INTEGRABLE HAMILTONSCHE SYSTEME

UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

Horst Knörrer

84 65

SFB 40/MPI für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

SFB/MPI 84-65

Integrable Hamiltonsche Systeme und Algebraische Geometrie

Horst Knörrer

Integrable Hamiltonsche Systeme sind spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen, nämlich solche, die durch Anwendung der "Hamilton-Jacobi-Methode" der Trennung der Variablen (siehe §1 unten oder [A 9] §47) explizit gelöst werden können. Bei dieser Hamilton-Jacobi-Methode müssen neben elementaren algebraischen Operationen und der Berechnung von Umkehrfunktionen auch Quadraturen (d.h. Bestimmung von unbestimmten Integralen) durchgeführt werden. Schon bei ganz einfachen Beispielen integrabler Hamiltonscher Systeme treten dabei elliptische und hyperelliptische Integrale und ihre Umkehrfunktionen auf; dies deutet auf eine enge Beziehung zwischen integrablen Hamiltonschen Systemen und Fragen der Algebraischen Geometrie (insbesondere im Zusammenhang mit Abelschen Varietäten) hin. In der Tat waren die im Zusammenhang mit Fragestellungen aus der Mechanik auftretenden Umkehrprobleme für elliptische und hyperelliptische Integrale eine der Motivationen für die Entwicklung der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Funktionen in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts - dies spiegelt sich auch darin wider, daß der Name Carl Gustav Jacobi in beiden Gebieten an vielen wichtigen Stellen auftritt.

In den letzten zehn bis fünfzehn Jahren ist das Interesse an diesen Zusammenhängen zwischen integrablen Hamiltonschen Systemen und algebraischer Geometrie wieder besonders lebendig geworden - vor allem, weil einige partielle Differentialgleichungen wie die Korteweg-de Vries - Gleichung, die Sine-Gordon - Gleichung oder die nichtlineare Schrödinger-Gleichung in gewissem Sinne als unendlich-dimensionale Analoga von integrablen Hamiltonschen Systemen aufgefaßt werden können. Dies hat dann natürlich auch dazu geführt, daß die endlichdimensionalen Probleme von einem etwas anderen ("moderneren") Standpunkt aus wieder betrachtet wurden.

Bei der Untersuchung integrabler Hamiltonscher Systeme und ihren Beziehungen zur algebraischen Geometrie gibt es relativ wenig allgemeine Sätze und Resultate; vielmehr handelt es sich um eine Fülle von Beispielen, die überraschende und interessante Verbingungen untereinander und zu anderen Gebieten der Mathematik aufweisen. In diesem Artikel möchte ich versuchen, davon einen Eindruck zu geben.

Zunächst möchte ich an einem ganz elementaren Beispiel - dem Kugelpendel - die grundlegenden Begriffe erläutern und modellhaft die Beziehung dieses Problems zur algebraischen Geometrie darstellen. Danach wird ein Überblick über weitere interessante "endlich-dimensionale" integrable Hamiltonsche Systeme gegeben, und dann (in §3) etwas präziser auf das Toda-Gitter und die Methode der Lax-Paare eingegangen. Die Frage nach dem Auffinden von integrablen Hamiltonschen Systemen wird in §4 diskutiert. Die Entwicklungen im Zusammenhang mit speziellen partiellen Differentialgleichungen - insbesondere der Korteweg-de Vries - Gleichung und der sogenannten KP - Gleichung bis hin zur Lösung des Schottky-Problems werden in §5 und §6 skizziert.

1. Das Kugelpendel

Wir betrachten ein Pendel mit einer starren Achse, die so an einem festen Punkt aufgehängt ist, daß sich das Pendel in allen Richtungen frei bewegen kann. Die einzige Kraft, die auf das Pendel wirkt, sei die Gravitation. Die Untersuchung dieser Situation führt zu folgendem mathematischen Problem: Man beschreibe die Bewegung eines Massenpunktes (etwa der Masse 1) auf der 2-Sphäre

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

unter dem Einfluß des Potentials $P(x) = x_3$. Nach den Newton'schen Gesetzen kann dieses Problem durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (ein Vektorfeld) auf dem Tangentialraum der Sphäre

$$M := TS^2 = \{(x,v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 / \langle x,v\rangle = 0\} \quad {}^{(1)}$$

beschrieben werden. Explizit ist dieses Vektorfeld gegeben durch

$$X : \quad \begin{array}{ll} \dot{x}_1 = v_1 & \dot{v}_1 = -\lambda(x,v)x_1 \quad {}^{(2)} \\ \dot{x}_2 = v_2 & \dot{v}_2 = -\lambda(x,v)x_2 \\ \dot{x}_3 = v_3 & \dot{v}_3 = -\lambda(x,v)x_3 - 1 \end{array}$$

$$\text{mit} \quad \lambda(x,v) := \langle v,v\rangle - x_3$$

---

(1) $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichne das übliche Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.

(2) $\cdot$ bedeute hier und im folgenden die Ableitung nach der Zeit t.

Einer der naheliegenden Ansätze bei der Untersuchung eines derartigen Problems ist die Suche nach Erhaltungsgrößen- oder wie man auch sagt, Integralen. Das sind Funktionen auf dem Phasenraum M, die konstant sind auf den Lösungskurven der Differentialgleichung. In unserem Fall sind die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E : M &\to \mathbb{R} \\ (x,v) &\to \tfrac{1}{2}\langle v,v\rangle + x_3 \end{aligned}$$

und der Drehimpuls um die x_3 - Achse

$$\begin{aligned} I : M &\to \mathbb{R} \\ (x,v) &\to x_1v_2 - x_2v_2 \end{aligned}$$

solche Integrale. Die Existenz dieser zwei "unabhängigen" Integrale garantiert schon, daß die Differentialgleichung lösbar ist - es ist ein integrables Hamiltonsches System.

Der Begriff eines integrablen Hamiltonschen Systems wird allgemein in der Sprache der symplektischen Geometrie formuliert. Sei also (M^{2n},ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, i.e. M ist eine $2n$-dimensionale C^∞ - Mannigfaltigkeit und ω eine geschlossene nichtentartete 2 - Form auf M. Beispiele von symplektischen Mannigfaltigkeiten sind etwa die Cotangentialbündel T^*N von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten N - diese tragen eine kanonisch definierte symplektische Struktur (siehe etwa [A 9], §37). Falls auf N zusätzlich eine Riemannsche Metrik definiert ist, so kann mit Hilfe dieser Metrik das Tangentialbündel TN mit dem Cotangentialbündel T^*N identifiziert werden, und somit trägt dann auch TN eine kanonische symplektische Struktur. In diesem Sinn ist auch TS^2 aus dem Beispiel des Kugelpendels eine symplektische Mannigfaltigkeit; die symplektische Form stimmt überein mit der Einschränkung der Form $dx_1 \wedge dv_1 + dx_2 \wedge dv_2 + dx_3 \wedge dv_3$ auf $TS^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Ist $H : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω), so ist dH eine 1 - Form auf M. X_H sei das Bild des Schrittes dH im Cotangentialbündel T^*M unter dem durch ω definierten Isomorphismus zwischen T^*M und M; dies ist ein Vektorfeld auf M. Sind $u_1,\ldots,u_n$, $v_1,\ldots,v_n$ symplektische Koordinaten auf einer offenen Menge in M (i.e. $\omega = du_1 \wedge dv_1 + \ldots + du_n \wedge dv_n$) so wird X_H durch die Differentialgleichung

$$\dot{u}_i = -\frac{\partial H}{\partial v_i} \quad , \quad \dot{v}_i = \frac{\partial H}{\partial u_i}$$

beschrieben. Ein Vektorfeld der Form X_H nennt man Hamiltonsches System auf M, und H heißt die zugehörige Hamiltonfunktion.

<u>Definition</u>:

Ein Hamiltonsches System X_H auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2n},ω) heißt (vollständig) integrabel, falls es n Funktionen $I_1,\ldots,I_n : M \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

(i) Die durch $I_1,\ldots,I_n$ definierte Abbildung $F : M \to \mathbb{R}^n$ ist auf einer offenen dichten Teilmenge von M submersiv (i.e. ihr Differential hat dort Rang n)

(ii) $I_1,\ldots,I_n$ sind Integrale für X_H (i.e. $I_1,\ldots,I_n$ sind konstant auf den Lösungskurven von X_H)

(iii) Für $i,j = 1,\ldots,n$ ist I_i Integral von X_{I_j} .

Bemerkung: Die Bedingung (i) besagt, daß die Integrale "unabhängig" sind; es wird ausgeschlossen, daß es eine nichttriviale Relation $R(I_1,\ldots,I_n) = 0$ gibt. Die Bedingungen (ii) und (iii) können auch folgendermaßen formuliert werden: Bezeichnet man für zwei Funktionen $G_1,G_2 : M \to \mathbb{R}$ mit $\{G_1,G_2\} := \omega(X_{G_1},X_{G_2})$ die Poissonklammer von G_1,G_2 , so ist für alle $i,j = 1,\ldots,n$
$\{I_i,H\} = \{I_i,I_j\} = 0$.

Man prüft leicht nach, daß im Fall des Kugelpendels das die Bewegung beschreibende Vektorfeld X mit X_E übereinstimmt, und daß E,I die obigen Bedingungen erfüllen.

Die Tatsache, daß bei integrablen Hamiltonschen Systemen Trennung der Variablen durchgeführt werden kann, wird durch die folgende geometrische Aussage über die Fasern $M_c := F^{-1}(c)$ der durch die Integrale gegebenen Abbildungen F reflektiert.

Satz (Arnol'd[3], Jost):
Wir nehmen an, daß $F : M \to \mathbb{R}^n$ eigentlich ist. Sei $B \subset \text{Bild}(F)$ die Menge der regulären Werte von F . Dann ist

(3) Arnol'd [A 9] schreibt diesen Satz Liouville zu

$$F|_{F^{-1}(B)} : F^{-1}(B) \to B$$

ein lokal-triviales Bündel von n - Tori. Für jedes $c \in B$ ist das Vektorfeld X_H linear auf dem Torus M_c .

Bemerkungen:

1.) Unter einem n - Torus verstehen wir eine Mannigfaltigkeit der Form $\mathbb{R}^n/\Gamma$, wobei $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ ein Untergitter von $\mathbb{R}^n$ ist. Ein solcher Torus hat ein flache Struktur, und mit Torus-Bündel meinen wir ein Bündel von Tori mit flacher Struktur. Da $I_1,\ldots,I_n$ Integrale von X_H sind, ist X_H tangential an jedes M_c . Der zweite Teil des Satzes besagt, daß die Integralkurven von X_H in M_c Bilder paralleler Geraden unter der Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma \cong M_c$ sind. Insbesondere ist X_H quasiperiodisch auf jedem M_c .

2.) Mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Methode kann man für jedes $c \in B$ explizit eine Umgebung U von $c \in B$ und einen symplektischen Diffeomorphismus $\varphi : F^{-1}(U) \to (S^1)^n \times U$ angeben, so daß das Diagramm

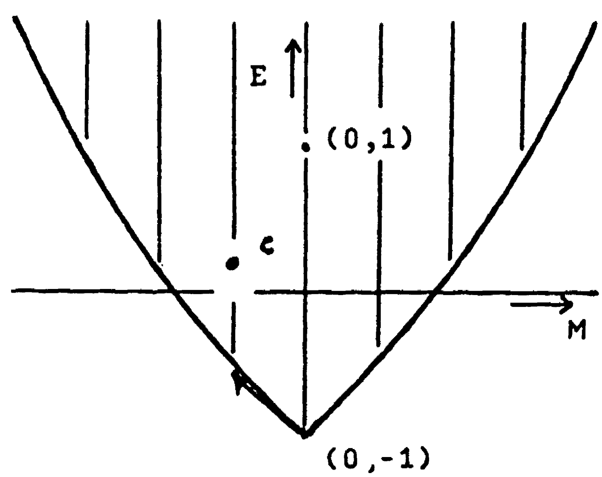
$$\begin{tikzcd} F^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "F"'] & & (S^1)^n \times U \arrow[dl, "P_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. In den Standardkoordinaten auf $(S^1)^n \times U$ (den "Wirkungs-Winkel-Variablen") ist X_H linear und kann sofort integriert werden. Dazu und zum Beweis des Satzes von Arnol'd-Jost siehe etwa [A 9], §41,50, [D 7], [M 2].

Im Fall des Kugelpendels hat das Bild der Abbildung

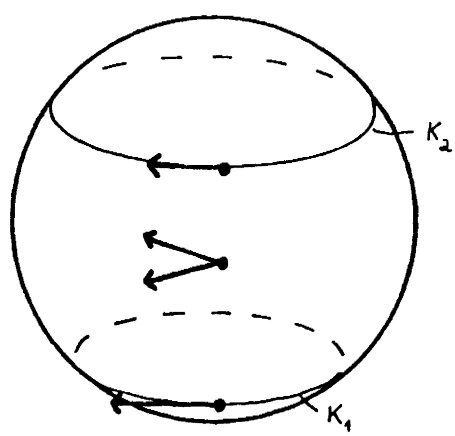
$$F = (I,E) : M \to \mathbb{R}^2$$

etwa folgende Gestalt:



Kritische Werte von F sind natürlich der Rand des Bildes, und außerdem noch der Punkt $\hat{c} := (0,1)$. (Über $\hat{c}$ liegt ein kritischer Punkt von M , er entspricht der instabilen Ruhelage des Massenpunktes am Nordpol der Sphäre: $x = (0,0,1)$, $v = (0,0.0)$). Die Tori aus dem Satz von Arnol'd - Jost kann man in diesem Fall konkret sehen: Sei etwa $c = (c_1,c_2) \in B$ wie in der obigen Zeichnung. Da der Drehimpuls c_1 von Null verschieden ist, ist das

Bild eines Elementes von M_c unter der Projektion $M = TS^2 \to S^2$ weder der Nordpol noch der Südpol der 2 - Sphäre. Also gibt es zwei Breitenkreise K_1, K_2 auf der Sphäre, so daß M_c aus Tangentialvektoren an S^2 besteht, deren Fußpunkte zwischen diesen beiden Breitenkreisen liegen. Man überlegt sich leicht, daß es für einen Punkt $p \in S^2$ zwischen K_1 und K_2 genau zwei Tangentialvektoren v, v' gibt, so daß $(p,v), (p,v') \in M_c$. Falls $p \in K_1 \cup K_2$, so fallen v und v' zusammen.



Die Einschränkung der Projektion $M = TS^2 \to S^2$ auf M_c realisiert also M_c als doppelte verzweigte Überlagerung des Streifens zwischen K_1 und K_2, die über K_1 und K_2 verzweigt. Damit sieht man, daß M_c diffeomorph zu einem 2 - Torus ist.
Die Abbildung $F : M \to \mathbb{R}^2$ hat recht interessante geometrische Eigenschaften; beispielsweise ist die Monodromie des 2 - Torus - Bündels $F^{-1}(B) \to B$ nicht trivial. Wir wollen darauf nicht eingehen und verweisen auf [D 7], [C 1].

Bekanntlich läßt sich Differentialgleichung, die das Kugelpendel beschreibt, durch elliptische Funktionen lösen ([W 2], §55). Dies legt nahe, daß die reellen 2 - Tori M_c in natürlicher Weise aufgefaßt werden können als Menge von reellen Punkten auf einer komplex-algebraischen Varietät, die selbst die Struktur einer kommutativen Gruppe hat. Um diese komplex-algebraische Varietät zu finden, ist es hier am einfachsten, bei allen Definitionen (von M, M_c, F usw.) die reellen durch die komplexen Zahlen zu ersetzen. Die entstehenden Varietäten bezeichnen wir mit $M^{\mathbb{C}}$, $M_c^{\mathbb{C}}$ etc., also

$$M^{\mathbb{C}} = \{(x,v) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 / x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1,\ x_1v_1+x_2v_2+ x_3v_3 = 0\}$$

$$M_c^{\mathbb{C}} = \{(x,v) \in M^{\mathbb{C}} / \tfrac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+x_3 = c_2,\ x_1v_2-x_2v_1 = c_1\}$$

Genau wie die Gruppe $SO(2,\mathbb{R})$ auf M durch Drehung um die x_3-Achse operiert und dabei die Fasern M_c von F in sich überführt, operiert $SO(2,\mathbb{C})$ auf $M^{\mathbb{C}}$ durch

$$\begin{aligned} SO(2,\mathbb{C}) \times M^{\mathbb{C}} &\to M^{\mathbb{C}} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},(x,v)\right) &\mapsto (ax_1+bx_2, cx_1+dx_2, x_3; av_1+bv_2, cv_1+dv_2, v_3) \end{aligned}$$

führt jedes $M_c^{\mathbb{C}}$ in sich über. Diese Aktion von $SO(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ kann man dazu verwenden, um die Struktur von $M_c^{\mathbb{C}}$ zu analysieren.

Wir wollen das Resultat in der Sprache der (verallgemeinerten) Jacobivarietäten formulieren. Ist C eine irreduzible, eventuell singuläre algebraische Kurve und $p : \tilde{C} \to C$ ihre Normalisierung, so sei $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ eine Basis von $H_1(C,\mathbb{Z})$ und $\omega_1,\ldots,\omega_g$ eine Basis des Vektorraums der Rosenlicht-Differentiale (vgl.[S 2]IV §3)[(4)]. $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ sei die Untergruppe, die von den Vektoren

$$\left(\int_{\gamma_i}\omega_1,\ldots,\int_{\gamma_i}\omega_g\right) \quad , \; i=1,\ldots,r$$

erzeugt wird. Wir setzen

$$\mathrm{Jac}(C) := \mathbb{C}^g/\Gamma \quad ,$$

dies ist eine kommutative algebraische Gruppe. Sie ist kompakt genau dann, wenn C nichtsingulär ist. Da jedes holomorphe Differential auf $\tilde{C}$ ein Rosenlicht-Differential auf C definiert, hat man eine kanonische Abbildung

$$\mathrm{Jac}(C) \to \mathrm{Jac}(\tilde{C}) \quad .$$

Diese Abbildung ist ein Bündel, dessen Faser isomorph zu einem Produkt von Kopien von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$ ist. Falls C etwa nur einen gewöhnlichen Doppelpunkt hat, so ist die Faser isomorph zu $\mathbb{C}^*$. (Zur Theorie der verallgemeinerten Jacobivarietäten siehe [S 2], V). In dieser Sprache läßt sich nun die Struktur von $M_c^{\mathbb{C}}$ mit $c \in B$ beschreiben.

---

(4) falls C nichtsingulär ist, sind dies gerade die holomorphen Differentiale auf C

<u>Satz:</u>

(i) Sei $\pi : M^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^2$ die Abbildung $(x,v) \mapsto (x_3,v_3)$. Dann ist π invariant unter der $SO(2,\mathbb{C})$ - Aktion und $\pi(M_c^{\mathbb{C}}) = \{(z,y) \in \mathbb{C}^2 / y^2 = 2(c_2-z)(1-z^2)-c_1^2 =: E_c\}$.
Die Kurve E_c läßt sich durch einen "unendlich fernen" Punkt zu einer glatten elliptischen Kurve $\overline{E}_c$ kompaktifizieren.

(ii) Sei $\hat{E}_c$ die singuläre Kurve, die aus E_c durch Identifikation der Punkte $(1,i\,c_1)$ und $(-1,i\,c_1)$ zu einem gewöhnlichen Doppelpunkt entsteht. Dann gibt es eine birationale Abbildung $\psi : M_c \longrightarrow \mathrm{Jac}(\hat{E}_c)$ so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_c \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Jac}(\hat{E}_c) \arrow[d] \\ \overline{E}_c \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Jac}(\overline{E}_c) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei sind $\overline{E}_c$ und $\mathrm{Jac}(\overline{E}_c)$ durch die Abel-Jacobi-Abbildung mit dem unendlich fernen Punkt als Basispunkt identifiziert (cf. [M] III).

(iii) Bezeichnet $X^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung des Vektorfeldes X , das die Bewegung des Kugelpendels beschreibt, so ist $\psi_*(X^{\mathbb{C}})$ ein lineares Vektorfeld auf der kommutativen algebraischen Gruppe $\mathrm{Jac}(\hat{E}_c)$. Die Richtung von $\psi_*(X^{\mathbb{C}})$ kann folgendermaßen beschrieben werden:

Der Cotangentialraum von $Jac(\hat{E}_c)$ im Nullpunkt ist der Vektorraum der Rosenlicht-Differentiale auf $\hat{E}_c$. Die Menge aller solchen Differentiale, die im unendlich fernen Punkt von $\hat{E}_c$ verschwinden, ist darin eine Hyperebene. Dual zu dieser Hyperebene ist eine Gerade im Tangentialraum von $Jac(\hat{E}_c)$ - und dieser Geraden entspricht die Richtung von $\psi_*(X^{\mathbb{C}})$.

Man sagt, das Vektorfeld $X = X_E$ werde auf der Jacobivarietät von $\hat{E}_c$ linearisiert.
Wenn man will, kann man diese Beschreibung von $M_c^{\mathbb{C}}$ und $X^{\mathbb{C}}$ dazu verwenden, um - ohne weitere Rechnungen - eine Parametrisierung der Lösungen der Differentialgleichung in Termen von elliptischen Funktionen und Thetafunktionen auf $\bar{E}_c$ anzugeben. Sicher wirkt diese algebraisch-geometrische Betrachtungsweise bei einem so einfachen und klassischen Beispiel etwas umständlich und weit hergeholt; bei anderen etwas komplizierteren Beispielen erweist sie sich aber bei der Untersuchung des Systems als sehr nützlich.

2. Beispiele integrabler Hamiltonscher Systeme

In diesem Abschnitt möchte ich einige der wichtigsten Beispiele integrabler Hamiltonscher Systeme kurz vorstellen - dies ist natürlich eine sehr subjektive und einseitige Auswahl.

Der schwere symmetrische Kreisel [K 10], [63], [L 2], [R 1]):
Unter einem Kreisel verstehen wir einen starren Körper, der in einem festen Punkt aufgehängt ist und sich um diesen Punkt frei und nur unter dem Einfluß der Gravitation bewegt. Zeichnet man eine Ruhelage des Kreisels aus, so läßt sich jede Position des Kreisels eindeutig durch das Element der Gruppe $SO(3,\mathbb{R})$ beschreiben, das den Körper aus der Ruhelage in diese Position bringt. Der Phasenraum für die Differentialgleichung, die die Bewegung beschreibt, ist also $M = TSO(3,\mathbb{R})$. Bei einem allgemeinen Kreisel hat die Bewegungsgleichung zwei unabhängie Integrale, nämlich die Energie E und den Drehimpuls I_1 um die Gravitationsachse durch den Aufhängepunkt. Im allgemeinen gibt es kein weiteres, von E und I_1 unabhängiges analytisches Integral (vgl. [H 5], siehe auch §4).
Falls das Trägheitsellipsoid des Körpers (bzgl. des Aufhängepunktes) symmetrisch ist und der Schwerpunkt des Körpers auf seiner Symmetrieachse liegt, so ist der Drehimpuls I_2 um diese Symmetrieachse ein weiteres Integral. Man prüft leicht nach, daß E, I_1 und I_2 den Bedingungen für Integrabilität genügen.
Ähnlich wie im Fall des Kugelpendels hat man auf den komplexifizierten Niveaumannigfaltigkeiten der Energie-Impuls-Abbildung eine Aktion der Gruppe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$; und die Tori aus dem Satz von

Arnol'd-Jost sind in diesem Fall reelle Teile eines $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ - Bündels über einer elliptischen Kurve.

Der Kowalewski-Kreisel ([K 16], [K 13], [G 3], [L 2])
Die bisher betrachteten Beispiele hatten offensichtliche Symmetrien (beim schweren symmetrischen Kreisel die Rotation um die Gravitationsachse und die Rotation um die Symmetrieachse des Trägheitsellipsoid); und solche Symmetrien entsprechen nach einem Satz von E. Noether (cf.[A 9] §20 und appendix 5) jeweils ein Integral. Bei vielen integrablen Hamiltonschen Systemen aber lassen sich die Integrale nicht alle aus den Symmetrien und der gegebenen Hamiltonfunktion ableiten, man spricht dann auch von "verborgenen Symmetrien". Ein Beispiel dafür ist der von S. Kowalewski 1889 [K 16] entdeckte Fall der Kreiselbewegung. Hierbei sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich (etwa m), das dritte Hauptträgheitsmoment ist gleich $\frac{1}{2}$ m , und der Schwerpunkt des Körpers liegt in der Ebene der beiden gleichen Hauptträgheitsmomente. Das dritte Integral ist in diesem Fall auch recht kompliziert (siehe auch [W 2] §74). Die regulären Fasern der Abbildung $F : TSO(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, die durch die Integrale gegeben wird, sind in diesem Fall der reelle Teil eines $\mathbb{C}^*$ - Bündels über einer 2 - dimensionalen Abelschen Varietät. Diese 2 - dimensionale Abelsche Varietät wurde kürzlich von L. Haine (Berkley) als Prym-Varietät einer doppelten Überlagerung einer elliptischen Kurve, die in zwei Punkten verzweigt, identifiziert.

Der kräftefreie Kreisel

Hier nimmt man an, daß der Schwerpunkt des Körpers mit dem Unterstützungspunkt des Kreisels zusammenfällt. Dieses Problem ist äquivalent zur Untersuchung des geodätischen Flusses auf $SO(3,\mathbb{R})$ bezüglich einer links-invarianten Metrik, die durch den Trägheitstensor des Körpers bestimmt wird (cf. [A 9], appendix 2). Dieses Problem ist an und für sich nicht integrabel, da die Poissonklammern der durch die $SO(3,\mathbb{R})$ - Symmetrie gegebenen Integrale untereinander nicht verschwinden. Durch den sogenannten Marsden-Weinstein-Reduktionsprozeß (vgl. [A 9] appendix 5) läßt sich dieses Problem aber zurückführen auf ein integrables Hamiltonsches System auf einem Orbit der adjungierten Darstellung von $SO(3,\mathbb{R})$ auf seiner Lie-Algebra $so(3,\mathbb{R})$ (5) . Diese adjungierte Orbiten sind zweidimensional; und die Faser der Abbildung, die durch das Integral (die Hamiltonfunktion) gegeben wird, ist die Menge der reellen Punkte einer elliptischen Kurve.

Geodätischer Fluß auf $SO(4)$ bezüglich linksinvarianter Metriken

Wie im Fall des geodätischen Flusses auf $SO(3)$ läßt sich dieses Problem reduzieren auf ein Hamiltonsches System auf adjungierten Orbiten in $so(4)$. Diese adjungierten Orbiten haben Dimensionen vier und werden durch zwei quadratische Gleichungen in dem sechsdimensionalen Raum $so(4)$ beschrieben. Die Hamiltonfunktion reduziert sich ebenfalls zu einer quadratischen Funktion auf $so(4)$.

---

(5) nach einem Satz von Kirilov-Kostant ([A 9] appendix 2) trägt ein solcher adjungierter Orbit eine natürliche symplektische Struktur; A. Weinstein bemerkte, daß die zugehörige Poissonklammer bereits in einer Arbeit von S. Lie beschrieben ist (cf.[W 1]).

Die Fälle von Metriken, für die ein zusätzliches quadratisches Integral existiert, wurden in letzter Zeit sorgfältig untersucht ([A 6], [A 7], [M 4], [H 1], [H 2]). Es ergeben sich sehr schöne Beziehungen zwischen den Abelschen Varietäten, auf denen der Fluß linearisiert werden kann, und der Geometrie des Linearsystems von Quadriken, das von den Orbit-Invarianten, der Hamiltonfunktion und dem zusätzlichen Integral aufgespannt wird. Diese Systeme sind eng verwandt mit den integrablen Fällen der Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit, die von Clebsch, Steklov, Liapunov, Kötter (siehe [K 14], [P 2]) untersucht wurden.

Geodätische auf Quadriken und das mechanische Problem von C. Neumann

C. Neumann [N 2] untersuchte 1858 die Bewegung eines Massenpunktes auf der Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ unter dem Einfluß eines quadratischen Potentials $P(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^2$. Die Differentialgleichung für dieses System läßt sich leicht aufstellen; sie lautet

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + u x_i$$

$$\text{mit} \quad u(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} (a_i x_i^2 - \dot{x}_i^2)$$

Dieses Problem ist eng verwandt mit der Untersuchung von Geodätischen auf Quadriken (vgl. [K 12], [M 7]): Bezeichnet Q die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0\}$, und ist $\xi(t)$ eine geeignet parametrisierte Geodätische auf Q, so ist der Normaleneinheitsvektor $x(t)$ an Q im Punkt $\xi(t)$

$$x_i(t) := \frac{1}{\|\xi(t)\|} a_i \xi_i(t)$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung und jede Lösung des Neumann-Problems kann auf diese Weise erhalten werden.
Beide Probleme lassen sich linearisieren auf Jacobivarietäten hyperelliptischer Kurven - das Problem des Geodätischen Flusses auf einem Ellipsoid wurde bereits von Jacobi 1838 gelöst (vgl. [J 1] 28. Vorlesung). Für die Beziehungen dieser Probleme zur Geometrie konfokaler Quadriken siehe auch [M 5], [M 6], [K 11].

Konstruktion von Monopolen

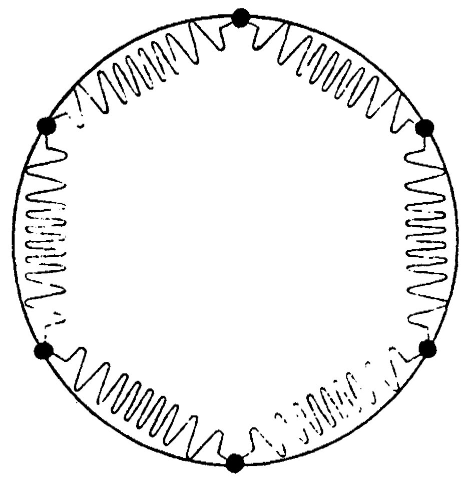
W. Nahm [N 1] zeigte, daß man Lösungen der Selbst-Dualitätsgleichung auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ aus Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen für komplexe $n \times n$ - Matrizen T_1, T_2, T_3 mit $T_i^* = -T_i$ erhalten kann:

$$\dot{T}_1 = [T_2, T_3] \quad , \quad \dot{T}_2 = [T_3, T_1] \quad , \quad \dot{T}_3 = [T_1, T_2]$$

Dabei bezeichnet $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ den Kommutator von A und B . Es stellt sich heraus, daß dieses System als integrables Hamiltonsches System aufgefaßt werden kann, und daß es auf Jacobivarietäten gewisser nichtsingulärer Kurven linearisiert wird. Für eine genauere Diskussion und die Beschreibung des Zusammenhangs mit der "Twistor-Konstruktion" von Ward verweisen wir auf die Arbeit von Hitchin [H 4] .

3. Toda-Gitter und isospektrale Deformationen

Eines der nicht-klassischen Systeme, deren Untersuchung das Interesse an integrablen Hamiltonschen Systemen und ihrer Beziehungen zur algebraischen Geometrie wieder aufleben ließ, ist das Toda-Gitter: Wir betrachten eine Kette von n Massenpunkten auf dem Kreis, die untereinander durch "Federn" mit exponentiellem Kraftgesetz verbunden sind.



Die Beschreibung dieser Situation führt zu folgender Differentialgleichung:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad , \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\text{mit} \quad H(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}y_i^2 + \exp(x_i - x_{i+1})\right) ,$$

$$\text{wobei} \quad x_{i+n} = x_i \quad \text{gesetzt wird.}$$

Dabei beschreibt x_i die Entfernung des i-ten Teilchens von einer fest gewählten Ruhelage.

Dieses System wurde um 1970 von M. Toda untersucht; unter anderem

deshalb, weil es in gewisser Weise eine Diskretisierung der Korteweg-de Vries- und der Boussinesqu-Gleichung darstellt.
Gegen 1974 bemerkte H. Flaschka (siehe etwa [F 1]), daß dieses System äquivalent ist zu der Gleichung

$$\dot{A} = [B, A]$$

mit $a_i := \frac{1}{2}\exp(x_i - x_{i+1})$, $b_i := -y_i$

$$A := \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots\dots & 0 & a_n z^{-1} \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n z^{-1} & 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} , \quad B := \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots\dots & 0 & -a_n z^{-1} \\ -a_1 & 0 & a_2 & & & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} \\ a_n z & 0 & & & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

wobei z eine Unbestimmte ist.

Sind allgemeiner $A(z,t) = \sum_{i=-p}^{q} A_i(t) z^i$, $B(z,t) = \sum_{i=-p}^{q} B_i(t) z^i$ endliche Laurentreihen in z , deren Koeffizienten matrixwertige Funktionen in t sind, so heißt die Differentialgleichung

$$\dot{A}(z,t) = [B(z,t), A(z,t)]$$

eine Lax-Gleichung (oder auch Lax-Paar). Die Koordinatentransformation von Flaschka bringt also die Gleichung des Toda-Gitters in die Gestalt eines Lax-Paars. Für nahezu alle bekannten Beispiele von integrablen Hamiltonschen Systemen lassen sich solche Lax-Gleichungen angeben (für die in §2 erwähnten siehe [A 3], [A 4] und [B 2]). Diese Lax-Gleichungen nun lassen sich in einheitlicher Weise behandeln.

Falls $A(z,t)$, $B(z,t)$ die obige Gleichung erfüllen, so ist für alle t die Matrix $A(z,t)$ konjugiert zu $A(z,0)$, also ist das charakteristische Polynom

$$Q(y,z) := \det(y \cdot E - A(z,t))$$

unabhängig von t (seine Koeffizienten sind also Integrale). Sei $C \subset \mathbb{C}^2$ die von $Q(y,z) = 0$ beschriebene algebraische Kurve. Ist C nichtsingulär, so konstruiert man für jedes t ein Geradenbündel L_t auf C, dessen Faser über dem Punkt $(y,z) \in C$ gerade

$$\ker(y \cdot E - A(z,t))$$

ist (falls C singulär ist, erhält man eine torsionsfreie Garbe vom Rang 1 auf C). C läßt sich in natürlicher Weise durch glatte Punkte kompaktifizieren zu einer algebraischen Kurve $\overline{C}$, und auch L_t läßt sich in kanonischer Art erweitern zu einem Geradenbündel $\overline{L}_t$ auf $\overline{C}$ (siehe [M 9], [G 4]). $t \mapsto \overline{L}_t$ ist dann eine Abbildung von der Zeit-Geraden in die Menge $\mathrm{Pic}^d(\overline{C})$ der Geradenbündel über $\overline{C}$ von einem gewissen festen Grad d. Nach dem Satz von Abel ist $\mathrm{Pic}^d(\overline{C})$ isomorph zu $\mathrm{Jac}(\overline{C})$ (siehe etwa [M 8]). Ph. Griffiths [G 4] gibt nun notwendige und hinreichende Bedingungen an das Lax-Paar an dafür, daß diese Abbildung $t \to L_t$ linear ist, i.e. daß das durch die Lax-Gleichung gegebene Vektorfeld auf $\mathrm{Jac}(\bar{C})$ linearisiert wird. Diese Bedingungen sind einfach nachzuprüfen - und natürlich in den Fällen aus §2 und beim Toda-Gitter erfüllt. Im Fall des Toda-Gitters ist $\bar{C}$ wieder eine hyperelliptische Kurve - allerdings treten nicht alle hyperelliptischen Kurven bei einem Toda-Gitter auf.

Lax-Gleichungen können auch aufgefaßt werden als Hamiltonsche Vektorfelder auf adjungierten Orbiten in einer Lie-Unteralgebra von $gl(n,R)$, wobei R den Ring aller Laurentreihen mit komplexen Koeffizienten bezeichnet. Dieser Zusammenhang zwischen integrablen Hamiltonschen Systemen und unendlich-dimensionalen Liealgebren ist sorgfältig untersucht worden; wir verweisen hier nur auf [V 1], [V 2], [M 4] .
Falls ein Hamiltonsches System in Lax-Form dargestellt ist, gibt es also eine recht ausführliche Theorie, es auf Integrabilität zu untersuchen und weiter zu studieren. Andererseits gibt es aber keine systematische Methode, für ein konkret gegebenes System ein Lax-Paar zu finden. Die Konstruktionen bei den bekannten Systemen machen oft einen recht künstlichen Eindruck; und beispielsweise beim Fall des Kowalewski-Kreisels hat sich die Suche nach einem Lax-Paar über mehrere Jahre hingezogen. (Die Arbeit [P 1] enthält Lax-Paare für Systeme, die dem Kowalewski-Kreisel ähnlich sind; für den Kowalewski-Kreisel selbst wurde erst in [B 2] ein Lax-Paar angegeben.)

4. Notwendige Bedingungen für Integrabilität

Bekanntlich ist Integrabilität bei Hamiltonschen Systemen eine ungenerische Eigenschaft [M 2]. Deshalb ist es interessant, notwendige Bedingungen für Integrabilität zu entwickeln. Man wird dann aus einer gegebenen Klasse von Beispielen Hamiltonscher Systeme (etwa der Klasse aller Kreisel) diejenigen aussondern, die diese notwendige Bedingung erfüllen, und diese speziellen Systeme genauer weiter untersuchen.
Nun ist es recht schwierig, die Existenz von differenzierbaren Funktionen als Integrale auszuschließen. Darum stellt man meist noch weitere Bedingungen, wie etwa, daß die Integrale alle analytische oder gar polynomiale Funktionen sind. Eine besonders starke, aber auch effektive Bedingung ist die folgende (vgl. [A 5]).

Definition:
Sei (M^{2n},ω) in $\mathbb{C}^N$ eine irreduzible komplex-analytische symplektische Mannigfaltigkeit und $H : M \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Das durch H gegebene(6) Hamiltonsche System X_H heißt algebraisch vollständig integrabel, wenn es holomorphe Funktionen $I_1,..,I_n : M \to \mathbb{C}$ gibt, so daß gilt:

(i) $\{I_i,I_j\} = \{I_i,H\} = 0$ für $i,j=1,...,n$.

(ii) Die durch $I_1,...,I_n$ definierte Abbildung $F : M \to \mathbb{C}^n$ ist submersiv auf einer Zariski-offenen dichten Teilmenge von M .

(iii) Über einer Zariski-offenen dichten Teilmenge B von $\mathbb{C}^n$ gibt es ein Bündel $\pi : \mathcal{A} \to B$ von Abelschen Varietäten

---

(6) wie in §1

einen Divisor $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ und einen Isomorphismus $\varphi : F^{-1}(B) \to \mathcal{A} - \mathcal{D}$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(B) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{A} - \mathcal{D} \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert und so daß das Vektorfeld $\varphi_*(X_H)$ linear auf jederder Abelschen Varietäten $\pi^{-1}(c)$, $c \in B$ ist.

In diesem Sinne sind alle bisher betrachteten Beispiele (evtl. nach Reduktion) algebraisch vollständig integrabel. Für algebraische Integrabilität nun gibt es eine einfache notwendige Bedingung, die im Grunde auf S. Kowalewski [K 16], [K 17] zurückgeht:
Man kann zeigen, daß das Vektorfeld $\varphi_*(X_H)$ transversal zu $\mathcal{D}$ ist. Ist $p \in \mathcal{D}$, so entspricht der Integralkurve von $\varphi_*(X_H)$ durch p vermöge φ^{-1} eine Laurentreihe, die die ursprüngliche Differentialgleichung löst. Da $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D} = 2n-1$, ergibt sich (vgl. [A 5]):

<u>Satz</u>:
Ist X_H algebraisch vollständig integrabel, so ist die Dimension des Raums aller echten Laurentreihen[7], die die Differentialgleichung lösen, mindestens $2n-1$.

---

(7) i.e. die Reihe von der Form $\sum_{i=-k}^{\infty} a_i t^i$ mit $k > 1$, $a_k \neq 0$.

Dies ist ein recht effektives Kriterium: Man setzt eine Laurentreihe mit unbekanntem Koeffizienten als Lösung der Differentialgleichung an:

$$x_i = \sum_{j=-k}^{\infty} a_{ij} t^j \qquad (i=1,\dots,N)$$

Aus der Tatsache, daß dies eine Lösung der Differentialgleichung ist, ergeben sich Bedingungen an die Koeffizienten der Form

$$L_{ij}(a_{1j},\dots,a_{Nj}) = f_{ij}(a_{1,j-1},\dots,a_{1,-k},\dots,a_{N,-k})$$

mit linearen L_{ij} . Algebraische Integrabilität impliziert, daß der durch die L_{ij} gegebene lineare Operator mindestens Corang $2n-1$ hat.

Von S. Kowalewski wurde dieses Kriterium auf den Fall des Kreisels angewandt (siehe [K 16], [K 17]). Sie fand, daß außer den vorher schon bekannten Fällen des kräftefreien Kreisels und des symmetrischen Kreisels nur noch der (hier schon in §2 beschriebene) Kowalewski-Kreisel diese Bedingung erfüllt. Im zweiten Teil der Arbeit [K 16] beweist sie die Integrabilität des Kowalewski-Kreisels, indem sie das dritte Integral explizit angibt. und gibt die Lösungen des Gleichungssystem in Termen von Thetafunktionen an.

Kowalewski's Methode wurde von M. Adler und P. van Moerbeke [A 5] in moderner Sprache formuliert und auf mehrere andere Beispiele angewandt (siehe etwa [M 4]). Andere notwendige Bedingungen für Integrabilität wurden in letzter Zeit von Ziglin und Koslov (siehe [K 18], [Z 1]) und auch L. Haine [H 2] und Duistermaat [D 8] entwickelt. Sie beruhen zumeist auf der Untersuchung der Differentialgleichung in der Umgebung einer bereits bekannten Lösungskurve des Systems; sind also etwas weniger allgemein, aber auch mit weniger rechnerischem Aufwand verbunden als Kowalewski's Methode.

5. Die Korteweg-de Vries-Gleichung

Dies ist die folgende nichtlineare partielle Differentialgleichung:

$$\mathrm{KdV}: \; u_t = 3uu_x - \frac{1}{2} u_{xxx} \qquad (8)$$

Sie wurde eingeführt von G. de Vries in seiner Dissertation [V 3] 1894[9], um Wasserwellen in einem langen flachen Kanal zu beschreiben. Eines der Hauptziele dieser Arbeit war es, das Phänomen der "solitären Wellen" zu erfassen, das ca. 60 Jahre vorher von J. Scott-Russel beobachtet worden war. Dabei handelt es sich um eine einzelne Welle, die sich - ohne ihre Gestalt zu verändern - mit konstanter Geschwindigkeit in dem Kanal bewegt[10]. Ein Auszug aus Scott-Russels romatischem Bericht über die "Entdeckung des Solitons" ist zu Beginn des Übersichtsartikels [K 3] abgedruckt. Diese solitäre Welle - auch 1-Soliton genannt - entspricht der Lösung

$$u(x,t) = \frac{-c}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x-ct)\right)}$$

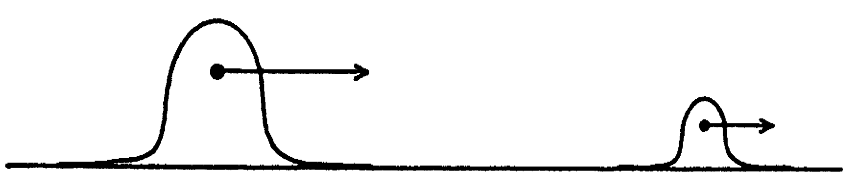
---

(8) Dabei steht u_t für $\frac{\partial u}{\partial t}$, u_x für $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc.

(9) eine gekürzte Fassung veröffentlichten de Vries und sein Doktorvater J. Korteweg 1895 gemeinsam [K 15]

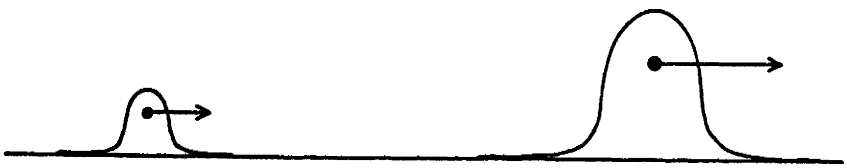
(10) Andere Situationen, in denen derartige Wellen auftreten, sind etwa zu Beginn des Artikels [F 3] beschrieben

Allgemeiner untersuchte de Vries stationäre Lösungen dieser Gleichung, d.h. Lösungen der Form $u(x,t) = f(x-ct)$. Es stellt sich heraus, daß alle derartigen Lösungen in Termen von elliptischen Funktionen (oder im Fall des Solitons Entartungen davon) beschrieben werden können. De Vries schrieb diese Lösungen in Termen der Jacobischen elliptischen Funktion cn , seitdem werden sie manchmal auch "cnoidal waves" genannt.
Gegen 1960 trat die KdV-Gleichung auch in verschiedenen anderen physikalischen Zusammenhängen auf (zu ihrer Geschichte vgl. [B 1], [K 22]; und N. Zabusky, M. Kruskal und andere. begannen mit einer numerischen (computergestützten) Untersuchung dieser Gleichung. Dabei wurde auch das Phänomen des n-Solitons entdeckt: Aus der Formel für das 1-Soliton sieht man, daß die Geschwindigkeit des Solitons proportional zu seiner Höhe ist. Beginnt man nun mit Anfangsdaten, die man durch Überlagerung zweier 1-Solitonen in großer Entfernung zueinander erhält, von denen das linke höher ist als das rechte,



so beobachtet man das folgende: Nach einer gewissen Zeit hat das linke Soliton das rechte eingeholt und vermischt sich mit ihm,

aber wenn man noch länger wartet, so findet man die beiden Solitonen in unveränderter Form wieder; das große hat das kleine überholt, und es tritt eine kleine Phasenverschiebung auf.



Eine entsprechende Situation tritt bei der Überlagerung von n solitären Wellen auf - man nennt dies dann n-Soliton-Lösungen. Mathematisch präzise wurde ihre Existenz von Hirota [H 3] bewiesen (siehe auch [M 10] IIIb, §5).

Außerdem bemerkten Kruskal, Zabusky u.a. eine Reihe von Erhaltungsgrößen; z.B. sind die Größen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} [\tfrac{1}{2}u^3 - \tfrac{1}{4}u_x^2]\,dx$$

- sofern sie definiert sind - unabhängig von t . Bis 1968 waren etwa 10 solche Erhaltungsgrößen gefunden worden.

Ein Durchbruch bei der Untersuchung der KdV-Gleichung war die folgende Beobachtung von P. Lax 1968 ([L 1]):
Bezeichnet $Z(t)$ den Differentialoperator

$$Z(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$$

und ist $K(t) := 2\frac{d^3}{dx^3} - 3u\frac{d}{dx} - \frac{3}{2}u_x$, so ist die KdV-Gleichung äquivalent zu der Gleichung für Differentialoperatoren

$$\frac{d}{dt} Z = [Z,K]$$

Aus dieser Gleichung sieht man (ähnlich wie in §3), daß das Spektrum von Z (in einem geeigneten Funktionenraum) von t unabhängig ist. Dies liefert dann unendlich viele Erhaltungsgrößen. Mit etwas Vorsicht kann man die KdV-Gleichung als integrables Hamiltonsches System auf dem Raum der Funktionen in eine Veränderlichen auffassen - für eine Diskussion der symplektischen Struktur und verwandter Fragen siehe etwa [A 2], [K 23], [M 1]. Bei dieser Analogie entsprechen den Fasern der Abbildung, die durch die Integrale gegeben ist (und die in der Situation des Satzes von Arnol'd-Jost Tori sind) Mengen von Funktionen $v(x)$ in einer geeigneten Klasse, für die der Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ ein vorgegebenes Spektrum hat. In der Tat ist es in vielen Fällen möglich, diese Mengen isospektraler Operatoren zu untersuchen(11).

---

(11) Die Untersuchung solcher isospektraler Mannigfaltigkeiten mit geometrischen und algebraisch geometrischen Methoden ist auch unabhängig von dem Zusammenhang mit integrablen Hamiltonschen Systemen interessant und bietet wohl noch viele interessante Perspektiven für das Zusammenspiel von Analysis und algebraischer Geometrie.

Besonders einfach ist die Situation, falls man sich auf quasiperiodische Funktionen v beschränkt und als Spektrum im Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger eine endliche Vereinigung S von Intervallen vorgibt, die nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt ist.

S :

Wir setzen $I(S) := \{ v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / v$ ist quasiperiodisch und der Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ hat Spektrum $S\}$. Ferner sei C die hyperelliptische Kurve, die als doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ mit den Randpunkten von S als Verzweigungspunkten realisiert wird.

<u>Satz</u> (Mc Kean-van Moerbeke [K 8], Novikov et al. [D 2]):
Es gibt einen Isomorphismus ψ zwischen $I(S)$ und der Menge der reellen Punkte der Jacobivarietät $Jac(C)$ von C. Der durch die Lax-Darstellung der KdV-Gleichung auf $I(S)$ definierte Fluß entspricht unter ψ in einem linearen Fluß auf $Jac(C)$.

M.a.W.:"Die KdV-Gleichung wird auf $Jac(C)$ linearisiert".

Eine elegante Beschreibung dieses Isomorphismus ψ wurde von Krichever gegeben, wir wollen einen Teil seiner Konstruktion hier skizzieren (vgl.[K 19], [M 9],):
Sei also $v \in I(S)$, und Z bezeichne den Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$.
Dann kann man zeigen, daß es einen Operator ungerader Ordnung Y

der Form

$$Y = \frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\,\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \ldots\ldots + a_o(x) \qquad (k \quad \text{ungerade})$$

gibt, der mit Z kommutiert:

$$Y \circ Z = Z \circ Y \quad .$$

Nachdem man evtl. Y durch Potenzen von Z abgeändert hat, kann man zeigen, daß Y und Z eine Gleichung

$$Y^2 = p(Z)$$

mit einem Polynom p vom Grad k erfüllen. Die Nullstellen von p sind gerade die Ränder des Spektrums von Z .

$$C' := \{(y,z) \in \mathbb{C}^2 / y^2 - p(z) = 0\}$$

ist dann eine affine algebraische Kurve, die sich durch einen glatten Punkt im Unendlichen zu einer hyperelliptischen Kurve C kompaktifizieren läßt. Für jeden Punkt $(y,z) \in C'$ sei

$$L_{(y,z)} := \{f \in \mathbb{C}[[x]] / \; Y(f) = y \cdot f \; , \; Z(f) = z \cdot f\} \quad ;$$

dies ist ein eindimensionaler $\mathbb{C}$ - Vektorraum(12). Die Räume $L_{(y,z)}$ lassen sich zu einem Geradenbündel L' auf C' zusammenkleben; und indem man geeignete Wachstumsbedingungen für Schnitte im Un-

---

(12) falls Y von minimal möglichem Grad gewählt war.

endlichen stellt, läßt sich L' fortsetzen zu einem Geradenbündel L auf C .

Auf diese Weise erhält man also ausgehend von Z (bzw. v) ein Geradenbündel L auf C , also im wesentlichen ein Element der Jacobivarietät von C . Variiert nun Z entsprechend der Lax-Beschreibung der KdV-Gleichung, so bleibt offenbar p und die Kurve C fest, aber das Geradenbündel L variiert linear auf $\mathrm{Jac}(C)$.

Auch die Umkehrabbildung von ψ kann in konzeptueller Weise elegant beschrieben werden. Wir beschränken uns hier auf die (zu dieser Konstruktion "im wesentlichen" äquivalenten) folgenden Feststellung (siehe z.B. [D 9]):

Ist C eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht g und ϑ [13] ihre Riemannsche Thetafunktion, so erfüllt

$$u(x,t) := - 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \ln \vartheta(\vec{U} \cdot x + \vec{V} \cdot t) + \mathrm{const}$$

die KdV-Gleichung[14].

In der oben beschriebenen Konstruktion der Abbildung ψ ist die spezielle Gestalt der Operatoren Y , Z unwesentlich; sie hängt nur von dem kommutativen Ring von Differentialoperatoren ab, der von Y und Z erzeugt wird. Allgemeiner erhält man auf die oben angedeutete Weise eine Beziehung zwischen kommutativen Ringen von Differentialoperatoren und torsionsfreien Garben auf Kurven - eine Beziehung, die bereits 1922 von Burchnall und Chaundy [B]

---

(13) Zur Definition und Eigenschaften von Thetafunktionen siehe etwa [M 8], [M 10]

untersucht worden war[15].

In diesem Stil lassen sich auch mehrere andere spezielle Differentialgleichungen behandeln, so etwa

die Boussinesqu-Gleichung $\ddot{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{4}{3}u^2 - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$, die äquivalent ist zu dem Lax-Paar $\dot{L} = [L,A]$ mit

$$L = -\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} + v\ , \quad A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{4}{3}u$$

die nichtlineare Schrödingergleichung $i\dot{u} = 2|u|^2 u - u_{xx}$ mit der Lax-Darstellung $\dot{L} = [L,A]$, wobei

$$L = i\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ v & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}\ , \quad A = i\begin{pmatrix} (-2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - uv) & (-u_x - 2u\frac{\partial}{\partial x}) \\ (-v_x - 2v\frac{\partial}{\partial x}) & (2\frac{\partial^2}{\partial x} + uv) \end{pmatrix}$$

und $\bar{u} = F v$

die Sine-Gordon-Gleichung $\ddot{u} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0$ (für eine Kommutatordarstellung sieheetwa [K 6] §3).

Wir wollen darauf nicht weiter eingehen und verweisen nur auf die Übersichtsartikel [D 6], [D 9], [K 3], [M 4], sowie auf [K 6], [K 7]. Stattdessen kehren wir noch einmal zurück zur KdV-Gleichung und den Mengen isospektraler eindimensionaler Schrödingeroperatoren.

---

(14) $\vec{U}$ und $\vec{V}$ sind Richtungen in $\mathbb{C}^g$, die durch einen Weierstraßpunkt von C bestimmt sind.

(15) Diese Arbeiten waren allerdings in Vergessenheit geraten.

Der Fall, daß man als Spektrum für den Operator $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ mit fast-periodischer Funktion v eine abzählbare Vereinigung von Intervallen vorgibt, wurde von Mc Kean-Trubowitz [K 9] (im periodischen Fall) von Levitan ([L 3], [L 4] im allgemeinen) untersucht. Die Menge aller v, für die $-\frac{d^2}{dx^2} + v$ ein vorgegebenes Spektrum hat, ist dann isomorph zur Menge der reellen Punkte der Jacobivarietät einer hyperelliptischen Kurve von unendlichem Geschlecht (vgl. [K 5]).

Ein anderer Zugang zu der Untersuchung der isospektralen Mannigfaltigkeiten $I(S)$ wie oben wurde von Moser und Trubowitz gefunden (vgl. [M 7]): Betrachte eine Lösung $x(t)$ des in §2 beschriebenen mechanischen Problems von C. Neumann. Dann ist jede Komponente $x_i(t)$ von $x(t)$ eine Eigenfunktion des Operators

$$Z := -\frac{d^2}{dt^2} + \lambda(x(t))$$

zum Eigenwert a_i. Man sieht aus der Integrabilität des Neumann-Problems, daß λ quasiperiodisch ist. Es stellt sich heraus, daß das Spektrum von Z aus nur endlich vielen Intervallen besteht, und daß jeder derartige Operator auf diese Weise aus einer Lösung eines Neumann-Problems gewonnen werden kann. Der algebraisch-geometrishce Aspekt der KdV-Gleichung kann also fast vollständig auf ein mechanisches Problem aus dem letzten Jahrhundert zurückgeführt werden.
Für andere der oben genannten Gleichungen haben Deift-Lund-Trubowitz [D 1] ebenfalls endlich-dimensionale Systeme konstruiert, die

zu diesen Gleichungen in ähnliche Beziehung stehen wie das Neumann-System zur KdV-Gleichung. Diese Systeme sind aber i.a. wesentlich komplizierter als das Neumann-System. In letzter Zeit bemühen sich H. Flaschka und seine Mitarbeiter um einen systematischen Ansatz, um zu den partiellen Differentialgleichungen, die mit Krichevers Methode behandelt werden können, kanonische endlich-dimensionale Systeme zu konstruieren, die die gesamte algebraisch-geometrische Struktur widerspiegeln (siehe etwa [F 2]).

Neben der hier geschilderten algebraisch-geometrischen Betrachtungsweise gibt es natürlich viele andere Aspekte der KdV-Gleichung (wie etwa der Zusammenhang mit Kac-Moody-Algebren, siehe [S 1], [K 1]); diese zu beschreiben, würde jedoch weit über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen.

6. Die Kadėmtsev-Petviashvili-Gleichung und das Schottky-Problem

Bei der Untersuchung der Stabilität der Soliton-Lösungen der KdV wurden Kadėmtsev und Petviashvili [K 2] zu folgender partieller Differentialgleichung für Funktionen in den Variablen x,y,t geführt:

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

Auch diese Gleichung (die man oft kurz die KP-Gleichung nennt) läßt sich als Kommutatorgleichung für Differentialoperatoren schreiben, nämlich

$$[\frac{\partial}{\partial t} - Z , \frac{\partial}{\partial y} - K] = 0$$

mit $Z = -\frac{d^2}{dx^2} + u$, $K = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}(u\frac{d}{dx} + (\frac{d}{dx}) u) + w$.

Mit ähnlichen Methoden wie bei der KdV-Gleichung läßt sich auch diese Gleichung linearisieren auf der Jacobivarietät einer algebraischen Kurve - allerdings treten hier nicht nur hyperelliptische Kurven auf, sondern beliebige kompakte algebraische Kurven. Genauer gilt (vgl.[D 5]).

Ist C eine nichtsinguläre kompakte algebraische Kurve vom Geschlecht g und ϑ ihre Riemannsche Thetafunktion, so gibt es $\vec{U},\vec{V},\vec{W} \in \mathbb{C}^g$, so daß

$$u(x,y,t) := -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \ (\vec{U}\cdot x + \vec{V}\cdot y + \vec{W}\cdot t) + \text{const}$$

die KP-Gleichung erfüllt ($\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ und die Konstante sind explizit gegeben, vgl. [K 20]).

Diese Tatsache regte Novikov zu der Vermutung an, daß sich unter allen hauptpolarisierten Abelschen Varietäten die Jacobivarietäten algebraischer Kurven dadurch charakterisieren lassen, daß sich auf ihnen die KP-Gleichung linearisieren läßt. Dies ist in der Tat richtig - nach Vorarbeiten von Dubrovin [D 5], Arbarello - De Concini [A 8], Mulase [M 11] und anderen gelang es Shiota [S 3] zu zeigen:

<u>Satz</u>:

Sei Ω eine symmetrische komplexe $g \times g$ - Matrix mit positiv definitem Imaginärteil, $A := \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \Omega\, \mathbb{Z}^g$ die zugehörige hauptpolarisierte Abelsche Varietät (cf. [M 8]) und ϑ ihre Riemannsche Thetafunktion $\vartheta(z) = \sum_{m \in Z} \exp(2\pi i\, {}^t m z + \pi i\, {}^t m \Omega m)$.

Dann sind die folgenden Aussagen (a) und (b) äquivalent:

(a) A ist isomorph zur Jacobivarietät einer nichtsingulären kompakten algebraischen Kurve

(b) Es gibt Vektoren $\vec{U},\vec{V},\vec{W} \in \mathbb{C}^g$, $U \neq 0$ und eine quadratische Form $Q(x,y,t)$ so daß

(i) $$u(x,y,t) := -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x,y,t) \cdot \ln \vartheta(\vec{U}\cdot x + \vec{V}\cdot y + \vec{W}\cdot t + \zeta)$$

ist für jedes $\zeta \in \mathbb{C}^g$ eine Lösung der KP-Gleichung, und

(ii) der Thetadivisor von A enthält keine Abelsche Untervarietät von A , zu der der Vektor $\vec{U}$ tangential ist.

Vermutlich folgt (b,ii) bereits aus (b,i). Dieser Satz (bzw. bereits das Resultat von Arbarello - De Concini [A 8]) ermöglicht es zum Beispiel, auf dem Modulraum der hauptpolarisierten Abelschen Varietäten Gleichungen anzugeben, die gerade den Ort aller Jacobivarietäten beschreiben.
Das Problem, die Jacobivarietäten unter allen Abelschen Varietäten zu charakterisieren, war bereits von Riemann aufgeworfen worden. Es wird i.a. das Schottky-Problem genannt, da Schottky erste erfolgversprechende Ansätze zu einer Lösung entwickelt hatte (vgl. [M 8] IV). Die obigen Resultate sind aber die erste vollständige Lösung dieses Problems. Sie ist vielleicht für praktische Zwecke noch nicht voll befriedigend - man würde sich eine geometrische Charakterisierung des Ortes aller Jacobivarietäten wünschen; es gibt aber bereits eine Reihe von erfolgversprechenden Ansätzen, den obigen Satz in geometrischer Weise zu verstehen und zu interpretieren (vgl. [G 1]).

Referenzen:

[A 1] R. Abraham, J. Marsden: Foundations of Mechanics , Benjamin Publishing Comp. 1978.

[A 2] M. Adler: On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the Hamiltonian structure of Korteweg-de Vries type equations, in: Global Analysis, pp. 1-16, Lectures Notes in Mathematics 755, Springer 1979.

[A 3] M. Adler, P. van Moerbeke: Completely integrable systems, Euclidean Lie Algebras and curves, Adv. Math. 38, 267-317 (1980).

[A 4] - : Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, Adv. Math. 38, 318-379 (1980).

[A 5] - : Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization. Comm. Math. Physics 83, 83-106 (1982).

[A 6] - : The algebraic integrability of geodesic flow on SO(4), Inv. math. 67, 297-311 (1982).

[A 7] - : in Vorbereitung

[A 8] E. Arbarello, C. de Concini: On a set of equations characterizing Riemann matrices. Ann. Math. 12, 119-140 (1984).

[A 9] V.I. Arnol'd: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer 1978.

[B 1] F. van der Blij: Some details of the history of the Korteweg-de Vries equation, Nieuw Archief voor Wiskunde 26, 54-64 (1978).

[B 2] M. Buys: The Kovalevskaya Top. Thesis, NYU 1982.

[C 1] R. Cushman: Geometry of the energy-momentum mapping of the spherical pendulum, CWI Newsletter 1, 4-18 (1983).

[D 1] P. Deift, F. Lund, E. Trubowitz: Nonlinear wave equations and constrained harmonic motion, Comm. Math. Physics 74, 141-188 (1980).

[D 2] B. Dubrovin, V. Matveer, S. Novikov: Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators and abelian varieties, Russ. Math. Surveys 31 (1), 59-149 (1976).

[D 3] B. Dubrovin: Completely integrable Hamiltonian systems associated with matrix operators and Abelian varieties, Funct. Anal. Appl. 11, 265-277 (1977).

[D 4] B. Dubrovin: Theta functions and non-linear equations, Russ. Math. Surveys 36 (2), 11-92 (1981).

[D 5] B. Dubrovin: The Kadomtsev-Petviashvili equation and the relations between the periods of holomorphic differentials on Riemann surfaces, Math. USSR Izv. 19 (2), 285-296 (1982).

[D 6] B. Dubrovin, I. Krichever, S. Novikov: Topological and Algebraic Geometry methods in contemporary mathematical physics II, Sov. Sci. Rev, Sect. C,3, 1-150 (1982).

[D 7] J. Duistermaat: On global action angle coordinates, Comm. Pure Appl. Math. 33, 687-706 (1980).

[D 8] J. Duistermaat: Non-integrability of the 1 : 1 : 2 resonance. Preprint.

[D 9] V. Drinfeld, I. Krichever, Y. Manin, S. Novikov: Methods of algebraic geometry in contemporary mathematical physics, Sov. Sci. Rev. Sect. C,1, 1-54 (1980).

[E 1] F. Ehlers, H. Knörrer: An algebro-geometric interpretation of the Bäcklund-transformation for the Korteweg-de Vries equation, Comm. Math. Helvetici 57, 1-10 (1982).

[F 1] H. Flaschka: Discrete and periodic illustrations of some aspects of the inverse method. In: Dynamical Systems, Theory and Applications, pp. 441-466, Lecture Notes in Physics 38, Springer 1975.

[F 2] - : Relations between infinite-dimensional and finite-dimensional isospectral equations. In: Proc. RIMS Symposium on non-linear integrable systems (editors: M. Jimbo and T. Miwa), pp. 221-240, World Science Publishing Company, Singapore 1983.

[F 3] B. Fuchssteiner: Soliton-Gleichungen. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, pp. 9-36, Bibliogr. Institut, Zürich 1984.

[G 1] B. van Geemen, G. van der Geer: Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varities. Erscheint in den Berichten der Arbeitstagung, Bonn 1984.

[G 2] D. Gieseker, E. Trubowitz: Fermi curves and density of states. In Vorbereitung.

[G 3] V. Golubev: Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point, Moskau 1953 (Übersetzt von J. Shorr-Kon für die National Science Foundation 1960).

[G 4] Ph. Griffiths: Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations. Preprint.

[H 1] L. Haine: Geodesic flow on SO(4) and abelian surfaces, Math. Ann. 263, 435-472 (1983).

[H 2] - : The algebraic complete integrability of geodesic flow on SO(N), Comm. Math. Phys. 94, 271-288 (1984).

[H 3] R. Hirota: Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Letters 27, 1192-1194 (1971).

[H 4] N. Hitchin: On the construction of monopoles, Comm. Math. Physics 89, 145-190 (1983).

[H 5] Ph. Holmes, J. Marsden: Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, Indiana Univ. Math. Journ. 32, 273-309 (1983).

[J 1] C. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke VIII.

[K 1] V. Kac: Infinite dimensional Lie algebras, Progress in Mathematics 44, Birkhäuser 1983.

[K 2] B. Kadëmtsev, V.Petviashvilii: On the stability of solitary waves in weakly dispersing media, Sov. Phys. Dokl. 15, 539-541 (1970).

[K 3] H. Mc Kean: Integrable systems and algebraic curves. In: Global Analysis, pp. 83-200. Lecture Notes in Math. 755, Springer 1979.

[K 4] - : Theta functions, solitons and singular curves. In: Partial differential equations and geometry, pp. 237-254. Lecture Notes in Pure and Applied Math. 48. Marcel Dekker, New York, Basel, 1979.

[K 5] - : Algebraic curves of infinite genus arising in the theory of nonlinear waves. Proc. Int. Congr. Math. Helsinki 1978, 777-783.

[K 6] - : The sine-Gordon and the sinh-Gordon equations on the circle, Comm. Pure Appl. Math. 34, 197-258 (1981).

[K 7] - : Boussinesq's equation on the circle, Comm. Pure Appl. Math. 34, 599-691 (1981).

[K 8] H. Mc Kean, P. van Moerbeke: The spectrum of Hill's equation, Inv. math. 30, 217-274 (1975).

[K 9] H. Mc Kean, E. Trubowitz: Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, Comm. Pure Appl. Math. 29, 143-226 (1976).

[K 10] F. Klein, A. Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Teubner, Leipzig 1897-1910.

[K 11] H. Knörrer: Geodesics on the ellipsoid, Inv. math. 59, 119-143 (1980).

[K 12] - : Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C. Neumann, J. reine angew. Math. 334, 69-78 (1982).

[K 13] F. Kötter: Über das Kowalewskische Rotationsproblem, Jber. DMV 1, 65-68 (1880/91).

[K 14] - : Die von Steklov und Liapunov entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 6, 79-87 (1900).

[K 15] J. Korteweg, G. de Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. magazine 39, 422-434 (1895).

[K 16] S. Kowalewski: Sur le problême de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math. 12, 177-232 (1889).

[K 17] - : Sur une proprieté du systême d'equations differentielles qui definit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math. 14, 81-93 (1890).

[K 18] Kozlov: Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, Russ. Math. Surveys 38 (1), 3-67 (1983).

[K 19] I. Krichever: Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations, Russ. Math. Surveys 32:6, 185-213 (1977).

[K 20] - : Integration of non-linear equations by methods of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl. 11, 12-26 (1977).

[K 21] I. Krichever, S. Novikov: Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations, Russ. Math. Surveys 35:6, 53-79 (1980).

[K 22] M. Kruskal: The birth of the soliton. In: Nonlinear evolution solvable by the spectral transform, pp. 1-8, Research Notes Math. 26, Pitman 1978.

[K 23] B. Kuperschmidt, G. Wilson: Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure, Inv. math. 62, 403-436 (1981).

[L 1] P. Lax: Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467-490 (1968).

[L 2] E. Leimanis: The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point, Springer Tracts in Natural Philosophy 7, 1965.

[L 3] B.M. Levitan: Almost periodicity of infinite-zone potentials, Math. USSR 18, 249-273 (1982).

[L 4] - : Approximation of infinite-zone potentials by finite-zone potentials, Izv. Akad. Nauk USSR, ser. math., 46:1, 56-87 (1982).

[M 1] Y. Manin: Algebraic aspects of nonlinear differential equations, Journ. Sov. Math. 11, 1-122 (1978).

[M 2] L. Markus, K. Meyer: Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, Mem. AMS 144, (1974).

[M 3] P. van Moerbeke, D. Mumford: The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math. 143, 93-154 (1979).

[M 4] P. van Moerbeke: Algebraic complete integrability of Hamiltonian systems and Kac-Moody Lie algebras. Erscheint in Proc. Int. Cong. Math, Warschau 1983.

[M 5] J. Moser: Various aspects of integrable Hamiltonian systems. In: Dynamical systems, pp. 233-289. Progress in Math. 8, Birkhäuser 1980.

[M 6] - : Geometry of quadrics and spectral theory. In: The Chern Symposium 1979, pp. 147-188, Springer 1980.

[M 7] - : Integrable Hamiltonian systems and spectral theory, Lezioni Fermiane, Pisa 1981.

[M 8] D. Mumford: Curves and their Jacobians, The University of Michigan Press, Ann Arbor 1975.

[M 9] - : An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related nonlinear equation. In: Proc. Intern. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, pp. 115-153.

[M 10] - : Tata Lectures on Theta II. Progress in Math. 43, Birkhäuser 1984.

[M 11] M. Mulase: Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varities, Journ. Diff. Geometry

[N 1] W. Nahm: All self-dual multimonopoles for arbitrary gauge groups

[N 2] C. Neumann: De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur, Journ. reine angew. Math. 56, 46-63 (1859).

[P 1] A. Peremelov: Lax representation for systems of S. Kowalevsky's type, Funct. Anal.Appl. 16, 143-144 (1982).

[P 2] - : Some remarks on the integrability of the equations of motion of a rigid body in an ideal fluid, Funct. Anal. Appl. 15, 144-146 (1981).

[R 1] T. Ratiu, P. van Moerbeke: The Lagrange rigid body motion, Ann. Inst. Fourier 32, 211-234 (1982).

[S 1] G. Segal, G. Wilson: Loop groups and equations of KdV-type. Preprint.

[S 2] J.-P. Serre: Groupes algêbriques et corps de classes, Herrmann, Paris 1959.

[S 3] T. Shiota: Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Preprint.

[T 1] A. Tissot: Thêse de Méchanique, Journ. de Math. 17, 88-116 (1852).

[T 2] A. Thimm: Integrable geodesic flows on homogenous spaces, Ergod. Th. & Dynamical Syst. 1, 495-517 (1981).

[T 3] M. Toda: Studies on a nonlinear lattice, Ark. for Det Fysiske Sem. Trondheim 2 (1974).

[V 1] J.-L. Verdier: Algèbres de Lie, systèmes Hamiltoniens, courbes algèbriques (d'après M. Adler et P. van Moerbeke) Séminaire Bourbaki n° 566 (1980).

[V 2] - : Les représentations des algèbres de Lie affines: Applications à quelques problèmes de physique, Séminaire Bourbaki n° 596 (1982).

[V 3] G. de Vries: Bijdrage tot de kennis der lange golven, Proefschrift, Amsterdam 1894.

[W 1] A. Weinstein: Sophus Lie and symplectic geometry, Expo. Math. 1, 95-96 (1983).

[W 2] E. Whittaker: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, Grundlehren XVII, Springer 1924.

[Z 1] S. Ziglin: Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechancis.
I: Funct. Anal. Appl. 16, 181-189 (1982)
II:Funct. Anal. Appl. 17, 6- 17 (1982).