{(1)}) \cdot \tau\big((\mathbf{G}_m)_F\big) \cdot \Big|\ker\Big(\ker^1(F, C^{(1)}) \xrightarrow{e^1} \ker^1(F, C)\Big)\Big|}{\Big|\mathrm{koker}\Big(X^*(C)(F) \xrightarrow{e^*} X^*(C^{(1)})(F)\Big)\Big| \cdot \big[\mathbb{J}_K : K^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))\big]}.$$

Wir notieren die offensichtlichen Vereinfachungen. Nach (2.5) erfüllt $C^{(1)}$ das Hasseprinzip. Weiter hat $(\mathbf{G}_m)_K$ die Tamagawazahl Eins. Die Tamagawazahl von $C^{(1)}$ haben wir in (4.2) angegeben. Zu bestimmen bleiben daher die beiden Nennerausdrücke.

Wir behaupten $\#\mathrm{koker}(e^*) = 1$. Die zu (1) duale Sequenz

$$1 \longrightarrow X^*(\mathbf{G}_m) \longrightarrow X^*(C) \longrightarrow X^*(C^{(1)}) \longrightarrow 1$$

von Charaktergruppen ist eine exakte Sequenz von $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$–Moduln. Wegen $X^*(\mathbf{G}_m) \cong \mathbf{Z}$ verschwindet die erste Kohomologiegruppe von $X^*(\mathbf{G}_m)$ nach [**Sh**, p.36]. Die lange exakte Kohomologiesequenz zeigt so, daß $\mathrm{koker}(e^*)$ trivial ist.

Wir bestimmen den Index $[\mathbb{J}_K : K^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))]$. Als ersten Schritt behaupten wir dazu

$$\mu(C(\mathbb{A}_F)) = \bigcap \left\{ \mathbb{J}_F \cap N_{Z(A)/Z^+(A)}(\mathbb{J}_{Z(A)}) : A \in \mathcal{U} \right\}. \tag{3}$$

Hierzu erinnern wir, daß C Teilgruppe des Produktes über A in $\mathcal{A}$ der in (1.2) konstruierten Gruppen $G(A)$ ist. Folglich ist $\mu(C(\mathbb{A}_F))$ identisch mit dem Schnitt über A in $\mathcal{A}$ von $\mu_A(G(A)(\mathbb{A}_F))$. Die erste Galoiskohomologie von $Sp(A)$ und $SL(A)$ verschwindet, so daß auf diesen Faktoren μ surjektiv auf $\mathbb{J}_F$ ist. Zu untersuchen bleiben daher die Gruppen zu A in $\mathcal{U}$. Es sei hierfür weiter daran erinnert, daß jede Gruppe $G(A)$ fastdirektes Produkt ihres Zentrums und ihrer derivierten Gruppe ist. Der Ähnlichkeitscharakter des Zentrums jeder Gruppe $G(A)$ zu A in $\mathcal{U}$ ist eine Restriktion der Körpernorm $N_{Z(A)/Z^+(A)}$. Als Konsequenz erhalten wir so (3). Es sei bemerkt, daß man im Fall $[Z(A) : F] = 2$ in (3) als Schnitte jeweils die Normengruppen $N_{Z(A)/F}(\mathbb{J}_{Z(A)})$ erhält.

Wir behaupten in einem zweiten Schritt, daß $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$Normengruppe einer abelschen Erweiterung von F ist. Zuerst hat $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$ endlichen Index in $\mathbb{J}_F$, da alle anderen Terme in (2) endlich sind. Zu zeigen ist deshalb, daß sie auch offen in $\mathbb{J}_F/F^*$ ist. Nach dem Existenzsatz der Klassenkörpertheorie [**Neu**, p.96, Theorem (7.1)] ist $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$ dann Normengruppe einer abelschen Erweiterung von F wie behauptet.

Für den Beweis, daß $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$ offen ist, sei S die Menge aller Stellen von F, die in einem der Körper $Z(A)$ mit A in $\mathcal{U}$ verzweigt sind. Sie ist endlich. Wir fixieren eine Algebra A in $\mathcal{U}$ sowie Stellen v in F, V in $Z^+ = Z^+(A)$ über v und W in $Z = Z(A)$ über V. Für v nicht in S ist Z_W unverzweigt über F_v und damit unverzweigt über Z_V^+. Nach [**SeLF**, p.82, Corollary] oder [**Neu**, p.48, Corollary (1.4)] sind in dieser Situation die Einheiten $U(Z_V^+)$ von Z_V^+ das Bild von $U(Z_W)$ unter der lokalen Norm von Z_W auf Z_V^+. Die Einheiten von F_v liegen dann offenbar in den Einheiten von F_V. Als Konsequenz dieser Beobachtung liegt das Produkt

$$U(S) = \prod \{U(F_v) : v \notin S\}$$

in $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$. Jetzt greift aber ein Argument zum Beweis des Existenzsatzes in [**Neu**, p.97] mutatis mutandis. Wir skizzieren es. Habe $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$ Index m in $\mathbb{J}_F$. Dann liegt $\prod\{(F_v^*)^m : v \in S\}$ in $F^* \cdot \mu(C(\mathbb{A}_F))$. Zu zeigen ist daher, daß

$$U(S) \times \prod \{(F_v^*)^m : v \in S\}$$

eine Normengruppe $F^* \cdot N_{L/F}(\mathbb{J}_L)$ zu einer abelschen Erweiterung L von F enthält. Wir können dabei S gegebenenfalls vergrößern. Sind die m–ten Einheitswurzeln μ_m in F enthalten, hat $F(\sqrt[m]{F(S)})$ diese Eigenschaft. Dabei bezeichnet $F(S)$ die S–Einheiten in F^*.

Andernfalls adjungiere man μ_m zu F und erhält die zyklotomische Erweiterung F' von F. Wählt man eine hinreichend große Stellenmenge T in F', die alle Stellen in F' über S enthält, ist $F'(\sqrt[m]{F'(T)})$ eine Erweiterung L mit den gewünschen Eigenschaften. Dies beendet den Beweis des Satzes

Referenzen

[B]	A. Borel: Some finiteness properties of adele groups over number fields, *Publ IHES* **16**(1963), 5–30
[Kn]	M. Kneser: *Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969
[KoSTF]	R. Kottwitz: Stable Trace Formula: Cuspidal Tempered Terms, *Duke Math. J.* **51**(1984), 611-650
[Mil]	J.S. Milne: *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics 1, Academic Press 1986
[Neu]	J. Neukirch: *Class Field Theory*, Grundlehren der math. Wissenschaften 280, Springer 1986
[NeuA]	J. Neukirch: *Klassenkörpertheorie*, Bibl. Institut, Mannheim 1969
[Oe]	J. Oesterlé: Nombres de Tamagawa et Groupes Unipotentes en Charactéristique p, *Inv. Math.* **78**(1984), 13-88
[Ono4]	T. Ono: On Tamagawa Numbers, in Borel, Mostow [eds], *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proceedings of Symp. in Pure Math. IX, AMS 1966
[Rog]	J.D. Rogawski: *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Math. Studies 123, Princeton University Press, Princeton 1990
[Sans]	J.–J. Sansuc: Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **327**(1981), 12-80
[SeLF]	J.-P. Serre: *Local Fields*, GTM 67, Springer 1979
[Sh]	S.S. Shatz: *Profinite Groups, Arithmetic, and Geometry*, Annals of Mathematics Studies 67, Princeton Univ. Press, Princeton 1972
[WBN]	A. Weil: *Basic Number Theory*, 3rd ed., Grundlehren der math. Wissenschaften 144, Springer 1974

Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik
und Informatik
D–68131 Mannheim – A5