ALGEBRAISCHE PUNKTE AUF ANALYTISCHEN UNTERGRUPPEN ALGEBRAISCHER GRUPPEN

G. Wüstholz

Sonderforschungsbereich 40
Theoretische Mathematik
Beringstr. 4
D-5300 Bonn 1

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 3

MPI/SFB 84-7

1. Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein allgemeines Resultat über arithmetische Eigenschaften von analytischen Homomorphismen zwischen kommutativen algebraischen Gruppen zu beweisen. Viele Ergebnisse und Probleme in der Transzendenztheorie lassen sich auf diese Frage zurückführen, und unser Resultat gibt auf eine ganze Reihe von offenen Fragen eine Antwort.

Es hat sich herausgestellt, daß das Studium von analytischen Homomorphismen zwischen kommutativen algebraischen Gruppen in der Transzendenztheorie sehr nutzbringend ist und zu sehr schönen Resultaten geführt hat. Dies wurde von S. Lang vor etwa zwanzig Jahren bemerkt und er bewies in [L1], daß für kommutative algebraische Gruppen G, welche über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sind, und für Elemente $\alpha \neq 0$ aus $T(G)(\overline{\mathbb{Q}})$ das Bild $\exp_G(\alpha)$ unter der Exponentialabbildung im allgemeinen nicht in $G(\overline{\mathbb{Q}})$ liegt. Hier bedeuten $T(G)$ der Tangentialraum von G im neutralen Element, $T(G)(\overline{\mathbb{Q}})$ die Menge der $\overline{\mathbb{Q}}$-rationalen Punkte von $T(G)$ und $G(\overline{\mathbb{Q}})$ die Untergruppen der algebraischen Punkte von G. Mit anderen Worten ist $G(\overline{\mathbb{Q}})$ die Gruppe der $\overline{\mathbb{Q}}$-wertigen Punkte des Gruppenschemas G. Aus diesem Ergebnis von Lang können eine ganze Reihe von Transzendenzresultaten gewonnen werden. Unter anderem gewinnt man hieraus die Transzendenz von e^{α} für algebraisches $\alpha \neq 0$, wenn man $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ setzt, wobei $\mathbb{G}_a$ das additive und $\mathbb{G}_m$ das multiplikative Gruppenschema bezeichne. Dies ist der berühmte Satz von Lindemann. Dieses Ergebnis entspricht einem Ergebnis über 1-Parameter Untergruppen von algebraischen Gruppen. Es wurde kurze Zeit darauf von Lang [L2],[L3] in verschiedene Richtungen auf d-Parameter-Untergruppen von algebraischen Gruppen erweitert. All diesen Arbeiten lag eine von Schneider [Sch1],[Sch2] entwickelte Methode zugrunde.

Eine zweite grundlegende Methode wurde von A. Baker [Ba1], [Ba2] im Zusammenhang mit dem Studium von Linearformen in Logarithmen von algebraischen Zahlen entwickelt. Sie wird in unseren Untersuchungen eine zentrale Rolle spielen, zusammen mit sogenannten Nullstellenabschätzungen auf algebraischen Gruppen. Diese wurden in den letzten Jahren von D.W. Masser und dem Autor entwickelt [Ma-Wü1],[Ma-Wü2],[Ma-Wü3] und vom Autoren [Wü1] auf Multiplizitätsabschätzungen erweitert.

Im folgenden sei G eine kommutative algebraische Gruppe der Dimension n und $T(G)$ ihr Tangentialraum im neutralen Element. Dieser trägt dann als $\overline{\mathbb{Q}}$-Vektorraum der Derivationen des lokalen Ringes von G im neutralen Element in natürlicher Weise eine $\overline{\mathbb{Q}}$-Struktur, die sich auf die links- bzw. rechts invarianten Vektorfelder überträgt. Insbesondere kann die Exponentialabbildung so gewählt werden, daß die darin auftrtenden analytischen Funktionen eine Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt mit algebraischen Koeffizienten besitzen. Die Exponentialabbildung

$$T(G) \xrightarrow{\exp_G} G$$

ist somit ebenfalls über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert (allerdings nicht in der Kategorie der Schemata bezüglich der Zariski-Topologie).

Sind G und G' komplexe Lie-Gruppen, so nennen wir einen Homomorphimus

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

analytisch, wenn φ ein Homomorphismus komplexer Lie-Gruppen ist. Im folgenden wollen wir nur kommutative Lie-Gruppen betrachten. Es ist wohlbekannt, daß φ eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen

$$d\varphi : T(G') \longrightarrow T(G)$$

induziert, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "\varphi"] & G \\ T(G') \arrow[u, "\exp_{G'}"] \arrow[r, "d\varphi"] & T(G) \arrow[u, "\exp_G"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind G' und G über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte algebraische Gruppen, so nennen wir φ definert über $\overline{\mathbb{Q}}$, falls $d\varphi$ ein Homomorphismus von $\overline{\mathbb{Q}}$ - Vektorräumen ist. Es sei darauf hingewiesen, daß $\varphi(G')$ im allgemeinen keine abgeschlossene Untergruppe von G ist. Ist das Differential $d\varphi$ injektiv, so nennen wir φ eine analytische Untergruppe von G.

Hauptsatz. *Seien* G *und* G' *über* $\overline{\mathbb{Q}}$ *definierte kommutative algebraische Gruppen*, $\dim G, \dim G' > 0$,

$$\varphi : G' \longrightarrow G$$

ein über $\overline{\mathbb{Q}}$ *definierter analytischer Homomorphismus. Ist dann* $\varphi(G')(\overline{\mathbb{Q}}) \neq 0$, *so gibt es eine algebraische Untergruppe* $H \subseteq \varphi(G')$ *definiert über* $\overline{\mathbb{Q}}$ *mit* $\dim H \geq 1$.

Bemerkungen. 1. Ist H eine algebraische Untergruppe von $\varphi(G')$, die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, so gilt offensichtlich $H(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \varphi(G')(\overline{\mathbb{Q}})$. Also ist der Hauptsatz gerade die Umkehrung dieser trivialen Tatsache.

2. Ist $H \subseteq \varphi(G')$ die maximale über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte algebraische Untergruppe, so ist

$$H(\overline{\mathbb{Q}}) = \varphi(G')(\mathbb{C}) \cap G(\mathbb{Q}) .$$

Um dies zu sehen betrachten wir den kanonischen Homomorphismus $\pi : G \longrightarrow G/H$. Da $H' = (\pi\circ\varphi)^{-1}(0)$ eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G' ist, können wir G'/H' bilden und erhalten eine Lie-Gruppe G''. Nun betrachten wir den induzierten Homomorphismus $\overline{\varphi} : G'' \longrightarrow G/H$ und erhalten einen analytischen Homomorphismus

$$T(G'') \xrightarrow{\exp_{G''}} G'' \xrightarrow{\overline{\varphi}} G/H .$$

Diesen nenen wir $\varphi_0 : T(G'') \longrightarrow G/H$. Er ist ein über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierter analytischer Homomorphismus mit injektivem Differential $d\varphi_0$ zwischen zwei kommutativen algebraischen Gruppen. Wir können nun den Hauptsatz anwenden und finden, daß $\varphi_0(T(G''))\cap(G/H)(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$ ist.

3. In der Bemerkung 2 haben wir schon davon Gebrauch gemacht, daß man immer o.B.d.A. annehmen kann, daß G' ein Vektorraum V ist. Denn wir brauchen nur $V = T(G')$ zu setzen und φ durch $\varphi\circ\exp_{G'}$ zu ersetzen.

4. Der Satz ist nur dann nicht trivial, wenn $\dim G' < \dim G$ gilt. Denn sonst besitzt offenbar $H = G$ die gewünschte Eigenschaft.

5. Wir können o.b.d.A. Annehmen, daß $d\varphi$ injectiv ist.

6. Es genügt, den Satz für den Fall $\dim G' = n - 1$ zu beweisen, wo $n = \dim G$ gesetzt wird. Denn nach 3. können wir annehmen, daß G' ein d-dimensionaler Vektorraum V ist und nach 4. können wir annehmen, daß $d < n$ ist. Nun ist $d\varphi$ injektiv, so daß wir V mit einer Unteralgebra von $T(G)$ identifizieren können. Diese liegt aber stets in einer $n-1$-dimensionalen Unteralgebra W von $T(G)$. Ist V über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, so kann W so gewählt werden, daß W ebenfalls über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist. Haben wir eine algebraische Untergruppe $H = H(W)$ gefunden, so setzen wir

$$H = \bigcap_{W\supset V} H(W),$$

wobei über alle beschriebenen W der Durchschnitt genommen wird. Dies ist eine nicht triviale algebraische Untergruppe mit einer von Null verschiedenen Dimension, die in $\varphi(G')$ liegt und über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist.

Als die im Augenblick wohl interessanteste Anwendung dieses Satzes führen wir noch den folgenden Satz an, den wir in einer nachfolgenden Arbeit beweisen werden. Dazu sei X eine glatte und quasi-projektive Varietät über $\overline{\mathbb{Q}}$ und γ repräsentiere eine Klasse in $H_1(X,\mathbb{Z})$. Representiert ω eine Klasse in $H^0(X;\Omega^1_X)$, so gilt das folgende.

__Satz.__ *Das Integral $\int_\gamma \omega$ ist entweder Null oder transzendent.*

__Bemerkung.__ Das Integral hängt nur von den Klassen von γ und ω ab.

2. Einige Vorbemerkungen

Um die Techniken der Transzendenztheorie einsetzen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen. Insbesondere benötigen wir eine explizite Beschreibung der Exponentialabbildung. Dies wird in [F-W] durchgeführt, und wir wollen dies hier kurz referieren.

Sei also G eine kommutative zusammenhängende algebraische Gruppe. Es ist bekannt, daß es eine maximale zusammenhängende lineare Untergruppe L von G gibt, so daß G eine Erweiterung einer abelschen Varietät A durch L ist. Die lineare Untergruppe L wird in geeigneter Weise kompaktiziert zu $\overline{L}$ mit L-Operation und man setzt dann $G \times \overline{L}/L = \overline{G}$. Dies ist ein Faserbündel über A mit Faser $\overline{L}$. Ist $p : \overline{G} \longrightarrow A$ die kanonische Projektion und D ein ampler Divisor auf A und G_∞ der Divisor $\overline{G} \setminus G$ so setzen wir

$$D_{a,b} = a \cdot p^*(D) + b \cdot G_\infty \quad ,$$

für ganze Zahlen $a,b \geq 1$. Dieser Divisor ist für $a \geq 3$ und $b \geq 1$ sehr ampel. Für solche a und b betrachten wir die Garbe $\mathcal{O}_{\overline{G}}(D_{a,b})$ auf $\overline{G}$. Dann wird duch jede Basis von $H^0(\overline{G}, \mathcal{O}_{\overline{G}}(D_{a,b}))$ eine Einbettung von $\overline{G}$ in den $\mathbb{P}^N$ gegeben. Hierbei ist $N = \dim H^0(\overline{G}, \mathcal{O}_{\overline{G}}(D_{a,b})) - 1$.

Für das weitere sehr wichtig ist die folgende Bemerkung. Ist $\Gamma \subseteq G$ eine endlich erzeugte Untergruppe von G, so können die Koordinaten $X_0, \ldots, X_N$ von $\mathbb{P}^N$ stets so gewählt werden, daß $X_0(\gamma) \neq 0$ ist für alle $\gamma \in \Gamma$. Dies erreicht man durch einen Automorphismus von $\mathbb{P}^N$ über $\overline{\mathbb{Q}}$.

Wir bezeichnen nun mit U die offene affine Menge $\overline{G} \cap (X_0 \neq 0)$ von $\overline{G}$. Da sich die translationsinvarianten Vektorfelder auf G zu translationsinvarianten Vektorfeldern auf $\overline{G}$ fortsetzen, ist für ein Vektorfeld $D : \mathcal{O}_{\overline{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{G}}$ die induzierte Abbildung

$$D : \Gamma(U,\mathcal{O}_{\overline{G}}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{O}_{\overline{G}})$$

eine Derivation. Also stabilisiert D die affine Algebra von U . Insgesamt induziert eine Basis der Lie-Algebra der invarianten Vektorfelder linear unabhängige Derivationen $\partial_1,\dots,\partial_n$ dieser affinen Algebra.

Nun sei $\varphi : G' \longrightarrow G$ eine analytische Untergruppe mit Bild $A \subseteq G$. Dieser ist zwar nicht abgeschlossen, jedoch selbst eine Lie-Gruppe mit Tangentialraum $T(A)$ im neutralen Element. Fortan identifizieren wir stets die analytische Untergruppe φ mit Ihrem Bild A und dessen Tangentialraum $T(A)$ mit einem Unterraum von $T(G)$. Dies können wir natürlich tun, da der Hauptsatz nur eine Aussage über das Bild macht. Schließlich identifizieren wir die algebraische Gruppe G mit ihrem Bild in $\mathbb{P}^N$.

Sind $X_0,\dots,X_N$ die Koordinaten in $\mathbb{P}^N$, so setzen wir für $0 \le i \le N$

$$f_i = X_i \circ \exp_G$$

Die Funktionen f_i sind analytisch und haben eine Wachstumsordnung höchstens gleich 2 (siehe z.B. [F-W]). Wir setzen weiter

$$g_i = f_i/f_0 \qquad (1 \le i \le N)$$

und erhalten meromorphe Funktionen, die in einer Umgebung des Nullpunkts in $T(G)$ sogar analytisch sind.

Fortan setzen wir voraus, daß sowohl G als auch φ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert seien. Dann genügen die Funktionen $g_1,\dots,g_N$ einem System von algebraischen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, da die Derivationen $\partial_1,\dots,\partial_n$ eine Basis für den Vektorraum der Derivationen von $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\overline{G}})$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ bilden. Die Koordinaten in $T(G)$ bezüglich dieser Basis seien $\underline{z} = (z_1,\dots,z_n)$. Dann besitzen die Funktionen $g_i(\underline{z})$ $(1 \le i \le N)$ Potenzreihenentwicklungen im Nullpunkt mit algebraischen Koeffizienten. Sowohl die Funktionen $f_0(\underline{z}),\dots,f_N(\underline{z})$ wie auch die Funktionen $g_1(\underline{z}),\dots,g_N(\underline{z})$ haben die Wachstumsordnung ≤ 2 . Es gilt also

$$(1) \qquad \log |f_i(\underline{z})| \le c_1 \|\underline{z}\|^2 \qquad (0 \le i \le N) ,$$

wenn wir $\|\underline{z}\| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$ setzen, mit einer positiven Konstanten c_1. Außerdem gilt $f_0(\delta) \neq 0$ für $\delta \in \exp_G^{-1}(\Gamma)$, wenn Γ die bereits eingeführte Gruppe ist.

Lemma 2.1 *Es gibt eine endliche Menge* E, *eine ganze Zahl* $b > 0$, *eine Abbildung* $\nu : \Gamma \to E$ *und bihomogene Polynome*

$$E_{e,i}(Y_0,\ldots,Y_N; X_0,\ldots,X_N) \qquad (e \in E, 0 \le i \le N)$$

vom Bigrad b *mit Koeffizienten in* $\overline{\mathbb{Q}}$ *sowie offene Mengen* $U_e \subseteq G \times G$ *mit* $(\gamma, 0) \in U_{\nu(\gamma)}$ *mit der folgenden Eigenschaft:*

(i) *Die Mengen* U_e $(e \in E)$ *überdecken ganz* $G \times G$,

(ii) *für* $(g, g') \in U_e$ *gilt*

$$t \cdot X_i(g+g') = E_{e,i}(Y_0(g),\ldots,Y_N(g); X_0(g'),\ldots,X_N(g'))$$

für $0 \le i \le N$, *für ein von* i *unabhängiges* $t \neq 0$,

(iii) *die Höhe der Polynome* $E_{e,i}$ *ist durch eine Konstante* $c_2 > 0$ *beschränkt.*

Beweis. Dies folgt alles sofort aus der Tatsache, daß die Addition auf G ein Morphismus von $G \times G$ nach G und der topologische Raum G mit der Zariski-Topologie noethersch ist.

Wir halten nun die analytische Untergruppe A mit $0 < d = \dim A < \dim G$ fest. Ihren Tangentialraum $T(A)$ haben wir ja mit der Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(A)$ von A identifiziert. Dies ist eine Unteralgebra von $\mathrm{Lie}(G) = T(G)$. Deren Basis wird gegeben duch $\partial_1,\ldots,\partial_n$. Da wir vorausgesetzt haben, daß A über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sein soll, gibt es eine Basis $\Delta_1,\ldots,\Delta_d$ von

Lie (A) mit

$$\Delta_i = \alpha_{i_1}\,\partial_1 + \ldots + \alpha_{in}\,\partial_n \qquad (1 \leq i \leq d)$$

und $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{dn} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Ist $P(X_0,\ldots,X_N)$ ein homogenes Polynom und g aus G mit $X_0(g) \neq 0$, so definieren wir die Ordnung von $P(X_0,\ldots,X_N)$ in g als das minimale t , für das es nicht negative ganze Zahlen $t_1,\ldots,t_d$ gibt mit $t_1+\ldots+t_d = t$ und

$$\Delta_1^{t_1}\ldots\Delta_d^{t_d}\, P\left(1,\frac{X_1}{X_0},\ldots\frac{X_N}{X_0}\right)(g) \neq 0 \quad .$$

Die Ordnung ist somit eine nicht-negative ganze Zahl oder Unendlich. Insbesondere haben alle Elemente aus dem homogenen Ideal $I(G)$ von G die Ordnung Unendlich. Die Definition der Ordnung hängt natürlich von A ab und wir nennen sie auch "Ordnung längs A". Wir schreiben dafür $\operatorname{ord}_{g,A}(\underline{P})$.

Da die Derivationen $\Delta_1,\ldots,\Delta_d$ translationsinvariant sind folgt sofort, daß die Ordnung von $P(X_0,\ldots,X_N)$ in $\gamma \in \Gamma$ gleich der Ordnung von

$$\underline{P}(E_{0,\nu(\gamma)}(\underline{Y}(\gamma);\underline{X}),\ldots,E_{N,\nu(\gamma)}(\underline{Y}(\gamma),\underline{X}))$$

im Punkte 0 ist, wobei wir $\underline{Y} = (Y_0,\ldots,Y_N)$ und $\underline{X} = (X_0,\ldots,X_N)$ gesetzt haben (siehe auch Abschnitt 3).

Die folgende Bemerkung wird noch wichtig für den weiteren Verlauf sein. Sind G , A und Γ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, so gibt es einen algebraischen Zahlkörper K , über welchem alle diese Objekte definiert sind. Diesen können wir o.B.d.A. als galois'sch voraussetzen und definieren dann für $\beta \in K$

$$\overline{|\beta|} = \max\,(|\sigma\beta|)$$

wobei σ die Elemente von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ durchläuft. Weiter definieren wir den Nenner $\operatorname{den}(\beta)$ von β als die kleinste positive ganze Zahl d , so daß $d \cdot \beta$ ganz algebraisch ist. Die Höhe $h(\beta)$ ist nun definiert als

$$h(\beta) = \max(|\overline{\beta}|, \mathrm{den}(\beta)) .$$

Ist P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, so definieren wir die Höhe $H(P)$ von P als das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten.

Besitzt P Koeffienten in K, so haben diese einen kleinsten gemeinsamen Nenner, den wir $\mathrm{den}(P)$ nennen. Wir können außerdem P^{σ} bilden für $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und setzen dann

$$h(P) = \max(\max_{\sigma} H(P^{\sigma}), \mathrm{den}(P)) .$$

Wir zeigen nun, daß man ein "Additionstheorem" auf G so finden kann, daß dieses in allen Punkten von Γ gültig ist. Dazu sei κ die Mächtigkeit von E in Lemma 2.1 und $L \subseteq K$ der kleinste algebraische Zahlkörper, so daß G und Γ über L definiert sind. Dann wollten wir K so groß wählen, daß $[K : L] \geq \kappa$ gilt und in K Elemente ω wählen, die einen L-Vektorraum der Dimension κ erzeugen. Wir setzen dann

$$E_i(\underline{Y},\underline{X}) = \sum_{e \in E} \omega_e E_{e,i}(\underline{Y},\underline{X})$$

für $0 \leq i \leq N$. Es gibt dann offenbar eine Umgebung $V \supset \Gamma \times 0$ mit der Eigenschaft, daß für $(g,g') \in V$ mit einem $t \neq 0$ gilt

$$t \cdot X_i\,(g+g') = E_i(\underline{Y},\underline{X})(g,g') \qquad (0 \leq i \leq N)$$

Insbesondere gilt $E_0(\underline{Y},\underline{X})(\gamma,0) \neq 0$, da $X_0(\gamma) \neq 0$ nach Wahl der Koordinaten ist. Dieses Additionsgesetz nennen wir

$$\mathcal{E}(\underline{Y},\underline{X}) = (E_0(\underline{Y},\underline{X}),\ldots, E_N(\underline{Y},\underline{X})).$$

Mit anderen Worten: $\mathcal{E}(\underline{Y},\underline{X})(g,g')$ sind Koordinaten von $g + g'$.

3. Ein Hilfssatz über Differentiation

Im folgenden benötigen wir genaue Abschätzungen für das Wachstum von Grad und Höhe von derivierten Polynomen in Abhängigkeit vom Grad der Differentialoperatoren. Dazu benötigen wir zunächst eine expliziete Beschreibung der Differentialoperatoren.

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, wird die affine Algebra von $U = \overline{G} \cap (X_0 \neq 0)$ von den Derivationen $\partial_1,\dots,\partial_n$ stabilisiert. Seien $x_1,\dots,x_N$ die Restklassen der Funktionen $X_1/X_0,\dots,X_N/X_0$ auf $\mathbb{P}^N$ modulo dem Ideal $I(G)$. Diese erzeugen die affine Algebra $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\overline{G}})$ der offenen affinen Menge U. Wir halten nun einen algebraischen Zahlkörper fest, über dem G,A und Γ definiert sind und nennen ihn K. Dann läßt sich $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\overline{G}})$ schreiben als $K[x_1,\dots,x_N]$. Da diese Derivationen die Algebra $K[x_1,\dots,x_N]$ stabilisieren, erhält man Polynome

$$p_{ij}\left(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_N}{X_0}\right) \qquad (1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq N)$$

im Polynomenring $K\left[\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_N}{X_0}\right]$, so daß

$$\partial_i x_j = p_{ij}(x_1,\dots,x_N) \qquad (1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq N)$$

gilt. Sei δ_0 das Maximum der Grade der Polynome p_{ij} und h_0 das Maximum ihrer Höhen, ferner sei $\delta_{ij} = \deg p_{ij}$ $(1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq N)$. Wir können nun die Derivationen $\partial_1,\dots,\partial_n$ liften zu Derivationen von $K\left[\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_N}{X_0}\right]$, indem wir setzen

$$\partial_i\left(\frac{X_j}{X_0}\right) = p_{ij}\left(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_N}{X_0}\right)$$

für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq N$. Da die Derivationen in $K[x_1,\dots,x_N]$ kommutieren (G ist kommutativ!), folgt für je zwei dieser Derivationen ∂ und ∂'

$$[\partial,\partial'] : K\left[\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}\right] \longrightarrow I(G) \cdot M_0^{-1}$$

sowie

$$\partial : I(G) \cdot M_0^{-1} \longrightarrow I(G) \cdot M_0^{-1} \quad ,$$

wenn M_0 das multiplikative Monoid der nicht negativen Potenzen von X_0 ist und $I(G) \cdot M_0^{-1}$ die homogene Lokalisierung ist (d.h. alles hat Grad 0).

Alle unsere Differentialoperatoren sind translationsinvariant, was bedeutet, daß für homogene Polynome $P(X_0, \dots, X_N)$ und ∂ wie oben mit $D = \deg P$ die folgende Beziehung gilt : Ist M das von X_0 und E_0 erzeugte multiplikative Monoid so gilt

$$\partial(P/X_0^D)\ (\underline{X}) \equiv \partial(P \circ E/E_0^D)\ (\underline{X},\underline{X}(0)) \quad \mathrm{mod}\ I(G)M^{-1}$$

Für weitere Details sieht auch [Wü2], Abschnitt 3. Diese Kongruenz überträgt sich natürlich auch auf beliebige Differentialoperatoren.

<u>Proposition 3.1.</u> *Ist* $P(X_0,\dots,X_N)$ *ein homogenes Polynom vom Grad* D *mit Höhe* $H(P)$ *und Grad* $D(P)$ *und sind* $t_1,\dots,t_d$ *nicht negative ganze Zahlen mit* $t_1 + \dots + t_d = T$ *und* $\Delta = \Delta_1^{t_1} \dots \Delta_d^{t_d}$ *, so gilt*

(i) $\deg \Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0)) = b \cdot D$,

(ii) $H\,(\Delta\,(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0)) \le (D + T)^{c(D+T)}\, H(\underline{P})$

mit einer von D,T *und* $H(P)$ *unabhängigen Konstanten* $c > 0$.

Um diese Proposition zu beweisen benötigen wir das folgende

<u>Lemma 3.2</u> *Ist* $\underline{P}(X_1,\dots,X_n)$ *ein Polynom mit Höhe* $H(\underline{P})$ *und Grad* $d(\underline{P})$ *und sind* $F_1(Y_1,\dots,Y_m), \dots, F_n(Y_1,\dots,Y_m)$ *Polynome vom Grad* $d(F_1), \dots, d(F_n)$ *und mit Höhen* $H(F_1),\dots,H(F_n)$ *, die durch* D *und* H *beschränkt seien. Dann gilt*

(i) $\quad H(F_1 \dots F_n) \le H(F_1) \dots H(F_n)(nm)^{d(F_1)+\dots+d(F_n)}$,

(ii) $\quad H(P(F_1,\dots,F_n)) \le H(P) \cdot H^{cd(P)D}$

mit einer von $H, D, H(P)$ *und* $d(P)$ *unabhängigen Konstanten* $c > 0$.

Beweis. Übungsaufgabe.

Beweis der Proposition 3.1. Aus Lemma 3.2 folgt sofort

$$H(P \circ E/X_0^{bD}) \le H(P)\ c^D$$

mit einer von D und $H(P)$ unabhängigen Konstanten. Dann zeigt man durch Induktion über T , daß

$$H(\Delta(P \circ E/X_0^{bD})\ (\underline{X}, \underline{X}(0)) \le (D + T)^{c(D+T)} H(P)$$

gilt, wobei die erste Ungleichung benutzt wird und c eine neue, von $D, T, H(P)$ unabhängige Konstante ist. Dies geschieht folgendermaßen: Zunächst zeigt man daß der Grad von $\Delta(P \circ E/X_0^{bD})$ in den Variablen $X_1/X_0, \dots, X_N/X_0$ durch

$$bD + (\delta_0 - 1)\ T$$

beschränkt ist. Dann zeigt man durch Induktion, daß die Höhe von $\Delta(P \circ E/X_0^{bD})$ durch

$$(D + T)^{c(D+T)}\ H(P)$$

beschränkt ist für eine von $D, T, H(P)$ unabhängige Konstante c. Dazu zeigt man diese Abschätzung zuerst für Monome in

$$Y_0, \dots, Y_N, X_1/X_0, \dots, X_N/X_0$$

und nutzt dann die Beziehung

$$H(F + G) \le H(F) + H(G)$$

aus für Polynome F und G.

Ersetzt man nun $Y_0,\ldots,Y_N$ durch $X_0,\ldots,X_N$ und $X_1/X_0,\ldots,X_N/X_0$ durch die Werte im Punkt $0 \in G$, so erhält man einen zusätzlichen Faktoren für die Höhenabschätzung der Form

$$c^{D+T}$$

mit einer wiederum nicht von D,T und $H(P)$ abhängigen Konstanten. Insgesamt ergibt sich dann die behauptete Ungleichung (ii).

Dabei haben wir bereits die triviale Abschätzung (i) benutzt.

4. Das Hilfspolynom.

Wie wählen nun $0 \neq u \in \varphi^{-1}(G(\mathbb{Q}))$ und setzen $\gamma_0 = \varphi(u)$. Nach Voraussetzung können wir u so wählen, daß $\gamma_0 \neq 0$ ist. Dann bezeichnen wir mit Γ die von γ_0 erzeugte Untergruppe und mit e ihre Ordnung. Für positive S setzen wir

$$\Gamma(S) = \{s \cdot \gamma_0 \,;\, 0 \leq s \leq S\} \ .$$

Die Differentialoperatoren $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1}$ erzeugen ein multiplikatives Monoid $\mathcal{D}$, dessen Elemente die Form $\Delta_1^{t_1} \ldots \Delta_{n-1}^{t_{n-1}}$ mit ganzen $t_1,\ldots,t_{n-1} \geq 0$ besitzen. Für ganze Zahlen $T \geq 0$ betrachten wir die Teilmenge $\mathcal{D}(T)$ derjenigen Elemente, für die $t_1 + \ldots + t_{n-1} \leq T$ gilt. Schließlich sei $m = [K:\mathbb{Q}]$ und die Koordinaten $X_0,\ldots,X_N$ so gewählt, daß $X_0(\gamma_0) = 1$ gilt. Wir wählen nun positive ganze Zahlen S,T,D mit

$$(2) \qquad D^n \geq 2nm\,(T+n)^{n-1}\,|\Gamma(S)| \ .$$

Der Parameter T sei ferner hinreichend groß, damit man die auftretenden Konstanten $c_1,c_2,\ldots$ damit schlucken kann.

Lemma 4.1. *Es gibt ein homogenes Polynom* $P(X_0,\ldots,X_N)$ *mit ganzen Koeffizienten, das nicht in* $I(G)$*, liegt mit einem Grad* D *und*

(i) $\operatorname{ord}_{\gamma,A} \Delta\,(P \cdot E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0)) \geq T/2$, *für alle* $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$ *und alle* $\gamma \in \Gamma(S)$.

(ii) *Es gilt für* $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$ *und* $\gamma \in \Gamma(S)$

$$H(\Delta(P \cdot E/X_\bullet^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0)) \leq (D+T)^{c_1(D+T)}\,c_2^{DS^2} \ .$$

Beweis. Da die Dimension der algebraischen Gruppe G gleich n ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß die homogenen Koordinaten $X_0,\ldots,X_n$ algebraisch unabhängig modulo dem homogenen Ideal $I(G)$ sind. Dann sei $P(X_0,\ldots,X_n)$ ein homogenes Polynom mit noch unbestimmten Koeffizienten, dessen Grad gleich D

sei. Die Anzahl der Unbestimmten ist dann gerade gleich

$$\binom{D+n}{n} \geq \frac{D^n}{n!} \quad .$$

Wir werden sie nun so bestimmen, daß

(3) $$(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X}(\gamma), \underline{X}(0)) = 0$$

gilt für $\Delta \in \mathcal{D}(T)$, $\gamma \in \Gamma(S)$. Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den noch ~~unbestimmten~~ Koeffizienten von P mit Koeffizienten in K , da $X_i(\gamma) \in K$ wegen $\Gamma \subseteq G(K)$ für $0 \leq i \leq N$ gewählt werden kann. Die Anzahl der Gleichungen ist um höchstens

$$m \cdot \binom{T+n-1}{n-1} \cdot |\Gamma(S)| \leq m \frac{(T+n)^{n-1}}{(n-1)!} |\Gamma(S)| \quad .$$

Man verifiziert nun wie im Beweis der Proposition 3.1, daß die Koeffizienten dieses Gleichungssystems durch

$$(D + T)^{c_3(D+T)} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |X_i(\gamma)| \right)^{c_4 D}$$

beschränkt sind. Dabei haben wir die Koordinaten $X_i(\gamma)$ für $0 \leq i \leq N$, $\gamma \in \Gamma(S)$ so normiert, daß $X_0(\gamma) = 1$ gilt. Nach der Proposition 5 in [Se] gilt für den zweiten Faktoren dieser Abschätzung die Abschätzung

$$\max (|X_i(\gamma)|)^{c_4 D} \leq c_5^{DS^2} \quad ,$$

da γ die Gestalt $s\gamma_0$ besitzt mit $s \leq S$.
Insgesamt erhält man also für die Koeffizienten samt ihren Konjungierten die Abschätzung

$$(D + T)^{c_3(D+T)} c_5^{DS^2}$$

Nach dem Lemma von Siegel unter Berücksichtigung von (2) erhält man nun ein Polynom P mit (i) und (3). Wir müssen nur noch zeigen, daß aus (3) die Bedingung (i) folgt. Zunächst folgt aus (3) zusammen mit Proposition 2 aus [Wü2] für $\gamma \in \Gamma(S)$

$$\mathrm{ord}_{\gamma,A}\, P/A_{\bullet}^{D} \geq T$$

und hieraus für $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$, $\gamma \in \Gamma(S)$,

$$(3') \qquad \mathrm{ord}_{\gamma,A}\, \Delta(P/X_{\bullet}^{D}) \geq T/2 \quad .$$

Dies impliziert wiederum zusammen mit Proposition 2 aus [Wü2] die Behauptung (i) .

5. Einige Abschätzungen.

Die Koordinaten in $T(G) = \mathrm{Lie}\, G$ hatten wir mit $\underline{z} = (z_1,\dots,z_n)$ bezeichnet. Der Punkt $\underline{u} = (u_1,\dots,u_n)$ definiert nun eine 1-Parameter-Untergruppe von G in der folgenden Weise: Wir definieren die lineare Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Lie}\, G$$

durch $z \longmapsto z \cdot \underline{u}$. Dann ist $\exp_G \circ \mathcal{L}$ die gesuchte 1-Parameter-Untergruppe. Wohlgemerkt: Sie ist nicht über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert! Dies macht die ganze Schwierigkeit der Baker'schen Methode aus.

Im Gegensatz dazu haben wir in $\mathrm{Lie}\, G$ den Unterraum $\mathrm{Lie}\, A$ der Kodimension 1, der über K definiert ist. Er läßt sich deshalb definieren durch eine lineare Gleichung

$$\beta_n z_n = \beta_1 z_1 + \dots + \beta_{n-1} z_{n-1}$$

mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ und o.B.d.A. $\beta_n = 1$. Der Vektor $\underline{u}$ liegt in $\mathrm{Lie}\, A$ und genügt daher der Gleichung

$$u_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{n-1} u_{n-1} \quad .$$

Wir setzen nun

$$\Delta_i = \partial_i + \beta_i \partial_n \qquad\qquad (1 \leq i \leq n-1) \quad .$$

Es gilt dann

$$\frac{d}{dz} = u_1 \Delta_1 + \dots + u_{n-1} \Delta_{n-1} \quad .$$

Setzen wir noch für $r > 0$ und homogene Polynome $P(X_0,\dots,X_N)$ in $\mathbb{C}[X_0,\dots,X_N]$

$$\|P\|_r := \max_{\|z\| \leq r} |(P \circ \exp_G)(\underline{z})|$$

sowie

$$\|\underline{P}\|_{r,\mathcal{L}} := \max_{|z| \leq r} |(P \circ \exp_G \circ \mathcal{L})(z)| \quad ,$$

und ist P das Polynom aus Lemma 4.1 , so gilt das folgende Lemma.

Lemma 5.1. (i) *Für* $\Delta \in \mathcal{D}(T)$ *gilt die Abschätzung*

$$\| \Delta\, (P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0))\|_r \leq (D+T)^{c_6(D+T)} c_7^{D(S^2+r^2)} \quad .$$

(ii) *Für alle* $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$, $r > r' > S$ *gilt*

$$\| \Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0))\|_{r',\mathcal{L}} \leq \| \Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0))\|_r \left(\frac{2rr'}{r^2+r'^2}\right)^{ST/2} \quad .$$

Beweis. Die Abschätzung in (i) folgt unmittelbar aus Lemma 4.1 zusammen mit der Abschätzung von $f_i(z)\,(i = 0,\dots,N)$ ganz zu Beginn.

Um die wichtige Abschätzung (ii) einzusehen, setzen wir

$$\Psi(z) = \Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0)) \circ \exp_G \circ \mathcal{L}(z) \quad .$$

Aus der Darstellung von $\frac{d}{dz}$ und aus Lemma 4.1 folgt, daß $\Psi(z)$ Nullstellen in $z = s$ besitzt für $0 \leq s \leq S$, die mindestens die Vielfachheit $T/2$ besitzen. Setzen wir für $r > 0$

$$|\Psi|_r = \max_{|z| \leq r} |\Psi(z)| \quad ,$$

so gilt nach dem Schwarz'schen Lemma

$$|\Psi|_{r'} \leq |\Psi|_r \cdot \left(\frac{2rr'}{r^2+r'^2}\right)^{S \cdot T/2} \quad .$$

Nun ist $|\Psi|_r \leq \| \Delta\, (P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X},\underline{X}(0))\|_r$, womit nun unmittelbar die behauptete Ungleichung folgt.

Wir betrachten nun in G die Multiplikation mit einer positiven ganzen Zahl $\ell \geq 1$. Diese wird gegeben durch $g \mapsto \ell \cdot g$ für $g \in G$. Nun wählen wir $\underline{v}$ in $T(A)$ mit $\ell \cdot \underline{v} = \underline{u}$ und setzen $\gamma'_0 = \exp_G(\underline{v})$. Dann gilt $\ell \cdot \gamma'_0 = \gamma_0$. Schließlich sei Γ' die von γ'_0 erzeugte Untergruppe von G. Da der Grad der Multplikationsabbildung mit ℓ höchstens gleich ℓ^{2n} ist, gibt es einen algebraischen Zahlkörper $L \supseteq K$ mit $[L:K] \leq \ell^{2n}$ und $\Gamma' \subseteq G(L)$.

Lemma 5.2. *Sei* $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$ *und* s *ganz mit* $0 \leq s \leq \ell \cdot S$, *sowie*

$$\delta = \Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X}(s\gamma'_0), \underline{X}(0)) \quad .$$

Dann gilt entweder $\delta = 0$ *oder*

$$|\delta| \geq \{(D+T)^{c_8(D+T)} c_9^{D(S^2+\ell^4)}\}^{-m\ell^{2n}}$$

Beweis. Zunächst beachten wir, daß aufgrund der Norminierung der Koordinaten durch $X_0(\gamma'_0) = 1$ die Zahl δ in L liegt. Dies ist ein algebraischer Zahlkörper vom Grad höchstens gleich $m\ell^{2n}$. Nun berechnen wir die Höhe von γ'_0. Unter Benutzung der Multiplikationsformeln (siehe [Se]) findet man leicht daß

$$h(\gamma'_0) \leq (c_{10} h(\gamma_0))^{\ell^2} \leq c_{11}^{\ell^2}$$

gilt. Schreiben wir $s = s' \cdot \ell + s''$ mit $0 \leq s'' < \ell$ und damit $0 \leq s' \leq S$, so erhält man mittels der Additionsformeln wegen $s\gamma_0' = s'\gamma_0 + s''\gamma_0'$

$$h(s\gamma_0') \leq c_{12}^{S^2+\ell^4}$$

Hiermit findet man wie im Beweis von Lemma 4.1 für die Höhe von δ die Abschätzung

$$h(\ ) \leq (D+T)^{c_{13}(D+T)} \cdot c_{14}^{D \cdot (S^2+\ell^4)} \quad .$$

Ist nun $\delta \neq 0$, so gilt die Abschätzung

$$|\delta| \geq h(\delta)^{-[L:\mathbb{Q}]} ,$$

wie man durch Betrachten der Norm leicht verifiziert, wenn man noch $den(\delta) \leq h(\delta)$ berücksichtigt. Hiermit erhält man dann sofort die gewünschte Ungleichung.

6. Die Extrapolation.

Wir wählen nun eine Konstante $\kappa \geq 5$ und einen hinreichend großen Parameter S. Dann setzen wir $S' = |\Gamma(S)|$. Damit setzen wir

$$D = 2mn\, S' \cdot S^{(n-1)\kappa} \quad ,$$

$$T = 2mn\, S' \cdot S^{n\kappa} - n \quad .$$

Dann ist offenbar (2) erfüllt. Schließlich definieren wir die ganze Zahl ℓ durch

$$\ell^{2n+1} = [S] + 1$$

Dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 6.1. *Für* $\gamma' \in \Gamma'(\ell S)$ *gilt*

$$\mathrm{ord}_{\gamma',A}(P) \geq [T/2] \; .$$

Beweis. Unter Benutzung von Proposition 2 in [Wü2] genügt es zu zeigen, daß für $\Delta \in \mathcal{D}(T/2)$ gilt

$$\Delta(P \circ E/X_0^{bD})(\underline{X}(\gamma'),\underline{X}(0)) = 0 \quad .$$

Die Zahl links haben wir δ genannt. Diese wurde in Lemma 5.1 (ii) abgeschätzt. Wir setzen $r = S^2$, $r' = S + 1$ und erhalten dann unter Verwendung von (i), falls $\delta \neq 0$ ist,

$$\log |\delta| \leq c_{15} S' S^{n\kappa} \log S^{-\frac{1}{2}} \; TS \log S$$

Andererseits gilt aufgrund von Lemma 5.2 die Abschätzung

$$\log |\delta| \leq -c_{16} S' S \; \ell^{2n} \log S \quad .$$

Aus diesen beiden Ungleichungen erhält man

$$TS \log S \leq c_{17} S' S^{n\kappa} \ell^{2n} \log S$$

und hieraus durch Einsetzen von T und Kürzen

$$S \leq c_{18} \cdot \ell^{2n} \quad .$$

Für hinreichend große Wahl von S erhält man um einen Widerspruch. Also muß $\delta = 0$ gelten und das Lemma ist bewiesen.

7. Die Nullenstellenabschätzung.

Das Element γ_0' erzeugt in G die Untergruppe Γ'. In Abschnitt 4 haben wir ein homogenes Polynom $P(X_0,\dots,X_N)$ konstruiert, das auf G nicht identisch verschwindet und den Grad D hat. Von diesem Polynom haben wir in Abschnitt 6 gezeigt, daß es in $\Gamma'(\ell S)$ längs der analytischen Untergruppe A mindestens mit der Ordnung

$$T' = [T/2]$$

verschwindet. Ferner gilt

$$\Gamma'(\ell S) = \ell\Gamma(S) \quad .$$

Wir zeigen nun, daß es dann eine algebraische Untergruppe H mit $H \subseteq A$ geben muß, welche über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist und deren Dimension positiv ist.

Um dies zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß der Index $\sigma = \sigma(A;G)_{\overline{\mathbb{Q}}}$, der in [Wü1] definiert ist, die Ungleichung

(4) $\quad \sigma < (n-1)/n$

erfüllt. Da weiter in [Wü1] nachgewiesen wird, daß $\sigma(A;G)_{\overline{\mathbb{Q}}} = \tau(A;G)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ gilt, ist die Ungleichung (4) erfüllt , wenn

(5) $\quad \tau < (n-1)/n$

gilt. Dies folgt aber aus dem Hauptsatz in [Wü1] . Denn nach Wahl von S,T,ℓ,D gilt zunächst mit der dortigen Konstanten

$$(T/n)^r \geq (c\,D)^r \qquad\qquad (1 \leq r < n)$$

falls mit S hinreichend groß ist und ferner ist

$$(T/n)^{n-1}\,|\Gamma'(\ell S)| \geq (T/n)^{n-1}\,\ell\cdot S' \geq (cD)^n$$

wiederum aufgrund der Wahl der Parameter.

Da das Polynom P nicht identisch auf G verschwindet folgt hieraus, daß mindestens ein τ_r für $1 \leq r < n$ der Ungleichung

$$\tau_r < r$$

genügt. Dies bedeutet, daß es eine algebraische Untergruppe $H \subset G$ gibt, deren Kodimension $\operatorname{cod} H$ gleich r ist, die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist und die in A enthalten ist. Da $r < n$ gilt, folgt

$$\dim H = n - r > 0 \quad .$$

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Literatur

[Ba1] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, Mathematika 13 (1966), 204-216.

[Ba2] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers II, Mathematika 14 (1967), 102-107.

[F-W] G. Faltings, G. Wüstholz, Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften, MPI-Preprint (1984).

[L1] S. Lang, Transcendental points on group varieties, Topology 1 (1962), 313-318.

[L2] S. Lang, Algebraic values of meromorphic maps I, Topology 3 (1965), 183-191.

[L3] S. Lang, Algebraic values of meromorphic maps II, Topology 5 (1966), 363-370.

[Ma-Wü1] D.W. Masser, G. Wüstholz, Zero estimates on group varieties I, Inv. Math. 64 (1981), 489-516.

[Ma-Wü1] D.W. Masser, G. Wüstholz, Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions, Inv. Math. 72 (1983), 407-464.

[Ma-Wü3] D.W. Masser, G. Wüstholz, Zero estimates on group varieties II, preprint.

[Sch1] Th. Schneider, Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale, Journal reine und angewandte Math. 183 (1941), 110-128.

[Sch2] Th. Schneider, Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise, Math. Ann. 121 (1949), 133-140.

[Se] J.P. Serre, Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs, Astérisque 69-70 (1979), 191-202.

[Wü1] G. Wüstholz, Multiplicity estimates on group varieties, preprint.

[Wü2] G. Wüstholz, Über das abelsche Analogon des Lindemann'schen Satzes I, Inv. math. 72 (1983), 363-388.