

BALLQUOTIENTEN ALS
VERZWEIGTE ÜBERLEGUNGEN
DER PROJEKTIVEN EBENE

Thomas Höfer

Dissertation Bonn 1985

Universität Essen -GHS-
FB 6 Mathematik
Universitätsstr. 2
D-4300 Essen 1

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 3

MPI/SFB 85-23

O glücklich, wer noch hoffen kann,
aus diesem Meer des Irrtums aufzutauchen!
Was man nicht weiß, das eben brauchte man,
und was man weiß, kann man nicht brauchen.

[Goe], V. 1064 ff.

EINLEITUNG

Mit dem Schlagwort "Geographie der Chernzahlen" umschreibt man das Problem, sämtliche $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zu bestimmen, die als Chernzahlen $a = c_1^2(Y)$ (Selbstschnittzahl eines kanonischen Divisors) und $b = c_2(Y)$ (topologische Eulercharakteristik) einer minimalen nichtsingulären kompakten komplexen Fläche Y vom allgemeinen Typ auftreten (s. [BPV], VII.9). Im Bereich positiver Signatur, also $c_1^2(Y) > 2c_2(Y)$, hat man noch kein genaues Bild gewinnen können. Einschränkungen liefern neben $c_1^2(Y) > 0$ die klassische Bedingung $c_1^2(Y) + c_2(Y) \equiv 0 \pmod{12}$ (Formel von Max Noether) und die Miyaoka-Yau-Ungleichung $c_1^2(Y) \leq 3c_2(Y)$ (1977). Diese Ungleichung ist scharf, und Gleichheit gilt genau dann, wenn die universelle Überlagerung von Y der Ball $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^2$ ist (Kriterium von Yau (1977), s. 1.1). Beispiele für solche Flächen, die nicht a priori als Ballquotienten auftreten, gibt es von Mumford [Mu₂], Inoue [In], Livné [Liv] und Hirzebruch [Hi₃], [Hi₄]. Aufbauend auf Hirzebruchs Arbeiten untersuchen wir hier minimale Desingularisierungen Y verzweigter Überlagerungen der projektiven Ebene und geben Bedingungen für das Verzweigungsverhalten an, die die Gleichheit $c_1^2(Y) = 3c_2(Y)$ garantieren. Insbesondere

werden so weitere Beispiele von Ballquotienten konstruiert.

Dazu betrachten wir eine Konfiguration K von k Geraden L_1, \dots, L_k in der komplexen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 =: S$. Durch Aufblasen aller Punkte von S , durch die mehr als zwei der Geraden laufen (sogenannte "singuläre Schnittpunkte"), erhalten wir eine Fläche S' mit einer Konfiguration K' , die aus den strikten Urbildern L'_i der L_i und den exceptionellen Kurven E'_1, \dots, E'_k besteht.

Wir untersuchen entlang K' verzweigte Galois-Überlagerungen $Y \rightarrow S'$, wobei wir annehmen, daß Y eine nichtsinguläre Fläche ist. Ohne zunächst auf das schwierige Problem der Existenz einer solchen Überlagerung einzugehen, wollen wir die Eigenschaften von Y studieren. Die Chernzahlen von Y hängen vom Schnittverhalten der Konfiguration, den Verzweigungsordnungen n_i entlang der L'_i und m_ν entlang der E'_ν sowie dem Überlagerungsgrad N ab. Dabei tritt N nur als Faktor auf, so daß wir allein an der durch die n_i und m_ν gewichteten Konfiguration ablesen können, ob die "Proportionalitätsabweichung"

$$\text{Prop } Y = 3c_2(Y) - c_1^2(Y)$$

verschwindet (2.5).

Für nichtsinguläre kompakte Kurven C auf Y ist eine "relative Proportionalitätsabweichung"

$$\text{Prop } C = 2C^2 - e(C)$$

definiert. Falls Y ein Ballquotient ist, muß Prop C nach dem "relativen Proportionalitätssatz" in 1.2 für die Urbilder

\tilde{L}_i und \tilde{E}_v der L'_i bzw. E'_v verschwinden, und die Berechnung dieser Werte ergibt zusammen mit dem oben genannten Kriterium von Yau:

Proportionalitätssatz (2.6.4). Wenn in der oben beschriebenen Situation Y eine Fläche vom allgemeinen Typ ist, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Y ist ein Ballquotient
- (b) $\text{Prop } Y = 0$
- (c) $\text{Prop } \tilde{L}_i = \text{Prop } \tilde{E}_v = 0$ für alle i und v .

Tatsächlich gilt der Satz in etwas größerer Allgemeinheit.

In der kürzlich in englischer Übersetzung erschienenen Arbeit [Shva] von O. V. Shvartsman ist im wesentlichen das selbe Kriterium angekündigt. M. Yoshida hat mir mitgeteilt, daß er den relativen Proportionalitätssatz (a) \Rightarrow (c) durch Betrachtung der auf dem Ball operierenden Gruppe beweisen kann. Wir geben dafür in 1.2 einen differentialgeometrischen Beweis von K. Enoki (unveröffentlicht) wieder, der sogar $\text{Prop } C \geq 0$ für alle nichtsingulären kompakten Kurven C auf Ballquotienten liefert.

Benutzt man statt der Gewichte n_i und m_v die rationalen Zahlen $x_i = 1 - 1/n_i$ und $y_v = -1 - 1/m_v$, so erhält man $\text{Prop } Y / N$ als quadratische Form Prop_K in den Variablen $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_g)$. Die Form Prop_K selbst hängt nur von dem Schnittverhalten der ungewichteten Konfiguration K ab (3.1, 3.2, 4.2.4). Die relativen Proportionalitäts-

abweichungen der \tilde{L}_i und \tilde{E}_v werden (bis auf den Faktor N/n_i bzw. N/m_v) Linearformen G_i bzw. P_v in den Variablen, und es ist $2 \text{ Prop}_K(x, y) = \sum x_i G_i(x, y) + \sum y_v P_v(x, y)$ (woraus natürlich (c) \Rightarrow (b) folgt).

Das Aufblasen der singulären Schnittpunkte von K ist im allgemeinen notwendig, damit überhaupt eine nichtsinguläre Überlagerungsfläche existieren kann. Eine Ausnahme bilden lediglich Tripelpunkte $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ mit Verzweigungsordnungen n_1, n_2, n_3 , deren Reziprokwerte zusammen mehr als 1 ergeben. Hier können durchaus reguläre Punkte über dem Tripelpunkt liegen. Die oben betrachtete Fläche Y ist dann die Aufblasung einer nichtsingulären Überlagerungsfläche Y^* des entsprechend weniger stark aufgeblasenen \mathbb{P}^2 in diesen Punkten (2.1, 3.3). Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn $P_v(x, y^*)$ mit $y_v^* = -1 + 1/m_v$ (entsprechend $m_v^* = -m_v$) verschwindet. Die zugehörigen Schnittpunkte erhalten dann formal das negative Gewicht $m_v^* = -m_v$, für die übrigen sei $m_v^* = m_v$. Dann gilt weiterhin $\text{Prop } Y^*/N = \text{Prop}_K(x, y^*)$, und die relativen Proportionalitätsabweichungen verhalten sich entsprechend. Unser Proportionalitätssatz bleibt also weiter gültig.

Wenn sich für einen Dreifach- oder Vierfachpunkt von K die Kehrwerte der zugehörigen n_i genau zu 1 addieren, besteht die Kurve \tilde{E}_v dazu aus disjunkten elliptischen Kurven. Die Überlagerungsfläche Y kann also kein Ballquotient sein, jedoch besteht die Möglichkeit, daß Y die Kompaktifizierung eines offenen Ballquotienten durch die Vereinigung D dieser Kurven ist. Formal erhalten die entsprechenden E'_v das Ge-

wicht $m_v^* = \infty$ ($y_v^* = -1$), und wieder ist $P_v(x, y^*)$ genau dann gleich 0, wenn \tilde{E}_v aus disjunkten elliptischen Kurven besteht.

Für diesen Fall gibt es "logarithmische" Versionen der Miyaoka-Yau-Ungleichung, des Satzes von Yau und des relativen Proportionalitätssatzes: Wenn man statt der Garben von Differentialformen auf der kompakten Fläche die entsprechenden Garben von Differentialformen mit logarithmischen Polen längs D betrachtet, erhält man die logarithmischen Chernzahlen und damit die logarithmischen Proportionalitätsabweichungen $\overline{\text{Prop}}(Y, D)$ für die Kompaktifizierung Y der offenen Fläche $Y - D$ und $\overline{\text{Prop}} C$ für eine kompakte nichtsinguläre Kurve C auf Y , aufgefaßt als Kompaktifizierung einer Kurve auf $Y - D$. Falls (Y, D) vom logarithmisch allgemeinen Typ ist (1.3.2), so gilt wieder $\overline{\text{Prop}}(Y, D) \geq 0$ (Sakai, 1.3.7), und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $Y - D$ ein Ballquotient ist (R. Kobayashi, 1.3.8). Der relative Proportionalitätssatz läßt sich ebenfalls verallgemeinern (1.3.9). $\overline{\text{Prop}}(Y, D)$ ist das N -fache von $\text{Prop}_K(x, y^*)$, Entsprechendes gilt für die relativen Proportionalitätsabweichungen, und auch unser Proportionalitätssatz gilt weiterhin. (3.4, 3.5).

Für eine vorgegebene (ungewichtete) Konfiguration kann man nun nach Gewichten (x, y^*) suchen, für die alle $G_i(x, y^*)$ und $P_v(x, y^*)$ verschwinden. Überlagerungen $Y \rightarrow S'$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften und dem durch die Gewichte vorgeschriebenen Verzweigungsverhalten bzw. die zugehörigen Flächen Y^* oder $Y^* - D$ sind dann Kandidaten für Ballquotienten. Als zusätzliche Bedingung hat man nur noch, daß sie vom

(logarithmisch) allgemeinen Typ sein müssen, was man ebenfalls an K und den Gewichten ablesen kann (4.1). Gewichte, die diese Kriterien erfüllen, heißen hyperbolisch.

Interessant ist der Fall konstanter Gewichte, d.h. $n_i = n \geq 2$ für alle i . Wenn n und die Vielfachheiten der singulären Schnittpunkte klein sind, kann man die m_v^* so wählen, daß die P_v verschwinden (4.3). Die Proportionalitätsbedingung $G_i(x, y^*) = 0$ geht dann über in $3\tau_i = k + 3$, wobei τ_i die Anzahl aller Schnittpunkte auf L_i ist. Konfigurationen, die diese Gleichung für alle i erfüllen, nennen wir homogen.

Die bekannten homogenen Konfigurationen sind gerade diejenigen, die durch irreduzible Spiegelungsgruppen auf dem \mathbb{C}^3 definiert werden: Die Fixpunkte der Spiegelungen in einer solchen Gruppe bilden eine Ebenenkonfiguration im \mathbb{C}^3 und damit eine Geradenkonfiguration auf der projektiven Ebene. Neben den Serien $\text{Ceva}(r)$ und $\text{Ceva}(r, 3)$ (5.2) erhält man so fünf exzeptionelle homogene Konfigurationen (5.3). Sämtliche hyperbolischen Gewichte zu diesen Konfigurationen sind in Kapitel 5 aufgelistet. Die zwei übrigen Ceva-Serien bestehen aus nicht-homogenen Konfigurationen, auch hier findet man hyperbolische Gewichte. Die Beispiele in den Ceva-Serien lassen sich allerdings alle auf das vollständige Vierseit $\text{Ceva}(2)$ (5.1) zurückführen.

In Kapitel 6 gehen wir auf die Uniformisierbarkeit gewichteter Geradenkonfigurationen ein, untersuchen also die Frage, wann eine verzweigte Überlagerung, wie wir sie bisher betrachtet

haben, überhaupt existiert. Es bieten sich drei Methoden an, die wir alle für die Existenznachweise benutzen:

- Algebraisch kann man eine Überlagerung durch eine geeignete Erweiterung des Funktionenkörpers von \mathbb{P}^2 definieren. Dieses Verfahren hat auch Hirzebruch in seinen Arbeiten benutzt (6.1).
- Die analytische Methode besteht darin, eine Differentialgleichung anzugeben, die auf dem Komplement von K regulär ist und deren Monodromie die gewünschte Überlagerung induziert. Musterbeispiel ist die Hypergeometrische Differentialgleichung in zwei Variablen, die Uniformisierungen zu den hyperbolischen Gewichten für das vollständige Vierseit liefert (6.2).
- Topologisch definiert man Überlagerungen durch Quotienten der Fundamentalgruppe H des Komplements von K im \mathbb{P}^2 (6.3, 6.4). Wenn man nur nach abelschen Überlagerungen sucht, kann man die Frage nach der Uniformisierbarkeit eindeutig beantworten (6.5), im allgemeinen Fall gibt es ein hinreichendes Kriterium von M. Kato (6.4.7). Für diejenigen hyperbolischen Beispiele, die diese Bedingungen nicht erfüllen, geben wir in 6.6 einen passenden Quotienten von H an.

Auf die Ergebnisse von Kapitel 6 wird gelegentlich schon in den vorhergehenden Kapiteln verwiesen.

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mir geholfen haben, ein Stück voranzukommen. Was diese Arbeit betrifft, sind dies neben vielen anderen Mathematikern und Nicht-Mathe-

x

matikern am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn vor allem Prof. Dr. Friedrich Hirzebruch, der mich auf die Problemstellung aufmerksam machte, das Entstehen der Arbeit mit großem Interesse verfolgte und mir viele nützliche Hinweise gab, und Prof. Dr. Masaaki Yoshida, mit dem ich anregende Diskussionen hatte. Prof. Dr. Eckart Viehweg danke ich für seine Hilfe bei der endgültigen Fertigstellung der Arbeit.

INHALT

1	Proportionalitätssätze für Ballquotienten	
1.1	Chernzahlen und Ballquotienten	1
1.2	Kurven auf Ballquotienten	3
1.3	Nicht-kompakte Ballquotienten	6
2	Verzweigte Überlagerungen und Chernzahlen	
2.1	Verzweigte Überlagerungen	14
2.2	Kurvenkonfigurationen	20
2.3	Uniformisierungen von Kurvenkonfigurationen	22
2.4	Invarianten der Uniformisierung (I)	25
2.5	Invarianten der Uniformisierung (II)	27
2.6	Der Proportionalitätssatz	28
3	Die quadratische Form Prop_K und verallgemeinerte Verzweigungsordnungen	
3.1	Die quadratische Form Prop_K	31
3.2	Die Matrix Q' und die Punktbedingungen	34
3.3	Nicht-minimale Uniformisierungen	36
3.4	Elliptische Kurven auf einer Uniformisierung	38
3.5	Verallgemeinerte Verzweigungsordnungen und der Proportionalitätssatz	39

4	Uniformisierungen von Geradenkonfigurationen	
4.1	Der kanonische Divisor auf einer Uniformisierung	41
4.2	Hyperbolische und quasi-hyperbolische Konfigurationen	46
4.3	Homogene Konfigurationen und konstante Gewichte	51
5	Beispiele	
5.1	Das vollständige Vierseit	54
5.2	Die Ceva-Konfigurationen	58
5.3	Exzeptionelle Konfigurationen	63
5.4	Einige nicht-hyperbolische Konfigurationen	71
5.5	Zur Geographie der Chernzahlen	74
6	Existenz von Uniformisierungen	
6.1	Kummer-Überlagerungen	77
6.2	Uniformisierende Differentialgleichungen	78
6.3	Die Fundamentalgruppe des Komplements einer Geradenkonfiguration	82
6.4	Existenzuntersuchung mit Hilfe der Fundamentalgruppe	87
6.5	Abelsche Uniformisierungen	96
6.6	Uniformisierbarkeit der exzeptionellen Konfigurationen	102
	Notationsliste	107
	Literaturverzeichnis	109

BEZEICHNUNGEN UND KONVENTIONEN

Eine Fläche ist immer eine nichtsinguläre zweidimensionale quasiprojektive Varietät über den komplexen Zahlen. Diese Konvention dient nur der Bequemlichkeit, alle Sätze bleiben auch für zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten gültig, wenn man statt mit Divisoren mit den zugehörigen invertierbaren Garben rechnet. Wo dies nicht offensichtlich ist, wird im Text besonders darauf hingewiesen. Insbesondere ist zu beachten, daß alle kompakten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ und alle (endlichblättrigen) verzweigten Überlagerungen projektiver Flächen projektiv sind.

Kurven auf Flächen dürfen Singularitäten haben. Für nicht-singuläre vollständige Kurven C auf einer Fläche S wird laufend die Adjunktionsformel $K_S C + C^2 = -e(C)$ ($= 2g(C) - 2$) benutzt, wobei stets K_S einen kanonischen Divisor auf S , $e(\cdot)$ die Eulercharakteristik einer Mannigfaltigkeit, $g(\cdot)$ das Geschlecht einer Kurve und $C \cdot D = CD$ die Schnittzahl zweier Divisoren bezeichnet.

$c_i(\cdot)$ ist die i -te Chernklasse einer komplexen Mannigfaltigkeit. Produkte von Chernklassen in der höchsten Kohomologiedimension werden als Zahlen aufgefaßt.

KAPITEL 1

PROPORTIONALITÄTSSÄTZE FÜR BALLQUOTIENTEN

In diesem Kapitel werden die in der Arbeit benötigten Sätze über Chernzahlen kompakter Flächen und Invarianten von Kurven auf Ballquotienten bereitgestellt. Die logarithmischen Versionen für offene Flächen finden sich in Abschnitt 1.3.

1.1. CHERNZAHLEN UND BALLQUOTIENTEN

1.1.1. $\mathbb{B}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ sei der zweidimensionale komplexe Ball. Die Automorphismengruppe von \mathbb{B}^2 als komplexe Mannigfaltigkeit ist $PU(2,1)$, und all diese Automorphismen sind Isometrien bezüglich der komplex-hyperbolischen Metrik auf \mathbb{B}^2 .

1.1.2. Definition. Γ sei eine diskrete Gruppe von frei operierenden Automorphismen des Balles \mathbb{B}^2 . Dann wird der Quotient $\Gamma \backslash \mathbb{B}^2$ als (nichtsingulärer) Ballquotient oder als komplex-hyperbolische Fläche bezeichnet.

1.1.3. Diese Ballquotienten sind tatsächlich (nach der Konvention nichtsinguläre) Flächen. Kompakte Ballquotienten sind algebraische Flächen vom allgemeinen Typ und erfüllen nach dem

Proportionalitätssatz von Hirzebruch die Gleichung

$$c_1^2(X) = 3c_2(X) > 0$$

(s. [Hi₁], §3). Umgekehrt folgt aus der Miyaoka - Yau - Ungleichung ([BPV] VII.4), den Arbeiten von Aubin und Yau über die Existenz von Einstein-Kähler-Metriken mit konstanter holomorpher Schnittkrümmung und Miyaokas Resultat über "ampleness" des Kontangentialbündels (s. [BPV], VII.9 und I.15):

1.1.4. Theorem. Für jede kompakte Fläche S vom allgemeinen Typ gilt die Ungleichung

$$0 < c_1^2(S) \leq 3c_2(S).$$

$c_1^2(S)$ ist genau dann gleich $3c_2(S)$, wenn S ein Ballquotient ist. □

1.1.5. Definition. Die Proportionalitätsabweichung einer kompakten Fläche S ist

$$\text{Prop } S := 3c_2(S) - c_1^2(S).$$

Auch für Flächen mit kleinerer Kodaira-Dimension gilt meist $\text{Prop } S \geq 0$. Genauer gesagt:

1.1.6. Satz. Für eine kompakte Fläche S gilt:

- (a) Beim Aufblasen eines Punktes vergrößert sich Prop S um 4.
- (b) Wenn S nicht gerade birational zu einer Regelfläche vom Geschlecht $g > 1$ ist, ist Prop S ≥ 0 .
- (c) Wenn $c_1^2(S) = 3c_2(S) > 0$ gilt, ist S entweder biholomorph zum \mathbb{P}^2 oder vom allgemeinen Typ (und damit ein Ballquotient).

Beweis. (a) ist evident. Für ein minimales Modell X von S , das man durch r -maliges Niederblasen exzeptioneller Kurven erhält, gilt also $\text{Prop } X = \text{Prop } S - 4r$. Nach der Kodaira-Enriques-Klassifikation (z.B. [BPV], p. 188) gilt $\text{Prop } X \geq 0$ für die Kodaira-Dimensionen $\kappa(X) = 0, 1$; für $\kappa(X) = 2$ haben wir die Miyaoka-Yau-Ungleichung. Im Fall $\kappa(X) = -\infty$ kann X der \mathbb{P}^2 , eine Hirzebruch-Fläche Σ_n ($n \neq 1$), eine Regelfläche oder eine Fläche der Klasse VII sein. Außer im Fall einer Regelfläche vom Geschlecht $g > 1$ gilt dabei stets $\text{Prop } X \geq 0$, womit (b) bewiesen ist.

Sei nun $\text{Prop } S = 0$. Für $\kappa(S) \geq 0$ folgt dann $X = S$ und damit auch (c), denn für $\kappa(S) = 0, 1$ gilt $c_1^2(X) = 0$. Genauso sind Flächen der Klasse VII ausgeschlossen. Wenn X rational ist, bleibt nur $X = S = \mathbb{P}^2$ übrig, denn es ist $c_1^2(\Sigma_n) = 8$, $c_2(\Sigma_n) = 4$. Falls X eine Regelfläche vom Geschlecht $g \geq 1$ ist, gilt $\text{Prop } X = 4(1-g)$, so daß S eine $(g-1)$ -fache Aufbläsung von X ist. Dann ist aber $c_2(S) = c_2(X) + g - 1 = 3(1-g) \leq 0$. \square

1.2. KURVEN AUF BALLQUOTIENTEN

1.2.1. Ein Ballquotient S erbt die komplex-hyperbolische Metrik des Balles, trägt also eine Einstein-Kähler-Metrik mit konstanter holomorpher Schnittkrümmung. Eine nichtsinguläre Kurve C auf S ist genau dann total-geodätisch, wenn ihr Urbild im Ball \mathbb{B}^2 aus dem Schnitt von \mathbb{B}^2 mit Geraden im \mathbb{C}^2 besteht.

1.2.2. Wenn die Kurve C auf dem Ballquotienten S von einem nichttrivialen Automorphismus f punktweise festgehalten wird,

kann f zu einem Automorphismus \tilde{f} von \mathbb{B}^2 geliftet werden, der eine Komponente \tilde{C} des Urbildes von C punktweise festhält. Da $\text{Aut}(\mathbb{B}^2) = \text{PU}(2,1)$, ist, kann dies nur für eine Scheibe $\tilde{C} \approx \mathbb{B}^1$ gelten, so daß dann C total-geodätisch sein muß.

Für diese Situation gibt es eine relative Version des Proportionalitätssatzes von Hirzebruch: Es ist $2C^2 = e(C)$ (siehe [Mo-Sil], Lemma 4). Wir benötigen hier eine schärfere Version dieses Resultats. Für den folgenden Beweis bin ich I. Enoki sehr dankbar.

1.2.3. Satz. M' sei eine n' -dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit konstanter holomorpher Schnittkrümmung, M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. ω sei die induzierte Kähler-Form auf M , und γ_1 bzw. γ_1' seien die ersten Chern-Formen zu den Riemannschen Krümmungstensoren R auf M bzw. R' auf M' . Dann ist auf M die $2n$ -Form

$$((n+1)\gamma_1' - (n'+1)\gamma_1) \wedge \omega^{n-1}$$

nicht-negativ (d.h. das Produkt einer nirgends negativen Funktion mit der Volumenform), und sie verschwindet genau dann, wenn M total-geodätisch ist.

Beweis. $\rho: (X, Y) \rightarrow \text{tr}(R(\cdot, X), Y)$ (X, Y lokale Vektorfelder auf M) sei der Ricci-Krümmungstensor von M . Wenn J die komplexe Struktur des reellen Tangentialbündels TM bezeichnet, besteht zwischen ρ und γ_1 (und natürlich analog zwischen dem Ricci-Tensor ρ' von M' und γ_1') die Beziehung

$$(1) \quad \gamma_1(X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \rho(X, JY)$$

für alle X, Y (z.B. [BGM], p. 117). Weiter haben wir die Zweite Fundamentalform α , die X und Y die zu M normale Differenz $\nabla'_X(Y) - \nabla_X(Y)$ der Riemannschen kovarianten Ableitungen in M' und M zuordnet. Nach [Ko-No] II, p. 59 ist M genau dann total-geodätisch, wenn α verschwindet.

Lokal seien $\partial_1, \dots, \partial_n$ die partiellen Ableitungen nach den Realteilen komplexer Koordinaten um $p \in M$, so daß die Vektorfelder $\partial_1, J\partial_1, \dots, \partial_n, J\partial_n$ in p eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_p M$ bilden. Für die Ricci-Tensoren gilt dann die Beziehung

$$(2) \quad \rho(X, X) = \frac{n+1}{n'+1} \rho'(X, X) - 2 \sum g'(\alpha(\partial_i, X), \alpha(\partial_i, X))$$

für Tangentialvektoren X in p , wobei g' die Riemannsche Metrik auf M' ist. Die Beziehung folgt aus der Gauß-Gleichung, und hier wird benötigt, daß M' konstante holomorphe Schnittkrümmung hat ([Ko-No] II, p. 177 (Prop. 9.5) und p. 168 (Remark)). Es gilt also

$$\begin{aligned} & (((n+1)\gamma'_1 - (n'+1)\gamma_1) \wedge \omega^{n-1}) (\partial_1, J\partial_1, \dots, \partial_n, J\partial_n) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum ((n+1)\gamma'_1 - (n'+1)\gamma_1) (\partial_j, J\partial_j) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum \frac{1}{2\pi} ((n+1)\rho'(\partial_j, \partial_j) - (n'+1)\rho(\partial_j, \partial_j)) \\ &= \frac{n'+1}{(2n)!} \sum \sum g'(\alpha(\partial_i, \partial_j), \alpha(\partial_i, \partial_j)) \geq 0, \end{aligned}$$

und da stets $\alpha(X, JY) = \alpha(JX, Y) = J\alpha(X, Y)$ ist ([Ko-No] II, p. 175), kann der Ausdruck nur dann verschwinden, wenn α in p gleich 0 ist.

□

1.2.4. Korollar (Relativer Proportionalitätssatz)

C sei eine nichtsinguläre kompakte Kurve auf einem Ballquotienten S. Dann gilt

$$2C^2 - e(C) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn C total-geodätisch ist.

Beweis. Nach 1.2.1 erfüllt S die Voraussetzungen von 1.2.3, und es folgt

$$2 \int_C \gamma_1^2 - 3 \int_C \gamma_1 \geq 0.$$

Da C kompakt ist, ist das zweite Integral gleich $e(C)$ und das erste Integral gleich $-K_S C$ für einen kanonischen Divisor K_S auf dem Ballquotienten S. Die Adjunktionsformel liefert die Behauptung. □

1.2.5. Definition. C sei eine glatte kompakte Kurve auf einer Fläche S. Dann ist die relative Proportionalitätsabweichung von C definiert als

$$\begin{aligned} \text{Prop } C &= 2C^2 - e(C) \\ &= 3C^2 + K_S C \\ &= -2K_S C - 3e(C). \end{aligned}$$

(Die Gleichungen folgen aus der Adjunktionsformel.)

1.3. NICHT-KOMPAKTE BALLQUOTIENTEN

1.3.1. Für nicht-kompakte Flächen mit einer vorgegebenen Kompaktifizierung S durch einen Divisor D mit normalen Kreuzungen erhält man zu 1.1 und 1.2 analoge Resultate, wenn man für alle durch Garben von Differentialformen definierten

Objekte die Garbe Ω_S^q durch die entsprechende Garbe $\Omega_S^q\langle D \rangle$ von Differentialformen mit logarithmischen Polen längs D ersetzt (s. z.B. [Ii₂], Chap. 11 und [Sa]).

1.3.2. Definition. D sei ein reduzierter Divisor mit normalen Kreuzungen auf der n -dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit S .

(a) Die logarithmischen Chernklassen von (S, D) sind

$$\bar{c}_i(S, D) := (-1)^i c_i(\Omega_S^q\langle D \rangle).$$

(b) Die logarithmische Kodaira-Dimension von (S, D) ist die Kodaira-Dimension

$$\bar{k}(S, D)$$

bezüglich der invertierbaren Garbe $\Omega_S^q\langle D \rangle$. Ein zugehöriger Divisor auf S heißt logarithmischer kanonischer Divisor, er wird mit

$$\bar{K}(S, D)$$

bezeichnet. (S, D) heißt vom logarithmisch allgemeinen Typ, wenn $\bar{k}(S, D)$ gleich der Dimension n ist.

1.3.3. Proposition. In der Situation von 1.3.2. gelten die folgenden Aussagen:

(a) $(-1)^n \bar{c}_1(S, D) = \bar{K}(S, D) = K_S + D$

(b) \bar{c}_n ist die Eulercharakteristik der offenen Varietät $S - D$, insbesondere gilt für $n = 2$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2(S, D) &= e(S) - e(D) \\ &= e(S) - e(\tilde{D}) + \delta \\ &= e(S) + 2g(\tilde{D}) - 2 + \delta, \end{aligned}$$

wobei \tilde{D} die Normalisierung und δ die Anzahl der Singularitäten von D ist.

(c) Für die Kodaira-Dimensionen gilt

$$\bar{\kappa}(S, D) \geq \kappa(S) .$$

(d) Falls S eine Fläche ist und $\bar{\kappa}(S, D) = 2$ gilt, so ist S algebraisch.

Beweis. (a): Es ist $\Omega_S^n \langle D \rangle = \Omega_S^n(D)$, s. [Ii₂], 11.1(b).

(c) und (d) sind die Propositionen 11.4(ii) und 10.1 in [Ii₂].

(b): siehe [Ii₁], Proposition 2. Für $n=1$ folgt (b) sofort aus (a); für den Flächenfall kann man (b) wie folgt zeigen:

$i: D \rightarrow S$ und $j: D \rightarrow S$ seien die natürlichen Abbildungen. In dieser Situation haben wir die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} (\diamond) \quad & 0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-D) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow i_*\mathcal{O}_D \rightarrow 0 \\ (\diamond\diamond) \quad & 0 \rightarrow i_*\mathcal{O}_D \rightarrow j_*\mathcal{O}_{\tilde{D}} \rightarrow S \rightarrow 0 \\ (\diamond\diamond\diamond) \quad & 0 \rightarrow \Omega_S^1 \rightarrow \Omega_S^1 \langle D \rangle \rightarrow j_*\mathcal{O}_{\tilde{D}} \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

(\diamond) ist die Struktursequenz von D , ($\diamond\diamond$) ist die Normalisierungssequenz, wobei S eine Wolkenkratzergerabe mit Halm \mathcal{E} über den Singularitäten von D ist (s. [BPV], II.1). Die hintere Abbildung in ($\diamond\diamond\diamond$) ist z.B. in einem Schnittpunkt

$\{x=0\} \cap \{y=0\}$ von D bezüglich lokaler Koordinaten (x, y) durch $f \frac{dx}{x} + g \frac{dy}{y} \mapsto (f|_{D_x}, g|_{D_y})$ gegeben, wobei D_x und D_y die durch $x=0$ bzw. $y=0$ bestimmten Komponenten in der Normalisierung bezeichnen. Die Chernpolynome (über dem Chowring von S) verhalten sich multiplikativ. Daß das Chernpolynom von S gleich $1 - \text{Sing } D$ ist, ist z.B. eine einfache Folgerung aus Grothendieck-Riemann-Roch (z.B. [Har], App. A).

Insgesamt erhalten wir für die Komponente in Kodimension 0

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= c_2 - c_1 \cdot D + D^2 - \delta = c_2 + 2g(D) - 2 - \delta \\ &= c_2 + 2g(\tilde{D}) - 2 + \delta \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus ($\diamond\diamond$), s. [BPV], II.11. \square

1.3.4. Definition. D sei ein Divisor mit normalen Kreuzungen auf einer kompakten Fläche S . Eine logarithmisch exzeptionelle Kurve ist dann eine nichtsinguläre rationale (-1) -Kurve E auf S mit $ED \leq 1$. Falls keine solchen Kurven existieren, heißt (S, D) logarithmisch minimal.

1.3.5. Proposition. Sei wieder S eine kompakte Fläche und D ein reduzierter Divisor mit normalen Kreuzungen auf S . Zusätzlich sei D semi-stabil, d.h. es gebe keine nicht-singuläre rationale Komponente von D , die die übrigen Komponenten in weniger als zwei Punkten trifft. Dann gilt:

(a) Wenn $\bar{c}_1^2(S, D)$ echt positiv ist und für ein $r > 0$ das Linearsystem $|r \cdot \bar{K}_{(S, D)}|$ nicht-leer ist, dann ist (S, D) vom logarithmisch allgemeinen Typ.

(b) Wenn (S, D) logarithmisch minimal ist, gilt auch die Umkehrung von (a).

Beweis. Die Voraussetzungen von (a) bleiben beim Niederblasen logarithmisch exzeptioneller Kurven erfüllt, und auch $\bar{\kappa}$ ändert sich nicht ([Sa], Abschnitt 0). Daher kann (S, D) als logarithmisch minimal angenommen werden, und (a) und (b) folgen aus Sakais Kodaira-Klassifikation im logarithmischen Fall ([Sa], (4.5)). Die Voraussetzung über das Linearsystem ist dabei eine der vielen Möglichkeiten, $\bar{\kappa}(S, D) = -\infty$ auszuschließen. Sakai setzt allerdings voraus, daß S algebraisch ist. Für (b) gilt das nach 1.3.3 (d), und für (a) wird Hirzebruch-Riemann-Roch benutzt, um das Wachstum der Plurigeschlechter abzuschätzen ([Sa], (1.22)). Daß S algebraisch ist, ergibt sich dann daraus. □

1.3.6. Definition. D sei ein reduzierter Divisor mit normalen Kreuzungen auf der kompakten Fläche S . Dann ist die logarithmische Proportionalitätsabweichung von (S, D) definiert als

$$\begin{aligned}\overline{\text{Prop}}(S, D) &:= 3\overline{c}_2(S, D) - \overline{c}_1^2(S, D) \\ &= 3(e(S) - e(D)) - (K_S + D)^2.\end{aligned}$$

Für eine nichtsinguläre Kurve C auf S , die D transversal schneidet, ist

$$\begin{aligned}\overline{\text{Prop}} C &:= -2\overline{K}_{(S, D)} \cdot C - 3\overline{c}_1(C, C \cap D) \\ &= -2K_S \cdot C + D \cdot C - 3e(C) \\ &= 3C^2 + \overline{K}_{(S, D)} \cdot C\end{aligned}$$

die logarithmische relative Proportionalitätsabweichung.

(Die Gleichungen folgen aus 1.3.3 (a), (b) und der Adjunktionsformel.)

1.3.7. $\overline{\text{Prop}}(S, D) \geq 0$ für semi-stabile (S, D) vom logarithmisch allgemeinen Typ wurde von F. Sakai gezeigt ([Sa], (7.6)), eine Verallgemeinerung stammt von Miyaoka [Mi]. Daß $\overline{\text{Prop}}(S, D)$ für geeignete Kompaktifizierungen von Ballquotienten verschwindet, wurde von Hammond [Ham] und (im arithmetischen Fall) von Mumford [Mu₁] bewiesen. Eine Verallgemeinerung von Yaus Satz (1.1.4) stammt von Ryoichi Kobayashi (s. 1.3.8 unten). Holzapfel hat $\overline{\text{Prop}} C = 0$ für Quotienten gewisser Scheiben im Ball auf arithmetischen Ballquotienten gezeigt ([Hol], 3.4). Auch hier kann man ein vollständiges Analogon zum relativen Proportionalitätssatz 1.2.4 zeigen (s. 1.3.9 unten). Wir beschränken uns für den Rest des Abschnittes auf den Standardfall disjunkter glatter elliptischer Kompaktifizierungskurven (vgl. [He]).

1.3.8. Theorem. (R. Kobayashi) D sei ein aus disjunkten nichtsingulären elliptischen Kurven bestehender Divisor auf der kompakten Fläche S. Wenn dann (S,D) vom logarithmisch allgemeinen Typ ist, gilt

$$\overline{\text{Prop}}(S,D) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn S - D ein Ballquotient ist.

Beweis. Da $\overline{\text{Prop}}(S,D)$ beim Aufblasen eines Punktes zunimmt, können wir annehmen, daß (S,D) logarithmisch minimal ist. Die Voraussetzungen für Kobayashis Satz (Theorem 2 in [Ko₂]) sind dann erfüllt: $\overline{K}_{(S,D)}^2 > 0$ nach 1.3.5, und die numerische Effektivität von $\overline{K}_{(S,D)}$ ergibt sich wie im klassischen Fall, s. [Sa], (1.20). Die Voraussetzung über die Komponenten C von D mit $\overline{K}_{(S,D)} \cdot C > 0$ ist leer, da $(K_S + D)C = K_S \cdot C + CC = 0$ ist. □

1.3.9. Satz. Die Fläche S sei eine Kompaktifizierung des Ballquotienten S^o durch disjunkte nichtsinguläre elliptische Kurven, D = S - S^o. C sei eine nichtsinguläre kompakte Kurve auf S, die D transversal schneidet. Dann gilt

$$\overline{\text{Prop}} C \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn C^o = C ∩ S^o bezüglich der Ballmetrik auf S^o total-geodätisch ist.

Beweis. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus 1.2.3, M' entspricht dabei S^o und M C^o. Offenbar genügt es zu zeigen:

$$(i) \int_{C^o} \gamma_1^i = \overline{K}_{(S,D)} \cdot C \quad (ii) \int_{C^o} \gamma_1 = \overline{c}_1(C, C \cap D)$$

Die Kählerform $\tilde{\omega}$ der Ballmetrik auf S^o erhält Kobayashi in [Ko₁] und [Ko₂] als $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}u$ für eine leicht zu kon-

trollierende Kählerform ω auf S^0 und eine mit vielen Ableitungen beschränkte differenzierbare Funktion u auf S^0 .

(i) zeigt man nun analog zum Beweis von Proposition 1 in

[Ko₁]: Da die Ballmetrik eine Einstein-Kähler-Metrik ist, gilt $2\pi\gamma_1' = \tilde{\omega}$, und nach Wahl von u verschwindet das Integral von $i\partial\bar{\partial}u$ über C^0 . ω läßt sich aber durch einen für das Integral unerheblichen Summanden zur ersten Chernform des Linienbündels zu $\bar{K}_{(S,D)}$ auf ganz S deformieren, deren Integral über C^0 dann $\bar{K}_{(S,D)} \cdot C$ ergibt ([Ko₁], Beweis zu Prop. 1 (i)).

Zu (ii): h und \tilde{h} seien die durch ω bzw. $\tilde{\omega}$ auf C^0 induzierten Hermiteschen Metriken. Bezüglich einer lokalen Koordinate z sind dadurch Funktionen $h_z = h(\partial_z, \partial_z)$ und $\tilde{h}_z = \tilde{h}(\partial_z, \partial_z)$ definiert, wobei dann gerade $\omega = \frac{i}{2} h_z dz \wedge d\bar{z}$ und $\tilde{\omega} = \frac{i}{2} \tilde{h}_z dz \wedge d\bar{z}$ ist ([We], p. 157). Daher ist

$$\tilde{h}_z = h_z + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Nach Konstruktion von ω ist h gut im Sinne von [Mu₁], §1, das Wachstum der Krümmung $h_z^{-1} \partial h_z$ wird im Beweis von [Ko₂], Lemma 9 abgeschätzt. u ist so gewählt, daß die Metriken h und \tilde{h} äquivalent sind, also

$$c^{-1} h < \tilde{h} < c h$$

für ein $c > 0$. Daher ist auch \tilde{h} eine gute Metrik: Zu zeigen ist, daß die 1-Form $\tilde{h}_z^{-1} \partial \tilde{h}_z$ Poincaré-Wachstum hat

([Mu₁], §1). Diese Form wächst wie

$$h_z^{-1} \partial \tilde{h}_z = h_z^{-1} \partial h_z + 2 h_z^{-1} \cdot \partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \right),$$

wobei der erste Summand Poincaré-Wachstum hat und der zweite beschränkt ist, da h_z nahe $C \cap D$ beliebig groß wird. Die Behauptung folgt jetzt nach [Mu₁], 1.4. □

1.3.10. Konvention. Formal wollen wir auch $D = \emptyset$ zulassen und unter dem Paar (S, \emptyset) die kompakte Varität S verstehen. Da alle Ergebnisse in diesem Abschnitt direkte Verallgemeinerungen der entsprechenden Aussagen im kompakten Fall sind, ist diese Konvention sinnvoll. Überall wo D als Divisor auf S auftaucht, ist im Fall $D = \emptyset$ der Nulldivisor einzusetzen.

KAPITEL 2

VERZWEIGTE ÜBERLAGERUNGEN UND CHERNZAHLEN

Nachdem in 2.1 die wesentlichen Fakten über verzweigte Überlagerungen notiert worden sind, werden in den beiden folgenden Abschnitten die zentralen Objekte dieser Arbeit, nämlich gewichtete Kurvenkonfigurationen und ihre Uniformisierungen, eingeführt. Der Rest des Kapitels dient der Berechnung der Invarianten einer Uniformisierung und dem Beweis des Proportionalitätssatzes 2.6.4.

2.1. VERZWEIGTE ÜBERLAGERUNGEN

Die Terminologie ist in der Literatur nicht ganz einheitlich. Wir nehmen [BPV], I.16 als Vorlage, was auch der Definition bei Grauert und Remmert [Gr-Re] entspricht.

2.1.1. Definition. Eine (verzweigte) Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine endliche surjektive eigentliche holomorphe Abbildung $\pi: Y \rightarrow X$ eines zusammenhängenden normalen komplexen Raumes Y auf X .

2.1.2. Der Grad von π ist die Anzahl der Blätter, die Verzweigungsordnung in $y \in Y$ die Anzahl der in y zusammen-

fallenden Blätter (genauere Definitionen: [BPV], I.16). Die Überlagerung heißt unverzweigt, wenn die Verzweigungsordnung in allen Punkten von Y gleich 1 ist. Unverzweigte Überlagerungen sind genau die endlichblättrigen topologischen Überlagerungen von X . Der Verzweigungsort von π in X ist das Bild aller $y \in Y$ mit Verzweigungsordnung ≥ 2 unter π . Zwei Überlagerungen $\pi_1: Y_1 \rightarrow X$ und $\pi_2: Y_2 \rightarrow X$ sind isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $\pi_2 f = \pi_1$ gibt. Eine Decktransformation von π ist eine biholomorphe Abbildung $f: Y \rightarrow Y$ mit $\pi f = \pi$. Wenn die Gruppe der Decktransformationen von π transitiv auf Y operiert, heißt π Galois-Überlagerung. Überlagerungen mit kommutativer Decktransformationsgruppe heißen abelsch.

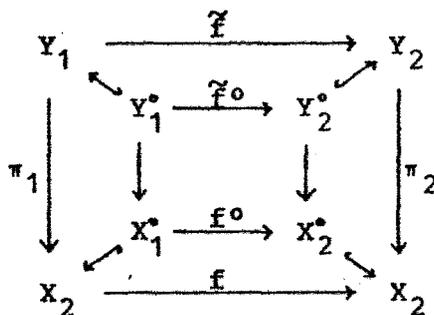
2.1.3. Satz (Fortsetzung von Überlagerungen).

(a) $\pi: Y \rightarrow X$ sei eine Überlagerung der komplexen Mannigfaltigkeit X . Dann gibt es eine echte analytische Teilmenge Z von X , über deren Komplement π eine unverzweigte Überlagerung ist.

(b) Umgekehrt sei Z eine echte analytische Teilmenge der komplexen Mannigfaltigkeit X und $\pi^0: Y^0 \rightarrow X^0 = X - Z$ eine (nach Definition endlichblättrige) unverzweigte Überlagerung. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine verzweigte Überlagerung $\pi: Y \rightarrow X$, die π^0 fortsetzt:

$$\begin{array}{ccc}
 Y^0 & \hookrightarrow & Y \\
 \pi^0 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X^0 & \hookrightarrow & X
 \end{array}$$

(c) $\pi_i^0: Y_i^0 \rightarrow X_i^0$ ($i=1,2$) seien unverzweigte Überlagerungen mit Fortsetzungen $\pi_i: Y_i \rightarrow X_i$ wie in (b). $f: X_1 \rightarrow X_2$ sei eine holomorphe Abbildung, deren Einschränkung $f^0: X_1^0 \rightarrow X_2^0$ sich zu $\tilde{f}^0: Y_1^0 \rightarrow Y_2^0$ liften läßt. Dann hat \tilde{f}^0 eine Fortsetzung $\tilde{f}: Y_1 \rightarrow Y_2$:



(d) In der Situation (b) läßt sich jede Decktransformation von π^0 zu einer von π fortsetzen. Wenn π^0 eine Galois-Überlagerung ist, so auch π .

Beweis. (a): vgl. [BPV], I.16. (b) ist im wesentlichen ein Satz von K. Stein, Satz 8 bei [Gr-Re]. In der Arbeit wird bewiesen, daß die dort betrachteten "analytischen Überlagerungen" verzweigte Überlagerungen in unserem Sinne sind.

(c) ist in der topologischen Kategorie das "Extension Thm." von R. H. Fox in [Fo₂]. Der Riemannsche Abbildungssatz garantiert, daß \tilde{f} analytisch ist.

(d) folgt sofort aus (c). □

Außerhalb der Singularitäten des Verzweigungsortes ist die lokale Struktur einer verzweigten Überlagerung $\pi: Y \rightarrow X$ recht einfach. (a) und (b) des folgenden Satzes sind die Sätze 11 und 10 in [Gr-Re], Teil (c) folgt z.B. aus dem bekannten Auflösungsverfahren für Singularitäten, etwa [Lau], p. 7-13.

2.1.4. Satz. Für eine Galois-Überlagerung $\pi: Y \rightarrow X$ der komplexen Mannigfaltigkeit X gilt:

(a) Der Verzweigungsort Z ist eine rein 1-kodimensionale analytische Teilmenge von X (oder leer).

(b) Singularitäten von Y können höchstens über denen von Z liegen. Wenn π in $y \in Y$ mit Ordnung n verzweigt ist und $z = \pi(y)$ ein regulärer Punkt von Z ist, gibt es lokale Koordinaten (v_1, \dots, v_m) von Y um y und (u_1, \dots, u_m) von X um z , bezüglich der π durch

$$u_1 = v_1^n, \quad u_2 = v_2, \quad \dots, \quad u_m = v_m$$

beschrieben wird.

(c) Nun sei X speziell eine Fläche und z ein normaler Doppelpunkt von Z . Dann ist Y in $y \in \pi^{-1}(z)$ genau dann nichtsingulär, wenn es lokale Koordinaten wie oben gibt, so daß π die Form

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1^{n_1} \\ u_2 &= v_2^{n_2} \end{aligned}$$

hat.

□

2.1.5. Definition. $\pi: Y \rightarrow X$ sei eine Galois-Überlagerung der Fläche X . Dann wird für ein $x \in X$ die Verzweigungsordnung in einem (beliebigen) $y \in \pi^{-1}(x)$ als Verzweigungsordnung in x bezeichnet. Die Verzweigungsordnung längs einer irreduziblen Kurve C in X ist gleich 1, wenn C nicht im Verzweigungsort liegt, und ansonsten gleich der Verzweigungsordnung in einem (beliebigen) Punkt auf C , in dem die Verzweigungskurve glatt ist.

In Ausnahmefällen liegen auch über Mehrfachschnittpunkten des Verzweigungsortes reguläre Punkte:

2.1.6. Satz. Es seien L_1, L_2, L_3 verschiedene Geraden durch den Ursprung der komplexen affinen Ebene und n_1, n_2, n_3 ganze Zahlen > 1 . Die Summe der Reziprokwerte sei größer als 1.

Dann ist auch die durch

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{m}$$

definierte Zahl m ganz (sogar durch 2 teilbar), und es gibt genau eine Überlagerung $\pi: Y \rightarrow \mathbb{C}^2$ durch eine nicht-singuläre Fläche Y , die genau entlang der L_i mit Ordnung n_i verzweigt ist.

π hat den Grad m^2 . Wenn $\rho: \mathbb{C}^{2'} \rightarrow \mathbb{C}^2$ die Aufblasung des Ursprungs mit der exzeptionellen Geraden E' ist, ist die durch π definierte Überlagerungsfläche Y' ebenfalls nichtsingulär, und die induzierte Abbildung $\tilde{\rho}: Y' \rightarrow Y$ ist die Aufblasung im Punkt $\pi^{-1}(0)$. $\pi': Y' \rightarrow \mathbb{C}^{2'}$ ist längs E' mit der Ordnung m verzweigt.

Beweis. Für solche Tripel von Zahlen gibt es eine verzweigte Überlagerung $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, die in genau drei Punkten mit den vorgegebenen Ordnungen verzweigt sind. Diese Überlagerungen lassen sich auf den Totalraum des Bündels $\mathcal{O}(-1)$ fortsetzen. Details finden sich in [De-Mo], 10.3. Daß m in $2\mathbb{Z}$ liegt, folgt auch durch einfaches Aufschreiben aller Möglichkeiten (siehe 3.3.3). □

2.1.7. Satz. $\pi: Y \rightarrow X$ sei eine Galois-Überlagerung zwischen nichtsingulären Flächen. Wenn dann der Verzweigungsort in $x_0 \in X$ lokal aus $r \geq 3$ nichtsingulären Komponenten besteht, die sich in x_0 transversal schneiden, so ist $r = 3$, und es liegt die in 2.1.6 beschriebene Situation vor.

Beweis. Ohne Einschränkung bestehe $\pi^{-1}(x_0)$ nur aus einem Punkt y_0 , und X sei ein kleiner Ball im \mathbb{C}^2 . Die Auflösung $\rho: X' \rightarrow X$ in x_0 induziert die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\rho'} & Y' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xleftarrow{\rho} & X' \end{array}$$

wobei Y' nun über den Schnittpunkten der exzeptionellen Kurve E' mit den eigentlichen Urbildern L_i' der Verzweigungskurven von π singular sein kann. $f: \bar{Y} \rightarrow Y'$ sei eine Auflösung dieser Singularitäten durch Ketten rationaler Kurven mit Selbstschnittzahlen ≤ -2 (s. z.B. [Lau]).

$(\rho' f)^{-1}(y_0)$ besteht aus dem eigentlichen Urbild \bar{E} von E' unter $\pi' f$ als zentraler Kurve und diesen Ketten als Armen. Diese Konfiguration muß also durch sukzessives Niederblasen von (-1) -Kurven verschwinden ([BPV], III.4), was nur möglich ist, wenn \bar{E} selbst exzeptionell ist und höchstens zwei Arme vorhanden sind. Die Einschränkung $\bar{E} \rightarrow E'$ ist daher eine Überlagerung der projektiven Geraden über sich selbst. Die Verzweigungsordnung in $L_i' \cap E'$ sei n_i' ; die Hurwitz-Formel ergibt dann für den Grad d'

$$(\diamond) \quad \frac{2}{d'} = 2 - \sum \left(1 - \frac{1}{n_i'}\right) .$$

Wenn über $L_i' \cap E'$ keine Singularität von Y' liegt, gilt

$n'_i = n_i \geq 2$ (2.1.4 (c)). Da höchstens zwei Singularitäten auftauchen, bleiben für die $n'_i \neq n_i$ nur die Fälle

$$\bullet n'_i = n'_j = d \quad (i \neq j) \qquad \bullet n'_i = d \qquad \bullet 2n'_i = d$$

Die ersten beiden Fälle kollidieren mit (\diamond), im letzten Fall folgt nach (\diamond) $r=3$ und $n_j=2$ für die übrigen beiden Punkte. Dann haben wir aber schon den in 2.1.6 beschriebenen Fall und erhalten nachträglich $n'_i = n_i$. □

2.2. KURVENKONFIGURATIONEN

2.2.1. Definition. Eine Kurvenkonfiguration K ist eine Menge von k verschiedenen zusammenhängenden nichtsingulären Kurven L_i ($i=1, \dots, k$) auf einer Fläche S , von denen sich je zwei stets transversal schneiden. Auch die Vereinigung aller $L_i \in K$ wird gelegentlich mit K bezeichnet. Eine Geradenkonfiguration ist eine Kurvenkonfiguration aus projektiven Geraden auf dem \mathbb{P}^2 .

Kurvenkonfigurationen und die mit ihnen zusammenhängenden Objekte spielen eine sehr wesentliche Rolle in dieser Arbeit. Wenn immer im Text von einer Kurvenkonfiguration die Rede ist, werden die früher eingeführten Bezeichnungen (wie k, L_i, S in der Definition) ohne erneute Erklärung benutzt, soweit das in der Situation sinnvoll ist. Um den Überblick zu erleichtern, sind all diese Symbole in der Reihenfolge ihrer Einführung im Anhang aufgelistet.

2.2.2. Bezeichnungen. K sei eine Kurvenkonfiguration. Für jedes $p \in S$ bezeichnet dann $r(p)$ die Anzahl der L_i in K , die p enthalten. p_1, \dots, p_ℓ seien die $p \in S$ mit $r(p) \geq 3$; die p_ν heißen singuläre Schnittpunkte von K . $r(p_\nu)$ wird mit r_ν abgekürzt. Für jede Kurve L_i und jedes $r \geq 2$ sei

$$\begin{aligned}\tau_i^{(r)} &= \# \{p \in L_i : r(p) = r\} \\ \tau_i &= \# \{p \in L_i : r(p) \geq 2\} \\ \sigma_i &= \# \{p \in L_i : r(p) \geq 3\} .\end{aligned}$$

K soll der Verzweigungsort einer Überlagerung von S werden. Allerdings kann man nicht erwarten, daß über den singulären Schnittpunkten von K reguläre Punkte liegen; eine Ausnahme bildet nur die in 2.1.6 beschriebene Situation. Wir blasen also S in den singulären Schnittpunkten auf und betrachten Überlagerungen der so entstandenen Fläche S' :

2.2.3. Definition. K sei eine Kurvenkonfiguration auf S , $\rho: S' \rightarrow S$ die Aufblasung in den singulären Schnittpunkten von K . Dann wird die aus den eigentlichen Transformierten L_i' der L_i und den exceptionellen Kurven $E'_\nu = \rho^{-1}(p_\nu)$ bestehende Konfiguration K' auf S' als Desingularisierung von K bezeichnet.

Außer dem Verzweigungsort K' spielen natürlich auch die Verzweigungsordnungen entlang der Kurven in K' eine Rolle. Es wird sich später herausstellen, daß man besser mit den Kehrwerten arbeitet:

2.2.4. Definition. Gewichte für eine Kurvenkonfiguration K sind ganze Zahlen $n_i \geq 2$ ($i=1, \dots, k$) und $m_v \geq 1$ ($v=1, \dots, l$). Die rationalen Zahlen $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ und $y_v = -1 - \frac{1}{m_v}$ werden ebenfalls als Gewichte bezeichnet.

(Diese Definition wird in 3.5.1 noch etwas erweitert.)

2.2.5. Bemerkung. Man könnte auch $n_i = 1$ zulassen, was an einigen Stellen im Text auch ausdrücklich getan wird. In vielen Fällen bekäme man aber formale Schwierigkeiten durch das Auftreten "unechter" Schnittpunkte, da die Kurven mit Gewicht 1 nicht zum Verzweigungsort gehören. $m_v = 1$ ist dagegen der Fall, daß an der exzeptionellen Kurve keine Verzweigung stattfindet. Dies kann durchaus auftreten.

2.3. UNIFORMISIERUNGEN VON KURVENKONFIGURATIONEN

2.3.1. Definition. K sei eine Kurvenkonfiguration auf S mit den Gewichten n_1, \dots, n_k und m_1, \dots, m_l . Eine verzweigte Galois-Überlagerung

$$\pi: Y \rightarrow S'$$

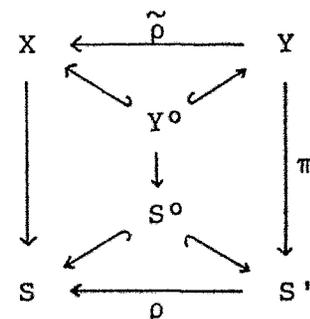
heißt Uniformisierung dieser gewichteten Kurvenkonfiguration, wenn Y eine nichtsinguläre Fläche ist und π genau entlang der Kurven L'_i mit Ordnung n_i und entlang der E'_v mit Ordnung m_v verzweigt ist. Das Komplement $S' - K' = S - K$ wird mit S° bezeichnet, der Überlagerungsgrad mit N . Die reduzierten Urbilder der L'_i bzw. E'_v seien \tilde{L}_i bzw. \tilde{E}_v .

(Auch diese Definition wird in 3.5.1 etwas erweitert.)

2.3.2. Das Existenzproblem für Uniformisierungen ist in dieser Allgemeinheit ungelöst. In Hirzebruchs Beispielen erhält man eine Uniformisierung auf algebraischem Wege durch eine Erweiterung des Funktionenkörpers der projektiven Ebene. Eine andere Möglichkeit ist es, eine Differentialgleichung anzugeben, deren Monodromie die gewünschte Überlagerung liefert. Wenn so etwas nicht gelingt, wird man versuchen, das Problem mit Hilfe der Fundamentalgruppe des Komplements S° von K in S zu lösen. Mehr dazu ist in Kapitel 6 ausgeführt, während wir hier versuchen, unter Voraussetzung der Existenz einer Uniformisierung möglichst viel über sie herauszufinden.

2.3.3. Uniformisierungen einer vorgegebenen gewichteten Kurvenkonfiguration sind nicht eindeutig bestimmt. In 6.4.5 wird aber gezeigt, daß zu je zwei Uniformisierungen eine dritte existiert, die die beiden unverzweigt überlagert.

2.3.4. In der betrachteten Situation haben wir das nebenstehende kommutative Diagramm (2.1.3 (c)). $X \rightarrow S$ ist die Fortsetzung der unverzweigten Überlagerung $Y^\circ \rightarrow S^\circ$. X ist normal, und $\tilde{\rho}$ ist eine Auflösung der Singularitäten von X (mit Ausnahme der Situation von 2.1.7).



2.3.5. Über einer Kurve L' mit Verzweigungsordnung n induziert π eine $\frac{N}{n}$ -blättrige Überlagerung. Der Divisor π^*L' auf Y ist das n -fache der Urbildkurve $\pi^{-1}(L')$. Über dem

Schnittpunkt zweier Kurven mit den Ordnungen n und m liegen $\frac{N}{nm}$ Punkte von Y . Nach 2.1.4 (b) ist $\pi^{-1}(L')$ nicht-singulär.

Gesucht sind komplex-hyperbolische Uniformisierungen. Da die Kurven \tilde{L}_i und \tilde{E}_v unter geeigneten Decktransformationen punktweise festbleiben (eine Schleife um L'_i bzw. E'_v repräsentiert ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe von S^0 , außer vielleicht für $m_v=1$, vgl. 6.3 ff), kann man den relativen Proportionalitätssatz 1.2.4 in Verbindung mit 1.2.2 anwenden:

2.3.6. Satz. Y sei eine komplex-hyperbolische Uniformisierung der gewichteten Kurvenkonfiguration K . Dann gilt für $i=1, \dots, k$ und alle v mit $m_v > 1$

$$\text{Prop } \tilde{L}_i = 0$$

$$\text{Prop } \tilde{E}_v = 0.$$

Für $m_v = 1$ gilt immer noch

$$\text{Prop } \tilde{E}_v \geq 0.$$

□

2.3.7. Bemerkung. Man kann den Sachverhalt auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn Y ein Ballquotient ist, sind die Komponenten des Verzweigungsortes in Y eindimensionale Ballquotienten. Diese eindimensionalen Ballquotienten sind gerade durch $\text{Prop } C = 0$ charakterisiert.

2.4. INVARIANTEN DER UNIFORMISIERUNG (I)

Zunächst betrachten wir den Fall einer Konfiguration, die nur Doppelpunkte als Schnittpunkte hat. Da die Ergebnisse in 2.5 auf die Desingularisierung K' einer beliebigen Konfiguration angewandt werden sollen, wird hier auch $n_i = 1$ bzw. $x_i = 0$ zugelassen.

2.4.1. Lemma. K sei eine Konfiguration ohne singuläre Schnittpunkte (also $K' = K$), $\pi: Y \rightarrow S$ eine Uniformisierung.

Dann gilt für $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \tilde{L}_i^2 &= \frac{N}{n_i^2} L_i^2 = \frac{N}{n_i} (1 - x_i) L_i^2 \\ \text{(b)} \quad e(\tilde{L}_i) &= \frac{N}{n_i} \left(e(L_i) - \sum_{j \neq i} (L_i L_j) x_j \right) \\ \text{(c)} \quad \text{Prop } \tilde{L}_i &= \frac{N}{n_i} \left(\text{Prop } L_i - 2 L_i^2 x_i + \sum_{j \neq i} (L_i L_j) x_j \right) \end{aligned}$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen wie in [Hi₃]: Es ist

$n_i \tilde{L}_i = \pi^* L_i$, woraus sofort (a) folgt. (b) gilt nach der Hurwitz-Formel und Bemerkung 2.3.5. (c) ist dann evident. \square

2.4.2. Satz. $\pi: Y \rightarrow S$ sei eine Uniformisierung der gewichteten Kurvenkonfiguration K , die keine singulären Schnittpunkte enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad K_Y &= \pi^* \left(K_S + \sum_i x_i L_i \right) \\ \text{(b)} \quad e(Y) &= N \left(e(S) - \sum_i x_i \left(e(L_i) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (L_i L_j) x_j \right) \right) \\ \text{(c)} \quad \frac{1}{N} \text{Prop } Y &= \text{Prop } S + \frac{1}{2} \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{N} \text{Prop } \tilde{L}_i + \text{Prop } L_i \right) \end{aligned}$$

Beweis. (a) ergibt sich aus der Formel für das Verhalten des kanonischen Divisors unter Überlagerungen ([BPV], p.41) und 2.3.5. (b) ist wieder die Standardrechnung mit Eulercharakteristiken von Flächen (vgl. [Hi₃]):

$$e(Y) = N(e(S) - \sum_i e(L_i)) + \sum_i \frac{N}{n_i} e(L_i) \\ + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (N - \frac{N}{n_i} - \frac{N}{n_j} + \frac{N}{n_i n_j}) (L_i L_j)$$

(c) folgt daraus so:

$$\frac{\text{Prop } Y}{N} - \text{Prop } S = \frac{3}{N} e(Y) - \frac{1}{N} K_Y^2 - 3 e(S) + K_S^2 \\ = -3 \sum_i x_i \left(e(L_i) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (L_i L_j) x_j \right) \\ - 2 K_S \cdot \sum_i x_i L_i - \sum_i \sum_j (L_i L_j) x_i x_j \\ = \sum_i x_i \left(-3 e(L_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (L_i L_j) x_j - L_i^2 x_i - 2 K_S L_i \right) \\ = \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{2 \cdot N} \text{Prop } \tilde{L}_i - \frac{1}{2} \text{Prop } L_i - 3 e(L_i) - 2 K_S L_i \right) \\ = \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{2 \cdot N} \text{Prop } \tilde{L}_i - \frac{1}{2} \text{Prop } L_i + \text{Prop } L_i \right) \quad \square$$

2.4.3. Bemerkung. Das Interessante in diesem Abschnitt ist die Beziehung zwischen den Proportionalitätsausdrücken. Wie F. Hirzebruch bemerkte, gilt die Formel für beliebige kompakte orientierte reelle 4-Mannigfaltigkeiten: Es ist

$$3c_2 - c_1^2 = c_2 - 3 \text{sign}.$$

Die Berechnung der Eulercharakteristiken ist sowieso topologischer Natur, und der G-Signatursatz ([Hi₂]) liefert die Beziehung zwischen $\text{sign}(S)$ und $\text{sign}(Y)$.

2.5. INVARIANTEN DER UNIFORMISIERUNG (II)

2.5.1. Lemma. $\pi: Y \rightarrow S'$ sei eine Uniformisierung der gewichteten Kurvenkonfiguration K . Dann gilt für $i=1, \dots, k$ und $v=1, \dots, \ell$

$$(a) \quad \tilde{E}_v^2 = -N (y_v + 1)^2 = \frac{N}{m_v} (y_v + 1) = -\frac{N}{m_v^2}$$

$$(b) \quad \text{Prop } \tilde{E}_v = \frac{N}{m_v} \left(2y_v + \sum_i (L_i' E_v') x_i \right)$$

$$(c) \quad \text{Prop } \tilde{L}_i = \frac{N}{n_i} \left(\text{Prop } L_i + 2(\sigma_i - L_i^2) x_i + \sum_{j \neq i} (L_i' L_j') x_j + \sum_v (L_i' E_v') y_v \right).$$

Beweis durch Übertragen von 2.4.1: L_i in 2.4.1 ist durch L_i' bzw. E_v' zu ersetzen, x_i gegebenenfalls durch $y_v + 2$. Es ist $\text{Prop } E_v' = -4$, $L_i'^2 = L_i^2 - \sigma_i$, $\text{Prop } L_i' = \text{Prop } L_i - 2\sigma_i$.

$$\text{Prop } \tilde{E}_v = \frac{N}{m_v} \left(-4 + 2(y_v + 2) + \sum_j (L_j' E_v') x_j \right)$$

$$\text{Prop } \tilde{L}_i = \frac{N}{n_i} \left(\text{Prop } L_i - 2\sigma_i - 2(L_i^2 - \sigma_i) x_i + \sum_{j \neq i} (L_i' L_j') x_j + \sum_v (L_i' E_v') (y_v + 2) \right) \quad \square$$

2.5.2. Satz. Für eine Uniformisierung der gewichteten Kurvenkonfiguration K gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \text{Prop } Y - \text{Prop } S &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{N} \text{Prop } \tilde{L}_i + \text{Prop } L_i \right) + \frac{1}{2} \sum_v y_v \frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v \end{aligned}$$

Beweis. 2.4.2 (c) impliziert zusammen mit Prop S' =
Prop S + 4 l

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \text{Prop Y} - \text{Prop S} &= \frac{1}{2} \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{N} \text{Prop } \tilde{L}_i + \text{Prop } L_i - 2 \sigma_i \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_v (y_v + 2) \left(\frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v - 4 \right) + 4 l \\ &= \frac{1}{2} \sum_i x_i \left(\frac{n_i}{N} \text{Prop } \tilde{L}_i + \text{Prop } L_i \right) + \frac{1}{2} \sum_v y_v \frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v \\ &\quad - \sum_i x_i \sigma_i + \sum_v \left(\frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v - 4 - 2 y_v \right) + 4 l. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile verschwindet: Sie ist gleich

$$\begin{aligned} & - \sum_i x_i \sum_v (E'_v L'_i) + \sum_v \left(\frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v - 2 y_v \right) \\ &= \sum_v \left(- \sum_i (L'_i E'_v) x_i + \frac{m_v}{N} \text{Prop } \tilde{E}_v - 2 y_v \right) \\ &= 0 \quad \text{nach 2.5.1 (b)} \quad \square \end{aligned}$$

2.6. DER PROPORTIONALITÄTSSATZ

2.6.1. K sei wieder eine gewichtete Kurvenkonfiguration und $\pi: Y \rightarrow S'$ eine komplex-hyperbolische Uniformisierung. Nach 2.3.6 verschwinden alle Prop \tilde{L}_i und alle Prop \tilde{E}_v mit $m_v > 1$. Wenn der Sonderfall $m_v = 1$ nicht auftritt, bleibt in 2.5.2 die Gleichung

$$- \text{Prop S} = \frac{1}{2} \sum_i x_i \text{Prop } L_i.$$

Für den Fall Prop S = 0, etwa $S = \mathbb{P}^2$ oder eine abelsche Varietät, bleibt dann wegen $x_i \geq \frac{1}{2}$ nur noch Prop $L_i = 0$ übrig, also für den \mathbb{P}^2 nur eine Geradenkonfiguration. Auf einer abelschen Varietät kann man elliptische Kurven nehmen ([Hi₄]).

Wir beschränken uns ab jetzt auf diese Fälle:

2.6.2. Definition. Eine Kurvenkonfiguration K heißt proportional, wenn sowohl Prop S als auch alle Prop L_i verschwinden.

2.6.3. Korollar. $\pi: Y \rightarrow S'$ sei eine Uniformisierung der gewichteten proportionalen Kurvenkonfiguration K . Dann gilt

$$\text{Prop } Y = \frac{1}{2} \sum_i x_i n_i \text{ Prop } \tilde{L}_i + \frac{1}{2} \sum_v y_v m_v \text{ Prop } \tilde{E}_v. \quad \square$$

2.6.4. Proportionalitätssatz. $\pi: Y \rightarrow S'$ sei eine Uniformisierung der gewichteten proportionalen Kurvenkonfiguration K . Wenn dann die Überlagerungsfläche Y vom allgemeinen Typ ist, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Y ist ein Ballquotient
- (b) $\text{Prop } Y = 0$
- (c) Alle Prop \tilde{L}_i und alle Prop \tilde{E}_v verschwinden.

Beweis. (a) \Leftrightarrow (b) ist Yaus Satz 1.1.4. Wenn Y ein Ballquotient ist, verschwinden nach dem relativen Proportionalitätssatz 2.3.6 alle Prop \tilde{L}_i und alle Prop \tilde{E}_v mit $m_v > 1$, und die übrigen haben alle das selbe Vorzeichen. Nach unserer Formel 2.6.3 müssen daher auch diese Prop \tilde{E}_v verschwinden. und es folgt (c). (c) \Rightarrow (b) erhält man sofort aus 2.6.3. \square

2.6.5. Bemerkung. Nicht jeder Ballquotient kann als Uniformisierung einer Kurvenkonfiguration auftreten:

Y sei der "fake \mathbb{P}^2 " von D. Mumford $[\text{Mu}_2]$. Die Picardgruppe $\text{Pic } Y$ wird von einem Hyperebenenschnitt H mit $H^2=1$ erzeugt, der kanonische Divisor ist $3H$. Für eine Kurve $C \sim rH$ (in $\text{Pic } Y$) ist dann

$$\text{Prop } C = 3C^2 + K_Y C = 3r^2 H^2 + 3rH^2 = 3r(r+1),$$

was nur in trivialer Weise verschwinden kann. Die Komponenten der \tilde{L}_i in Y sind aber irreduzible reduzierte Kurven und daher niemals linear äquivalent zu 0 .

KAPITEL 3

DIE QUADRATISCHE FORM Prop_K UND VERALLGEMEINERTE VERZWEIGUNGSORDNUNGEN

Generalvoraussetzung: Im ganzen Kapitel sei K eine proportionale Kurvenkonfiguration auf einer Fläche S .

Die Proportionalitätsabweichung einer Uniformisierung Y von K wird in 3.1 und 3.2 als quadratische Form in den Gewichten $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell$ ausgedrückt. Dadurch lassen sich dann auch die Fälle behandeln, daß die Kurven \tilde{E}_ν auf Y exzeptionell (3.3) oder elliptisch (3.4) sind: Die Gewichte m_ν werden geeignet modifiziert, und man erhält den verallgemeinerten Proportionalitätssatz in 3.5.

3.1. DIE QUADRATISCHE FORM Prop_K

3.1.1. Definition. Auf dem $\mathbb{Q}^{k+\ell}$ mit den Koordinaten $\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_\ell$ (die wir uns manchmal als $(k+\ell)$ -Tupel, manchmal als Spaltenvektor vorstellen), definieren wir die Linearformen $G_1, \dots, G_k, P_1, \dots, P_\ell$ und die quadratische Form Prop_K zu der Kurvenkonfiguration K durch

- $G_i(\xi, \eta) = 2(\sigma_i - L_i^2)\xi_i + \sum_{j \neq i} (L_i' L_j') \xi_j + \sum_v (L_i' E_v') \eta_v$
- $P_v(\xi, \eta) = 2\eta_v + \sum_i (L_i' E_v') \xi_i$
- $\text{Prop}_K(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_i \xi_i G_i(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \sum_v \eta_v P_v(\xi, \eta)$

3.1.2. Bemerkung. Die G_i und P_v sowie Prop_K hängen nur von der ungewichteten Konfiguration K ab. Wenn Y eine Uniformisierung mit den Gewichten x_i und y_v ist, gilt nach 2.5 für alle i und v

$$\begin{aligned} \text{Prop } \tilde{L}_i &= (N/n_i) G_i(x, y) \\ \text{Prop } \tilde{E}_v &= (N/m_v) P_v(x, y) \\ \text{Prop } Y &= N \text{Prop}_K(x, y) . \end{aligned}$$

3.1.3. Prop_K ist gegeben durch die Matrix

$$Q = \frac{1}{2} (\text{Int}_K, -3\Delta_K) ,$$

wobei für eine Kurvenkonfiguration C die Schnittmatrix der Kurven aus C mit Int_C und die aus den Selbstschnittzahlen gebildete Diagonalmatrix mit Δ_C bezeichnet wird. Die Einträge von Q sind also die Schnittzahlen der verschiedenen Kurven in K' außerhalb der Hauptdiagonalen sowie die Selbstschnittzahlen dieser Kurven, allerdings multipliziert mit -2 , auf der Hauptdiagonalen.

3.1.4. Wohlbekannt für quadratische Formen - oder auch schnell nachzurechnen - sind die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \text{Prop}_K = G_i , \quad \frac{\partial}{\partial \eta_v} \text{Prop}_K = P_v .$$

Für eine komplex-hyperbolische Uniformisierung Y zu den Gewichten (x, y) verschwindet also nicht nur $\text{Prop}_K(x, y)$,

sondern nach dem Proportionalitätssatz 2.6.4 auch der Gradient, was die Ausnahmerolle dieser Flächen wieder einmal bestätigt.

3.1.5. In der Formulierung des Proportionalitätssatzes 2.6.4 kann also die Bedingung (c) durch die Bedingung

$$Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ersetzt werden.

3.1.6. Y sei eine Uniformisierung von K mit den Gewichten $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_\ell$. Dann unterscheidet sich das Schnittverhalten der Konfiguration $\tilde{K} = \{\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_k, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_\ell\}$ nicht wesentlich von dem der Konfiguration K' : Da $n_i \tilde{L}_i = \pi^* L'_i$ und $m_\nu \tilde{E}_\nu = \pi^* E'_\nu$ ist und die Schnittzahlen unter π mit dem Überlagerungsgrad N multipliziert werden, erhält man die Schnittmatrizen $\text{Int}_{\tilde{K}}$ und $\Delta_{\tilde{K}}$ aus denen von K' durch Multiplikation von links und rechts mit der Diagonalmatrix mit den Einträgen \sqrt{N}/n_i bzw. \sqrt{N}/m_ν . Es gilt also

3.1.7. Proposition. Die Matrizen

$$Q = \frac{1}{2} (\text{Int}_{K'}, -3 \Delta_{K'}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (\text{Int}_{\tilde{K}} - 3 \Delta_{\tilde{K}})$$

beschreiben äquivalente Bilinearformen.

□

3.2. DIE MATRIX Q' UND DIE PUNKTBEDINGUNGEN

3.2.1. Proposition. Für die Kurvenkonfiguration K gilt

$$\text{Prop}_K(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left({}^t \xi Q' \xi + \sum_{\nu} P_{\nu}(\xi, \eta)^2 \right)$$

mit

$$Q' := 3(\text{Int}_{L'} - 2\Delta_{L'}) - \text{Int}_K$$

wobei $\text{Int}_{L'}$ und $\Delta_{L'}$ die Schnitt- bzw. Selbstschnittmatrix der aus allen L'_i bestehenden Konfiguration L' auf S' bezeichnet.

Beweis. Im \mathbb{Q}^{k+l} ersetzen wir die Koordinaten η_{ν} durch $\zeta_{\nu} = P_{\nu}(\xi, \eta)$. Die Matrix Q wird in Blöcken der Kantenlängen k und l geschrieben als

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & 2I \end{pmatrix}$$

(I bezeichnet immer eine Einheitsmatrix), der Basiswechsel hat dann nach 3.1.1 die Matrix

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ {}^t B & I \end{pmatrix}.$$

Prop_K hat dann bezüglich der Koordinaten (ξ, ζ) die Matrix ${}^t_S Q S$. Man rechnet sofort nach, daß dies eine Blockmatrix der Form

$${}^t_S Q S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

mit $Q' = 2A - B \cdot {}^t_B$ ist. Nach 3.1.3 ist $(B \cdot {}^t_B)_{ij} = \sum (L'_i E'_{\nu})(L'_j E'_{\nu}) = L'_i L'_j - L'_i L'_j = (\text{Int}_K - \text{Int}_{L'})_{ij}$ und $A = \text{Int}_{L'} - 3\Delta_{L'}$. □

3.2.2. Korollar. Es gilt $Q \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$ genau dann, wenn
 $Q' \cdot \xi$ und alle $P_v(\xi, \eta)$ verschwinden.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Beweis gilt $Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow QS \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow {}^tSQS \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$ □

Den Proportionalitätssatz 2.6.4 können wir daher so formulieren:

3.2.3. Proportionalitätssatz. Y sei eine Uniformisierung
der gewichteten proportionalen Kurvenkonfiguration K . Wenn
Y eine Fläche vom allgemeinen Typ ist, sind dann die folgen-
den Aussagen äquivalent:

- (a) Y ist ein Ballquotient
- (b) $\text{Prop } Y = 0$
- (c) $Q' \cdot x$ und alle $P_v(x, y)$ verschwinden. □

3.2.4. Erfüllbarkeit der Punktbedingungen $P_v(x, y) = 0$.

Um zu einer gegebenen Konfiguration Gewichte mit $\text{Prop}_K(x, y)$ gleich 0 zu finden, bestimmt man also zunächst $\ker Q'$ und sucht darin Vektoren ξ , für die jede Komponente tatsächlich die Form $\xi_i = 1 - (1/n_i)$ für ein ganzzahliges $n_i \geq 2$ hat. Die Werte der η_v sind dann durch die "Punktbedingung" $P_v(\xi, \eta) = 0$ festgelegt, wobei jetzt zusätzlich $m_v = -1/(\eta_v + 1)$ eine positive ganze Zahl sein muß. Unter diesen Bedingungen gibt es nur endlich viele Typen von Schnittpunkten p_v , die die Punktbedingung erfüllen, wobei der "Typ" durch die Schnittvielfachheit r_v , das Gewicht m_v und die Gewichte n_i der Kurven durch p_v (bis auf Permutation der L_i) bestimmt ist.

Die Berechnung sämtlicher Typen (mit Hilfe eines Computers) ergab die folgende Tabelle:

Schnittvielfachheit	3	4	5	6	7	8	≥ 9
Anzahl der Typen	87	27	150	18	3	1	0

Daß die Punktbedingung schon $r_v \leq 8$ impliziert, ist natürlich auch ohne Computer sofort zu sehen: Es muß stets $\xi_i \geq \frac{1}{2}$ und $\eta_v \geq -2$ gelten.

3.3. NICHT-MINIMALE UNIFORMISIERUNGEN

$\pi: Y \rightarrow S'$ sei eine Uniformisierung der proportionalen Kurvenkonfiguration K mit den Gewichten $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l$.

3.3.1. Wie in 2.1.6 erwähnt, können über den E'_v durchaus exzeptionelle Kurven liegen. Das Aufblasen der entsprechenden p_v war dann überflüssig, und man sollte die Fläche Y^* betrachten, die man durch Niederblasen dieser exzeptionellen Kurven als Überlagerungsfläche der nur in den übrigen singulären Schnittpunkten aufgeblasenen Fläche S erhält. Nach einer Beobachtung von F. Hirzebruch bleiben die Formeln für die Proportionalitätsabweichungen weiter gültig, wenn man die Verzweigungsordnung in E'_v mit einem negativen Vorzeichen ansetzt:

3.3.2. Proposition. \tilde{E}_v besteht genau dann aus exzeptionellen Kurven, wenn

$$P_v(x, y^*) = 0$$

ist mit

$$y_\mu^* = \begin{cases} y_\mu & (\mu \neq v) \\ -2 - y_v & (\mu = v) \end{cases} \quad (\text{d.h. } m_v^* = -m_v).$$

In diesem Fall gilt für die Fläche Y^* , die man durch Niederblasen dieser exzeptionellen Kurven erhält, und für die Bilder \tilde{L}_i^* der \tilde{L}_i auf Y^*

$$\text{Prop } \tilde{L}_i^* = (N/n_i) G_i(x, y^*)$$

$$\text{Prop } Y^* = N \cdot \text{Prop}_K(x, y^*) .$$

Beweis. \tilde{E}_v ist genau dann exzeptionell, wenn $e(C) = -2C^2$ für jede Komponente C gilt, denn C^2 ist ja stets negativ (2.5.1). Dies ist äquivalent zu $\text{Prop } \tilde{E}_v = 4\tilde{E}_v^2$, also zu $2y_v + \sum (L_i' E_v') x_i = 4(y_v + 1)$ und damit zu

$$0 = 2(-2 - y_v) + \sum (L_i' E_v') x_i = P_v(x, y^*) .$$

Die Formeln für $\text{Prop } \tilde{L}_i^*$ und $\text{Prop } Y^*$ leitet man ähnlich aus denen in 3.1 her. □

3.3.3. Für $P_v(x, y^*) = 0$ bzw. für die Bedingung

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{m}$$

aus 2.1.6 gibt es die folgenden bekannten Lösungen:

n_1	n_2	n_3	m	m^*
2	2	n	$2n$	$-2n$
2	3	3	12	-12
2	3	4	24	-24
2	3	5	60	-60

Im Gegensatz zu 3.2.4 gibt es hier unendlich viele Typen.

3.4. ELLIPTISCHE KURVEN AUF EINER UNIFORMISIERUNG

3.4.1. Ballquotienten können keine elliptischen Kurven enthalten, da die Urbilder in B^2 selbst elliptisch oder affine Geraden sein müssten. Elliptische Kurven sind jedoch die natürlichen Kompaktifizierungskurven offener Ballquotienten (s. [He]). Es bietet sich also an, hier die Ergebnisse aus 1.3 ins Spiel zu bringen.

3.4.2. Proposition. Y sei eine Uniformisierung der gewichteten proportionalen Kurvenkonfiguration K. Dann besteht für ein $v \in \{1, \dots, l\}$ das Urbild \tilde{E}_v auf Y genau dann aus elliptischen Kurven, wenn

$$P_v(x, y^*) = 0$$

ist mit

$$y_\mu^* = \begin{cases} Y_\mu & (\mu \neq v) \\ -1 & (\mu = v) \end{cases} \quad (\text{d.h. } m_v^* = \infty).$$

In diesem Falle gilt für das Paar (Y, D) mit $D = \tilde{E}_v$

$$\begin{aligned} \overline{\text{Prop}}(Y, D) &= N \cdot \text{Prop}_K(x, y^*) \\ \overline{\text{Prop}} \tilde{L}_i &= (N / n_i) G_i(x, y^*). \end{aligned}$$

Beweis. Alles ist analog zum vorigen Abschnitt leicht nachzurechnen. □

3.4.3. $P_v(x, y^*) = 0$ ist äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} = 1,$$

wenn L_1, \dots, L_r die Kurven durch p_v sind. Hier gibt es die Fälle

$$r = 3$$

n_1	n_2	n_3
2	3	6
2	4	4
3	3	3

$$r = 4$$

n_1	n_2	n_3	n_4
2	2	2	2

3.5. VERALLGEMEINERTE VERZWEIGUNGSORDNUNGEN UND DER PROPORTIONALITÄTSSATZ

3.5.1. Definition. K sei eine proportionale Kurvenkonfiguration auf einer Fläche S .

(a) (Verallgemeinerte) Gewichte für K sind ganze Zahlen $n_i \geq 2$ ($i = 1, \dots, k$) und $m_v^* \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $m_v^* \neq 0$ ($v = 1, \dots, \ell$). Auch die rationalen Zahlen $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ und $y_v^* = -1 - \frac{1}{m_v^*}$ (was für $m_v^* = \infty$ selbstverständlich $y_v^* = -1$ bedeutet) werden als (verallgemeinerte) Gewichte bezeichnet. Falls m_v^* nicht in \mathbb{N} liegt, setzen wir stets voraus, daß $P_v(x, y^*) = 0$ ist.

(b) Eine (verallgemeinerte) Uniformisierung von K mit den verallgemeinerten Gewichten (n, m^*) ist eine Uniformisierung $\pi: Y \rightarrow S'$ (im Sinne von Definition 2.3.1) von K mit Gewichten (n, m) , für die gilt

$$\begin{aligned} m_v &= m_v^* && \text{(falls } m_v^* \in \mathbb{N}) \\ m_v &= -m_v^* && \text{(falls } m_v^* < 0) \\ m_v &\in \mathbb{N} \text{ beliebig} && \text{(falls } m_v^* = \infty). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu (n, m^*) bzw. (x, y^*) werden (n, m) bzw. (x, y) als physische Gewichte der Uniformisierung bezeichnet.

(c) Wenn Y eine verallgemeinerte Uniformisierung von K mit den Gewichten (n, m^*) ist, so wird die durch Niederblasen aller Komponenten der \tilde{E}_ν mit $m_\nu^* < 0$ entstehende Fläche mit Y^* , die Bilder der \tilde{L}_i auf Y^* mit \tilde{L}_i^* bezeichnet. D sei die aus allen \tilde{E}_ν mit $m_\nu^* = \infty$ bestehende Kurve auf Y^* . Dann nennen wir auch die Flächen Y^* und $Y^* - D$ sowie das Paar (Y^*, D) (verallgemeinerte) Uniformisierungen von K .

3.5.2. Proportionalitätssatz. (Y^*, D) sei eine Uniformisierung der proportionalen Kurvenkonfiguration K mit den verallgemeinerten Gewichten (x, y^*) . Wenn dann das Paar (Y^*, D) vom logarithmisch allgemeinen Typ ist, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $Y^* - D$ ist ein Ballquotient
- (b) $\overline{\text{Prop}}(Y^*, D) = 0$
- (c) $\text{Prop}_K(x, y^*) = 0$
- (d) Alle $\overline{\text{Prop}} \tilde{L}_i^*$ und alle $\text{Prop} \tilde{E}_\nu$ mit $m_\nu^* \in \mathbb{N}$ sind gleich 0
- (e) $Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y^* \end{pmatrix} = 0$
- (f) $Q' \cdot x$ und alle $P_\nu(x, y^*)$ verschwinden.

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) einerseits sowie (d), (e) und (f) andererseits ist nach den Berechnungen in diesem Kapitel klar. (a) \Leftrightarrow (b) ist Kobayashis Satz 1.3.8, (e) \Rightarrow (c) ist trivial nach Definition von Q , und (a) \Rightarrow (d) folgt aus dem logarithmischen relativen Proportionalitätssatz 1.3.9 analog zu 2.6.4. □

KAPITEL 4

UNIFORMISIERUNGEN VON GERADENKONFIGURATIONEN

Im ersten Abschnitt betrachten wir den kanonischen Divisor auf einer Uniformisierung einer Geradenkonfiguration genauer, um feststellen zu können, wann diese Überlagerungsfläche vom (logarithmisch) allgemeinen Typ ist. Danach werden mit Hilfe der Ergebnisse aus den ersten Kapiteln Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine gegebene Geradenkonfiguration Gewichte mit $\text{Prop}_K(x, y^*) = 0$ zuläßt.

4.1. DER KANONISCHE DIVISOR AUF EINER UNIFORMISIERUNG

In diesem Abschnitt sei K eine Geradenkonfiguration mit den Gewichten (x, y^*) und $\pi: Y \rightarrow S'$ eine Uniformisierung zu den physischen Gewichten (x, y) .

4.1.1. Definition. $\text{Pic}(\tilde{K})$ bezeichnet die von den Kurven \tilde{L}_i und \tilde{E}_v ($i=1, \dots, k$, $v=1, \dots, \ell$) erzeugte Untergruppe der Picardgruppe $\text{Pic}(Y)$ von Y .

4.1.2. Proposition. Für $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q}$ mit $\sum \alpha_i = 3$ sei

$$K' := \sum_i (x_i - \alpha_i) L_i' + \sum_v (3 + y_v - \sum_i (L_i' E_v') \alpha_i) E_v' \in \text{Pic}(S') \otimes \mathbb{Q}.$$

Dann ist $\pi^* K' \in \text{Pic}(\tilde{K}) \otimes \mathbb{Q}$ ein kanonischer Divisor von Y .

Beweis. K_Y wurde in 2.4.2 berechnet. Hier ist $S = \mathbb{P}^2$, also (mit rationalen Koeffizienten) $K_S = -\sum \alpha_i L_i$ und damit für die Aufblasung $\rho: S' \rightarrow S$

$$K_{S'} = -\sum_i \alpha_i \rho^* L_i + \sum_v E'_v = -\sum_i \alpha_i L'_i + \sum_v \left(1 - \sum_i (L'_i E'_v) \alpha_i\right) E'_v.$$

Zusammen mit

$$K_Y = \pi^* \left(K_{S'} + \sum_i x_i L'_i + \sum_v (2+y_v) E'_v \right) \quad (2.4.2)$$

folgt die Behauptung. □

4.1.3. Proposition. Wenn es rationale Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 3$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} \alpha_i &\leq x_i && (i = 1, \dots, k) \\ \sum_j (L'_j E'_v) \alpha_j &\leq 3 + y_v && (v = 1, \dots, \ell) \end{aligned}$$

gilt, wobei an mindestens einer Stelle die echte Ungleichung erfüllt ist, so hat Y einen effektiven plurikanonischen Divisor in $\text{Pic}(\bar{K})$. (Y^*, D) hat einen effektiven logarithmischen plurikanonischen Divisor, falls für die v mit $m_v^* = \infty$ ($y_v^* = -1$) lediglich die schwächere Bedingung

$$\sum_j (L'_j E'_v) \alpha_j \leq 2$$

erfüllt ist.

Beweis. Ein geeignetes Vielfaches eines kanonischen Divisors mit rationalen Koeffizienten ist ein plurikanonischer Divisor; die erste Aussage folgt daher sofort aus 4.1.2. Wenn man aus Y die Kurve D entfernt, ist

$$\bar{K}_{(Y,D)} = K_Y + D = K_Y + \pi^* \sum (-1 - y_v) E'_v,$$

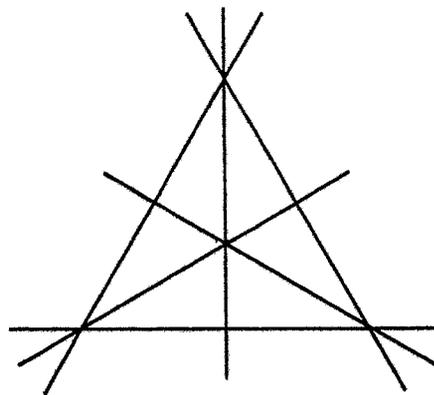
wobei über die v mit $m_v^* = \infty$ summiert wird. Der Koeffizient dieser E'_v in dem Divisor K' (4.1.2) ist dann entsprechend zu modifizieren. □

4.1.4. Korollar. Ein effektiver plurikanonischer Divisor existiert für jede Uniformisierung von K , falls K aus mehr als 6 Geraden besteht und alle Schnittvielfachheiten r_ν nicht größer als $\frac{k}{3}$ sind.

Beweis. Man nehme $\alpha_i = \frac{3}{k}$ in 4.1.3 und beachte, daß stets $x_i \geq \frac{1}{2}$ und $y_\nu \geq -2$ gilt. □

4.1.5. Beispiel.

K sei das vollständige Vierseit, bestehend aus den sechs Verbindungsgeraden von vier Punkten in allgemeiner Lage im \mathbb{P}^2 . K trägt die Bezeichnung $A_1(6)$ in B. Grünbaums Liste der reellen simplizialen Geradenkonfigurationen ([Grü]).



(a) Die Gewichte $n_1 = \dots = n_6 = m_1 = \dots = m_4 = 2$ bilden gerade einen Grenzfall: Hirzebruchs Uniformisierung ist eine K3-Fläche.

(b) Mit $n_1 = \dots = n_6 = 2$, $m_1 = \dots = m_4 = -4$ erhält man sogar $\text{Prop}_K(x, y^*) = 0$. Eine Uniformisierung Y^* dazu ist eine verzweigte Überlagerung des nicht aufgeblasenen \mathbb{P}^2 , und man sieht sofort, daß der kanonische Divisor (über \mathbb{Z}) trivial sein muß. Wegen $\text{Prop } Y^* = 0$ ist dann auch $c_2(Y^*) = 0$, und Y^* kann nur eine abelsche Varietät sein (Enriques-Kodaira-Klassifikation, [BPV] p. 188).

4.1.6. Proposition. Für eine Uniformisierung (Y^*, D) der Geradenkonfiguration K mit den Gewichten (x, y^*) gilt

$$\frac{1}{N} \bar{c}_1^2(Y^*, D) = \left(\sum_i x_i - 3 \right)^2 - \sum_v \left(3y_v + 3 - P_v(x, y) \right)^2,$$

wobei die hintere Summe über alle v mit $m_v^* = m_v \in \mathbb{N}$ läuft.

Insbesondere ist für $m_v^* = \infty$ das Ergebnis unabhängig von der physischen Verzweigungsordnung m_v .

Beweis. Wir berechnen den Divisor K' aus 4.1.2 noch einmal:

$$\begin{aligned} K' &= \rho^* K_S + \sum_v E'_v + \sum_i x_i L'_i + \sum_v (y_v + 2) E'_v \\ &= \rho^* K_S + \sum_i x_i \left(\rho^* L_i - \sum_v (L'_i E'_v) E'_v \right) + \sum_v (y_v + 3) E'_v \\ &= \rho^* \left(K_S + \sum_i x_i L_i \right) + \sum_v \left(y_v + 3 - \sum_i (L'_i E'_v) x_i \right) E'_v \end{aligned}$$

Der erste Summand ist linear äquivalent zu $\rho^*((-3 + \sum_i x_i)H)$

für eine Gerade H im \mathbb{P}^2 , die Koeffizienten in der zweiten Summe sind gleich $3y_v + 3 - P_v(x, y)$. Da $c_1^2(Y) = K_Y^2 = N \cdot K'^2$ ist, gilt die Behauptung also im Fall $(Y^*, D) = (Y, \emptyset)$.

Beim Niederblasen einer exzeptionellen Kurve erhöht sich c_1^2 um 1, für jedes \tilde{E}_v mit $m_v^* < 0$ ist c_1^2 daher um die Anzahl der Komponenten, d.h. um $-\tilde{E}_v^2 = N(y_v + 1)^2$ (2.5.1), zu vergrößern.

Der Summand zum Index v in der oben hergeleiteten Formel für $c_1^2(Y)/N$ ist aber gerade

$$\begin{aligned} -(3y_v + 3 - P_v(x, y))^2 &= -(3y_v + 3 - P_v(x, y^*) + 2y_v^* - 2y_v)^2 \\ &= -(3y_v + 3 - 0 - 4 - 2y_v - 2y_v)^2 = -(-y - 1)^2, \end{aligned}$$

so daß der Beitrag in der korrigierten Summe verschwindet.

$\bar{c}_1^2(Y^*, D)$ ist nach 1.3.3 gleich $(K_{Y^*} + D)^2$, wobei alle Komponenten von D glatte elliptische Kurven sind, so daß also

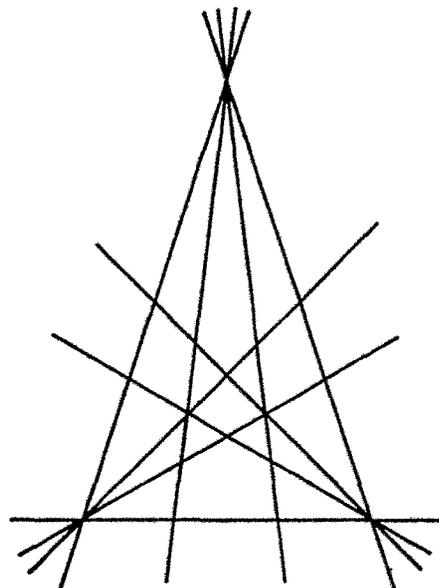
$(K_{Y^*} + D)^2 = K_{Y^*}^2 - D^2$ ist. Zur Korrektur der Formel ist der Summand zu einem solchen v daher ebenfalls um $-\tilde{E}_v^2/N = (y_v + 1)^2$ zu erhöhen. Wie oben tritt auch dieser Summand in der korrigierten Summe nicht mehr auf. \square

4.1.7. Bemerkung. Die Propositionen in diesem Abschnitt liefern hinreichende Kriterien dafür, daß (Y^*, D) vom logarithmisch allgemeinen Typ bzw. minimal ist (exzeptionelle Kurven liegen in jedem effektiven (logarithmisch) plurikanonischen Divisor). Daß Y stets minimal ist, kann man schon wegen der möglichen negativen Gewichte nicht erwarten; z.B. können beim vollständigen Vierseit (4.1.5, 5.1) exzeptionelle Kurven über den Geraden liegen. Das passiert auch bei dem folgenden Beispiel:

4.1.8. Gegenbeispiel.

K sei eine Konfiguration aus 9 Geraden mit 12 Doppel-, 2 Tripel- und 3 Vierfachpunkten mit dem in der Zeichnung angegebenen Schnittverhalten.

Mit $n_i = n_j$ für alle i, j und $m_v = 1$ für die Vierfachpunkte liegen über den äußeren Geraden in jeder Uniformisierung exzeptionelle Kur-



ven. Wenn $m_v \geq 2$ für die Tripelpunkte gilt, gibt es einen effektiven plurikanonischen Divisor auf jeder Uniformisierung ($\alpha_i = \frac{1}{2}$ für die inneren, 0 für die äußeren Geraden (4.1.2))

4.2. HYPERBOLISCHE UND
QUASI-HYPERBOLISCHE KONFIGURATIONEN

4.2.1. Definition. Gewichte (x, y^*) für eine Geradenkonfiguration K heißen quasi-hyperbolisch, wenn $\text{Prop}_K(x, y^*)$ gleich 0 ist. Wenn zusätzlich jede Uniformisierung (Y^*, D) zu diesen Gewichten vom logarithmisch allgemeinen Typ ist, heißen sie hyperbolisch. Die Konfiguration heißt (quasi-)hyperbolisch, wenn (quasi-)hyperbolische Gewichte für sie existieren.

4.2.2. Bemerkungen.

- (a) Nach dem Proportionalitätssatz 3.5.2 ist jede Uniformisierung Y^*-D zu hyperbolischen Gewichten komplex-hyperbolisch, d.h. ein Ballquotient.
- (b) Die Existenz einer Uniformisierung wird in der Definition nicht vorausgesetzt.
- (c) Hinreichend dafür, daß die quasi-hyperbolischen Gewichte (x, y^*) hyperbolisch sind, ist nach 1.3.5 die Existenz eines effektiven logarithmisch plurikanonischen Divisors (4.1.3, 4.1.4) mit positiver Selbstschnittzahl (4.1.6). Die Kriterien in 4.1 sind lediglich Bedingungen an (x, y^*) , die Existenz einer Uniformisierung ist nicht erforderlich.
- (d) Daß $\bar{\kappa}(Y^*, D) = 2$ für alle Uniformisierungen gefordert wird, ist keine Einschränkung: Zu je zwei Uniformisierungen existiert eine dritte, die die beiden unverzweigt überlagert (6.4.5). Unter unverzweigten Überlagerungen ist aber die Kodaira-Dimension invariant ([Ii₂], Thm. 11.10).

4.2.3. Bemerkung. Eine gegebene Geradenkonfiguration kann nach 3.5.2 folgendermaßen auf die Existenz (quasi-)hyperbolischer Gewichte überprüft werden:

- (1) Die Matrix Q' muß einen nichttrivialen Kern haben.
- (2) In $\ker Q'$ sind Vektoren (x_1, \dots, x_k) zu finden, deren Komponenten x_i die Form $1 - \frac{1}{n_i}$ für ein ganzzahliges $n_i \geq 2$ haben.
- (3) Für ein solches x müssen die durch die Punktbedingung $P_v(x, y^*) = 0$ eindeutig bestimmten y_v^* die Form $-1 - \frac{1}{m_v^*}$ für ein $m_v^* \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ haben.

Diese (x, y^*) sind dann quasi-hyperbolische Gewichte für K . Unsere Bedingung 4.2.2 (c) dafür, daß diese Gewichte dann auch hyperbolisch sind, ist zwar nur hinreichend, genügt aber für unsere Zwecke.

Aus 3.2.1 ergibt sich sofort

4.2.4. Proposition. Für eine Geradenkonfiguration K hat die Matrix Q' die Form

$$Q' = 3Q'' - U$$

mit

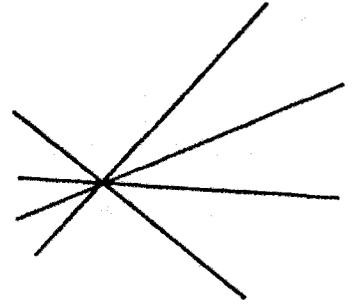
$$Q''_{ij} = \begin{cases} \sigma_i - 1 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } L_i \cap L_j \text{ Doppelpunkt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $U_{ij} = 1$ für alle i und j .

(σ_i ist die Anzahl der singulären Schnittpunkte auf L_i .)

4.2.5. Beispiele.

(a) Büschel. $k \geq 3$ Geraden gehen durch einen Punkt. Hier ist $Q'' = 0$, und die Eigenwerte von $Q' = -U$ sind 0 ($(k-1)$ -fach) und $-k$. Da der Kern von Q' durch $\sum x_i = 0$ charakterisiert ist, gibt es keine quasi-hyperbolischen Gewichte.



(b) Fast-Büschel. Von $k \geq 4$ Geraden gehen genau $k-1$ durch einen Punkt. Hier ist

$$Q'' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad Q' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

die Eigenwerte von Q' sind 0 ($(k-1)$ -fach) und $-(k+3)$ (zum Eigenvektor $(-2, 1, \dots, 1)$). Der Kern wird beschrieben durch

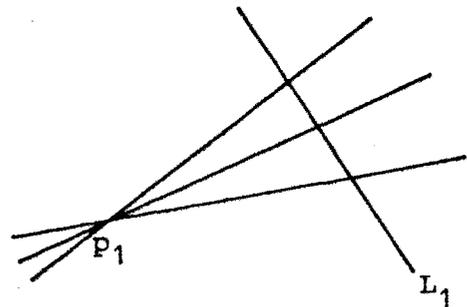
$$2x_1 - x_2 - \dots - x_k = 0,$$

und wenn die x_i Gewichte sein

sollen, folgt daraus wegen $\frac{1}{2} \leq x_i < 1$ schon $k=4$. Für die n_i heißt das

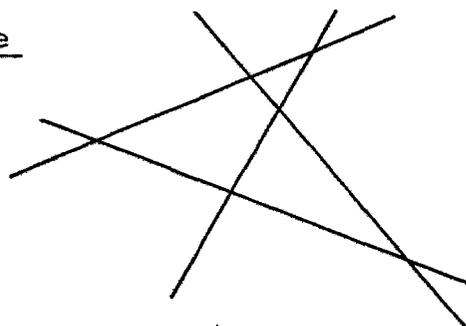
$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 + \frac{2}{n_1},$$

und die Punktbedingung sieht genauso aus, nur mit $-m_1^*$ an der Stelle von n_1 . Wir erhalten daher genau die Fortsetzungen der in 2.1.6 beschriebenen Überlagerungen von \mathbb{C}^2 auf die ganze projektive Ebene als Uniformisierungen, und man überlegt sich leicht, daß Y^* stets der \mathbb{P}^2 ist.

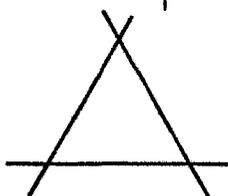


(c) k Geraden in allgemeiner Lage $(k \geq 2)$

$$Q' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & -4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & -4 \end{pmatrix}$$



hat die Eigenwerte -6 ($(k-1)$ -fach) zu den Eigenvektoren $(1, -1, 0, \dots, 0)$ usw. sowie $2k-6$ zum Eigenvektor $(1, \dots, 1)$. Quasi-hyperbolische Gewichte gibt es daher nur für $k = 3$, und es muß $x_1 = x_2 = x_3 = 1 - \frac{1}{n}$ gelten. In diesem Falle ist



$$\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^n : z_1^n : z_2^n]$$

eine Uniformisierung.

(d) Vollständiges Vierseit. (4.1.5)

Hier gibt es eine Menge hyperbolischer Gewichte, die alle in 5.1 aufgelistet werden. Der eine Fall quasi-hyperbolischer Gewichte wurde bereits in 4.1.5 erwähnt.

(e) Gegenbeispiel 4.1.8. Während (a) (b) (c) Extremfälle sind und (d) ein positiv semidefinites Q' und viele hyperbolische Gewichte liefert, ist dies sozusagen ein alltägliches Beispiel. Die Berechnung der Eigenwerte von Q' ergibt $-3, -3, -3, 0, 3, 6, 6, 6, 6$, und der Kern wird von dem Vektor $(1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ erzeugt, wobei die Einsen den äußeren Geraden (Zeichnung in 4.1.8) entsprechen. Es gibt also keine quasi-hyperbolischen Gewichte.

Mit den Ungleichungen $\frac{1}{2} \leq x_i < 1$ und $-2 \leq y_v \leq -\frac{1}{2}$ lassen sich aus dem Proportionalitätssatz viele Bedingungen für quasi-hyperbolische Konfigurationen herleiten. Daß die Schnitt-

vielfachheit r_v höchstens 8 sein darf, wurde bereits erwähnt (3.2.4). Speziell für Geradenkonfigurationen gilt außerdem:

4.2.6. Proposition.

(a) Bis auf das Dreieck und das Fast-Büschel aus vier Geraden gibt es keine quasi-hyperbolischen Konfigurationen, die eine Gerade L_i mit $\sigma_i < 2$ enthalten.

(b) Die beiden in (a) genannten Konfigurationen und das vollständige Vierseit sind die einzigen quasi-hyperbolischen Konfigurationen aus nicht mehr als sechs Geraden.

(c) Für jede Gerade L_i mit $\sigma_i \neq 0$ in einer quasi-hyperbolischen Konfiguration gilt

$$(r+1) \sigma_i \geq k-3,$$

wobei r die höchste Schnittvielfachheit auf L_i ist.

Beweis. Zunächst (c): Aus $G_i(x, y^*) = 0$ folgt (3.1, 2.2)

$$0 \geq 2(\sigma_i - 1) \frac{1}{2} + \tau_i^{(2)} \frac{1}{2} + \sigma_i (-2) = \frac{1}{2} \tau_i^{(2)} - \sigma_i - 1,$$

und einfaches Abzählen der Geraden ergibt

$$\tau_i^{(2)} + \sigma_i (r-1) \geq k-1.$$

Zu (a): Falls ein σ_i verschwindet, folgt aus $G_i(x, y^*) = 0$ sofort $k=3$ oder $k=4$. Dafür bleiben dann nur noch die angegebenen Fälle übrig. Wenn L_i genau einen singulären Schnitt Schnittpunkt, etwa mit Vielfachheit r , enthält, folgt für die Anzahl der Doppelpunkte $1 \leq \tau_i^{(2)} \leq 4$. Für K gibt es dann nicht mehr viele Möglichkeiten, und man kann alle Fälle bis auf $\tau_i^{(2)} = 1$ ausschließen. Dann muß K aber ein Fast-Büschel sein, nach 4.2.5 (b) mit $k=4$. Durch Betrachten aller sonst noch möglichen K folgt dann auch (b). \square

4.3. HOMOGENE KONFIGURATIONEN UND KONSTANTE GEWICHTE

4.3.1. Nach 4.2.4 ist die i -te Zeilensumme von Q'' gleich $\tau_i - 1$, die Zeilensumme von Q' also gleich $3\tau_i - 3 - k$. Der Vektor $(1, \dots, 1)$ (entsprechend $x_i = x_j$ für alle i, j) liegt daher genau dann im Kern, wenn dieser Ausdruck für alle i verschwindet.

4.3.2. Definition.

(a) Die Geradenkonfiguration K heißt homogen, wenn

$$3\tau_i = k + 3$$

für alle Geraden L_i in K gilt.

(b) Quasi-hyperbolische Gewichte (x, y^*) für eine Geradenkonfiguration K heißen konstant, wenn $x_i = x_j$ für alle i, j gilt. Das von i unabhängige n_i wird dann mit n , die nur von r_v und n abhängigen m_v^* werden mit $m_{(r)}^*$ bezeichnet.

4.3.3. Satz. Für eine Geradenkonfiguration K gibt es genau dann konstante quasi-hyperbolische Gewichte, wenn K homogen ist und die Vielfachheiten der singulären Schnittpunkte von K nur die Werte $r = 3, 4, 5, 6, 8$ annehmen. Diese Gewichte sind charakterisiert durch

$$\frac{2}{m_{(r)}^*} + \frac{r}{n} = r - 2 \quad .$$

(Alle Lösungen stehen in der nachfolgenden Tabelle.)

Beweis. Die Gleichung ist äquivalent zu $P_v(x, y^*) = 0$. □

4.3.4. Tabelle.

$m_{(r)}^*$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=8$
$n=2$	-4	∞	4	2	1
$n=3$	∞	3	-	1	-
$n=4$	8	2	-	-	-
$n=5$	5	-	1	-	-
$n=6$	4	-	-	-	-
$n=9$	3	-	-	-	-

$m_{(r)}^*$ in Abhängigkeit von n und r bei konstanten quasi-hyperbolischen Gewichten (4.3.2). K läßt genau dann n als konstantes Gewicht zu, wenn in der entsprechenden Zeile der Tabelle für jede in K vorkommende Schnittvielfachheit r ein Wert $m_{(r)}^*$ eingetragen ist.

4.3.5. Alle bekannten homogenen Konfigurationen sind im Kapitel 5 aufgelistet. An den Beispielen erkennt man auch, daß die Typen der Schnittpunkte von Gerade zu Gerade wechseln können, obwohl ihre Anzahl gleich bleibt (Ceva($r,3$), erweiterte Hesse-Konfiguration).

Wenn $\ker Q'$ nur aus der Diagonalen $Q \cdot (1, \dots, 1)$ besteht, kommen keine weiteren quasi-hyperbolischen Gewichte vor. Der Kern kann aber durchaus mehrdimensional sein, und dann gibt es unter Umständen auch nicht-konstante quasi-hyperbolische Gewichte für K .

4.3.6. Proposition. K sei eine homogene Konfiguration.

(a) Wenn $\ker Q''$ mit $\{\xi \in Q^k: \sum \xi_i = 0\}$ trivialen Durchschnitt hat, gibt es keine nicht-konstanten quasi-hyperbolischen Gewichte für K .

(b) Wenn für alle i gilt

$$6 \tau_i^{(2)} < k \quad \text{bzw.} \quad 6 \tau_i^{(2)} \leq k ,$$

so ist Q'' positiv (semi-)definit.

Beweis. (a): H sei die Hyperebene, die durch $\sum \xi_i = 0$ gegeben ist, $\psi: Q^k \rightarrow Q^k$ die Orthogonalprojektion auf H (bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts). Für $\xi \in Q^k$ gilt dann $Q'\xi = Q'\psi(\xi) = 3Q''\psi(\xi) + U\psi(\xi) = 3Q''\psi(\xi)$.

(b): Nach dem Satz von Gerschgorin liegen die Eigenwerte einer Matrix $A = (a_{ij})$ über den komplexen Zahlen in der Vereinigung aller Kreise mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ in der komplexen Ebene. In unserem Falle gilt

$$\begin{aligned} Q''_{ii} - \sum_{j \neq i} Q''_{ij} &= \sigma_i - 1 - \tau_i^{(2)} = \tau_i - \tau_i^{(2)} - 1 - \tau_i^{(2)} \\ &= \frac{k}{3} - 2\tau_i^{(2)} . \end{aligned}$$

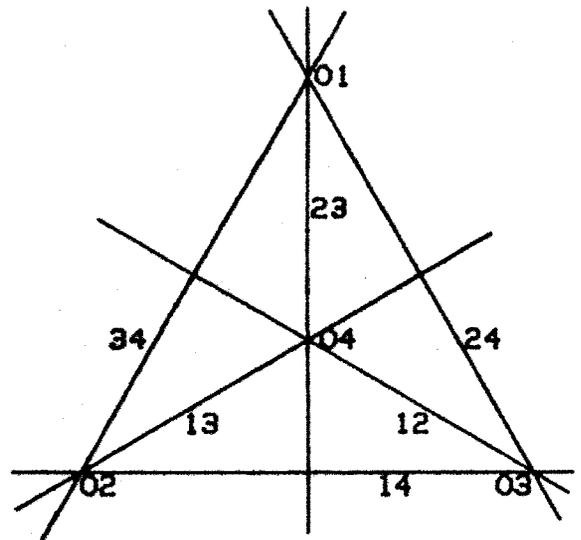
□

KAPITEL 5

BEISPIELE

5.1. DAS VOLLSTÄNDIGE VIERSEIT

5.1.1. Die Geraden und die singulären Schnittpunkte des vollständigen Vierseits werden mit ungeordneten Paaren ij ($0 \leq i, j \leq 4, i \neq j$) bezeichnet, die Gewichte dazu mit n_{ij}^* . In der Tat kann man in der Konfiguration K' , die ja aus dem vollständigen Vierseit K durch Aufblasen der vier Tripelpunkte entsteht, die transformierten Geraden und die exzeptionellen Kurven nicht mehr unterscheiden: K' besteht aus 10 (-1) -Kurven L'_{ij} , und L'_{ij} und L'_{rs} schneiden sich genau dann, wenn i, j, r, s paarweise verschieden sind.



5.1.2. Zwei Sätze von Gewichten für K , die sich nur durch eine Permutation von $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ unterscheiden, liefern die selbe gewichtete Konfiguration K' : Durch Aufblasen der Eckpunkte O_1, O_2, O_3 (s. Zeichnung) und Niederblasen der Ver-

bindungsgeraden $L'_{14}, L'_{24}, L'_{34}$ erhält man wieder den \mathbb{P}^2 mit der (bis auf Automorphismen des \mathbb{P}^2 eindeutig bestimmten) Konfiguration K , wobei aber die Indices 0 und 4 vertauscht sind. Analog realisiert man die Transpositionen (01), (02), (03), und diese vier erzeugen die symmetrische Gruppe.

5.1.3. Auch die Proportionalitätsbedingungen werden symmetrisch: Die Linearform G_{ij} bzw. P_{ij} verschwindet genau dann, wenn

$$\frac{2}{n_{ij}^*} + \sum_{rs} \frac{1}{n_{rs}^*} = 1$$

gilt, wobei die Summe über alle rs mit $\{r,s\} \cap \{i,j\} = \emptyset$ läuft.

5.1.4. Im Prinzip kann man alle 10-Tupel von Zahlen n_{ij}^* in $(\mathbb{Z} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ bestimmen, die die Gleichungen in 5.1.3 erfüllen. Es ergeben sich (s. 6.2) bis auf Permutationen von $\{0,1,2,3,4\}$ 37 verschiedene Lösungen, von denen eine aus einer ganzen abzählbaren Serie besteht. Diese Serie und acht weitere Lösungen liefern aber keine Gewichte für K , weil die Besonderheiten $n_{ij}^* = 1$, $n_{ij}^* = \infty$, $n_{ij}^* < 0$ nicht getrennt auftreten. Außer dem in 4.1.5 erwähnten Fall quasi-hyperbolischer Gewichte

$$n_{ij}^* = 2 \quad (i,j > 0), \quad n_{0j}^* = -4 \quad (j = 1, \dots, 4)$$

bleiben dann noch 27 Fälle, die alle in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Die Lösungen mit den Nummern 2 und 6 sind strenggenommen keine Gewichte für das vollständige Vierseit, da die drei Kurven mit Gewicht ∞ zwar disjunkt sind, aber durch keine Permutation gleichzeitig mit exzeptionellen Kurven

zu Tripelpunkten von K identifiziert werden können. Alle Formeln sind hier aber so symmetrisch, daß sie auch für diese Fälle gelten.

5.1.5. Liste der hyperbolischen Gewichte.

Nr	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34	\bar{c}_2 / N
1	∞	∞	∞	∞	3	3	3	3	3	3	1 / 3
2	∞	∞	4	4	∞	4	4	4	4	2	3 / 8
3	-4	∞	∞	∞	4	4	4	2	2	2	3 / 16
4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	3 / 5
5	-6	-6	-6	∞	3	3	2	3	2	2	1 / 12
6	∞	∞	6	3	∞	6	3	6	3	2	1 / 3
7	∞	6	6	6	6	6	6	3	3	3	1 / 2
8	-6	∞	∞	6	6	6	3	3	2	2	1 / 4
9	8	8	8	8	4	4	4	4	4	4	9 / 16
10	-8	-8	-8	8	4	4	2	4	2	2	9 / 64
11	-4	8	8	8	8	8	8	2	2	2	9 / 32
12	9	9	9	3	9	9	3	9	3	3	13 / 27
13	-10	-10	-10	5	5	5	2	5	2	2	3 / 20
14	6	6	6	4	6	6	4	6	4	4	7 / 12
15	-12	-12	-12	4	6	6	2	6	2	2	7 / 48
16	-4	-12	-12	-12	3	3	3	2	2	2	1 / 12
17	-4	12	12	12	6	6	6	2	2	2	13 / 48
18	-6	12	12	4	12	12	4	3	2	2	7 / 24
19	12	12	6	6	6	4	4	4	4	3	13 / 24
20	-12	-12	12	12	6	3	3	3	3	2	7 / 24
21	-12	∞	6	6	12	4	4	3	3	2	17 / 48
22	12	12	12	4	6	6	3	6	3	3	1 / 2
23	∞	12	12	12	4	4	4	3	3	3	11 / 24
24	15	15	15	5	5	5	3	5	3	3	37 / 75
25	-18	-18	-18	3	9	9	2	9	2	2	13 / 108
26	-4	20	20	20	5	5	5	2	2	2	99 / 400
27	24	24	24	8	4	4	3	4	3	3	11 / 24

5.1.6. Für alle Uniformisierungen zu den in der Liste angegebenen Gewichten gilt nach Konstruktion $\overline{\text{Prop}}(Y^*, D) = 0$, so daß man die logarithmische Eulercharakteristik in der letzten Spalte mit der Formel für die Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors in 4.1.6 berechnen kann. All diese Werte sind positiv, und nach 4.1.3 existiert ein effektiver pluri-kanonischer Divisor auf Y (außer für $n_{ij}^* \leq 2$ für alle i, j , aber das taucht in der Liste nicht auf). Daher sind alle Uniformisierungen vom logarithmisch allgemeinen Typ (1.3.5) und damit Ballquotienten.

5.1.7. Uniformisierungen existieren für alle Gewichte in der Liste. Das beweist man mit Hilfe der Hypergeometrischen Differentialgleichung in zwei Variablen, deren Monodromie die gewünschten Überlagerungen liefert, s. 6.2.

5.1.8. In der Liste tauchen fünf Paare von engen Verwandten auf, die im wesentlichen die selben Uniformisierungen haben, nämlich die Gewichte mit den Nummern

$$1,5 \quad 4,13 \quad 9,10 \quad 12,25 \quad 14,15 .$$

Genaueres dazu findet sich in 5.2.3.

5.1.9. Die Matrix Q' hat einen vierdimensionalen Kern und 6 als doppelten Eigenwert. K ist homogen, nach der Tabelle 4.3.4 gibt es konstante Gewichte für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 9$, die natürlich in der Liste auftauchen. $n = 5$ ist eines der Beispiele von Hirzebruch $[Hi_3]$.

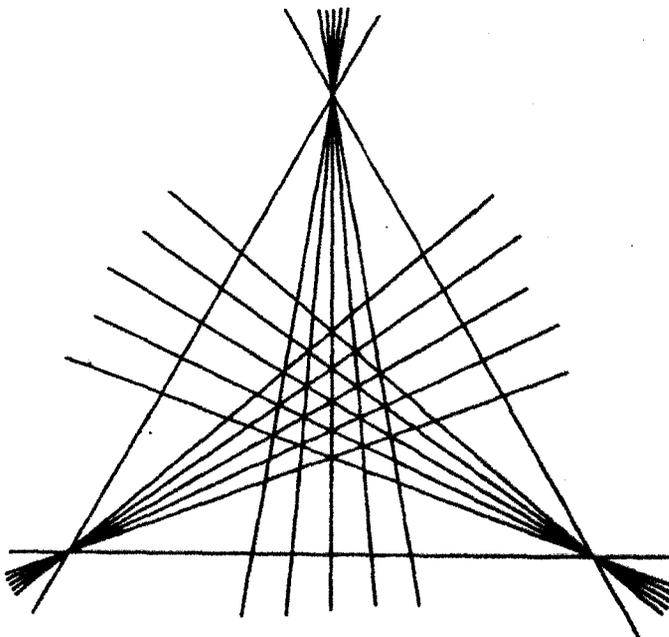
5.2. DIE CEVA-KONFIGURATIONEN

5.2.1. Aus dem vollständigen Vierseit kann man eine ganze Serie von Geradenkonfigurationen konstruieren: Homogene Koordinaten $[z_1:z_2:z_3]$ auf dem \mathbb{P}^2 seien so gewählt, daß die Geraden L_{i4} (Bezeichnungen wie in 5.1) durch $z_i = 0$ beschrieben werden und der "Mittelpunkt" p_{04} gleich $[1:1:1]$ ist. Die r^2 -blättrige Überlagerung

$$\varphi_r: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[w_1:w_2:w_3] \mapsto [z_1:z_2:z_3] \quad z_i = w_i^r$$

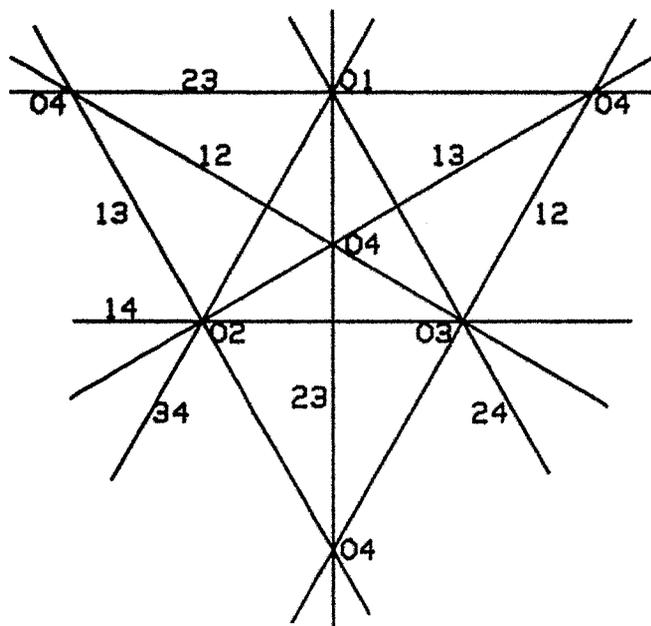
ist gerade über den L_{i4} mit Ordnung r verzweigt; die Urbilder der übrigen Geraden L_{12}, L_{23}, L_{13} zerfallen in je r Geraden durch die Punkte $\varphi_r^{-1}(p_{0i})$, $i=1,2,3$. Sie bilden die Konfiguration $\text{Ceva}(r) = \text{Ceva}(r,0)$, und wenn man noch eine, zwei oder drei der (reduzierten) Urbildgeraden $\varphi_r^{-1}(L_{i4})$ hinzunimmt, erhält man $\text{Ceva}(r,1)$, $\text{Ceva}(r,2)$ bzw. $\text{Ceva}(r,3)$.



Schematische Darstellung für $r=5$; im Zentrum liegen r^2 Tripelpunkte.

$\text{Ceva}(r)$ und $\text{Ceva}(r,3)$ sind homogen, die übrigen nicht. Bei $\text{Ceva}(2)$ (Vollständiges Vierseit) und $\text{Ceva}(2,1)$ muß man beachten, daß die drei Büschel aus je zwei Geraden bestehen und die Zentren der Büschel keine singulären Schnittpunkte sein müssen.

Für $r \geq 3$ sind die Konfigurationen nicht über den reellen Zahlen definiert, so daß sich nur eine schematische Darstellung zeichnen läßt. Ceva(2,3) ist dagegen eine reelle simpliziale Konfiguration mit der Bezeichnung $A_1(9)$ in der Grünbaum-Liste [Grü].



Die Nummern in der

Zeichnung entsprechen den Bildern im vollständigen Vierseit unter φ_2 , die Bündelzentren sind die Vierfachpunkte.

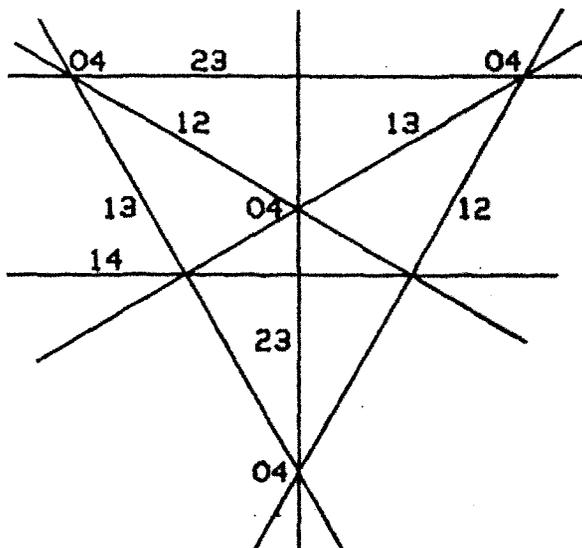
5.2.2. Die Matrix Q^n zu Ceva(r,t) hat für $r \geq 3$ die Form

1	1 . . . 1	1 . . . 1		} t
1			1 . . . 1	
1	r			
.	.			} 3r
.	.			
.	.	r		
1		r		
.		.		
1		.	r	
1			r	} 3r
.			.	
1			.	
.			.	} 3r
1			r	

Für Ceva(2,3) und Ceva(2,2) gilt das auch noch, aber für Ceva(2,1) und Ceva(2) sind nicht mehr alle Bündelzentren

singuläre Schnittpunkte, so daß die Matrix modifiziert werden muß. In allen Fällen ist Q' positiv semidefinit. Die Dimension des Kerns ist 4 für $\text{Ceva}(2)$, 3 für $\text{Ceva}(2,1)$ und ansonsten gleich $t+1$.

5.2.3. Im allgemeinen Fall $(r,t) \neq (2,0), (2,1)$ müssen quasi-hyperbolische Gewichte für $\text{Ceva}(r,t)$ für alle Geraden in einem der drei Büschel übereinstimmen, wie man leicht an Q' ablesen kann. Daher haben auch die r^2 Tripelpunkte alle das selbe Gewicht. Man rechnet leicht nach, daß man aus diesen Gewichten quasi-hyperbolische Gewichte für das vollständige Vierseit konstruieren kann: Die Diagonalen L_{12}, L_{23}, L_{13} und der Mittelpunkt p_{04} bekommen die Gewichte ihrer Urbilder und die übrigen Geraden das r -fache der Gewichte der Urbilder, wobei die $\varphi_r^{-1}(L_{i4})$, die nicht zu $\text{Ceva}(r,t)$ gehören, mit dem Gewicht 1 gezählt werden. Die Idee dabei ist, daß die Hintereinanderschaltung von φ_r mit einer Uniformisierung von $\text{Ceva}(r,t)$ eine Uniformisierung des vollständigen Vierseits mit diesen Gewichten sein sollte (genauer: 5.2.4).



Für $\text{Ceva}(2,1)$ erhält man, daß quasi-hyperbolische Gewichte für vier der Geraden, etwa die Urbilder von L_{12} und L_{13} unter φ_2 , übereinstimmen und auch die beiden Urbildgeraden von L_{23} das selbe Gewicht haben. Dadurch kann man wieder quasi-hyperbolische Gewichte für

das vollständige Vierseit konstruieren, und zwar erhält man für die fünf verschiedenen quasi-hyperbolischen Gewichte von $Ceva(2,1)$ die hyperbolischen Gewichte mit den Nummern 3, 11, 17 (doppelt) und 18 in der Liste 5.1.5. In allen Fällen bekommt der Punkt p_{01} ein negatives Gewicht, was der Tatsache entspricht, daß das Urbild in $Ceva(2,1)$ nur ein Doppelpunkt ist und daher nicht aufgeblasen wird.

Für das vollständige Vierseit $Ceva(2)$ gibt es fünf hyperbolische Gewichtungen, die unter dem oben beschriebenen Verfahren auf andere hyperbolische Gewichtungen des vollständigen Vierseits übergehen, nämlich genau die in 5.1.8 angegebenen Paare. Wie bei $Ceva(2,1)$ tauchen auch hier negative Gewichte auf, diesmal an drei Stellen. Der nicht-hyperbolische Sonderfall 4.1.5 (b) geht in sich selbst über.

Das alles legt die Vermutung nahe, daß die $Ceva(r,t)$ zwar interessante Konfigurationen sind, aber keine neuen Ballquotienten liefern. In der Tat kann man zeigen:

5.2.4. Satz. Zu allen quasi-hyperbolischen Gewichten für $Ceva(r,t)$ (mit Ausnahme des Sonderfalles 4.1.5 (b) für das vollständige Vierseit) gibt es einen Ballquotienten als Uniformisierung, der auch schon als Uniformisierung des vollständigen Vierseits auftritt. Insbesondere gibt es für jedes der in 5.1.8 angegebenen Paare von Gewichten für das vollständige Vierseit übereinstimmende Uniformisierungen.

Beweis. Zunächst der Fall $(r,t) \neq (2,0), (2,1)$. Nach 5.2.3 erhält man aus quasi-hyperbolischen Gewichten für $Ceva(r,t)$

hyperbolische Gewichte für das vollständige Vierseit K , zu denen es nach 6.2 eine Uniformisierung gibt. Die aufgeblasene projektive Ebene \tilde{S}' zu $\text{Ceva}(r,t)$ dient als Uniformisierung von K mit den Gewichten 1 (ausnahmsweise) für die Geraden L_{12}, L_{23}, L_{13} und den Mittelpunkt p_{04} sowie r für die übrigen Geraden und Punkte. Nach 6.4.5 gibt es eine gemeinsame Überlagerung \tilde{Y} von \tilde{S}' und der komplex-hyperbolischen Uniformisierung Y von K , die über Y unverzweigt ist und als Überlagerung von \tilde{S}' die gewünschten Verzweigungsordnungen hat. \tilde{Y} ist also die gesuchte komplex-hyperbolische Uniformisierung von $\text{Ceva}(r,t)$.

Für $\text{Ceva}(2,1)$ und $\text{Ceva}(2)$ läuft der Beweis genauso, nur muß man die Urbildkurven zu den Punkten mit negativen Gewichten, die den nicht-singulären Büschelzentren entsprechen, zuerst niederblasen. □

5.2.5. $\text{Ceva}(3)$ mit $n = m_{(3)} = 5$ ist Beispiel III in $[\text{Hi}_3]$. Der Kern von Q' ist eindimensional, so daß nur konstante Gewichte in Frage kommen, allerdings gleich sechs Fälle ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 9$), da $\text{Ceva}(3)$ nur Tripelpunkte hat. Diese Fälle ergeben die Nummern 16, 1, 27, 24, 22, 12 in der Liste 5.1.5 für das vollständige Vierseit. Für $n = 3$ ist danach \bar{c}_2/N gleich 3, und es gibt tatsächlich eine zyklische Uniformisierung vom Grad 3 (6.1.5), so daß wir einen offenen Ballquotienten der Eulercharakteristik 9 erhalten. Dies ist der niedrigste Wert für alle Beispiele, da die Überlagerungsgrade N meist sehr groß sind (wenn man sie überhaupt berechnen kann). $\text{Ceva}(8)$ mit $n = 2, m_{(3)} = -4, m_{(8)} = 1$ ist ein Beispiel für das Auftreten der höchstmöglichen Schnittvielfachheit 8.

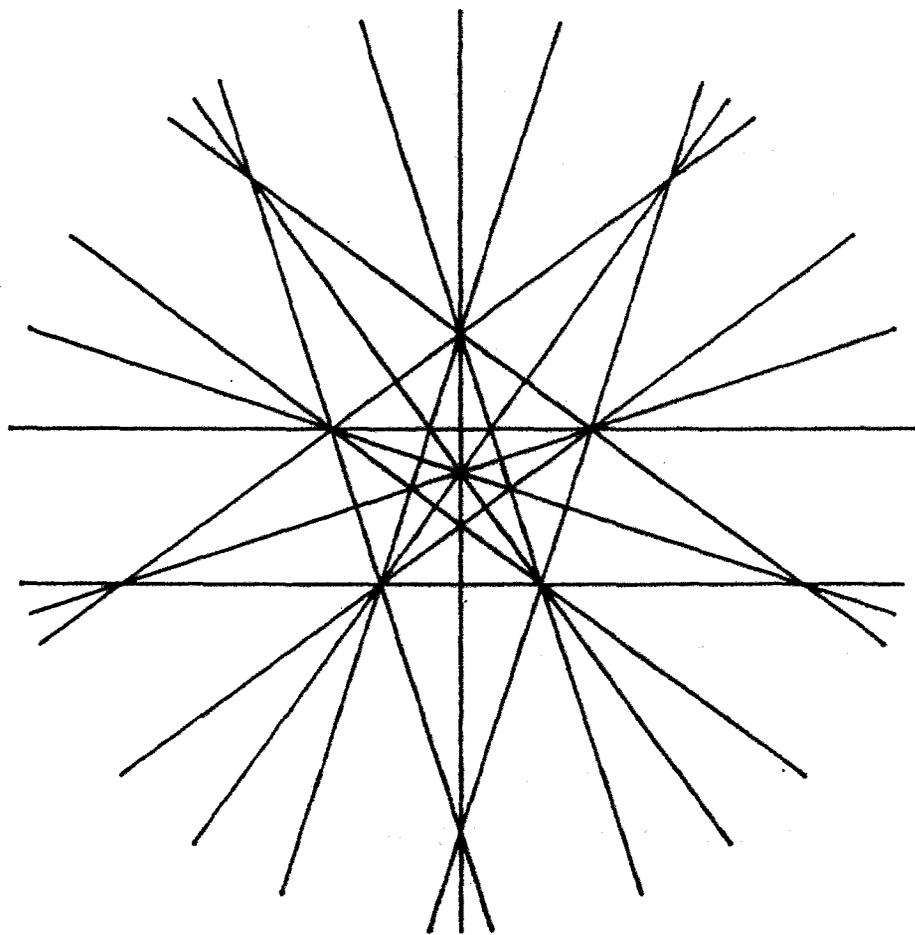
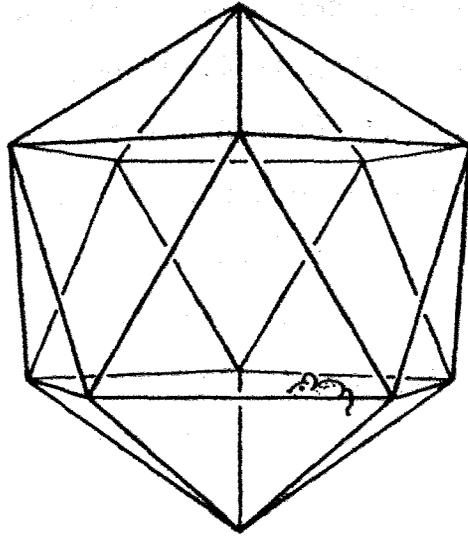
5.3. EXZEPTIONELLE KONFIGURATIONEN

5.3.1. Neben den Ceva-Serien sind fünf weitere hyperbolische Konfigurationen bekannt. Alle sind homogen, und alle sind Spiegelungsgruppen-Konfigurationen: Die Geraden sind die Bilder der Spiegelungsebenen einer irreduziblen Spiegelungsgruppe auf dem \mathbb{E}^3 . Diese Gruppen sind in [Sh-To] klassifiziert; neben den Serien, die $Ceva(r)$ und $Ceva(r,3)$ liefern, gibt es die exzeptionellen Fälle mit den Nummern 23 bis 27 in der Liste von Shephard und Todd. Die Konfigurationen wurden von Orlik und Solomon betrachtet ($[Or-So_1]$, $[Or-So_2]$).

5.3.2. In allen Fällen sind die Gewichte hyperbolisch, d.h. die Uniformisierungen sind tatsächlich Ballquotienten. Das ergibt sich aus 4.1.4 und 4.1.6, die Chernzahlen sind zusammen mit den kombinatorischen Daten in der Tabelle 5.3.3 am Ende des Abschnittes zusammengefaßt. Bis auf das Beispiel D (erweiterte Hesse-Konfiguration) kommen nur konstante Gewichte in Frage, da $r_i^{(2)} < k/6$ ist (4.3.6). Welche Gewichte dann tatsächlich hyperbolisch sind, liest man aus Tabelle 4.3.4 ab. Alle Matrizen Q' sind positiv semidefinit und haben (bis auf Beispiel D) einen eindimensionalen Kern. Die Matrix Q'' ist für alle Beispiele angegeben.

A. Ikosaeder-Konfiguration.

Sie ist als einzige der fünf Konfigurationen über \mathbb{R} definiert und wird daher auf der folgenden Seite gezeichnet.



Die 30 Kanten des Ikosaeders bestimmen 15 Großkreise auf der Sphäre, die das Ikosaeder umschreibt. Nach Identifikation antipodischer Punkte ergibt sich im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Konfiguration aus 15 Geraden mit je zwei Doppel-, zwei Tripel- und zwei Fünffachpunkten.

Der nebenstehende Computer-Ausdruck stellt die Matrix Q'' dar, die Nullen sind durch Punkte ersetzt. Die Eigenwerte von Q' kann man auch berechnen, man erhält 0, 6 (10-fach) und 15 (4-fach). Es gibt nur konstante hyperbolische Gewichte, und zwar für $n = 2$ und 5.

```

3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. 1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . 1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . 1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . 1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .
. . . . . 1 . . . . 1 . . . . 3 . . . . . 1 . . . . . 1 . . . . .

```

B. G_{168} -Konfiguration.

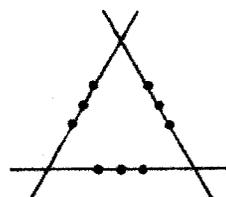
Felix Klein [K1] studierte die Operation der einfachen Gruppe der Ordnung 168 auf dem \mathbb{P}^2 . Die Gruppe hat 21 Elemente der Ordnung 2, deren Fixpunktmenge die Konfiguration bilden. Aus der Beschreibung in [K1] ersieht man leicht, daß nur Tripel- und Vierfachpunkte auftreten und die Gruppe transitiv auf der Konfiguration operiert, woraus dann $\tau_i^{(3)} = \tau_i^{(4)} = 4$ folgt. Das kann man übrigens auch aus den Tabellen von Orlik und Solomon [Or-So₂] ablesen.

Konstante hyperbolische Gewichte gibt es für $n = 2, 3, 4$. Q'' ist das 7fache der Einheitsmatrix.

C. Hesse-Konfiguration.

W sei die aus den 9 Wendepunkten bestehende Untergruppe einer glatten ebenen Kubik (mit additiver Gruppenstruktur). Im zugehörigen "Hesse-Büschel" aller Kubiken, die W enthalten, gibt es vier in jeweils drei Geraden zerfallende Kubiken, die dann die Hesse-Konfiguration bilden. Diese Situation wird in Kapitel 7 von [Br-Kn] ausführlich beschrieben.

Die Lage der drei Geraden einer der zerfallenden Kubiken zu den Wendepunkten kann man sich so vorstellen, wie es die nebenstehende Zeichnung andeutet.



Die Wendepunkte werden Vierfachpunkte der Konfiguration, die drei Ecken des Dreiecks bleiben Doppelpunkte. Drei Punkte von W liegen bekanntlich genau dann auf einer Geraden, wenn ihre Summe gleich 0 ist.

Anschaulicher kann man sich die Inzidenzstruktur so vorstellen: Die Punkte von W entsprechen den Punkten der affinen Ebene über dem Körper \mathbb{F}_3 , die Geraden der Konfiguration den Geraden in dieser affinen Ebene. Ein Büschel von drei parallelen Geraden in \mathbb{F}_3^2 entspricht einer der zerfallenden Kubiken, so daß wir uns im Unendlichen keinen Tripelpunkt, sondern drei Doppelpunkte denken müssen.

Die Matrix Q'' besteht aus vier Blöcken der Form

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

und ist daher positiv definit, wir erhalten also nur konstante hyperbolische Gewichte, und zwar für $n = 2, 3, 4$.

D. Erweiterte Hesse-Konfiguration.

Wir betrachten wieder das Hesse-Büschel aus Beispiel C. Wenn wir einen der neun Wendepunkte w als Nullelement auszeichnen, liegen die drei 2-Torsionspunkte einer glatten Kubik im Hesse-Büschel auf einer von der Kubik unabhängigen Geraden im \mathbb{P}^2 : Die 2-Torsionspunkte erhält man als Berührungspunkte der drei Tangenten an die Kubik, die durch w laufen. Deren Lage kann man aber (etwa mit der Beschreibung in [Br-Kn], Kap. 7) leicht bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir neun Geraden, die eine Ceva(3)-Konfiguration K_C bilden. Jede der Ceva-Geraden D_C trifft jede der vier zerfallenden Kubiken der Hesse-Konfiguration K_H in einem der Doppelpunkte und in einem weiteren Punkt auf der gegenüberliegenden Dreiecksseite. Die Vereinigung K der beiden Konfigurationen hat dann 36 Doppel-, 9 Vierfach- und 12 Fünffachpunkte. Es gibt zwei Arten von Geraden, nämlich

$$\begin{array}{lll} D_H: & \tau_i^{(2)} = 3 & \tau_i^{(4)} = 3 & \tau_i^{(5)} = 2 \\ D_C: & \tau_i^{(2)} = 4 & & \tau_i^{(5)} = 4 \end{array} .$$

Trotzdem ist K homogen.

K_C ist dual zur Hesse-Konfiguration: In K_H werden die Punkte mit \mathbb{F}_3^2 und die Geraden mit der Menge der affinen Geraden im \mathbb{F}_3^2 , also mit $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)^* - \{\infty\}$ indiziert, bei Ceva(3) ist es genau umgekehrt. Die Inzidenzrelationen sind genau wie in der affinen Ebene über \mathbb{F}_3 ; der Doppelpunkt von K_H , den man als "Schnittpunkt" der Geraden $ax+by=c$ und $ax+by=c'$ erhält, fällt in K mit dem Tripelpunkt $[a:b:c]$, $c'' \in \mathbb{F}_3$, $c'' \neq c, c'$ zusammen.

E. G_{360} -Konfiguration.

Analog zur G_{168} -Konfiguration wird auch diese durch eine Gruppenoperation definiert, diesmal durch die G_{360} (= alternierende Gruppe A_6), studiert von R. Fricke und F. Klein in [Fr-Kl], Anhang §16, p. 645. Die Gruppenoperation wird dort explizit durch Gleichungen angegeben; wieder sind alle 45 Geraden gleichberechtigt, und es gibt Schnittpunkte der Vielfachheiten 3,4,5. Daher ist $Q'' = 15 \cdot I$, und es kommt nur das konstante Gewicht $n=2$ in Frage.

5.3.3. Tabellen: Exzeptionelle Konfigurationen

A	Ikosaeder-Konfiguration	[Sh-To] Nr. 23
B	G_{168} -Konfiguration	[Sh-To] Nr. 24
C	Hesse-Konfiguration	[Sh-To] Nr. 25
D	Erweiterte Hesse-Konfiguration	[Sh-To] Nr. 26
E	G_{360} -Konfiguration	[Sh-To] Nr. 27

Anzahl der Geraden, singulären Schnittpunkte und r-fach-Punkte

	k	ℓ	t_2	t_3	t_4	t_5
A	15	16	15	10		6
B	21	49		28	21	
C	12	9	12		9	
D	21	21	36		9	12
E	45	201		120	45	36

Anzahl der Schnittpunkte pro Gerade (2 Typen bei D)

	τ_i	σ_i	$\tau_i^{(2)}$	$\tau_i^{(3)}$	$\tau_i^{(4)}$	$\tau_i^{(5)}$
A	6	4	2	2		2
B	8	8		4	4	
C	5	3	2		3	
D_H	8	5	3		3	2
D_C	8	4	4			4
E	16	16		8	4	4

Hyperbolische Gewichte und Typ der Uniformisierung

	n	$m_{(3)}^*$	$m_{(4)}^*$	$m_{(5)}^*$	\bar{c}_2 / N	Typ
A	2	-4		4	45 / 8	na
	5	5		1	39 / 5	a
B	2	-4	∞		75 / 4	na
	3	∞	3		100 / 3	K
	4	8	2		297 / 8	na
C	2		∞		3	K
	3		3		16 / 3	K
	4		2		21 / 4	na
D	2,2		∞	4	33 / 2	na
	2,3		∞	2	18	a
	3,9		3	1	52 / 3	a
	4,2		2	2	21	a
	4,6		2	1	18	a
E	2	-4	∞	4	120	na

Abkürzungen in der letzten Spalte:

K Kummer-Uniformisierung (6.1)

a sonstige abelsche Uniformisierung

na nicht-abelsche Uniformisierung

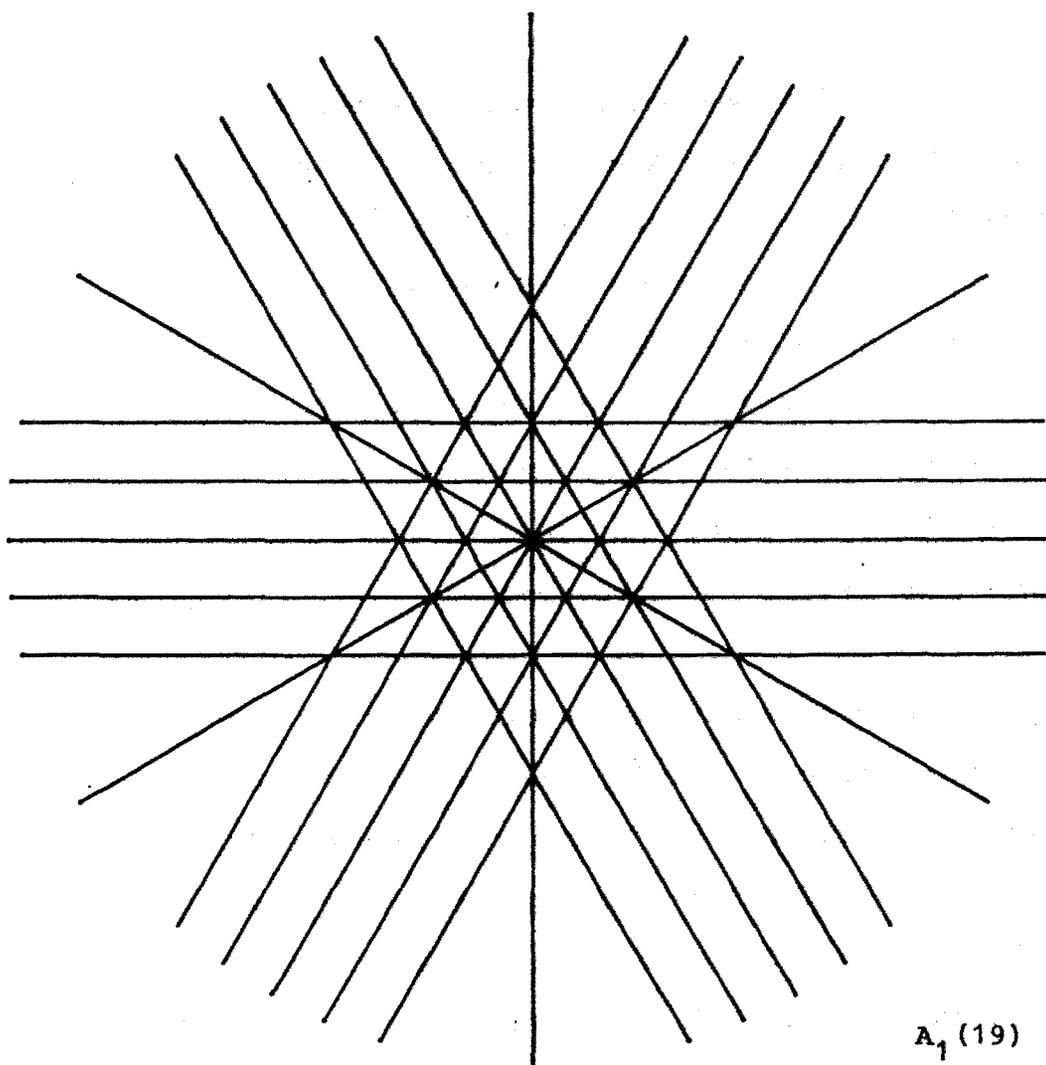
(Existenzbeweise in Abschnitt 6.6)

5.4. EINIGE NICHT-HYPERBOLISCHE KONFIGURATIONEN

5.4.1. Die bisher bekannten hyperbolischen Konfigurationen sind die Ceva(r, t) mit kleinem r (5.2) und die fünf exceptionellen Konfigurationen in 5.3. Für das Dreieck, das Fast-Büschel aus vier Geraden und das vollständige Vierseit Ceva(2) gibt es quasi-hyperbolische Gewichte, die nicht hyperbolisch sind (4.2.5, 4.1.5). Die bekannten homogenen Konfigurationen sind alle Ceva(r) und Ceva($r, 3$), die fünf exceptionellen Konfigurationen und das Dreieck. Ob dies wirklich alle Beispiele sind, ist unbekannt.

5.4.2. Höherdimensionale Spiegelungsgruppen liefern auch Geradenkonfigurationen: Auf jedem dreidimensionalen Durchschnitt von Spiegelungs-Hyperebenen bilden die Durchschnitte mit den übrigen eine Ebenenkonfiguration, die dann eine Geradenkonfiguration auf dem projektiven Raum definiert. Orlik und Solomon haben auch diese Konfigurationen betrachtet, siehe [Or-So₁], [Or-So₂]. Durch Vergleich mit der Grünbaum-Liste ergibt sich, daß auf diese Weise z.B. die Konfigurationen $A_1(19)$ und $A_3(19)$ in [Grü] aus der Weyl-Gruppe von E_8 entstehen ([Hi₃], 1.2). $A_1(19)$ ist auf der folgenden Seite gezeichnet, man muß allerdings die unendlich ferne Gerade hinzunehmen.

Die Matrix Q' zu $A_1(19)$ kann man leicht aufstellen. Sie ist positiv semidefinit (!) und hat einen eindimensionalen Kern, der aber keine Gewichte liefert, denn er wird erzeugt von einem Vektor (ξ_1, \dots, ξ_{19}) mit $\xi_i = 12$ für die unendlich ferne Gerade, 6 für die mittleren Geraden in den drei



Büscheln, 5 und 4 für die etwas weiter bzw. ganz außen liegenden Parallelen und 2 für die drei restlichen Geraden durch den Mittelpunkt. Der Quotient zweier ξ_i ist für zulässige Gewichte aber stets kleiner als 2. Die Situation für $A_3(19)$ ist analog.

5.4.3. Interessant ist die Beobachtung, daß Q' in den beiden eben betrachteten Beispielen positiv semidefinit ist und einen nichttrivialen Kern hat. Diese Eigenschaft zeichnet die

durch irreduzible Spiegelungsgruppen auf einem \mathbb{C}^q definierten Konfigurationen unter allen berechneten Beispielen aus.

5.4.4. Reduzible Spiegelungsgruppen auf dem \mathbb{C}^3 liefern gerade die Fast-Büschel und das Dreieck. Hier ist Q' negativ semidefinit mit nichttrivialem Kern (4.2.5). Außer für das Dreieck ist Prop_K dann indefinit, denn jeder singuläre Schnittpunkt gehört ja zu einem positiven Eigenwert (3.2).

5.4.5. Der Signaturtyp von Prop_K ist überhaupt recht interessant: Die Miyaoka-Yau-Ungleichung, die Proportionalitätsbedingungen an die Punkte und Geraden und die Tatsache, daß (im hyperbolischen Fall) mit Prop_K auch der Gradient verschwindet (3.1.4), könnten einen zu der Vermutung führen, daß die quadratische Form stets positiv semidefinit ist. Die Beispiele zeigen aber, daß genau das Gegenteil stimmt: Während in $[Hi_3]$ für den Fall konstanter Gewichte ein sehr konstruiert erscheinendes Gegenbeispiel von W. Meyer angegeben ist, erhält man für unseren Fall meist indefinite Formen. Einige Beispiele in der Grünbaum-Liste liefern positiv definite Formen ohne Kern.

5.4.6. Man könnte hinter den hyperbolischen Beispielen auch die regelmäßigen r -Gons mit sämtlichen Verbindungsgeraden und vielleicht auch Spiegelungsachsen vermuten ($r = 3, 4, 5$ tauchen auf), aber für $r = 6$ wird die quadratische Form positiv definit (mit Achsen) bzw. indefinit ohne Kern (ohne Achsen).

5.4.7. Es gibt auch hyperbolische "Konfigurationen", die

Ballquotienten liefern würden, wenn man sie nur im komplexen projektiven Raum realisieren könnte. Zum Beispiel gibt es eine Inzidenzstruktur aus 15 Geraden mit Schnittpunkten der Ordnung 2 und 4, die homogen ist und eine positiv semidefinite Matrix Q' hat. Wenn diese Struktur durch eine Geradenkonfiguration im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dargestellt werden kann, ist Hirzebruchs Kummer-Uniformisierung ein Ballquotient. Hirzebruch hat aber gezeigt, daß dies im Widerspruch zu Kobayashis Satz 1.3.8 steht.

5.5. ZUR GEOGRAPHIE DER CHERNZAHLEN

5.5.1. In der Einleitung wurde die Aufgabe formuliert, die Geographie der Chernzahlen zu untersuchen. Wir befinden uns am oberen Rand des in Frage kommenden Bereichs, nämlich auf der Geraden $c_1^2 = 3c_2$. Die Noethersche Formel impliziert, daß für alle Punkte auf dieser Geraden, die durch Flächen vom allgemeinen Typ, also durch Ballquotienten, realisiert werden können, c_2 durch 3 teilbar sein muß. Außerdem muß c_1^2 und damit c_2 stets positiv sein.

5.5.2. Der erste zulässige Punkt ist also $c_1^2 = 9$, $c_2 = 3$. Diese Werte werden gerade von Mumfords Beispiel $[\mu_2]$ angenommen.

5.5.3. Eine unverzweigte N -blättrige Überlagerung eines Ballquotienten ist ein Ballquotient mit den N -fachen Chernzahlen. Ein Beispiel mit $c_1^2 = 9$, $c_2 = 3$ und erster Bettizahl $b_1 \neq 0$ würde daher den gesamten zulässigen Teil der Geraden

liefern, denn dann gäbe es ja unverzweigte Überlagerungen beliebigen Grades. Mumfords Beispiel hat aber eine Torsionsgruppe als Fundamentalgruppe, so daß es zwar unendlich viele Punkte, aber eben nicht alle liefert.

5.5.4. Die kompakten komplex-hyperbolischen Uniformisierungen zu unseren Beispielen entsprechen ebenfalls unendlich vielen Punkten auf der Geraden. Um diese Punkte konkret angeben zu können, muß man noch den Überlagerungsgrad einer Uniformisierung bestimmen. Der ist allerdings meist sehr groß (z.B. n^{k-1} für Hirzebruchs Kummer-Uniformisierung, wenn das auch nicht immer der minimale Grad ist) und bei den nicht-abelschen Uniformisierungen überhaupt kaum zu berechnen. Der niedrigste Wert, nämlich die Eulercharakteristik 9, tritt für einen nicht-kompakten Ballquotienten auf (5.2.5) und ist daher in diesem Zusammenhang uninteressant.

5.5.5. Für das vollständige Vierseit mit $n_{ij} = 5$ für alle ij hat Hirzebruch die Kummer-Uniformisierung vom Grad 5^5 als Beispiel eines Ballquotienten gefunden (5.1). Es ist aber sogar möglich, eine Uniformisierung $Y \rightarrow S'$ vom Grad 25 anzugeben (6.5.7). Y hat dann nach der Tabelle 5.1.5 die Eulercharakteristik $c_2(Y) = 15$. Auf S' operiert ein Automorphismus der Ordnung 5, der die zehn Kurven L'_{ij} entsprechend der Permutation (01234) der Indexmenge $\{0,1,2,3,4\}$ vertauscht. Man kann versuchen, diesen Automorphismus zu einem fixpunktfreien Automorphismus von Y zu liften und so als Quotienten eine komplex-hyperbolische Fläche mit Eulercharakteristik 3 und erster Bettizahl $b_1 \neq 0$ zu bekommen. Es

stellt sich aber heraus, daß die Restriktionen für das Hochheben schon erzwingen, daß die Überlagerungsfläche fünf Singularitäten über Schnittpunkten von K' haben muß.

5.5.6. Auch für die Ikosaeder-Konfiguration mit $n = m_{(3)} = 5$, $m_{(5)} = 1$ kann man eine Uniformisierung vom Grad 25 finden (6.6). Hier erhalten wir einen kompakten Ballquotienten der Eulercharakteristik $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$.

KAPITEL 6

EXISTENZ VON UNIFORMISIERUNGEN

In diesem Kapitel werden Methoden vorgestellt, mit denen man die Uniformisierbarkeit einer gewichteten Konfiguration beweisen kann. Insbesondere wird gezeigt, daß für sämtliche in 5.3.3 angegebenen hyperbolischen Beispiele tatsächlich Ballquotienten als Überlagerungen existieren (6.6).

6.1. KUMMER-ÜBERLAGERUNGEN

6.1.1. $l_1 = 0, \dots, l_k = 0$ seien homogene Gleichungen für die Geraden einer Konfiguration K auf dem \mathbb{P}^2 . $n \geq 2$ sei eine ganze Zahl. Dann sei \tilde{K} die Kummer-Erweiterung des Funktionenkörpers K von \mathbb{P}^2 durch die n -ten Wurzeln aus sämtlichen Quotienten l_i/l_j dieser Polynome. \tilde{K} ist der Funktionenkörper einer singulären Fläche X , die den \mathbb{P}^2 n^{k-1} -blättrig überlagert. Eine Desingularisierung von X ist dann eine Uniformisierung von K mit den Gewichten $n_i = m_j = n$. Diese Konstruktion wurde von Hirzebruch in [Hi₃] benutzt.

6.1.2. Definition. Die in 6.1.1 beschriebene Uniformisierung heißt Kummer-Uniformisierung (oder -Überlagerung) der Geradenkonfiguration K zum Gewicht n .

6.1.3. Die Existenz einer solchen abelschen Überlagerung mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k-1}$ folgt auch mit Hilfe der Topologie (6.5).

6.1.4. Wenn nicht alle Verzweigungsordnungen übereinstimmen, ist diese Methode nicht anwendbar. Man kann aber z.B. im Fall der Ikosaeder-Konfiguration mit $n=5$, $m_{(3)}=5$, $m_{(5)}=1$ durch Adjunktion der fünften Wurzeln aus dem Produkt aller 15 Geradengleichungen eine fünfblättrige Überlagerung des \mathbb{P}^2 konstruieren. Die Überlagerungsfläche hat dann zwar Quotientensingularitäten, liefert aber die Gleichheit in der entsprechend modifizierten Miyaoka-Yau-Ungleichung $([Mi], [Ko_3])$. Solche Fälle hat Kes Ivinskis betrachtet, s. [Iv].

6.1.5. Für $Ceva(3)$ erhält man durch Adjunktion der dritten Wurzeln aus dem Produkt der 9 Geradengleichungen eine Fläche, deren Normalisierung eine Uniformisierung zu den Gewichten $n=3$, $m=1$ ist. Als Uniformisierung zu $m^*=\infty$ betrachtet, erhalten wir so einen offenen Ballquotienten $Y-D$ mit der Eulercharakteristik $\bar{c}_2(Y, D) = c_2(Y) = 9$ (5.2.5).

6.2. UNIFORMISIERENDE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

6.2.1. In [Mo] und [De-Mo] konstruieren Deligne und Mostow diskrete Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{B}^2)$ mit Hilfe der Hypergeometrischen Differentialgleichung in 2 Variablen, deren Studium auf Picard zurückgeht. Es handelt sich um ein System partieller linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

mit rationalen Parametern μ_0, \dots, μ_4 , $\sum \mu_i = 2$. Die Koeffizienten sind rationale Funktionen auf $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die Pole längs der horizontalen und vertikalen Geraden $z_1 = 0, 1, \infty$ und $z_2 = 0, 1, \infty$ sowie der Diagonalen $z_1 = z_2$ haben. Diese sieben Geraden bilden eine Konfiguration K , deren Desingularisierung K' auf der Aufblasung S' in den drei Tripelpunkten mit der des vollständigen Vierseits übereinstimmt (5.1). Deligne und Mostow zeigen, daß im Fall $0 < \mu_i < 1$ für alle i unter der Voraussetzung

$$\langle \text{INT} \rangle \quad (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \quad \text{für alle } i, j$$

(die man nur für $\mu_i + \mu_j < 1$ nachprüfen muß: [De-Mo], 14.2)

die Monodromiegruppe des Differentialgleichungssystems ein (manchmal arithmetisches, manchmal nicht-arithmetisches) Gitter Γ in der Automorphismengruppe $\text{PU}(2, 1)$ des Balles \mathbb{B}^2 ist.

Setzt man nun

$$n_{ij}^* = (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1}$$

für alle ungeordneten Paare ij ($0 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$), so ist

(mit den Bezeichnungen aus 5.1) der Quotient $\Gamma \backslash \mathbb{B}^2$ gleich S' nach Niederblasen der L_{ij}^i mit $n_{ij}^* < 0$ und Entfernen der L_{ij}^i mit $n_{ij}^* = \infty$, und die Verzweigungsordnungen entlang der übrigen Geraden L_{ij}^i sind gerade die n_{ij}^* ([De-Mo], 9.1.1).

Picards Schüler LeVasseur [LeV] hat die Parameterwerte mit $\langle \text{INT} \rangle$ ausgerechnet. Diejenigen mit $0 < \mu_i < 1$ für alle i sind in [De-Mo], 14.3 aufgelistet und entsprechen gerade den 27 hyperbolischen Gewichtungen für das vollständige Vierseit in 5.1.5 (in der selben Reihenfolge). Der Fall $\mu_i = 1/4$ ($i < 4$), $\mu_4 = 1$ ist gerade der nicht-hyperbolische Sonderfall

(4.1.5 (b)). Hinzu kommen noch 9 weitere Möglichkeiten, darunter eine ganze Serie ($\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 = d-1$, $\mu_4 = d+1$), wobei aber nicht-positive μ_i auftreten und die Geraden L_{ij}^i mit $n_{ij}^* \leq 1$ oder $n_{ij}^* = \infty$ nicht disjunkt sind.

Umgekehrt erhält man aus quasi-hyperbolischen Gewichten n_{ij}^* für das vollständige Vierseit durch

$$3\mu_i = 2 - \sum_{j \neq i} (n_{ij}^*)^{-1}$$

(wobei die Summe über alle $j \neq i$ läuft) rationale Zahlen μ_i mit $\mu_0 + \dots + \mu_4 = 2$. Die LeVasseur-Liste (die man heute mit einem Computer leicht überprüfen kann) zeigt also, daß unsere Liste 5.1.5 vollständig ist, und so ist diese Liste auch entstanden.

Bisher haben wir nur eine unendlichblättrige Uniformisierung des vollständigen Vierseits zu hyperbolischen Gewichten gefunden. Daß dann auch endlichblättrige Uniformisierungen in unserem Sinne existieren, folgt aus dem Satz von Selberg. Ein Beweis steht z.B. in [Bo], 2.3.

6.2.2. Satz. (Selberg) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{C})$ hat einen torsionsfreien Normalteiler von endlichem Index. □

6.2.3. Korollar. Für jede der 27 hyperbolischen Gewichtungen des vollständigen Vierseits existiert eine Uniformisierung.

Beweis. Γ sei das von Deligne und Mostow konstruierte Gitter in $PU(2,1)$. Nach Selbergs Satz hat Γ einen torsions-

freien Normalteiler Γ_0 von endlichem Index. Da die Stabilisatoren von Punkten in \mathbb{B}^2 stets endlich sind ([De-Mo], 10.1.1), ist $\mathbb{B}^2 \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathbb{B}^2$ unverzweigt, und $\Gamma_0 \backslash \mathbb{B}^2 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{B}^2$ hat das selbe Verzweigungsverhalten wie $\mathbb{B}^2 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{B}^2$, aber nur endlich viele Blätter, und liefert daher die gewünschte Uniformisierung. Ob die Punkte mit negativen Gewichten aufgeblasen werden oder nicht, ist nach 2.1.7 irrelevant. \square

6.2.4. M. Yoshida hat solche uniformisierenden Differentialgleichungen auch für einige der exzeptionellen Konfigurationen (5.3) aufgestellt ($[Y_{0_1}], [Y_{0_2}]$). Die Monodromie liefert auch in diesen Fällen unendlichblättrige verzweigte Überlagerungen der aufgeblasenen projektiven Ebene, die die "universelle Uniformisierung" zu den betrachteten Gewichten bilden. Da die Monodromiegruppe eine Matrixgruppe ist, können wir auch in diesen Fällen den Satz von Selberg anwenden und erhalten so endlichblättrige verzweigte Überlagerungen, die dann nach unseren Berechnungen in den vorangegangenen Kapiteln Ballquotienten sein müssen. Nachträglich ist daher klar, daß die universelle Uniformisierung der Ball \mathbb{B}^2 ist.

Insbesondere existiert eine Uniformisierung der Hesse-Konfiguration mit $n=4$ und $m_{(4)}=2$, was mit den topologischen Methoden in den folgenden Abschnitten nicht gezeigt werden konnte.

Für die Hesse-Konfiguration hat Yoshida auch die zugehörigen Untergruppen von $PU(2,1)$ untersucht ($[Y_{0_3}]$).

6.3. DIE FUNDAMENTALGRUPPE DES KOMPLEMENTES
EINER GERADENKONFIGURATION

6.3.1. Definition. L sei eine projektive Gerade, q_1, \dots, q_r paarweise verschiedene Punkte auf L . q sei ein Punkt in $L^0 = L - \{q_1, \dots, q_r\}$. Einfache Erzeugende der Fundamentalgruppe $\pi_1(L^0, q)$ sind dann Elemente $\omega_1, \dots, \omega_r$ mit $\omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_r = 1$, wobei die Umlaufzahl eines ω_i um q_i gleich 1 und um die übrigen q_j gleich 0 ist.

6.3.2. Für solche $\omega_1, \dots, \omega_r$ hat dann $\pi_1(L^0, q)$ die Präsentation $\langle \omega_1, \dots, \omega_r \mid \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_r \rangle$.

6.3.3. Satz. K sei eine Geradenkonfiguration auf $S = \mathbb{P}^2$ mit dem Komplement $S^0 = S - K$. $L \subset S$ sei eine weitere Gerade, die keine Schnittpunkte von K trifft. q sei ein Punkt auf $L^0 = L \cap S^0$. Dann gilt

(a) Die Inklusion $L^0 \hookrightarrow S^0$ induziert einen Epimorphismus

$$\iota : \pi_1(L^0, q) \rightarrow \pi_1(S^0, q) =: H.$$

(b) Auf dem Niveau der Faktorkommutatorgruppen (= Homologiegruppen) induziert ι einen Isomorphismus

$$\iota' : \pi_1'(L^0, q) \xrightarrow{\cong} \pi_1'(S^0, q) =: H'.$$

Einfache Erzeugende von $\pi_1(L^0, q)$ erzeugen also H . Der Satz ist altbekannt: (a) stammt von S. Lefschetz und gilt für beliebige Hyperflächen im \mathbb{P}^s , (b) ist eine einfache Folgerung aus der zuerst von O. Zariski in [Za] angegebenen Präsentation von H . Für $s \geq 3$ ist schon ι ein Isomorphismus;

in unserem Fall $s=2$ ist es aber wichtig, daß K eine Geradenkonfiguration ist. Eine genauere Übersicht über diese Sätze und Beweise findet man bei D. Cheniot [Ch]. Die Konstruktion einer Präsentation von H geben wir hier wieder, einmal um Satz 6.3.3 zu beweisen und zum anderen, weil sie recht interessant ist. Referenz ist [Ch], Théorème (5.1.5) (dort nach van Kampen benannt, weil ein erster vollständiger Beweis von ihm stammt [vKa]). Die Konstruktion wird später nicht mehr benötigt.

6.3.4. Eine Präsentation von $H = \pi_1(S^0, q)$. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen von 6.3.3 werden übernommen. $\omega_1, \dots, \omega_r$ seien einfache Erzeugende von $G = \pi_1(L^0, q)$. Die Bilder $\gamma_i = \iota(\omega_i)$ erzeugen dann H , und $\gamma_1 \dots \gamma_r = 1$ ist eine Relation.

Sei nun A der Parameterraum aller Geraden durch q , die keine Schnittpunkte von K treffen. Ein Grundpunkt in A wird durch die Gerade L festgelegt. A ist eine gelochte projektive Gerade. Wenn nun s eine Schleife in A ist, die jedem $t \in [0,1]$ eine Gerade L_t zuordnet ($L_0 = L = L_1$), dann gibt es dazu eine Isotopie h_t ($t \in [0,1]$) der Einbettung $h_0: L^0 \rightarrow S^0$ mit $h_t(L^0) = L_t \cap S^0$ und $h_t(q) = q$. h_1 transformiert die ω_i in Elemente ω_i^1 von G , deren Bilder unter ι nach Konstruktion mit denen der ω_i übereinstimmen. Andererseits wird jedes ω_i durch eine Schleife c_i repräsentiert, die man wie folgt wählen kann: Zunächst beschreibt c_i einen Weg von p zu einem Punkt nahe $L_1 \cap L$, dann eine kleine kreisförmige Schleife um diesen Punkt und verfolgt dann den Hinweg zurück. Das selbe gilt dann für ω_i^1 , und zwar umläuft

ω'_i wieder den selben Punkt im gleichen Umlaufsinn - und dies unterscheidet unseren Fall von dem einer beliebigen Kurve im \mathbb{P}^2 . ω'_i ist daher in G zu ω_i konjugiert und stimmt in der Faktorkommutatorgruppe G' mit ω_i überein.

Jede Schleife s im Parameterraum A erzeugt so Relationen der Form $\gamma_i(\omega_i) = (\omega_i^{-1} \omega_i \omega)$. Der Satz von Zariski / van Kampen besagt nun, daß man so ein vollständiges Relationensystem für die γ_i erhält, wobei man offenbar mit endlich vielen Wegen, die $\pi_1(A)$ erzeugen, auskommt. □

6.3.5. Definition. K sei eine Kurvenkonfiguration auf einer Fläche S . K sei bezüglich lokaler Koordinaten (z_1, z_2) durch $z_1 = 0$ charakterisiert. Eine Schleife der Form $t \mapsto (e^{2\pi it}, 0)$ ($0 \leq t \leq 1$) heißt dann kleine einfache Schleife um die durch $z_1 = 0$ bestimmte Kurve von K . Eine einfache Schleife um eine der Kurven L_i bezüglich eines Grundpunktes $q \in S^\circ$ ist die Hintereinanderschaltung eines von q ausgehenden Weges w , einer kleinen einfachen Schleife um L_i und des Rückweges \bar{w} nach q . Auch die Homotopieklasse einer solchen einfachen Schleife in $\pi_1(S^\circ, q)$ wird als einfache Schleife bezeichnet.

6.3.6. Bemerkung. Da je zwei kleine einfache Schleifen um L_i als freie Schleifen, d.h. ohne Fixierung des Basispunktes, ineinander deformiert werden können, sind je zwei einfache Schleifen um L_i in der Fundamentalgruppe H konjugiert.

6.3.7. Definition. p sei ein Doppelpunkt $L_i \cap L_j$ der Kurvenkonfiguration K . Bezüglich lokaler Koordinaten (z_1, z_2)

in einem durch $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ definierten Polyzylinder U_p sei K durch $z_1 z_2 = 0$ charakterisiert. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(U_p \cap S^0, p')$ ($p' \in U_p \cap S^0$) wird dann als lokale Fundamentalgruppe in p bezeichnet.

6.3.8. Bemerkung. $U_p \cap S^0$ läßt sich auf den Torus $|z_1| = \frac{1}{2}, |z_2| = \frac{1}{2}$ zurückziehen. Die lokale Fundamentalgruppe in p ist daher (bis auf die offensichtlichen Isomorphismen) unabhängig von den Auswahlen; sie ist das freie abelsche Erzeugnis zweier einfacher Schleifen um L_i und L_j (in $(U_p \cap S^0, p')$).

6.3.9. Lokale Fundamentalgruppen einer Geradenkonfiguration.

K sei eine Geradenkonfiguration. Die exzeptionellen Kurven E'_ν auf S' werden von nun an auch mit $L'_{k+\nu}$ bezeichnet, so daß also K' aus L'_1, \dots, L'_{k+l} besteht. p sei ein Schnittpunkt $L'_\alpha \cap L'_\beta$ von K' mit lokaler Fundamentalgruppe $H_p = \pi_1(U_p \cap S^0, p')$, die von einfachen Schleifen $\omega_{\alpha p}, \omega_{\beta p}$ um L'_α bzw. L'_β erzeugt wird.

$$i_p: H_p \rightarrow H = \pi_1(S^0, q)$$

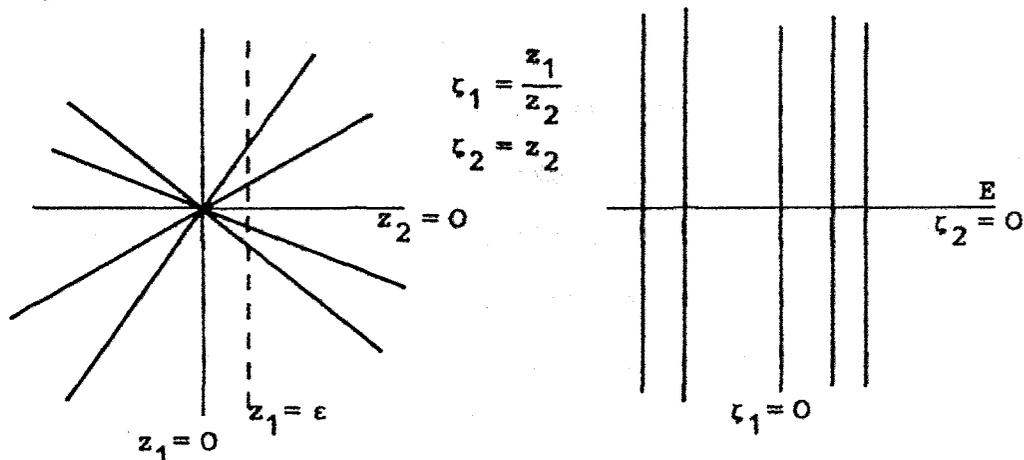
sei ein durch die Inklusion induzierter Homomorphismus.

$i_p(\omega_{\alpha p})$ und $i_p(\omega_{\beta p})$ sind dann einfache Schleifen um L'_α bzw. L'_β in H . Falls L'_α eine der transformierten Geraden ist (d.h. $\alpha \leq k$), ist damit $i_p(\omega_{\alpha p})$ konjugiert zu dem Erzeugenden γ_α von H . Andernfalls gilt

6.3.10. Lemma. L_1, \dots, L_r seien $r \geq 1$ Geraden durch den Ursprung im \mathbb{C}^2 , $U \subset \mathbb{C}^2$ ein offener Ball um O und U^0 das Komplement der L_i in U . Dann gibt es einfache Schleifen ω_i um die L_i in U^0 , deren Produkt $\omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_r$ in $\pi_1(U^0, q)$

eine einfache Schleife um die exzeptionelle Kurve E ist, die beim Aufblasen des Ursprungs entsteht.

Beweis "durch Zeichnung":



Ohne Einschränkung sei $z_1 = 0$ keine der Geraden L_i . Für genügend kleines $\epsilon \in \mathbb{C}$ liegen alle Schnittpunkte p_i der L_i mit der Geraden $z_1 = \epsilon$ im Inneren einer Kreisscheibe $\{(z_1, z_2) \mid z_1 = \epsilon, |z_2| < r\} \subset U$, deren Randkurve einerseits ein Produkt $\omega_1 \cdots \omega_r$ einfacher Schleifen ω_i um die L_i (in der Kreisscheibe) ist, andererseits innerhalb U° auf die Gerade $z_1 = 0$ parallel verschoben werden kann. Diese Schleife ist dann eine einfache Schleife um E , wie man in der Koordinatendarstellung der Aufblasung sofort sieht. \square

Damit ist die Topologie von S° für unsere Zwecke ausreichend beschrieben. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß M. Kato beim Beweis seines Existenzsatzes für Uniformisierungen ([Ka], Satz 6.4.7 in der vorliegenden Arbeit) die Konstruktionen in diesem Abschnitt sehr genau durchgeführt und dabei das Zusammenspiel der lokalen Fundamentalgruppen mit der globalen detaillierter beschrieben hat.

6.4. EXISTENZUNTERSUCHUNG MIT HILFE DER FUNDAMENTALGRUPPE

6.4.1. Satz. K sei eine Kurvenkonfiguration. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 6.3 gilt dann

(a) Die Isomorphieklassen verzweigter Galois-Überlagerungen von S' , deren Verzweigungsort in K' liegt, stehen in bijektiver Beziehung zu den Normalteilern von endlichem Index in $H = \pi_1(S^0, q)$. Die Decktransformationsgruppe der Überlagerung ist dabei isomorph zur entsprechenden Faktorgruppe von H .

(b) $A \subset H$ sei ein Normalteiler von endlichem Index, $\pi: Y \rightarrow S'$ die zugehörige Überlagerung. Dann ist die Verzweigungsordnung n_α längs einer Kurve L'_α in K' gleich der Ordnung einer einfachen Schleife um L'_α modulo A . Über einem Schnittpunkt p von zwei Kurven L'_α und L'_β von K' ist Y genau dann nicht-singulär, wenn der Normalteiler $i_p^{-1}(A)$ in der lokalen Fundamentalgruppe H_p von $(\omega_{\alpha p})^{n_\alpha}$ und $(\omega_{\beta p})^{n_\beta}$ erzeugt wird.

Beweis. (a) folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für unverzweigte Galois-Überlagerungen und dem Fortsetzungssatz 2.1.3. Zu (b): Nahe p zerfällt die Überlagerungsfläche lokal in mehrere Zusammenhangskomponenten. Die einzelnen Überlagerungen entsprechen dann dem Normalteiler $i_p^{-1}(A)$. Die Aussage ist daher nur eine Umformulierung von Satz 2.1.4; die Äquivalenz der Koordinatenbeschreibung dort mit der Formulierung hier ist einfach, siehe z.B. [Lau], p. 7-13. □

Während es so gut wie hoffnungslos erscheint, Satz 6.4.1 für einen allgemeinen Existenzbeweis für Uniformisierungen zu benutzen, wurde das analoge Problem im eindimensionalen Fall von R. H. Fox gelöst:

6.4.2. Satz. L^0 sei das Komplement von $r \geq 1$ Punkten q_1, \dots, q_r auf der projektiven Geraden L , $G = \pi_1(L^0, q)$ die Fundamentalgruppe und $\omega_1, \dots, \omega_r$ einfache Erzeugende von G .

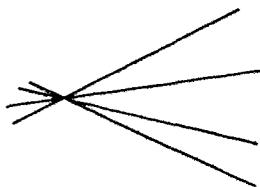
(a) Die nur in den q_i verzweigten Galois-Überlagerungen von L entsprechen bijektiv den Normalteilern A von endlichem Index in G . Die Verzweigungsordnung in q_i ist gleich der Ordnung von ω_i modulo A .

(b) Eine verzweigte Galois-Überlagerung zu den Verzweigungsordnungen $n_1, \dots, n_r \geq 2$ gibt es genau dann, wenn entweder $r \geq 3$ oder $r = 2$ und $n_1 = n_2$ ist.

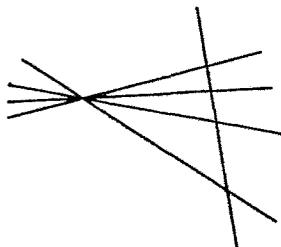
Beweis. (a) ist die eindimensionale Formulierung der Aussage von 6.4.1. (b) folgt dann für $r \leq 2$ sofort daraus, daß G trivial oder gleich \mathbb{Z} ist; für $r \geq 3$ konstruierte Fox in $[Fo_1]$ eine endliche Gruppe G' mit r Erzeugenden der Ordnungen n_1, \dots, n_r , deren Produkt trivial ist. Daher läßt sich ein Homomorphismus $G \rightarrow G'$ angeben, der die gewünschte Überlagerung definiert. □

In einigen besonders einfachen Fällen kann man den zweidimensionalen Fall auf den eindimensionalen zurückspielen:

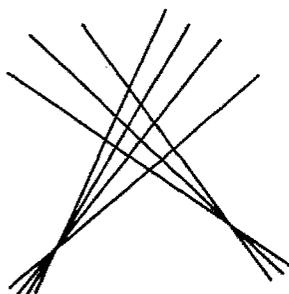
6.4.3. Lemma. K sei eine der folgenden gewichteten Geradenkonfigurationen:



(a) ein Bündel aus $r \geq 3$ Geraden L_1, \dots, L_r durch $p_1 \in S = \mathbb{P}^2$ mit Gewichten n_1, \dots, n_r und $m_1 = 1$.



(b) ein Fast-Bündel, das außer den r Geraden aus (a) noch eine weitere Gerade $L_{r+1} \ni p_2$ enthält, mit Gewichten n_1, \dots, n_{r+1} und $m_1 = n_{r+1}$.



(c) ein Doppelbündel aus $r \geq 3$ Geraden L_1, \dots, L_r durch $p_1 \in S$ und $s \geq 3$ Geraden L_{r+1}, \dots, L_{r+s} durch $p_2 \neq p_1$, wobei die Verbindungsgerade von p_1 und p_2 nicht zu K gehört, mit Gewichten n_1, \dots, n_{r+s} und $m_1 = m_2$.

Dann gibt es eine Uniformisierung von K mit diesen Gewichten.
Die Bedingungen $m_1 = 1$, $m_1 = n_{r+1}$ bzw. $m_1 = m_2$ sind für die Existenz notwendig.

Beweis. Zuerst wird die letzte Aussage gezeigt. Sei also $\pi: Y \rightarrow S'$ eine Uniformisierung. L sei eine weitere Gerade, die in den Fällen (a) und (b) durch p_1 und im Fall (c) durch p_1 und p_2 geht. Auf S' wird die Transformierte L' zu einer rationalen Kurve, über der π einen oder zwei Verzweigungspunkte hat. Da L' den Verzweigungsort transversal trifft, induziert π eine verzweigte Überlagerung von L' mit diesen Verzweigungspunkten, woraus nach 6.4.2 (b) die Behauptung folgt.

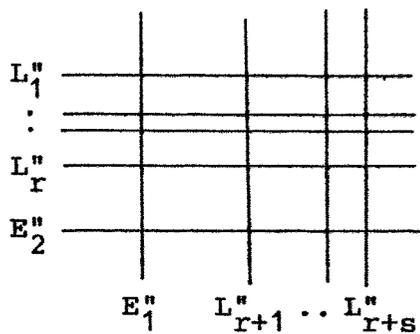
Nun zur Existenz einer Uniformisierung. Fall (a) ist sofort erledigt, da das Komplement S^0 auf die unendlich ferne Gerade zurückgezogen werden kann, wo eine Überlagerung nach 6.4.2 (b) existiert. Da eine einfache Schleife um die exzeptionelle Kurve E_1' trivial ist, setzt sich diese Überlagerung zu der gewünschten Uniformisierung fort.

Fall (b) kann ähnlich behandelt werden, wird aber hier besser als degenerierter Spezialfall von (c) aufgefaßt, d.h. mit einem weiteren Punkt p_2 auf L_{r+1} , $m_2 = n_{r+1}$ und $s = 1$. Dabei bleibt zu berücksichtigen, daß entgegen der üblichen Konventionen n_{r+1} gleich 1 sein darf und ein überflüssiger Punkt p_2 aufgeblasen wird.

G sei die Verbindungsgerade von p_1 und p_2 , G' ihre transformierte in S' . Niederblasen der (-1) -Kurve G' liefert insgesamt einen birationalen Morphismus

$$S = \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = S''.$$

Die Bilder der L_i' und E_v' in S'' seien L_i'' bzw. E_v'' ; S'' ist dann in kanonischer Weise gleich $E_1'' \times E_2''$. E_v^0 sei das



Komplement der Schnittpunkte mit den L_i'' in E_v'' . Bis auf die Gerade G stimmen dann also S^0 und $E_1^0 \times E_2^0$ überein; es ist $\pi_1(E_1^0 \times E_2^0, (q_1, q_2)) = H_1 \times H_2$ mit $H_v = \pi_1(E^0, q_v)$. $\omega_1, \dots, \omega_r, \delta_2$ bzw. $\omega_{r+1}, \dots, \omega_{r+s}, \delta_1$ seien einfache Erzeugende von H_1

bzw. H_2 , wobei δ_v die Gerade E_v'' und ω_i die Gerade L_i'' umläuft.

In die Sprache der Algebra übersetzt, liefert Satz 6.4.2

Homomorphismen

$$\varphi_1': H_1 \rightarrow \Phi_1' \qquad \varphi_1'': H_1 \rightarrow \Phi_1''$$

auf endliche Gruppen Φ_1' und Φ_1'' , unter denen $\omega_1, \dots, \omega_r$ auf Elemente der Ordnungen n_1, \dots, n_r abgebildet werden und δ_2 im ersten Fall die Ordnung m_2 erhält und im zweiten Fall verschwindet.

$$\varphi_1 = \varphi_1' \times \varphi_1'': H_1 \rightarrow \Phi_1 = \Phi_1' \times \Phi_1''$$

hat dann die Eigenschaft

(\mathcal{H}_1) Für jedes Konjugierte ε_2 zu δ_2 , für $i = 1, \dots, r$ und alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\omega_i^a \varepsilon_2^b \in \ker \varphi_1 \Leftrightarrow n_i \mid a \text{ und } m_2 \mid b.$$

Analog wird im Fall (c) $\varphi_2: H_2 \rightarrow \Phi_2$ definiert. Im Fall (b) ist φ_2 einfach der kanonische Homomorphismus zum von $\delta_1^{m_1}$ erzeugten Normalteiler von $H_2 = \langle \delta_1 \rangle$.

A sei der von $(\varphi_1(\delta_2), \varphi_2(\delta_1))$ erzeugte Normalteiler von $\Phi_1 \times \Phi_2$. Der dadurch induzierte Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}: H_1 \times H_2 \rightarrow (\Phi_1 \times \Phi_2)/A$$

definiert eine verzweigte Überlagerung von S' , die über dem Komplement der L_i' und E' unverzweigt ist, denn die einfache Schleife $(\delta_2, \delta_1) \in H_1 \times H_2$ liegt ja nach Konstruktion im Kern.

Für einen Doppelpunkt $p = L_i'' \cap L_j''$ sind $(\omega_i, 1)$ und $(1, \omega_j)$ bis auf Konjugation Bilder von Erzeugenden der lokalen Fundamentalgruppe. $\tilde{\varphi}(\omega_i^a, \omega_j^b) = 1$ impliziert $\varphi_1(\omega_i^a) = \varphi_1(\varepsilon_2)^c$ für ein Konjugiertes ε_2 von δ_2 und ein $c \in \mathbb{Z}$, woraus wegen (\mathcal{H}_1) $n_i \mid a$, $m_2 \mid c$ und daher $n_j \mid b$ folgt. Über $L_i' \cap L_j'$ liegen daher glatte Punkte der Überlagerungsfläche (6.4.1 (b)).

Analog geht man für $L_i'' \cap E_1''$ vor. Im Fall (b) ist damit alles

gezeigt, denn das Aufblasen von p_2 war ja überflüssig. Im Fall (c) ist die Situation symmetrisch in $v=1,2$, und wir sind auch hier fertig. \square

Uniformisierbare Konfigurationen können zusammengesetzt werden, wobei für die Gewichte das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) gebildet wird. Schwierigkeiten tauchen dabei auf, wenn ein singulärer Schnittpunkt der zusammengesetzten Konfiguration in einer der Ausgangskonfigurationen nicht singulär war:

6.4.4. Proposition. (Vereinigung uniformisierbarer Konfigurationen). $K^{(t)}$, $t=1, \dots, s$, seien uniformisierbare gewichtete Kurvenkonfigurationen auf einer Fläche S , wobei auch das Gewicht 1 zugelassen ist. $K = \{L_1, \dots, L_k\}$ sei die Vereinigung der $K^{(t)}$.

Für $t=1, \dots, s$, $i=1, \dots, k$ und jeden singulären Schnittpunkt p_v von K sei

$$n_i^{(t)} := \begin{cases} \text{Gewicht von } L_i \text{ in } K^{(t)}, \text{ falls } L_i \in K^{(t)}; \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m_v^{(t)} := \begin{cases} \text{Gewicht von } p_v \text{ in } K^{(t)}, \text{ falls } p_v \text{ ein} \\ \text{singulärer Schnittpunkt von } K^{(t)} \text{ ist;} \\ \text{kgV}(n_i^{(t)} \mid L_i \ni p_v) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$n_i := \text{kgV}(n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(s)})$ und $m_v := \text{kgV}(m_v^{(1)}, \dots, m_v^{(s)})$ sind dann Gewichte für K .

Falls ein singulärer Schnittpunkt p_v nicht in allen $K^{(t)}$ singulär ist, setzen wir noch voraus:

Es gibt ein $u \in \{1, \dots, s\}$, so daß p_v in $K^{(u)}$ singulär ist und eine der folgenden Bedingungen gilt:

- (α) $n_i^{(t)} \mid m_v^{(u)}$
 (β) $n_i^{(t)} \mid n_i^{(u)}$
 (γ) p_v ist ein Doppelpunkt $L_i \cap L_j$ von $K^{(t)}$
mit $n_i^{(t)} = n_j^{(t)}$.

Dann ist K mit den angegebenen Gewichten uniformisierbar.

Wenn für alle $K^{(t)}$ abelsche Uniformisierungen existieren,

dann auch für K .

Beweis. Die Uniformisierungen der einzelnen Konfigurationen liefern auch verzweigte Überlagerungen von S' (die Standardbezeichnungen beziehen sich auf K), die zu Normalteilern $A^{(t)}$ von H gehören. Der Durchschnitt A dieser Normalteiler ist dann ebenfalls ein Normalteiler endlicher Ordnung und definiert eine verzweigte Überlagerung $\pi: Y \rightarrow S'$.

Einfache Schleifen um die L_i' und E_v' haben modulo $A^{(t)}$ tatsächlich die Ordnung $n_i^{(t)}$ bzw. $m_v^{(t)}$ (s. 6.3.10 für die nicht-singulären Sonderfälle) und daher modulo A die gewünschte Ordnung n_i bzw. m_v . Zu zeigen ist daher nur, daß Y nichtsingulär ist, und das ist nicht trivial: Wenn man z.B. einen glatten Punkt des Verzweigungsortes aufbläst und dann die induzierte Überlagerung betrachtet, ist diese über dem unendlich benachbarten Punkt singulär.

Sei also p ein Doppelpunkt $L'_\alpha \cap L'_\beta$ von K' ($1 \leq \alpha, \beta \leq k+l$ wie in 6.3.9) und H_p die lokale Fundamentalgruppe, erzeugt von einfachen Schleifen um L'_α und L'_β , deren Bilder unter ι_p mit $\gamma_{\alpha p}$ und $\gamma_{\beta p}$ bezeichnet seien. Nach 6.4.1 (b) ist zu zeigen:

$$\gamma_{\alpha p}^a \gamma_{\beta p}^b \in A \iff n_\alpha \mid a, n_\beta \mid b.$$

Wenn die durch die $A^{(t)}$ definierten Überlagerungen über p nichtsingulär sind, folgt das auch für A . Probleme tauchen also nur dann auf, wenn eine der Kurven, etwa L'_β , von einem singulären Schnittpunkt p_ν stammt und L'_α in einem $K^{(t)}$ liegt, für das p_ν kein singulärer Schnittpunkt ist.

Wenn also in diesem Falle $\gamma_{\alpha p}^a \gamma_{\beta p}^b$ in A liegt, gilt für das nach der Zusatzvoraussetzung existierende u

$$n_\alpha^{(u)} \mid a, \quad m_\nu^{(u)} \mid b.$$

In $K^{(t)}$ liegt außer L_α höchstens eine weitere Kurve L_i durch p_ν , denn sonst wäre der Schnittpunkt ja singulär. Modulo $A^{(t)}$ ist $\gamma_{\beta p}$ dann ohne Einschränkung gleich $\gamma_{\alpha p}$ bzw. $\gamma_{\alpha p} \gamma_{ip}$, wobei γ_{ip} eine einfache Schleife um L_i ist.

In jedem Fall folgt aus $\gamma_{\alpha p}^a \gamma_{\beta p}^b \in A^{(t)}$

$$n_\alpha^{(t)} \mid a+b, \quad n_i^{(t)} \mid b.$$

Um $n_\alpha \mid a$ und $m_\nu \mid b$ zu erhalten, ist noch zu zeigen:

$$n_\alpha^{(t)} \mid a, \quad n_\beta^{(t)} \mid b,$$

wovon offenbar eine Aussage reicht. Jede der Bedingungen

(a) (b) (c) führt hier zum Erfolg. □

6.4.5. Korollar. K sei eine Kurvenkonfiguration mit Uniformisierungen $\pi^{(t)}: Y^{(t)} \rightarrow S'$ zu Gewichten $(n^{(t)}, m^{(t)})$, wobei auch $n_i^{(t)} = 1$ zugelassen ist ($t=1, \dots, s$). Dann gibt es eine Uniformisierung $\pi: Y \rightarrow S'$ zu den Gewichten $n_i = \text{kgV}(n_i^{(t)} \mid t=1, \dots, s)$ und $m_\nu = \text{kgV}(m_\nu^{(t)} \mid t=1, \dots, s)$, die über alle $\pi^{(t)}$ faktorisiert:

$\pi = \pi^{(t)} \circ \rho^{(t)}$ für eine Überlagerung $\rho^{(t)}: Y \rightarrow Y^{(t)}$, die nur über den Kurven $\tilde{L}_i^{(t)}$ mit Ordnung $n_i/n_i^{(t)}$ und $\tilde{E}_\nu^{(t)}$ mit Ordnung $m_\nu/m_\nu^{(t)}$ verzweigt.

Beweis. π wird wie im vorangegangenen Beweis durch den Durchschnitt A der definierenden Normalteiler $A^{(t)}$ der $\pi^{(t)}$ gegeben. $A^{(t)}$ ist auch das Bild der Fundamentalgruppe von $(\pi^{(t)})^{-1}(S^0)$ unter dem Monomorphismus, der durch die Einschränkung von $\pi^{(t)}$ induziert wird. Betrachtet als Normalteiler dieser Fundamentalgruppe, definiert A eine verzweigte Überlagerung $\rho^{(t)}: Y \rightarrow Y^{(t)}$, die dann die angegebenen Eigenschaften hat. □

6.4.6. Bemerkung. Falls K mit den vorgegebenen Gewichten überhaupt uniformisierbar ist, liefert der Durchschnitt aller Normalteiler zu solchen Uniformisierungen die "universelle Uniformisierung" zu diesen Gewichten. Dies ist eine meist unendlichblättrige verzweigte Überlagerung von S' durch eine einfach zusammenhängende Fläche, in unseren Beispielen \mathbb{B}^2 .

Mit dem Zusammensetzungs-Verfahren 6.4.4 folgt jetzt leicht der Uniformisierungssatz von Mitsuyoshi Kato. Spezifisch für Geradenkonfigurationen ist nur noch die Uniformisierbarkeit eines Büschels (6.4.3 (a)), während in Katos Originalbeweis [Ka] explizit die in 6.3 beschriebene Konstruktion der Fundamentalgruppe H ausgeführt wird.

6.4.7. Satz. (M. Kato) K sei eine gewichtete Geradenkonfiguration. Für jede Gerade L_i sei die Anzahl σ_i der singulären Schnittpunkte auf L_i größer als 0, und für die Gewichte m_ν gelte

$$m_\nu = \text{kgV}(n_i \mid p_\nu \in L_i, \sigma_i \geq 2).$$

Dann ist K uniformisierbar.

Beweis. Für $v=1, \dots, 2$ sei $K^{(v)}$ das Bündel aller L_i , die p_v enthalten, versehen mit den Gewichten n_i für die L_i und 1 für den singulären Schnittpunkt. $K^{(v)}$ ist nach 6.4.3 (a) uniformisierbar. Die Vereinigung nach 6.4.4 ist wieder K mit den ursprünglichen Gewichten. Da für jedes p_v , das ja für die übrigen $K^{(\mu)}$ nicht singulär ist, die Zusatzbedingung (a) erfüllt ist, folgt die Behauptung. \square

6.5. ABELSCHES UNIFORMISIEREN

Besonders einfach werden die Betrachtungen in den vorigen Abschnitten, wenn abelsche Uniformisierungen gesucht werden. Abelsche Überlagerungen entsprechen den Untergruppen der Faktorkommutatorgruppe H' , die ja im Falle einer Geradenkonfiguration eine sehr einfache Struktur hat (6.3.3 (b)). Eine offensichtliche Bedingung ist

6.5.1. Proposition. Wenn zu der gewichteten Geradenkonfiguration K eine Uniformisierung existiert (die hier durchaus auch singulär sein darf), so gilt

$$m_v \mid \text{kgV}(n_i \mid p_v \in L_i)$$

für alle singulären Schnittpunkte m_v .

Beweis. Nach 6.3.10 ist in H' eine einfache Schleife um E'_v das Produkt einfacher Schleifen um die beteiligten L_i , für die Ordnungen dieser Elemente modulo des definierenden Normalteilers gilt dann die angegebene Beziehung. \square

Hinreichende Bedingungen sind umständlicher zu formulieren. Die spezielle Gestalt von H' erlaubt es aber, das Problem auf die Lösbarkeit simultaner Kongruenzen und damit letztlich auf elementare Arithmetik zu reduzieren:

6.5.2. K sei eine gewichtete Konfiguration aus $k \geq 3$ Geraden, die kein Büschel bilden. Es sei

$$F: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\ell} \rightarrow \prod (\mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}) =: C$$

$$(u; v_1, \dots, v_{\ell}) \rightarrow (t_1, \dots, t_k)$$

die \mathbb{Z} -lineare Abbildung mit

$$t_i \equiv u + \sum_{p_v \in L_i} m_v v_v \pmod{n_i}.$$

F wird beschrieben durch die Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{M} \\ \vdots & \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

mit $M = (M_{i_v})$, $M_{i_v} = m_v$ für $p_v \in L_i$ und sonst 0.

In der Gruppe C sei $c_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ das Element mit genau einer 1 an der i -ten Stelle und sonst Nullen ($i = 1, \dots, k$), für $v = 1, \dots, \ell$ sei d_v die Summe aller c_i mit $p_v \in L_i$.

6.5.3. Satz. (Existenz abelscher Uniformisierungen)

K sei eine Konfiguration aus $k \geq 3$ Geraden im \mathbb{P}^2 , die nicht alle durch einen Punkt laufen. Dann gibt es eine abelsche Uniformisierung zu den Gewichten (n, m) genau unter den folgenden Bedingungen für die Abbildung F aus 6.5.2:

- (α) $\text{Bild } F \cap (\mathbb{Z} c_i + \mathbb{Z} c_j) = 0$
für jeden Doppelpunkt $L_i \cap L_j$ von K .
- (β) $\text{Bild } F \cap (\mathbb{Z} c_i + \mathbb{Z} d_v) = \mathbb{Z} m_v d_v$
für $v = 1, \dots, \ell$ und alle i mit $p_v \in L_i$.

Den Satz erhält man sofort aus dem folgenden Lemma.

6.5.4. Lemma. Sei K wie oben. Mit den Bezeichnungen von 6.5.2 sei $c_{k+v} := d_v$, $n_{k+v} := m_v$, $L'_{k+v} := E'_v$ ($v = 1, \dots, l$). $A \subset C$ sei die von allen $m_v d_v$ und dem Element $c_1 + \dots + c_k$ erzeugte Untergruppe. Dann existiert eine abelsche Uniformisierung genau unter der Bedingung

(\diamond) Für jeden Schnittpunkt $L'_\alpha \cap L'_\beta$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq k+l$) von K' gilt

$$t_\alpha c_\alpha + t_\beta c_\beta \in A \Rightarrow n_\alpha \mid t_\alpha, n_\beta \mid t_\beta.$$

Beweis. Die nur über K' verzweigten abelschen Überlagerungen von S' entsprechen den Normalteilern von endlichem Index in H' . Nach 6.3.3 (b) ist H' die von einfachen Schleifen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ um die L_i erzeugte abelsche Gruppe mit der definierenden Relation $\gamma_1 \dots \gamma_k = 1$. Einfache Schleifen um die E'_v sind nach 6.3.10 durch das Produkt $\delta_v = \gamma_{k+v}$ aller beteiligten γ_i gegeben. Eine Untergruppe B von H' , die die gewünschten Verzweigungsordnungen liefert, muß also alle $\gamma_i^{n_i}$ und $\delta_v^{m_v}$ enthalten. δ_v wird auch mit γ_{k+v} bezeichnet.

Sei nun $p = L'_\alpha \cap L'_\beta$ ein Schnittpunkt von K' , $1 \leq \alpha, \beta \leq k+l$. H'_p sei die lokale Fundamentalgruppe (6.3.9), erzeugt von $\tilde{\gamma}_\alpha$ und $\tilde{\gamma}_\beta$ mit den Bildern γ_α und γ_β unter dem induzierten Homomorphismus $\iota'_p: H'_p \rightarrow H'$. Da K kein Büschel bildet, liegt $\langle \gamma_\alpha, \gamma_\beta \rangle$ im Erzeugnis einer echten Teilmenge von $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, so daß die einzige Relation $\gamma_1 \dots \gamma_k = 1$ auf $\langle \gamma_\alpha, \gamma_\beta \rangle$ trivial wird. Daher ist ι'_p eine Injektion.

$\varphi: H' \rightarrow H'/B$ sei der kanonische Homomorphismus. Nach

6.4.1 (b) ist die zugehörige Überlagerung genau dann nicht-singulär, wenn für jeden Schnittpunkt gilt

$$(\diamond\diamond) \quad \ker(\varphi|_p) = \langle \tilde{\gamma}_\alpha^{n_\alpha}, \tilde{\gamma}_\beta^{n_\beta} \rangle .$$

(Die Bedingung über die Verzweigungsordnungen folgt hieraus.)

Wenn also irgendein B eine Uniformisierung liefert, so tut das schon $B = \langle \gamma_\alpha^{n_\alpha} \mid 1 \leq \alpha \leq k+l \rangle$, das dann die "universelle abelsche Uniformisierung" liefert. Mit diesem B haben wir für jedes p das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H' & \longrightarrow & H'/B \\ & \nearrow & & & \downarrow k \\ H_p & & & & \\ & \searrow & C & \longrightarrow & C/A \end{array}$$

mit den offensichtlichen Homomorphismen, und (\diamond) ist nur eine Umformulierung von $(\diamond\diamond)$. □

6.5.5. Korollar. K sei eine gewichtete Konfiguration aus $k \geq 3$ Geraden, die nicht alle durch einen Punkt laufen.

(a) Notwendig für die Existenz einer abelschen Uniformisierung sind

$$(a) \quad n_i \mid \text{kgV}(n_s \mid s \neq i, j)$$

für jeden Doppelpunkt $L_i \cap L_j$,

$$(b) \quad n_i \mid \text{kgV}(n_j \mid j \neq i, p_v \in L_j)$$

$$m_v \mid \text{kgV}(n_s \mid p_v \notin L_s)$$

für jeden singulären Schnittpunkt p_v und jede

Gerade L_i durch p_v .

(b) Wählt man für beliebige n_i speziell m_v als das kleinste gemeinsame Vielfache aller n_i mit $p_v \in L_i$, so sind (a) und (b) auch hinreichend für die Existenz einer abelschen Uniformisierung.

Beweis. (a): Sei $L_i \cap L_j$ ein Doppelpunkt, α das kgV der restlichen n_s . $F(\alpha; 0, \dots, 0)$ muß nach 6.5.3 (a) verschwinden, also gilt $n_i | \alpha$ und $n_j | \alpha$.

Entsprechendes gilt für einen Schnittpunkt $L'_i \cap E'_v$: Es sei $\epsilon = \text{kgV}(n_j | p_v \in L_j, j \neq i)$ und $\delta = \text{kgV}(n_s | p_v \notin L_s)$.

$\epsilon c_i - \epsilon d_v$ verschwindet nach Wahl von ϵ , und daher gilt $n_i | \epsilon$ nach 6.5.3 (β). Es ist $F(\delta; 0, \dots, 0) = \delta d_v$, woraus nach 6.5.3 (β) $m_v | \delta$ folgt.

(b): Nach Wahl der m_v kann die Matrix M in 6.5.2 durch die Nullmatrix ersetzt werden. Das Bild von F ist jetzt nach dem Chinesischen Restsatz charakterisiert durch

$$(H) \quad t_i = t_j \quad (\text{ggT}(n_i, n_j)) \quad \text{für alle } i, j.$$

Es sei $L_i \cap L_j$ ein Doppelpunkt und $t_i c_i + t_j c_j \in \text{Bild } F$.

Nach (H) ist t_i ein Vielfaches aller $\text{ggT}(n_i, n_s)$ ($s \neq i, j$) und damit von

$$\text{kgV}(\text{ggT}(n_i, n_s) | s \neq i, j) = \text{ggT}(n_i, \text{kgV}(n_s | s \neq i, j)),$$

woraus mit (a) $t_i = 0 (n_i)$, also $t_i c_i = 0$ folgt. $t_j c_j = 0$ gilt dann natürlich auch, und wir haben (a) in 6.5.3 nachgewiesen.

Wenn $L'_i \cap E'_v$ ein Schnittpunkt von K' ist und $\lambda c_i + \mu d_v =: t$ in Bild F liegt, so gilt für die Komponenten

$$t_i = \lambda + \mu$$

$$t_j = \mu \quad (j \neq i, p_v \in L_j)$$

$$t_s = 0 \quad (\text{sonst}),$$

also nach (H) $\lambda = 0 (\text{ggT}(n_i, n_j))$ für diese j und damit wie

im Beweis von (a) $\lambda = 0 (\text{ggT}(n_i, \text{kgV}(n_j | j \neq i, p_v \in L_j)))$,

d.h. $\lambda = 0 (n_i)$ nach (β). Damit gilt dann

$$\mu = 0 (\text{ggT}(n_i, n_s)) \quad (p_v \notin L_s),$$

daher $\mu = 0$ ($\text{ggT}(n_i, \text{kgV}(n_s | p_v \notin L_s))$) und schließlich nach
 (β) $\mu = 0$ (m_v). Damit ist auch (β) in 6.5.3 gezeigt. \square

6.5.6. Bemerkung. Wie im Beweis von 6.5.4 erwähnt wurde, definiert die Untergruppe Bild F der Gruppe C in 6.5.2 die "universelle abelsche Uniformisierung" zu den vorgegebenen Gewichten, falls überhaupt eine abelsche Uniformisierung existiert. Im Gegensatz zum allgemeinen Fall (6.4.6) ist diese Uniformisierung also endlich, und man kann die Blätterzahl, d.h. die Ordnung der zu $C/\text{Bild F}$ isomorphen Decktransformationsgruppe, ausrechnen. In vielen Fällen kommt man mit kleineren Graden aus; ein extremes Beispiel ist Ceva(3), wo für die Gewichte $n=3$, $m_{(3)}=1$ eine zyklische Uniformisierung mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ existiert (6.1.5).

6.5.7. Beispiel. Für das vollständige Vierseit mit $n_{ij}=5$ für alle ij gibt es eine Uniformisierung vom Grad 25 : γ_{ij} seien einfache Schleifen um die L'_{ij} in H' . φ sei ein Homomorphismus von H' auf $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ mit den Bildern

$$\begin{array}{ll} \gamma_{14}, \gamma_{24}, \gamma_{34} & \rightarrow (1,1) & \gamma_{01} & \rightarrow (2,4) \\ \gamma_{12}, \gamma_{13} & \rightarrow (1,0) & \gamma_{02}, \gamma_{03} & \rightarrow (3,2) \\ \gamma_{23} & \rightarrow (0,2) & \gamma_{04} & \rightarrow (2,2) \quad ; \end{array}$$

ein solcher Homomorphismus existiert, da die γ_{ij} auf der linken Seite H' erzeugen und die definierende Relation (Produkt ist trivial) respektiert wird. Für einen Doppelpunkt $L'_{ij} \cap L'_{rs}$ erzeugen γ_{ij} und γ_{rs} die lokale Fundamentalgruppe, und man überzeugt sich leicht, daß das Bild unter φ ganz G ist. Daher ist die durch φ definierte Überlagerung von S' nichtsingulär (6.4.1).

6.6. UNIFORMISIERBARKEIT DER

EXZEPTIONELLEN KONFIGURATIONEN

Mit den Methoden aus den vorangegangenen Abschnitten können die noch ausstehenden Existenzbeweise für Uniformisierungen zu den hyperbolischen Beispielen in 5.3 geführt werden. Dabei gehen wir natürlich von den physischen Verzweigungsordnungen aus, insbesondere können wir für das verallgemeinerte Gewicht $m_v^* = \infty$ eine Verzweigungsordnung $m_v \geq 1$ auswählen.

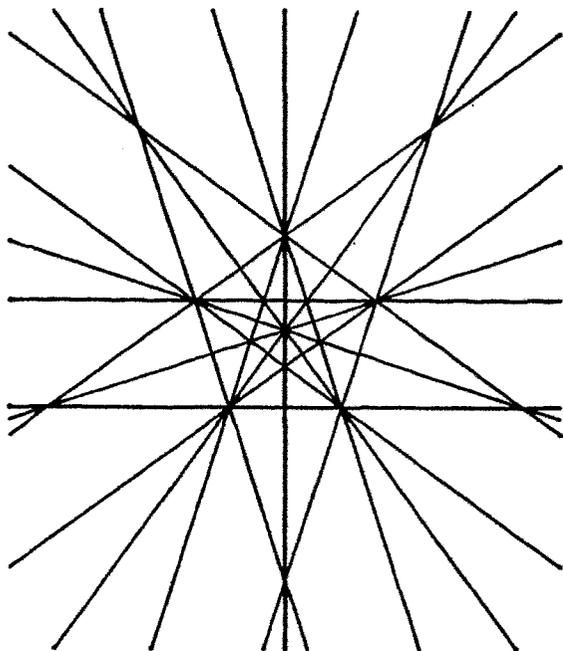
A. Ikosaeder-Konfiguration.

$$n = 2, m_{(3)} = 4, m_{(5)} = 4 :$$

Abelsche Uniformisierungen kann es nach 6.5.1 nicht geben. Wir wenden das Zusammensetzungsverfahren 6.4.4 an: Für jedes Paar nicht durch eine Gerade verbundener Tripelpunkte gibt es nach 6.4.3 (c) eine Uniformisierung des zugehörigen Doppelbüschels mit $n_i = 2$ für die sechs Geraden und $m_v = 4$ für die beiden Tripelpunkte. Für je zwei Fünffachpunkte können wir ebenfalls das Doppelbüschel nehmen, wobei allerdings die Verbindungsgerade entfernt werden muß. Die Geraden bekommen das Gewicht 2, die beiden Zentren das Gewicht 4. Zusammensetzen all dieser Teilkonfigurationen liefert die gewünschten Verzweigungsordnungen, und Bedingung (α) in 6.4.4 garantiert, daß die so definierte Überlagerung nichtsingulär ist.

$$n = 5, m_{(3)} = 5, m_{(5)} = 1 :$$

Man kann die Bedingungen in 6.5.3 überprüfen und so zeigen, daß eine abelsche Uniformisierung existiert. In diesem Fall



können wir aber sogar eine Überlagerung vom Grad 25 angeben:

K zerfällt in fünf Dreiecke aus Geraden A_i, B_i, C_i , wobei in der Zeichnung die A_i durch das Zentrum laufen und die B_i das äußere Fünfeck, die C_i das eingeschriebene Pentagramm bilden. Die zugehörigen Erzeugenden der abelschen Fundamentalgruppe H'

seien $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Ein Homomorphismus φ auf die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ wird dadurch definiert, daß alle α_i auf $(3,3)$, alle β_i auf $(1,0)$ und alle γ_i auf $(0,1)$ abgebildet werden. Da je fünf Erzeugende von jeder Sorte vorkommen, wird die definierende Relation $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \alpha_5 \beta_5 \gamma_5 = 1$ respektiert, und wir erhalten wirklich einen Homomorphismus. Die einfachen Schleifen um die Geraden bekommen die Ordnung 5, in den Fünffachpunkten wird das Produkt der beteiligten Erzeugenden trivial, so daß hier keine Verzweigung längs E'_\vee stattfindet. Es bleibt also die Situation in den Doppel- und Tripelpunkten zu untersuchen.

In den Doppelpunkten treffen sich je zwei Geraden verschiedener Typen. Die Bilder einfacher Schleifen unter φ sind daher nach Konstruktion unabhängig in G , und die zugehörige Überlagerung ist nach 6.4.1 (b) nichtsingulär über diesen Punkten. Für die Tripelpunkte gilt das auch: In einem der äußeren Tripelpunkte treffen sich je zwei Geraden vom Typ B und eine

vom Typ A, so daß eine einfache Schleife um die exzeptionelle Kurve auf $(0,3)$, die entsprechenden Erzeugenden aber auf $(1,0)$ bzw. $(3,3)$ abgebildet werden. Die inneren Tripelpunkte behandelt man analog.

φ definiert also eine Uniformisierung vom Grad 25. Ein kleinerer Grad ist auch gar nicht möglich, da schon in Doppelpunkten, über denen keine Singularitäten liegen, so viele Blätter zusammenkommen müssen.

B. G_{168} -Konfiguration.

$$n = 2, m_{(3)} = 4, m_{(4)} = 2 :$$

Abelsche Uniformisierungen gibt es nicht (6.5.1). Allerdings existiert die Kummer-Überlagerung zu $n=2$, die auch in den Schnittpunkten das Gewicht 2 liefert. Für jedes Paar nicht verbundener Tripelpunkte ist das Doppelbüschel der Geraden durch diese Zentren mit den Gewichten 2 für die Geraden und 4 für die Punkte uniformisierbar; da jeder Tripelpunkt nur mit $3(\tau_i^{(3)} - 1) = 9$ anderen Tripelpunkten verbunden ist, aber $t_3 = 28$ solcher Punkte existieren, liegt jeder Tripelpunkt in einem solchen Doppelbüschel. Die Zusammensetzung all dieser Konfigurationen liefert also eine Überlagerung mit den gewünschten Verzweigungsordnungen, und Bedingung (α) in 6.4.4 impliziert, daß dies tatsächlich eine Uniformisierung ist.

$$n = 3, m_{(3)} = m_{(4)} = 3 :$$

Hier existiert die Kummer-Uniformisierung vom Grad 3^{20} .

$n = 4$, $m_{(3)} = 8$, $m_{(4)} = 2$:

Zunächst basteln wir wie im Fall $n = 2$ die uniformisierbare Konfiguration mit $n = 2$, $m_{(3)} = 8$, $m_{(4)} = 2$. Wenn wir jetzt noch nachweisen, daß eine Uniformisierung zu $n = 4$, $m_{(3)} = 4$, $m_{(4)} = 2$ existiert, sind wir fertig. In der Tat gibt es eine solche abelsche Uniformisierung: Man stellt die Matrix M aus 6.5.2 auf und rechnet die Bedingung 6.5.3 (b) für die Tripel- und Vielfachpunkte nach. Das ist zwar eine Menge Arbeit, aber lediglich lineare Algebra über $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

C. Hesse-Konfiguration.

$n = 2$, $m_{(4)} = 2$ und $n = 3$, $m_{(4)} = 3$

können durch Kummer-Überlagerungen uniformisiert werden.

$n = 4$, $m_{(4)} = 2$:

Hier gibt es keine abelsche Uniformisierung, obwohl die notwendigen Bedingungen aus 6.5.5 alle erfüllt sind. Beim Nachrechnen stellt sich heraus, daß über den Doppelpunkten zwangsläufig Singularitäten entstehen.

Eine Uniformisierung kann man aber durch Yoshidas Differentialgleichung konstruieren, s. 6.2.4.

D. Erweiterte Hesse-Konfiguration.

Da die Konfiguration aus der Hesse-Konfiguration K_H und der Konfiguration $K_C = \text{Ceva}(3)$ zusammengesetzt ist, bietet sich das Vereinigungsverfahren 6.4.4 an:

$$n_H = n_C = 2, m_H = 2, m_C = 4:$$

Zu K_H konstruiert man die Kummer-Überlagerung mit $n=2$, und zu K_C mit $n=2$ und $m_{(3)} = 4$ bastelt man eine Uniformisierung wie im Fall B, $n=2$. Zusammen gibt das die gewünschte (nicht-abelsche) Uniformisierung.

$$n_H = 2, n_C = 3, m_H = m_C = 2:$$

Mit der Kummer-Überlagerung zu $n=2$ für K_H kombinieren wir die Uniformisierung von K_C mit $n=3$ und $m_{(3)} = 1$ aus 6.1.5. Das ergibt eine abelsche Uniformisierung zu den angegebenen Gewichten.

In den drei restlichen Fällen kann man die Existenz einer abelschen Uniformisierung durch längere Rechnereien verifizieren (6.5.3). Auch hier könnte ein Zusammensetzungs-Beweis wie in den ersten Beispielen funktionieren, wenn man die Situation in den Fünffachpunkten geeignet interpretiert.

E. G_{360} -Konfiguration.

$$n = 2, m_{(3)} = m_{(5)} = 4, m_{(4)} = 2:$$

Hier kann man wieder wie im Fall B, $n=2$ Doppelbüschel zusammensetzen.

NOTATIONSLISTE

	Ballquotient, komplex-hyperbolische Fläche	1.1.2
Prop S	Proportionalitätsabweichung	1.1.5
Prop C	relative Proportionalitätsabweichung	1.2.5
$\overline{\text{Prop}}(S,D)$	logarithmische Proportionalitätsabweichung	1.3.6
$\overline{\text{Prop}} C$	logarithmische relative Prop.abw.	1.3.6
K	Kurvenkonfiguration	2.2.1
K	Geradenkonfiguration	2.2.1
L_i	Kurven in K	2.2.1
k	Anzahl der Kurven	2.2.1
S	Trägerfläche von K	2.2.1
p_v	singuläre Schnittpunkte	2.2.2
ℓ	Anzahl der singulären Schnittpunkte	2.2.2
r_v	Schnittvielfachheit von p_v	2.2.2
$\tau_i^{(r)}$	Anzahl der r-fach-Punkte auf L_i	2.2.2
τ_i	Anzahl der Schnittpunkte auf L_i	2.2.2
σ_i	Anzahl der singulären Schnittpunkte auf L_i	2.2.2
S'	Aufblasung von S in den p_v	2.2.3
L'_i	Eigentliche Urbilder der L_i	2.2.3
E'_v	Exzeptionelle Kurve zu p_v	2.2.3
K'	Desingularisierung von K	2.2.3
n_i, m_v	Gewichte	2.2.4
x_i, y_v	Gewichte $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ $y_v = -1 - \frac{1}{m_v}$	2.2.4
$\pi: Y \rightarrow S'$	Uniformisierung	2.3.1
S°	Komplement von K in S bzw. K' in S'	2.3.1
N	Überlagerungsgrad von π	2.3.1
$\tilde{L}_i, \tilde{E}'_v$	Urbilder von L'_i bzw. E'_v in Y	2.3.1

G_i, P_v	Linearformen, entsprechen Prop \tilde{L}_1 , Prop \tilde{E}_v	3.1.1
Prop_K	Quadratische Form, entspricht Prop Y	3.1.1
Q	Darstellungsmatrix von Prop_K	3.1.3
Q'	Modifizierte Matrix zu Prop_K	3.2.1
m_v^*, y_v^*	verallgemeinerte Punktgewichte	3.5.1
m_v, y_v	physische Gewichte	3.5.1
Y^*	Uniformisierung; Niederblasung von Y	3.5.1
D	elliptische Kurven auf Y bzw. Y^*	3.5.1
\tilde{L}_1^*	Transformierte von \tilde{L}_1 auf Y	3.5.1
(Y^*, D)	Uniformisierung (offene Fläche mit Komp.)	3.5.1
$Y^* - D$	Uniformisierung (offene Fläche)	3.5.1
	(quasi-) hyperbolische Gewichte, Konfiguration	4.2.1
Q'', U	Matrizen zu K, $Q' = 3Q'' - U$, $U_{ij} = 1$	4.2.4
	homogene Konfiguration	4.3.2
	konstante Gewichte	4.3.2
	Kummer-Uniformisierung	6.1.2
H	Fundamentalgruppe von S°	6.3.3
H'	Abelsche Fundamentalgruppe von S°	6.3.3
H_p	lokale Fundamentalgruppe in p	6.3.9
ι_p	Homomorphismus $\iota_p: H_p \rightarrow H$	6.3.9
L_{k+v}^i	E'_v	6.3.9
ω_{ap}	Erzeugende von H_p	6.3.9

LITERATURVERZEICHNIS

- [BPV] Barth, W., C. Peters und A. van de Ven:
Compact Complex Surfaces
Springer-Verlag Berlin 1984
- [BGM] Berger, M., P. Gauduchon und E. Mazet:
Le Spectre d'une Variété Riemannienne
Springer Lecture Notes in Mathematics 194 (1971)
- [Bo] Borel, Armand:
Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces
Topology 2 (1963), 111-122
- [Br-Kn] Brieskorn, Egbert und Horst Knörrer:
Ebene algebraische Kurven
Birkhäuser Basel 1981
- [Ch] Cheniot, Denis:
Une démonstration du théorème de Zariski et de
Van Kampen
Compositio Math. 27 (1973), 141-158
- [De-Mo] Deligne, Pierre und George D. Mostow:
Monodromy of hypergeometric functions and
non-lattice integral monodromy
Preprint I.H.E.S. 1983
- [Fo₁] Fox, Ralph H.:
On Fenchel's conjecture about F-groups
Matematisk Tidsskrift B (1952), 61-65
- [Fo₂] Fox, Ralph H.:
Covering spaces with singularities
in: Algebraic Geometry and Topology
A Symposium in Honor of S. Lefschetz
Princeton University Press 1957, 243-257
- [Fr-Kl] Fricke, Robert und Felix Klein:
Vorlesungen über die Theorie der automorphen
Funktionen (Band 2)
Nachdruck Teubner-Verlag Stuttgart 1965
- [Goë] Goethe, Johann Wolfgang v.:
Faust. Der Tragödie erster Teil.
Reclam-Verlag Stuttgart 1971

- [Gr-Re] Grauert, Hans und Reinhold Remmert:
Komplexe Räume
Math. Ann. 136 (1958), 245-318
- [Grü] Grünbaum, Branko:
Arrangements of Hyperplanes
Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics,
Graph Theory and Computing, p. 41-106
Baton Rouge 1971
- [Ham] Hammond, William F.:
Chern numbers of 2-dimensional Satake
compactifications
J. London Math. Soc. 14 (1976), 65-70
- [Har] Hartshorne, Robin:
Algebraic Geometry
Springer-Verlag New York 1977
- [He] Hemperly, John C.:
The parabolic contribution to the number of
linearly independent automorphic forms on a
certain bounded domain
Amer. J. Math. 94 (1972), 1078-1100
- [Hi₁] Hirzebruch, Friedrich:
Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch
Symp. Int. Top. Alg. 1956, México
Univ. México (1958), 129-144
- [Hi₂] Hirzebruch, Friedrich:
The signature theorem: Reminiscences and
recreation
in: Prospects of Mathematics
Ann. of Math. Stud. 70
Princeton University Press 1971
- [Hi₃] Hirzebruch, Friedrich:
Arrangements of lines and algebraic surfaces
Progress in Mathematics Vol. 36, 113-140
Birkhäuser Boston 1983
- [Hi₄] Hirzebruch, Friedrich:
Chern numbers of algebraic surfaces
Math. Ann. 266 (1984), 351-356
- [Hol] Holzapfel, Rolf-Peter:
Invariants of arithmetic ball quotient surfaces
Math. Nachr. 103 (1981), 117-153

- [Ii₁] Iitaka, Shigeru:
Geometry on complements of lines in P^2
Tokyo J. Math. 1 (1978), 1-19
- [Ii₂] Iitaka, Shigeru:
Algebraic Geometry
Springer-Verlag New York 1982
- [In] Inoue, Masahisa:
Some surfaces of general type with positive
indices
Preprint (1981)
- [Iv] Ivinskis, Kestutis:
Diplomarbeit, Bonn (in Vorbereitung)
- [vKa] Kampen, Egbert van:
On the fundamental group of an algebraic curve
Amer. J. Math. 55 (1933), 255-260
- [Ka] Kato, Mitsuyoshi:
On the existence of finite principal uniformiza-
tions of CP^2 along weighted line configurations
Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 38 (1984),
127-131
- [K1] Klein, Felix:
Über die Transformation siebenter Ordnung der
elliptischen Funktionen
Ges. Math. Abhandlungen Band 3, LXXXIV, 90-136
Reprint Springer-Verlag Berlin 1973
- [Ko₁] Kobayashi, Ryoichi:
Kähler-Einstein metric on an open algebraic
manifold
Osaka J. Math. 21 (1984), 399-418
- [Ko₂] Ryoichi Kobayashi:
Einstein-Kähler metrics on open algebraic surfaces
of general type
Preprint (1984)
- [Ko₃] Kobayashi, Ryoichi:
Einstein-Kähler V -metrics on open Satake
 V -surfaces with isolated quotient singularities
Preprint (1984)
- [Ko-No] Kobayashi, Shoshichi und Katsumi Nomizu:
Foundations of Differential Geometry Vol. I,II
Wiley Interscience New York 1963, 1969

- [Lau] Laufer, Henry B.:
Normal two-dimensional singularities
Ann. of Math. Stud. 71
Princeton University Press 1971
- [LeV] LeVasseur, R.:
Sur le système d'équations aux dérivées partielles
simultanees auxquelles satisfait la series hyper-
geometriques à deux variables
Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. VII (1893), F1-F205
- [Liv] Livné, Ron Aharon:
On certain covers of the universal elliptic curve
Ph. D. Thesis, Harvard (1981)
- [Mi] Miyaoka, Yoichi:
The maximal number of quotient singularities on
surfaces with given numerical invariants
Math. Ann. 268 (1984), 159-171
- [Mo] Mostow, George D.:
Existence of nonarithmetic monodromy groups
Proc. Nat. Acad. Sci. USA 78 (1981), 5948-5950
- [Mo-Si] Mostow, George D. und Yum-Tong Siu:
A compact Kähler surface of negative curvature
not covered by the ball
Ann. of Math. 112 (1980), 321-360
- [Mu₁] Mumford, David:
Hirzebruch's proportionality theorem in the non-
compact case
Invent. math. 42 (1977), 239-272
- [Mu₂] Mumford, David:
An algebraic surface with K ample, $K^2=9$, $p_g=q=0$
Amer. J. Math. 101 (1979), 233-244
- [Or-So₁] Orlik, Peter und Louis Solomon:
Coxeter Arrangements
AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Vol. 40 (1983), Part 2, 269-291
- [Or-So₂] Orlik, Peter und Louis Solomon:
Arrangements defined by unitary reflection groups
Math. Ann. 261 (1982), 339-357
- [Sa] Sakai, Fumio:
Semi-stable curves on algebraic surfaces and
logarithmic pluricanonical maps
Math. Ann. 254 (1980), 89-120

- [Sh-To] Shephard, G. C. und J. A. Todd:
Finite unitary reflection groups
Canad. J. Math. 6 (1954), 274-301
- [Shva] Shvartsman, O. V.:
Discrete groups of reflections in the complex ball
Functional Anal. Appl. 18 (1984), 81-83
- [We] Wells, Raymond O.:
Differential Analysis on Complex Manifolds
Springer-Verlag New York 1980
- [Yo₁] Yoshida, Masaaki:
Orbifold-uniformizing differential equations
Math. Ann. 267 (1984), 125-142
- [Yo₂] Yoshida, Masaaki:
Orbifold-uniformizing differential equations II
Preprint (1984)
- [Yo₃] Yoshida, Masaaki:
Graphs attached to certain complex hyperbolic
discrete reflection groups
Preprint MPI Bonn (1984)
- [Za] Zariski, Oscar:
On the problem of existence of algebraic functions
of two variables possessing a given branch curve
Amer. J. Math. 51 (1929), 305-328