Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe

by

Wolfgang Soergel

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

MPI/89 – 46

Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe

Wolfgang Soergel*

28. Juli 1989

Zusammenfassung

We give a descripton of "the algebra of category $\mathcal{O}$" which is explicit enough to prove that the structure of the direct summands of $\mathcal{O}$ depends only on the integral Weyl group and the singularity of the central character, as well as to establish a weak version of the duality conjectures of Beilinson and Ginsburg [BGi]. As a byproduct we describe the intersection cohomology of Schubert varieties as modules over the global cohomology ring. These are certain indecomposable graded selfdual modules over the coinvariant algebra of the Weyl group, via the Borel picture for the global cohomology ring of a flag manifold. They play a central role in this article and I predict them an interesting future.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

1.1 Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe . . . 2
1.2 Kategorie $\mathcal{O}$ 4
1.3 Perverse Garben 6
1.4 Danksagung 7

*Geschrieben während eines von der Deutschen Forschungsgemeindschaft finanzierten Aufenthalts an der Harvard University

2 Argumente aus der Darstellungstheorie 7
2.1 Deformation von projektiven Moduln 7
2.2 Endomorphismen antidominanter Projektiver 11
2.3 Homomorphismen in projektive Moduln 14
2.4 Verschiebung durch die Wand 17
2.5 Äquivalenz verschiedener Kategorien 18
2.6 Verschiedene Operationen der Weylgruppe 18

3 Argumente aus der Topologie 20
3.1 Geometrische Realisierung der Hecke-Algebra 20
3.2 Duale Verschiebung durch die Wand 22
3.3 Verschiedene Operationen der Hecke-Algebra 23
3.4 Erweiterungen einfacher Objekte 26
3.5 Beilinson-Ginsburg-Dualität 27

1 Einleitung

1.1 Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Wir definieren die Gruppe $< \mathcal{A} >$ als die freie abel'sche Gruppe über den Objekten modulo den Relationen $A = A' + A''$ wann immer es einen Isomorphismus $A \cong A' \oplus A''$ in $\mathcal{A}$ gibt. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ liefert ein Element $< A > \in < \mathcal{A} >$. Jeder additive (Ko-)Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ liefert einen Homomorphismus $F : < \mathcal{A} > \to < \mathcal{B} >$.

Für einen Ring R bezeichne R-mod^c die Kategorie aller endlich erzeugten R-Moduln. Ist R graduiert, so betrachten wir auch die Kategorie R-Mod^e aller endlich erzeugten graduierten R-Moduln. Für $M = \bigoplus M^i \in R\text{-}Mod^e$ erkläre ich $M[n]$ durch $M[n]^i = M^{i+n}$.

Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein endliches Coxeter-System. Es operiere $\mathcal{W}$ als Spiegelungsgruppe auf $V \in \mathbb{C}\text{-}mod^e$. So operiert $\mathcal{W}$ auf der symmetrischen Algebra $S = S(V)$ und auf dem Ideal $S^+ \subset S$ aller Ausdrücke ohne konstanten Term. Wir bilden die Koinvariantenalgebra $C = C(V, \mathcal{W}) = S/(S^+)^{\mathcal{W}} S$. Wir versehen C mit einer Graduierung so daß $deg V = 2$.

Sei $l : \mathcal{W} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Länge, $\leq$ die Bruhat-Ordnung, also $e \leq \mathcal{W} \leq w_o$ für $e, w_o \in \mathcal{W}$ die Einheit und das längste Element. Wie in [KL1] betrachten wir die Hecke-Algebra $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{W}, \mathcal{S}) = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \mathbf{T}_x$

gegeben durch die Relationen $\mathbf{T}_x\mathbf{T}_y = \mathbf{T}_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $(\mathbf{T}_s + 1)(\mathbf{T}_s - t^2) = 0 \forall s \in \mathcal{S}$.

Wir erklären den involutiven Automorphismus $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $i(t) = t^{-1}$, $i(\mathbf{T}_x) = \mathbf{T}_{x^{-1}}^{-1}$. Kazhdan und Lusztig definieren in [KL1] zwei neue Basen $\{\mathbf{C}_x\}$ und $\{\mathbf{C}'_x\}$ von $\mathcal{H}$ über $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ derart daß $i(\mathbf{C}_x) = \mathbf{C}_x$, $i(\mathbf{C}'_x) = \mathbf{C}'_x$ für alle $x \in \mathcal{W}$. Wir werden nur die zweite dieser Basen benötigen und benennen deshalb $\mathbf{C}'_x$ in $\mathbf{C}_x$ um. Speziell wird $\mathbf{C}_s = t^{-1}(\mathbf{T}_s + 1) \forall s \in \mathcal{S}$ und die $\mathbf{C}_s$ erzeugen $\mathcal{H}$ als Algebra über $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Sei nun C-Mod^e-C die Kategorie aller endlich erzeugten graduierten C-Bimoduln. Durch $\otimes_C$ wird $< C\text{-}Mod^e\text{-}C >$ ein Ring. Wir betrachten für $s \in \mathcal{S}$ die s-Invarianten $C^s \subset C$.

Zerlegungssatz 1 *Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ kristallographisch.*

i.) *Wir können einen Ringhomomorphismus $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to < C\text{-}Mod^e\text{-}C >$ erklären durch $\mathcal{E}(t) = < C[-1] >, \mathcal{E}(\mathbf{C}_s) = < C \otimes_{C^s} C > [1] \forall s \in \mathcal{S}$.*

ii.) *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es $B_x \in C\text{-}Mod^e\text{-}C$ wohlbestimmt bis auf Isomorphismus so daß $\mathcal{E}(\mathbf{C}_x) = < B_x >$. Selbst in C-mod^e-C sind die B_x paarweise nicht isomorph und direkt unzerlegbar.*

iii.) *Sei $\mathbb{C} \in C\text{-}Mod^e$ der eindimensionale Modul im Grad Null. So ist $D_x \cong B_x \otimes_C \mathbb{C} \in C\text{-}Mod^e$ wohlbestimmt bis auf Isomorphismus. Selbst als nichtgraduierte Objekte sind die D_x paarweise nicht isomorph und direkt unzerlegbar.*

Bemerkungen:

1. Wir können nun offensichtlich eine Operation der Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ auf $< C\text{-}Mod^e >$ erklären durch $\mathbf{T}M = \mathcal{E}(\mathbf{T}) \otimes_C M \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}, M \in < C\text{-}Mod^e >$. In diesen Notationen ist dann $< D_x > = \mathbf{C}_x < \mathbb{C} >$.

2. Unter obiger Operation von $\mathcal{H}$ auf $< C\text{-}Mod^e >$ ist $tM = M[-1]$. Für $s \in \mathcal{S}, M \in C\text{-}Mod^e$ läßt sich $\mathbf{C}_s M = C \otimes_{C^s} M[1]$ wie folgt beschreiben: Man wähle $v \in V - \{0\}$ mit $sv = -v$ und erkläre $A_s^v : C \to C$ durch $A_s^v f = \frac{f - sf}{v}$. Sodann setze man $F_s M = M \oplus M$ als Vektorraum, versehe ihn mit der Graduierung $(F_s M)^i = M^{i+1} \oplus M^{i-1}$ und erkläre die Operation von $f \in C$ durch $f(m, m') = (fm + (A_s^v f)m', (sf)m')$. Die Funktoren F_s und $C[1] \otimes_{C^s}$ sind dann natürlich äquivalent. Ich überlasse die Rechnung dem Leser.

3. Wir erklären eine Dualität d auf C-*Mod*^{e} durch $(dM)^i = (M^{-i})^*$. Man prüft, daß für alle $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$ gilt: $\mathbf{T}d = di(\mathbf{T})$ als Endomorphismen von $< C\text{-}Mod^e >$. Insbesondere sind die D_x selbstdual, $dD_x \cong D_x$.
4. Offensichtlich ist $D_e \cong \mathbb{C}$. Wir werden zeigen, daß $D_{w_o} \cong C[l(w_o)]$. Allgemeiner ist $\forall x \in \mathcal{W}$ so daß $\mathbf{C}_x = t^{-l(x)} \sum_{y \leq x} \mathbf{T}_y$ unser Modul D_x isomorph zum Bild einer Multiplikations-Abbildung $D_x \cong im((f_x \cdot) : C[l(x)] \to C[2l(w_o) - l(x)])$ für ein geeignetes $f_x \in C^{2(l(w_o)-l(x))}$ aus dem Schubert-Kalkül. Das folgt aus dem Erweiterungssatz 5 ii.).
5. Wie wir zeigen werden, ist das Theorem in "elementarer Weise" äquivalent zu den Vermutungen von Kazhdan und Lusztig.
6. Wir werden das Theorem aus der Topologie der Fahnenmannigfaltigkeiten herleiten und kommen leider nicht ohne Gewichte aus. Man kann das schon an dem Wort "kristallographisch" sehen. Ich würde dies Wort gerne durch "endlich" ersetzen können.
7. Eigentlich sollte man alles über $\mathbb{Z}$ statt über $\mathbb{C}$ machen, lebt doch die Schnittkohomologie schon über $\mathbb{Z}$...

1.2 Kategorie $\mathcal{O}$

Seien $\mathbf{g} \supset \mathbf{b}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und eine Borel'sche Unteralgebra. Sei $\mathbf{n} \subset \mathbf{b}$ das Nilradikal und $\mathbf{h} = \mathbf{b}/\mathbf{n}$. Aus Bequemlichkeit wählen wir eine Spaltung des Lie-Algebren- Homomorphismus $\mathbf{b} \to \mathbf{h}$ und fassen $\mathbf{h}$ als Cartan'sche von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{g}$ auf.

Wir wollen die Kategorie $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbf{g}, \mathbf{b})$ aus [BGG2] untersuchen. Das ist die Kategorie aller endlich erzeugten $\mathbf{g}$-Moduln, die lokal $\mathbf{b}$-endlich sind und halbeinfach über $\mathbf{h}$. Sei $P \in \mathcal{O}$ ein antidominanter Projektiver, d.h. die projektive Decke in $\mathcal{O}$ eines einfachen Verma-Moduls. Wir definieren den Funktor

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P = Hom_{\mathbf{g}}(P, \ ) : \mathcal{O} \longrightarrow mod^e\text{-}End_{\mathbf{g}}(P).$$

Sei $\mathcal{O}(P)$ der direkte Summand von $\mathcal{O}$, der P enthält. Ein Hauptresultat dieser Arbeit ist der folgende

Struktursatz 2 *Sei $M \in \mathcal{O}$ beliebig, $Q \in \mathcal{O}(P)$ projektiv. So induziert $\mathbf{V}$ einen Isomorphismus*

$$Hom_{\mathbf{g}}(M, Q) \longrightarrow Hom_{End(P)}(\mathbf{V}M, \mathbf{V}Q).$$

Es gilt also, $End_{\mathbf{g}}P$ zu bestimmen. Sei $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{g}) \supset Z$ die universelle Einhüllende von $\mathbf{g}$ und deren Zentrum. In aller Allgemeinheit gilt:

Proposition 1 *Sei $P \in \mathcal{O}$ ein antidominanter Projektiver. So ist die Multiplikation $Z \to End_{\mathbf{g}}P$ surjektiv.*

Um genauere Aussagen zu machen brauchen wir weitere Notationen. Man betrachte zu $\mu \in \mathbf{h}^*$ den Verma-Modul $M(\mu) = \mathbf{U} \otimes_{\mathbf{b}} \mathbb{C}_\mu$, dessen irreduziblen Quotienten $L(\mu)$ und eine projektive Decke $P(\mu)$ von $L(\mu)$ in $\mathcal{O}$. Wir definieren $\rho \in \mathbf{h}^*$ durch $\mathbb{C}_{2\rho} \cong \bigwedge^{max} \mathbf{n}$ und erklären die zum Fixpunkt $(-\rho)$ verschobene Operation der Weylgruppe $\mathcal{W}$ durch $w \cdot \mu = w(\mu + \rho) - \rho$. Wir normalisieren den Harish-Chandra-Homomorphismus $\xi^\sharp : Z \to S = S(\mathbf{h})$ durch die Bedingung $\xi^\sharp(z) - z \in \mathbf{Un}$. Jedes $\nu \in \mathbf{h}^*$ definiert $(+\nu) : \mathbf{h}^* \to \mathbf{h}^*$ und $(+\nu)^\sharp : S \to S$. Wir wollen uns in dieser Einleitung darauf beschränken, $End_{\mathbf{g}}P(w_\circ \cdot \lambda)$ für λ ganz und dominant anzugeben. Sei $\mathcal{W}_\lambda = \{w \in \mathcal{W} | w \cdot \lambda = \lambda\}$. Sei $C = C(\mathbf{h}, \mathcal{W})$ die Koinvariantenalgebra zur Weylgruppe, $p : S \to C$ die Quotientenabbildung.

Endomorphismensatz 3 *Sei $\lambda \in \mathbf{h}^*$ ganz und dominant.*

i.) *Das Bild der Komposition $p \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \to C$ ist $C^{\mathcal{W}_\lambda}$.*

ii.) *Der Kern dieser Komposition ist der Annullator von $P(w_\circ \cdot \lambda)$.*

Mithin ist kanonisch $End_{\mathbf{g}}P(w_\circ \cdot \lambda) = C^{\mathcal{W}_\lambda}$.

Bemerkungen:

1. Bernstein hat-zumindest für reguläres λ- diesen Satz auch bewiesen [Be]. Offen gestanden ziehe ich seinen Beweis vor. Der Inhalt des Satzes ist durch die Vermutung 5.7 in [BGi] motiviert.
2. Aussage i.) ist klassische Invariantentheorie. Wir werden ii.) durch "Deformation von λ" beweisen.

Wir wollen uns nun auf $\lambda = 0$ einschränken. Es ist dann also $\mathbf{V} = Hom_{\mathbf{g}}(P(w_\circ \cdot 0), \ )$ ein Funktor $\mathbf{V} : \mathcal{O} \longrightarrow C\text{-}mod^e$.

Theorem 4 *Für alle $x \in \mathcal{W}$ ist $\mathbf{V}P(x^{-1} \cdot 0) \cong D_x$ in C-mod^e.*

Bemerkungen:

1. Zusammen mit dem Struktursatz ergibt sich, daß $End_C(\bigoplus D_x)$ die "endlichdimensionale Algebra zu Kategorie $\mathcal{O}$" ist. Diese Beschreibung zeigt, daß die Kategorie $\mathcal{O}$ für regulären zentralen Charakter nur von der ganzen Weylgruppe abhängt. Analoges gilt auf den Wänden.

2. Da die D_x graduiert sind, trägt obige Algebra sogar eine Graduierung. Das ist die "gemischte Struktur" der Kategorie $\mathcal{O}$.
3. Sehr viel explizitere wenn auch weniger allgemeine Informationen über die "endlichdimensionale Algebra zu Kategorie $\mathcal{O}$" kann man bei Irving [Ir] finden.

1.3 Perverse Garben

Seien $G \supset B$ eine komplexe halbeinfache algebraische Gruppe und eine Borel'sche. Sei $X = G/B$ und bezeichne $\mathcal{D}(X)$ die beschränkte derivierte Kategorie mit konstruktibler Kohomologie von Garben komplexer Vektorräume auf X. Für alle $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{D}(X)$ definiere ich den graduierten Vektorraum $Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bigoplus_i Hom_{\mathcal{D}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i])$. Sei nun $\underline{X} \in \mathcal{D}(X)$ die konstante Garbe $\mathbb{C}$ im Grad Null. Das Borel-Bild beschreibt einen Isomorphismus graduierter Algebren $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) = C(\mathbf{h}^*, \mathcal{W}) = C$ zwischen dem Kohomologiering von X und den Koinvarianten.

Nun definieren wir für $M, N \in C\text{-}Mod^e$ den graduierten Vektorraum $Hom^\bullet_C(M, N) = \bigoplus_i Hom_{C-Mod}(M, N[i])$. Die Hyperkohomologie ist ein Funktor $\mathbf{H} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X},\ \ ) : \mathcal{D}(X) \longrightarrow C\text{-}Mod^e$ und wir werden zeigen:

Erweiterungssatz 5 i.) *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{D}(X)$ die Schnittkohomologiekomplexe von B-stabilen Schubert-Varietäten. So induziert $\mathbf{H}$ einen Isomorphismus graduierter Vektorräume*

$$Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow Hom^\bullet_C(\mathbf{H}\mathcal{F}, \mathbf{H}\mathcal{G}).$$

ii.) *Sei $\mathcal{L}_x \in \mathcal{D}(X)$ für $x \in \mathcal{W}$ der Schnittkohomologiekomplex von $\overline{BxB/B}$. So gibt es einen Isomorphismus $\mathbf{H}\mathcal{L}_x \cong D_{x^{-1}}$ von graduierten C-Moduln.*

Bemerkungen:

1. Aus einem Vergleich des Erweiterungssatzes mit dem Struktursatz ergibt sich eine schwache da unkanonische Version der Dualitäts-Vermutungen von Beilinson und Ginsburg [BGi]. Es ist zu hoffen, daß sich die Resultate aus [BGi] auf partielle Fahnenmannigfaltigkeiten verallgemeinern lassen. Man würde dann allgemeiner eine Dualität zwischen "Kategorie $\mathcal{O}$ auf den Wänden" und "perversen Garben auf partiellen Fahnenmannigfaltigkeiten" erhalten.

2. Der Beweis geht so: Zunächst zeigt man ii.) mithilfe von "dualen Verschiebungen durch die Wand", dann folgt Gleichheit der Dimensionen in i.) aus dem Struktursatz und Rechnungen in [BGi] und schließlich folgt Injektivität in i.) aus einem Spektralsequenz-Argument.

1.4 Danksagung

Hauptmotivation für die vorliegende Arbeit waren die wunderbaren Ergebnisse und Vermutungen aus dem Preprint [BGi] von A.Beilinson und V.Ginsburg. Unterwegs habe ich mich besprochen mit J.Bernstein, G.Lusztig, R.MacPherson, K.Vilonen, D.Vogan, W.Schmid und sehr ausfürlich mit J.C.Jantzen und B.Shelton. Ihnen allen gilt mein Dank.

Diese Arbeit ist ein Ergebnis eines von der Deutschen Forschungsgemeindschaft finanzierten Aufenthalts des Autors an der Harvard University. Ich danke beiden Institutionen.

2 Argumente aus der Darstellungstheorie

2.1 Deformation von projektiven Moduln

Sei $S = S(\mathbf{h})$, $\mathbf{U}(\mathbf{b}) \to S$ die Projektion. Wir bilden $M = \mathbf{U} \otimes_{\mathbf{b}} S \in \mathbf{g} \otimes S\text{-}mod^e$.

Proposition 2 *Seien $E, F \in \mathbf{g}\text{-}mod^e$ endlichdimensional.*

a.) *$Hom_{\mathbf{g}\otimes S}(E \otimes M, F \otimes M)$ ist frei über S vom Rang $dim(E \otimes F^*)^0$.*

b.) *$Hom_{\mathbf{g}\otimes S}(E \otimes M, F \otimes M) \otimes_S \mathbb{C}_\mu \to Hom_{\mathbf{g}}(E \otimes M \otimes_S \mathbb{C}_\mu, F \otimes M \otimes_S \mathbb{C}_\mu)$ ist ein Isomorphismus $\forall \mu \in \mathbf{h}^*$.*

c.) *$Hom_{\mathbf{g}\otimes S}(E \otimes M, F \otimes M) \otimes_S S' \to Hom_{\mathbf{g}}(E \otimes M \otimes_S S', F \otimes M \otimes_S S')$ ist ein Isomorphismus für jede flache Erweiterung S' von S.*

Beweis: a.) Wir können oBdA $F = \mathbb{C}$ annehmen. Wir betrachten $End_S M$ als $\mathbf{g}$-Modul über $(Xf)m = X(f(m)) - f(Xm)$. Nach [Sol] ist die Multiplikation $\mathbf{U} \otimes_Z S \to (End_S M)^{\mathbf{g}-endl}$ ein Isomorphismus. Andererseits ist $Hom_{\mathbf{g}\otimes S}(E \otimes M, M) = Hom_{\mathbf{g}}(E, End_S M)$. Damit folgt a.) aus Kostant's Beschreibung des Z-$ad(\mathbf{g})$-Moduls $\mathbf{U}$.

b.) Wir nehmen weiter $F = \mathbb{C}$ an. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} \otimes_Z S & \longrightarrow & End_S(M)^{\mathfrak{g}-endl} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{U} \otimes_Z S \otimes_S \mathbb{C}_\mu & \longrightarrow & End_{\mathbb{C}}(M \otimes_S \mathbb{C}_\mu)^{\mathfrak{g}-endl} \end{array}$$

sind die horizontalen Multiplikations-Abbildungen Isomorphismen, die untere nach [Jo], siehe [Ja],7.25. Ein geometrisches Argument kann man in [So1] finden. Wenden wir $Hom_{\mathfrak{g}}(E, \ )$ an, ergibt sich sofort die Behauptung.

c.) Sei allgemein R ein Ring, $S \subset R$ zentral und $I \subset R$ ein Linksideal. So ist für jeden R-Modul N die Abbildung $Hom_R(R/I, N) \to \{n \in N | In = 0\}$ mit $\phi \mapsto \phi(1 + I)$ ein Isomorphismus von S-Moduln. Sei nun weiter S' eine flache kommutative Ring-Erweiterung von S. Ich schreibe $N' = N \otimes_S S'$ für jeden S-Modul N.

Falls I endlich erzeugt ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} Hom_{R'}((R/I)', N') &= Hom_R(R/I, N') \\ &= \{n \in N' | In = 0\} \\ &= \{n \in N | In = 0\}' \\ &= Hom_R(R/I, N)' \end{aligned}$$

Um c.) zu zeigen können wir oBdA $E = \mathbb{C}$ annehmen. Wir wählen dann $R = \mathbf{U}(\mathbf{g}) \otimes S, S = S$. Für geeignetes I ist $R/I = M$ und die Behauptung folgt sofort. *q.e.d.*

Sei nun $\lambda \in \mathbf{h}^*$. Wir definieren $M_S(\lambda) = \mathbf{U} \otimes_{\mathbf{b}} (\mathbb{C}_\lambda \otimes S)$ in $\mathbf{g} \otimes S\text{-}mod^e$. Hier soll $\mathbf{b}$ durch die Tensorprodukt-Darstellung auf $\mathbb{C}_\lambda \otimes S$ operieren, die Operation von S ist jedoch die Multiplikation auf dem letzten Faktor. Der Modul $M_S(\lambda)$ ist also schlicht M mit einer getwisteten S-Operation. Für jede Lokalisierung T von S setzen wir $M_T(\lambda) = M_S(\lambda) \otimes_S T$. Wir definieren die Kategorie $\mathcal{D}_T(\lambda)$ aller $\mathbf{g} \otimes T$-Moduln, die als direkte Summanden von $E \otimes M_T(\lambda)$ auftreten, für $E \in \mathbf{g}\text{-}mod^e$ endlichdimensional.

Proposition 3 *Seien $M, N \in \mathcal{D}_T(\lambda)$.*

a.) *$Hom_{\mathbf{g} \otimes T}(M, N)$ ist lokal frei über T von endlichem Rang.*

b.) *$Hom_{\mathbf{g} \otimes T}(M, N) \otimes_T \mathbb{C}_\epsilon \to Hom_{\mathbf{g}}(M \otimes_T \mathbb{C}_\epsilon, N \otimes_T \mathbb{C}_\epsilon)$ ist ein Isomorphismus für alle $\epsilon \in \mathbf{h}^* \cap SpecT$.*

c.) *$Hom_{\mathbf{g} \otimes T}(M, N) \to Hom_{\mathbf{g} \otimes T'}(M \otimes_T T', N \otimes_T T')$ ist ein Isomorphismus für jede Lokalisierung T' von T.*

Beweis: Das folgt offensichtlich aus den Definitionen und der vorhergehenden Proposition. *q.e.d.*

Lemma 1 *Sei $M \in \mathcal{D}_T(\lambda)$. Es gibt eine Multimenge $P(M) \subset \mathbf{h}^*$ so daß für alle $\varepsilon \in \mathbf{h}^* \cap SpecT$ der $\mathbf{g}$-Modul $M \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$ eine Filtrierung mit Subquotienten $M(\mu + \varepsilon), \mu \in P(M)$ hat.*

Beweis: Für $M \in \mathbf{g} \otimes T\text{-}mod^e$ und $\nu \in \mathbf{h}^*$ definiere ich den $\mathbf{h}$-Gewichtsraum $M^\nu = \{v \in M | Xv = (X + \nu(X))v \forall X \in \mathbf{h}\}$, wo die erste Multiplikation mit $X \in \mathbf{h} \subset \mathbf{g}$ aufzufassen ist, die zweite jedoch mit $(X + \nu(X)) \in S$. Jedes $M \in \mathcal{D}_T(\lambda)$ zerfällt in Gewichtsräume, die über T lokal frei sind von endlichem Rang. Den Rest des Beweises überlasse ich dem Leser. *q.e.d.*

Sei speziell $R = S_{(0)}$ die Lokalisierung von S an der Stelle $0 \in \mathbf{h}^* \subset SpecT$. Es gibt genau einen einfachen R-Modul $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$.

Proposition 4 *Seien $M, N \in \mathcal{D}_R(\lambda)$. Liefert $\phi : M \to N$ einen Isomorphismus auf der Nullfaser $M \otimes_R \mathbb{C} \to N \otimes_R \mathbb{C}$, so ist ϕ schon selbst ein Isomorphismus.*

Beweis: Man kann jedes Objekt von $\mathcal{D}_R(\lambda)$ in $\mathbf{h}$-Gewichtsräume zerlegen. Diese sind freie R-Moduln von endlichem Rang. Das Lemma von Nakayama beendet den Beweis. *q.e.d.*

Proposition 5 *Zu jedem $M \in \mathcal{D}_R(\lambda)$ gibt es eine Lokalisierung T von S nach einem Element und $\tilde{M} \in \mathcal{D}_T(\lambda)$, so daß $T \subset R$ und $\tilde{M} \otimes_T R \cong M$.*

Beweis: Die Projektoren einer Zerlegung von $E \otimes M_R(\lambda)$ in eine direkte Summe "leben" nach Proposition 2 auf einer offenen affinen Umgebung $U = SpecT$ von $0 \in \mathbf{h}^*$. *q.e.d.*

Wir können in diesem Zusammenhang auch Verschiebungsfunktoren einführen. Zunächst bemerken wir, daß $E \otimes M_T(\lambda) = E \otimes (\mathbf{U} \otimes_{\mathbf{b}} (\mathbb{C}_\lambda \otimes T)) = \mathbf{U} \otimes_{\mathbf{b}} (E \otimes \mathbb{C}_\lambda \otimes T)$ eine Kompositionsreihe mit Faktoren $M_T(\lambda + \nu)$ hat, wo ν die Gewichte von E mit Multiplizitäten durchläuft.

Weiter betrachten wir den Träger $Supp(M_R(\mu))$ von $M_R(\mu)$ in $Spec(Z \otimes R)$. Man erkennt, daß $Supp(M_R(\mu)) \cap Supp(M_R(\eta)) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{W} \cdot \mu = \mathcal{W} \cdot \eta$. Für alle $M \in \mathcal{D}_R(\lambda)$ induziert die Zerlegung von $SuppM$ in Zusammenhangskomponenten eine Zerlegung von M in eine direkte Summe.

Auf diese Weise zerfällt sogar $\mathcal{D}_R(\lambda)$ in eine direkte Summe. Man kann die Projektoren dieser Zerlegung als "Projektoren zu einem zentralen Charakter" auffassen und so wie in [Ja] 4.12 Verschiebungsfunktoren definieren. Sei $\mathcal{P} \subset \mathbf{h}^*$ das Gitter der ganzen Gewichte. Es folgt:

Lemma 2 *Sei $\lambda \in \mathbf{h}^*$ dominant regulär. So ist $M_R(\mu) \in \mathcal{D}_R(\lambda)$ für alle dominanten $\mu \in \lambda + \mathcal{P}$.*

Beweis: Weggelassen.

Insbesondere ist $\mathcal{D}_R(\lambda) = \mathcal{D}_R(\lambda')$ falls λ, λ' beide regulär dominant sind und $\lambda + \mathcal{P} = \lambda' + \mathcal{P} = \Lambda$. Wir bezeichnen diese gemeinsame Kategorie mit $\mathcal{D}_R(\Lambda)$. Sie zerfällt über $Spec(Z \otimes R)$ in $\bigoplus \mathcal{D}_R^\mu(\Lambda)$ wo sich die Summe über alle dominanten $\mu \in \Lambda$ erstreckt und $M_R(\mu) \in \mathcal{D}_R^\mu(\Lambda)$. Wir können jetzt für $\mu, \eta \in \Lambda$ dominant den Verschiebungsfunktor $T_\mu^\eta : \mathcal{D}_R^\mu(\Lambda) \to \mathcal{D}_R^\eta(\Lambda)$ erklären. Er ist exakt und wird unter $\otimes_R \mathbb{C}$ der gewohnte Verschiebungsfunktor.

Ich komme schließlich zur Deformation projektiver Moduln. Sei $\Lambda \in \mathbf{h}^*/\mathcal{P}$. Bezeichne $\mathcal{W}_\Lambda = \{w \in \mathcal{W} | \forall \lambda \in \Lambda$ liegt $w \cdot \lambda - \lambda$ im Wurzelgitter $\}$.

Theorem 6 *Sei $\lambda \in \Lambda$ dominant regulär. Zu jedem $x \in \mathcal{W}_\Lambda$ gibt es $P_R(x \cdot \lambda) \in \mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda)$ so daß $P_R(x \cdot \lambda) \otimes_R \mathbb{C} \cong P(x \cdot \lambda)$.*

Bemerkung: Nach Proposition 4 ist $P_R(x \cdot \lambda)$ wohlbestimmt bis auf Isomorphismus. Jedes unzerlegbare Objekt von $\mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda)$ ist isomorph zu einem der $P_R(x \cdot \lambda)$. Analoges gilt für singuläres dominantes λ.
Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion über $l(x)$. Zunächst erfüllt für $x = e$ sicher $P_R(\lambda) = M_R(\lambda)$ unsere Wünsche. Sei nun $x \in \mathcal{W}_\Lambda$ beliebig und E der einfache $\mathbf{g}$-Modul mit extremem Gewicht $x \cdot \lambda - \lambda$. Wir betrachten $E \otimes M_R(\lambda) \in \mathcal{D}_R(\Lambda)$ und darin die Komponente D aus $\mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda)$.

In der speziellen Faser zerfällt $D \otimes_R \mathbb{C} = \bigoplus_{y \in \mathcal{M}} P(y \cdot \lambda)$ wo $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}_\Lambda$ eine geeignete Multimenge ist. Aufgrund der speziellen Wahl von E kommt x in $\mathcal{M}$ genau einmal vor und ist das längste Element. Nach den Propositionen 3 und 4 läßt sich die spaltende Inklusion $\bigoplus_{y \neq x} P(y \cdot \lambda) \hookrightarrow D \otimes_R \mathbb{C}$ zu einer spaltenden Inklusion $\bigoplus_{y \neq x} P_R(y \cdot \lambda) \hookrightarrow D$ liften. Wir nennen den Kokern $P_R(x \cdot \lambda)$ und sind fertig. *q.e.d.*

2.2 Endomorphismen antidominanter Projektiver

Sei $\Lambda \in \mathbf{h}^*/\mathcal{P}$ und $(\mathcal{W}_\Lambda, \mathcal{S}_\Lambda)$ das zugehörige Coxeter-System. Zu $\lambda \in \Lambda$ betrachten wir $\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda} = \{w \in \mathcal{W} | w \cdot \lambda = \lambda\}$. Wir betrachten dann weiter die Koinvariantenalgebra $C_\Lambda = C(\mathbf{h}, \mathcal{W}_\Lambda)$ und darin ${}^\lambda C_\Lambda = C_\Lambda^{\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}}$. Es sei $p_\Lambda : S \to C_\Lambda$ die Quotientenabbildung. Sei $w_\Lambda \in \mathcal{W}_\Lambda$ das längste Element. Wir wollen zeigen:

Endomorphismensatz 7 *Sei $\Lambda \in \mathbf{h}^*/\mathcal{P}$ und $\lambda \in \Lambda$ dominant.*

i.) *Das Bild der Komposition $p_\Lambda \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \to C_\Lambda$ ist ${}^\lambda C_\Lambda$.*

ii.) *Der Kern dieser Komposition ist der Annullator von $P(w_\Lambda \cdot \lambda)$.*

Insbesondere erhalten wir so einen Isomorphismus $End_{\mathbf{g}} P(w_\Lambda \cdot \lambda) = {}^\lambda C_\Lambda$.

Beweis: i.) folgt aus allgemeiner Invariantentheorie (Luna's Scheibensatz). Für ii.) werden wir uns mehr Mühe geben. Wir beginnen mit

Lemma 3 *Sei $\lambda \in \Lambda$ regulär dominant. So annuliert der Kern von $p_\Lambda \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \to C_\Lambda$ den Modul $P(w_\Lambda \cdot \lambda)$.*

Beweis: Nach Theorem 6 haben wir ein Objekt $P_R(w_\Lambda \cdot \lambda) \in \mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda)$ zu unserer Verfügung. Nach Proposition 5 läßt es sich ausdehnen zu einem Objekt $P \in \mathcal{D}_T(\lambda)$ für eine geeignete offene Umgebung $U = Spec T$ von $0 \in \mathbf{h}^*$. Nach Lemma 1 hat für alle abgeschlossenen $\varepsilon \in U$ die Spezialisierung $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$ eine Verma-Fahne mit Subquotienten $M(x \cdot \lambda + \varepsilon), x \in \mathcal{W}_\Lambda$. Für generisches $\varepsilon \in U$ ist sogar $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon \cong \bigoplus_x M(x \cdot \lambda + \varepsilon)$.

Nun operiert $Z \otimes T$ ja auf P, also auf den $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$. Auf dem Summanden $M(x \cdot \lambda + \varepsilon)$ bei generischem ε operiert $z \otimes t$ dann durch den Skalar $((x \cdot \lambda + \varepsilon) \circ \xi^\sharp(z))\varepsilon(t)$. Jetzt ist $(x^{-1} \cdot \lambda + \varepsilon) \circ \xi^\sharp = (\lambda + x\varepsilon) \circ \xi^\sharp = (x\varepsilon) \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp$. Weiter liefert die (unverschobene) Operation $x : \mathbf{h}^* \to \mathbf{h}^*$ uns $x^\sharp : S \to S$. Wir definieren $j_x : S \otimes T \to T$ durch $j_x(s \otimes t) = x^\sharp(s)t$. Wir definieren $\xi_\lambda^\sharp : Z \otimes T \to S \otimes T$ durch $\xi_\lambda^\sharp(z \otimes t) = (+\lambda)^\sharp \xi^\sharp(z) \otimes t$. So operiert zu guter Letzt $z \otimes t \in Z \otimes T$ auf dem Summand $M(x \cdot \lambda + \varepsilon)$ durch den Skalar $\varepsilon \circ j_x \circ \xi_\lambda^\sharp(z \otimes t) \in \mathbb{C}$.

Sei nun $j : S^{\mathcal{W}_\Lambda} \otimes T \to T$ die gemeinsame Einschränkung der j_x. Sei $z \in (\xi_\lambda^\sharp)^{-1}(S^{\mathcal{W}_\Lambda} \otimes T)$. So operiert z auf $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$ durch den Skalar $\varepsilon \circ j \circ \xi_\lambda^\sharp(z)$, für generisches ε. Andereseits operiert auch $(j \circ \xi_\lambda^\sharp(z)) \in T$

durch diesen selben Skalar auf $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$, für alle ε. Nach Proposition 3 stimmen also die Bilder in $End_{\mathfrak{g}\otimes T} P$ von z und $j \circ \xi_\lambda^\sharp(z)$ überein. Das Lemma ergibt sich nun durch Übergang zur speziellen Faser $\varepsilon = 0$. *q.e.d.*

Als nächstes zeigen wir:

Lemma 4 *Sei $\lambda \in \Lambda$ regulär dominant. So ist die Multiplikation $Z \to End_{\mathfrak{g}} P(w_\Lambda \cdot \lambda)$ surjektiv.*

Beweis: Wir betrachten die Komposition $p_\Lambda \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \to C_\Lambda$. Wir wissen bereits, daß sie surjektiv ist und daß ihr Kern $P(w_\Lambda \cdot \lambda)$ annulliert. Seien $z_i \in Z$ Urbilder einer Basis von C_Λ. So haben $\sum z_i \otimes T$ und $Z \otimes T$ dasselbe Bild in $End_{\mathfrak{g}} P(w_\Lambda \cdot \lambda)$. Wir verkleinern $U = SpecT$ ein wenig, und dürfen annehmen, daß sie sogar dasselbe Bild in $End_{\mathfrak{g}\otimes T} P$ haben. Es reicht nun, für alle $\varepsilon \in U$ mit Ausnahme einer Menge der Kodimension ≥ 2 zu zeigen, dass $Z \to End_{\mathfrak{g}}(P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon)$ surjektiv ist. Denn dann folgt mit einem Dimensionsargument, daß die z_i eine Basis des freien T-Moduls $End_{\mathfrak{g}\otimes T}(P)$ bilden.

Nun zerfällt für alle $\varepsilon \in U$ die Spezialisierung $P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon$ in eine direkte Summe von Moduln mit paarweise verschiedenem zentralem Charakter. Für generisches ε sind die Summanden alle Verma-Moduln, und $Z \to End_{\mathfrak{g}}(P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon)$ ist in der Tat surjektiv. Für subgenerisches ε sind die Summanden nach Lemma 1 Erweiterungen von einem dominanten Verma-Modul mit seinem Sockel. Da die Dimension von $End_{\mathfrak{g}}(P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon)$ konstant ist in ε, müssen diese Summanden die nichttrivialen Erweiterungen sein. Bekanntlich werden alle Endomorphismen solcher Erweiterungen durch Elemente des Zentrums gegeben. Also ist auch für subgenerisches ε die Multiplikation $Z \to End_{\mathfrak{g}}(P \otimes_T \mathbb{C}_\varepsilon)$ surjektiv. *q.e.d.*

Wir haben also den Endomorphismensatz für regulären zentralen Charakter bewiesen. Sei nun $\chi \in MaxZ$. Wir definieren $\mathcal{M}_\chi$ als die Kategorie aller $\mathbf{g}$-Moduln M so daß $\forall v \in M$ gilt: $\chi^n v = 0$ für $n \gg 0$. Die Komplettierung $Z_\chi^\wedge$ operiert auf M.

Seien $\lambda, \mu \in \Lambda$ mit λ dominant und μ dominant regulär. So können wir die Verschiebung aus der Wand $\theta_{out} : \mathcal{M}_{\xi(\lambda)} \to \mathcal{M}_{\xi(\mu)}$ definieren. Andererseits haben wir Ringhomorphismen $(+\lambda)^\sharp \xi^\sharp : Z_{\xi(\lambda)}^\wedge \hookrightarrow R^\wedge$ und $(+\mu)^\sharp \xi^\sharp : Z_{\xi(\mu)}^\wedge \hookrightarrow R^\wedge$. Der zweite ist ein Isomorphismus, und wir können so die Inklusion $\phi_{out} : Z_{\xi(\lambda)}^\wedge \hookrightarrow Z_{\xi(\mu)}^\wedge$ erklären. Wir werden zeigen:

Theorem 8 *Für alle* $z \in Z^{\wedge}_{\xi(\lambda)}$ *und alle* $M \in \mathcal{M}_{\xi(\lambda)}$ *ist* $\phi_{out}(z)\cdot = \theta_{out}(z\cdot) : \theta_{out}M \to \theta_{out}M$.

Beweis: Verschoben.

Wir wollen nun den Beweis des Endomorphismensatzes beenden. Sicher ist $\theta_{out}P(w_\Lambda \cdot \lambda) \cong P(w_\Lambda \cdot \mu)$. Das vorhergehende Theorem versieht uns nun mit einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_\Lambda \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp} & C_\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ End_{\mathbf{g}}P(w_\Lambda \cdot \lambda) & \overset{\theta_{out}}{\hookrightarrow} & End_{\mathbf{g}}P(w_\Lambda \cdot \mu) \end{array}$$

Der Endomorphismensatz für λ folgt nun aus $dim^\lambda C_\Lambda = \sharp(\mathcal{W}_\Lambda/\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}) = dim End_{\mathbf{g}}P(w_\Lambda \cdot \lambda)$. *q.e.d.*

Bemerkung: Wir haben sogar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}^\lambda C_\Lambda & \hookrightarrow & C_\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ End_{\mathbf{g}}P(w_\Lambda \cdot \lambda) & \overset{\theta_{out}}{\hookrightarrow} & End_{\mathbf{g}}P(w_\Lambda \cdot \mu) \end{array}$$

hergeleitet.

Beweis[Theorem]: Sei $Z \supset \ldots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \ldots$ ein zu $\xi(\lambda)^n$ kofinales System. Es reicht, die Aussage für alle $M = \mathbf{U}/J_n\mathbf{U}$ zu zeigen. Weiter folgt die Aussage für $M = \mathbf{U}/J_n\mathbf{U}$, wenn wir sie für einen treuen Modul M von $\mathbf{U}/J_n\mathbf{U}$ kennen. Wir ziehen uns so darauf zurück, die Aussage für $M = M_R(\lambda) \otimes_R R/\mathbf{m}^n$ zu zeigen, wo $\mathbf{m} \subset R$ das maximale Ideal ist.

Jetzt betrachten wir den Verschiebungsfunktor $\theta_{out} = T_\lambda^\mu : \mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda) \to \mathcal{D}_R^\mu(\Lambda)$ aus dem vorhergehenden Abschnitt. Für alle $M \in \mathcal{D}_R^\lambda(\Lambda)$ und $r \in R$ ist $\theta_{out}(r\cdot) = r\cdot$ in $End(\theta_{out}M)$. Wir betrachten speziell $M = M_R(\lambda)$. Es operiert $z \in Z$ auf diesem Modul wie $(+\lambda)^\sharp\xi^\sharp(z) \in R$. Sei $q : R \to R/\mathbf{m}^n$ die Quotientenabbildung. Auf $M_R(\lambda) \otimes_R R/\mathbf{m}_n$ operiert folglich $z \in Z$ wie $q(+\lambda)^\sharp\xi^\sharp(z) \in R/\mathbf{m}^n$. Ferner ist aus Gründen der Invariantentheorie $q \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \to R/\mathbf{m}^n$ eine Surjektion auf die $\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}$-Invarianten der rechten Seite.

Nun betrachten wir andererseits die Operation von $z_1 \in Z$ auf $\theta_{out}M_R(\lambda)$. Mit demselben Deformationsargument wie im Beweis von Lemma 3 folgt für $z_1 \in Z$ mit $(+\mu)^\sharp\xi^\sharp(z_1) \in S^{\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}}$ daß z_1 auf $\theta_{out}M_R(\lambda)$ operiert wie $(+\mu)^\sharp\xi^\sharp(z_1) \in R$.

Sind also $z, z_1 \in Z$ mit $q(+\lambda)^\sharp\xi^\sharp(z) = q(+\mu)^\sharp\xi^\sharp(z_1) = r \in R/\mathbf{m}^n$ so folgt $\theta_{out}(z\cdot) = \theta_{out}(r\cdot) = r\cdot = z_1\cdot$ als Endomorphismen von $\theta_{out}M_R(\lambda) \otimes_R R/\mathbf{m}^n$. *q.e.d.[Theorem]*

2.3 Homomorphismen in projektive Moduln

Sei nun $\lambda \in \Lambda$ dominant. Wir kürzen $P(w_\Lambda \cdot \lambda) = P$ und ${}^\lambda C_\Lambda = C$ ab. Eben haben wir einen Isomorphismus $End_{\mathbf{g}}P = C$ über Surjektionen des Zentrums auf beide Ringe erklärt. Wir können nun den Funktor $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\lambda = Hom_{\mathbf{g}}(P, \ ) : \mathcal{O} \to C\text{-}mod^e$ definieren. Aus abstrakten Gründen [Ga], Kapitel 4, Th.4, S 398 ist $\mathbf{V}$ ein Quotientenfunktor zwischen abelschen Kategorien.

In unserer leicht variierten Situation geht das Argument so: Zunächst ist offensichtlich $P\otimes_C : C\text{-}mod^e \to \mathcal{O}$ linksadjungiert zu $\mathbf{V}$. Weiter ist die natürliche Transformation $id \to \mathbf{V}P\otimes_C$ eine Äquivalenz, denn offensichtlich ist $C \cong \mathbf{V}P \otimes_C C$ und beide Funktoren sind rechtsexakt. Schließlich schenkt uns die Definition der Quotientenkategorie [Ga], Kapitel 3, S 365 eine kanonische Inklusion $Hom_{\mathcal{O}/Ker\mathbf{V}}(M, N) \hookrightarrow Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}N)$. Nun ist aber $Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}N) = Hom_{\mathbf{g}}(P \otimes_C \mathbf{V}M, N)$ und die kanonische Abbildung $P \otimes_C \mathbf{V}M \to M$ wird ein Isomorphismus unter dem exakten Funktor $\mathbf{V}$, d.h. sie ist ein Isomorphismus in $\mathcal{O}/Ker\mathbf{V}$. Das zeigt die Surjektivität unserer kanonischen Inklusion.

Wir zeigen schließlich allgemein folgendes

Lemma 5 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abel'sche Kategorien. Jedes Objekt in $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sei von endlicher Länge. Seien $\mathcal{C}_\mathcal{A}, \mathcal{C}_\mathcal{B}$ "des souscatégories épaisses". Sei (G, F) ein adjungiertes Paar exakter Funktoren und es gelte $G(\mathcal{C}_\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_\mathcal{B}$ sowie $F(\mathcal{C}_\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}_\mathcal{A}$.*

So induziert (G, F) ein adjungiertes Paar zwischen den Quotienten $\mathcal{A}/\mathcal{C}_\mathcal{A} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}/\mathcal{C}$.

Beweis: Sei $N \in \mathcal{B}$ und $N' \subset N$ das größte Teilobjekt mit $N' \in \mathcal{C}_\mathcal{B}$. So ist $FN' \subset FN$ das größte Teilobjekt von FN aus $\mathcal{C}_\mathcal{A}$. In der Tat, da F exakt ist, können wir uns auf den Fall $N' = 0$ beschränken. Gäbe es nun $M \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$ mit $Hom_\mathcal{A}(M, FN) \neq 0$ so folgte $Hom_\mathcal{B}(GM, N) \neq 0$ und das stände im Widerspruch zu $N' = 0$.

Ist dual $M \in \mathcal{A}$ und $M' \subset M$ das größte Teilobjekt so daß $M/M' \in \mathcal{C}_\mathcal{A}$, so ist auch $GM' \subset GM$ das größte Teilobjekt so daß $GM/GM' \in \mathcal{C}_\mathcal{B}$. Mit diesen Notationen ist nun nach der Definition der Quotientenkategorien $Hom_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}(GM, N) = Hom_{\mathcal{B}}(GM', N/N') = Hom_{\mathcal{A}}(M', FN/FN') = Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, FN)$. *q.e.d.*

Sei $\mathcal{O}_\lambda$ die Unterkategorie von $\mathcal{O}$ aller Objekte, deren Kompositionsfaktoren sich sämtlich unter den $L(w \cdot \lambda)$ mit $w \in \mathcal{W}_\Lambda$ finden. Wir wollen zeigen:

Struktursatz 9 *Sei $M \in \mathcal{O}$ beliebig und $Q \in \mathcal{O}_\lambda$ projektiv. So induziert $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\lambda$ einen Isomorphismus $Hom_{\mathfrak{g}}(M, Q) \to Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}Q)$.*

Beweis: Zunächst betrachten wir den Ring C. Er hat genau ein maximales Ideal C^+. Weiter ist C der Kohomologiering einer partiellen Fahnenmannigfaltigkeit. So ist "Auswerten auf dem fundamentalen Zykel" $\omega : C \to \mathbb{C}$ erklärt. Poincaré-Dualität besagt, dass $C \times C \to \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \omega(fg)$ eine nichtentartete Paarung ist. Somit hat der Sockel von C die Dimension Eins.

Jetzt ist sicher $M(\lambda) \subset P$. Wir zeigen:

Lemma 6 $M(\lambda) = \{v \in P | C^+ v = 0\}$

Bemerkung: Setzen wir $P^n = \{v \in P | (C^+)^n v = 0\}$, so ist allgemeiner $P^{n+1}/P^n \cong \bigoplus M(y \cdot \lambda)$, wo über diejenigen kürzesten Repräsentanten y der Nebenklassen $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\lambda$ summiert wird, für die $l(y) = n$.

Beweis[Lemma]: $\subset$.) ist evident, da Z diagonal auf Verma-Moduln operiert. Ich zeige $\supset$.) durch Widerspruch.

Sicher hat $P/M(\lambda)$ eine Verma-Fahne. Wäre $K = \{v \in P | C^+ v = 0\} \neq M(\lambda)$, so folgte $dim Hom_{\mathfrak{g}}(P, K) \geq 2$. Nun liefert die Inklusion $K \hookrightarrow P$ eine Inklusion $Hom_{\mathfrak{g}}(P, K) \hookrightarrow Hom_{\mathfrak{g}}(P, P) = C$ und das Bild ist ein Ideal, das von C^+ annulliert wird. Der Sockel von C ist aber eindimensional, und dieser Widerspruch zeigt das Lemma. *q.e.d.[Lemma]*

Jetzt zeigen wir den Struktursatz.

1. Der behauptete Isomorphismus ist eine Injektion. In der Tat, sei $\phi : M \to Q$. Aus $\phi \neq 0$ folgt $im\phi \neq 0$ folgt $[im\phi : M(w_\Lambda \cdot \lambda)] \neq 0$ da Q eine Verma-Fahne hat und somit folgt $\mathbf{V}(im\phi) = im(\mathbf{V}\phi) \neq 0$, daher $\mathbf{V}\phi \neq 0$.

2. Der Satz stimmt für $Q = P$. In der Tat sind $P \in \mathcal{O}$ und $\mathbf{V}P = C \in C\text{-}mod^e$ injektive Objekte, ersteres z.B. nach [Ir]. Die Aussage ist leicht zu sehen für $M \in \mathcal{O}$ einfach und folgt mit dem 5-Lemma für beliebige $M \in \mathcal{O}$.

3. Der Satz stimmt für $Q = M(\lambda)$. In der Tat- die Abbildung $Hom_{\mathfrak{g}}(M, Q) \to Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}Q)$ ist stets ein Homomorphismus von Z-Moduln, wo Z rechts über $Z \to C$ operiert.

   Jetzt betrachte man den Isomorphismus $Hom_{\mathfrak{g}}(M, P) \to Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}P)$ aus dem vorhergehenden Schritt. Nach obigem Lemma 6 erhält man daraus einen Isomorphismus $Hom_{\mathfrak{g}}(M, M(\lambda)) \to Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}M(\lambda))$ wenn man die Teilräume der von C^+ annullierten Homomorphismen nimmt.

4. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Wir können uns auf $M \in \mathcal{O}_\lambda$ beschränken. Sei $F : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda$ ein projektiver Funktor im Sinne von [BGe]. Da $F(ker\mathbf{V}) \subset ker\mathbf{V}$, induziert F einen Funktor auf dem Quotienten $\bar{F} : C\text{-}mod^e \to C\text{-}mod^e$ so daß $\mathbf{V}F \cong \bar{F}\mathbf{V}$ natürlich äquivalent sind. Der Linksadjungierte G von F ist ebenfalls projektiv und liefert $\bar{G}$. Nach Lemma 5 ist schließlich auch $(\bar{G}, \bar{F})$ ein adjungiertes Paar.

   Jetzt gilt $Hom_{\mathfrak{g}}(M, FM(\lambda)) = Hom_{\mathfrak{g}}(GM, M(\lambda)) = Hom_C(\mathbf{V}GM, \mathbf{V}M(\lambda)) = Hom_C(\mathbf{V}M, \mathbf{V}FM(\lambda))$.

Wir sehen, daß der erste Schritt im Beweis gar nicht nötig war. *q.e.d.*

Ich will noch ein paar weitere Eigenschaften des Funktors $\mathbf{V}$ zeigen. Bezeichne d die Dualität auf $\mathcal{O}$ und $C\text{-}mod^e$:

Lemma 7 *Es gibt eine natürliche Äquivalenz von Kofunktoren* $\mathbf{V}d \cong d\mathbf{V}$.

Beweis: Wir wählen einen Fundamentalzykel $\omega : C \to \mathbb{C}$ und einen Isomorphismus $P \cong dP$. Dann definieren wir für $M \in \mathcal{O}$ die nichtausgeartete Paarung $\mathbf{V}M \times \mathbf{V}dM \to \mathbb{C}$ durch $Hom(P, M) \times Hom(P, dM) = Hom(P, M) \times Hom(M, dP) \to Hom(P, dP) = Hom(P, P) = C \to \mathbb{C}$ und sind fertig. *q.e.d.*

Aus abstrakten Gründen ist $P \otimes_C : C\text{-}mod^e \to \mathcal{O}$ linksadjungiert zu $\mathbf{V}$.

Proposition 6 *Sei $I \in \mathcal{O}_\lambda$ injektiv. So ist die kanonische Abbildung $P \otimes_C \mathbf{V}I \to I$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Sei allgemein $F : C\text{-}mod^e \to \mathcal{O}$ rechtsadjungiert zu $\mathbf{V}$. Sei $Q \in \mathcal{O}_\lambda$ projektiv. Für alle $M \in \mathcal{O}$ gilt dann $Hom(M, Q) = Hom(\mathbf{V}M, \mathbf{V}Q) = Hom(M, F\mathbf{V}Q)$ und folglich ist die kanonische Abbildung $Q \to F\mathbf{V}Q$ ein Isomorphismus.

Nun ist $F = d(P \otimes_C)d$ rechtsadjungiert zu $\mathbf{V}$. Wir dualisieren hin und her, und die Proposition ergibt sich. *q.e.d.*

Weiter gilt:

Lemma 8 *Sei $M \in \mathcal{O}$ projektiv. So ist $\mathbf{V}M$ selbstdual, $\mathbf{V}M \cong d\mathbf{V}M$.*

Beweis: Man kann das aus der Existenz einer Dualität auf $\mathcal{O}$ folgern. Wir werden es später explizit sehen. *q.e.d.*

Bemerkung: Sind $M, Q \in \mathcal{O}$ beide projektiv, so folgt $Hom(dM, Q) \cong Hom(M, Q)$. In der Tat können wir oBdA $Q \in \mathcal{O}_\lambda$ annehmen, und dann wird

$$\begin{aligned} Hom(dM, Q) &= Hom(\mathbf{V}dM, \mathbf{V}Q) \\ &\cong Hom(\mathbf{V}M, \mathbf{V}Q) \\ &= Hom(M, Q) \end{aligned}$$

Ich finde das sehr absonderlich.

2.4 Verschiebung durch die Wand

Seien $\lambda, \mu \in \Lambda$ dominant. Sei μ sogar regulär. Wir haben ein adjungiertes Paar $(\theta_{out}, \theta_{on})$ von Verschiebungsfunktoren zwischen $\mathcal{O}_\lambda$ und $\mathcal{O}_\mu$. Sie führen die Kerne von $\mathbf{V}_\lambda, \mathbf{V}_\mu$ ineinander über und induzieren nach Lemma 5 ein adjungiertes Paar $(\bar{\theta}_{out}, \bar{\theta}_{on})$ von Funktoren zwischen den Quotienten ${}^\lambda C_\Lambda$-mod^e und C_Λ-mod^e.

Theorem 10 *Folgende Funktoren sind natürlich äquivalent:*

i.) *$\bar{\theta}_{on}$ und die Restriktion Res^λ der Skalare von C_Λ zu ${}^\lambda C_\Lambda$.*

ii.) *$\bar{\theta}_{out}$ und die Erweiterung der Skalare $C_\Lambda \otimes_{{}^\lambda C_\Lambda}$.*

Beweis: Wir erhalten eine natürliche Äquivalenz $\mathbf{V}\theta_{on}M = Hom(P(w_\Lambda \cdot \lambda), \theta_{on}M) = Hom(\theta_{out}P(w_\Lambda \cdot \lambda), M) \cong Res^\lambda \mathbf{V}M$ durch Wahl eines Isomorphismus $\theta_{out}P(w_\Lambda \cdot \lambda) \cong P(w_\Lambda \cdot \mu)$ unter Benutzung der Bemerkung, die auf Theorem 8 folgt. Das zeigt i.). Die natürliche Äquivalenz der Funktoren in ii.) folgt durch die Adjungiertheiten. *q.e.d.*

Sei speziell $s \in S_\Lambda, \theta_s : \mathcal{O}_\mu \to \mathcal{O}_\mu$ die Verschiebung durch die s-Wand.

Korollar 1 *Es gibt eine natürliche Äquivalenz $\mathbf{V}\theta_s \cong C_\Lambda \otimes_{C_\Lambda^s} \mathbf{V}$ von Funktoren $\mathcal{O}_\mu \to C_\Lambda$-$mod^e$.*

Beweis: Klar.

2.5 Äquivalenz verschiedener Kategorien

Seien $\mathbf{g} \supset \mathbf{b} \to \mathbf{h}$ wie in der Einleitung, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbf{h}$ dominant, $\mathcal{O}_\lambda$ die zuvor definierte Kategorie, $(\mathcal{W}_\Lambda, \mathcal{S}_\Lambda)$ das Coxeter-System zu Λ und $\mathcal{S}_{\Lambda,\lambda} = \mathcal{S}_\Lambda \cap \mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}$. Seien $\mathbf{g}' \supset \mathbf{b}' \to \mathbf{h}'$, λ'... analog.

Theorem 11 *Zu jedem Isomorphismus von Coxeter-Systemen* $(\mathcal{W}_\Lambda, \mathcal{S}_\Lambda) \cong (\mathcal{W}_{\Lambda'}, \mathcal{S}_{\Lambda'})$, $x \mapsto x'$, *unter dem* $\mathcal{S}_{\Lambda,\lambda}$ *in* $\mathcal{S}_{\Lambda',\lambda'}$ *übergeht, gibt es eine natürliche Äquivalenz von* $\mathbb{C}$*-Kategorien* $\mathcal{O}_\lambda(\mathbf{g},\mathbf{b}) \cong \mathcal{O}_{\lambda'}(\mathbf{g}',\mathbf{b}')$ *mit* $L(x\cdot\lambda) \cong L(x'\cdot\lambda')$.

Bemerkung: Man kann Verma-Moduln kategorientheoretisch als projektive Decken in gestutzten Kategorien beschreiben. Es folgt, daß unter obiger Äquivalenz auch $M(x\cdot\lambda) \cong M(x'\cdot\lambda')$.

Beweis: Sei $P = \bigoplus_x P(x\cdot\lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$ ein minimaler projektiver Erzeuger. Die Summe erstreckt sich also über alle $x \in \mathcal{W}_\Lambda/\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}$. Da P ein projektiver Erzeuger von $\mathcal{O}_\lambda$ ist, definiert $Hom_{\mathbf{g}}(P, \ ) : \mathcal{O}_\lambda \to mod^e\text{-}End_{\mathbf{g}}P$ eine Äquivalenz von Kategorien. Nach dem Struktursatz ist weiter $End_{\mathbf{g}}P = End_{{}^\lambda C_\Lambda}(\mathbf{V}P)$. Es gilt also, die $\mathbf{V}P(x\cdot\lambda)$ zu beschreiben. Nach dem Struktursatz sind diese ${}^\lambda C_\Lambda$-Moduln direkt unzerlegbar.

Nach Theorem 10 ist für $\mu \in \Lambda$ dominant regulär $Res^\lambda \mathbf{V}P(y\cdot\mu) \cong \mathbf{V}P(x\cdot\lambda)^n$ mit $n = \#\mathcal{W}_{\Lambda,\lambda}$, falls $y \in \mathcal{W}_\Lambda$ der maximale Repräsentant der Klasse von x ist. Wir können uns so auf den Fall λ regulär beschränken.

Nun können wir $P(x\cdot\lambda)$ induktiv so beschreiben: Man wähle $x = s_1\cdots s_n$ eine reduzierte Zerlegung, bezeichne mit θ_i die Verschiebung durch die zu s_i gehörige Wand und betrachte $\theta_n\ldots\theta_1 M(\lambda)$. Der Projektive $P(x\cdot\lambda)$ ist der eindeutig bestimmte direkt unzerlegbare Summand dieses Moduls, der zu keinem $P(y\cdot\lambda)$ mit $l(y) < l(x)$ isomorph ist.

Analog finden wir $\mathbf{V}P(x\cdot\lambda)$ als direkten Summanden in $C \otimes_{C^{s_n}} C \ldots \otimes_{C^{s_1}} \mathbb{C}$ wo ich kurz $C = C_\Lambda$ gesetzt habe. Aus dieser Beschreibung von $\mathbf{V}P(x\cdot\lambda)$, mithin von $End_{\mathbf{g}}(P)$, also von $\mathcal{O}_\lambda$ folgt nun das Theorem mühelos. *q.e.d.*

2.6 Verschiedene Operationen der Weylgruppe

Wir wählen $\lambda = 0 \in \mathbf{h}$ und betrachten die Kategorie $\mathcal{O}_0$. Wir haben den Funktor $\mathbf{V} : \mathcal{O}_0 \to C\text{-}mod^e$ und für alle $s \in S$ die Funktoren $\theta_s : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ und $C\otimes_{C^s} : C\text{-}mod^e \to C\text{-}mod^e$. Es ist $\mathbf{V}\theta_s \cong C \otimes_{C^s} \mathbf{V}$.

Theorem 12 **i.)** *Wir können eine Operation der Weylgruppe $\mathcal{W}$ auf $< \mathcal{O}_0 >$ erklären durch $sM = \theta_s M - M \quad \forall M \in < \mathcal{O}_0 >, s \in S$.*

ii.) *Wir können eine Operation der Weylgruppe $\mathcal{W}$ auf $< C\text{-}mod^e >$ erklären durch $sM = C \otimes_{C^s} M - M \quad \forall M \in < C\text{-}mod^e >, s \in S$.*

iii.) $\mathbf{V} :< \mathcal{O}_0 > \rightarrow < C\text{-}mod^e >$ *ist $\mathcal{W}$-äquivariant.*

Bemerkung: Statt iii.) gilt genauer: Bezeichnet $\theta_x : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ den projektiven Funktor mit $\theta_x M(0) \cong P(x^{-1} \cdot 0)$, so sind natürlich äquivalent $\mathbf{V}\theta_x \cong B_x \otimes_C \mathbf{V} : \mathcal{O}_0 \to C\text{-}mod^e$.

Wir schicken dem Beweis des Theorems ein Lemma voraus. Sei $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{O}_0$ die additive Unterkategorie aller projektiven Objekte. Jedes $P \in \mathcal{P}_0$ hat eine Verma-Fahne, und wir können eine Abbildung $c :< \mathcal{P}_0 > \to \mathbb{Z}[\mathcal{W}]$ erklären durch $c(P) = \sum_{x \in \mathcal{W}} [P : M(x^{-1} \cdot 0)]x$.

Lemma 9 **i.)** *Die Abbildung c ist ein Isomorphismus abel'scher Gruppen.*

ii.) *Die durch Strukturtransport via c definierte $\mathcal{W}$-Operation auf $< \mathcal{P}_0 >$ kann beschrieben werden durch $sP = \theta_s P - P \quad \forall P \in < \mathcal{P}_0 >, s \in S$.*

Beweis: i.) ist klar. ii.) folgt daraus, daß $\theta_s M(x \cdot 0) = M(x \cdot 0) + M(xs \cdot 0)$ in der Grothendieck-Gruppe von $\mathcal{O}_0$. *q.e.d.*

Beweis[Theorem]: Da nach [BGe] ein projektiver Funktor $F : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ bis auf natürliche Äquivalenz durch $F(M(0))$ festgelegt ist, folgt i.) aus dem Lemma. Da $\mathbf{V}$ ein Quotientenfunktor ist und $\mathbf{V}\theta_s \cong C \otimes_{C^s} \mathbf{V}$, folgen damit ii.) und iii.). *q.e.d.[Theorem]*

Das Theorem macht $< \mathcal{O}_0 >$ und $< C\text{-}mod^e >$ zu $\mathbb{Z}[\mathcal{W}]$-Moduln. Bezeichne $\mathbb{C}$ den trivialen C-Modul. Sei nun $\mathcal{H} \to \mathbb{C}[\mathcal{W}], \mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}(1)$ das Auswerten an $t = 1$. Der Sündenfall naht heran.

Lemma 10 *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gilt:*

i.) $< P(x^{-1} \cdot 0) > = \mathbf{C}_x(1) < M(0) >$

ii.) $< \mathbf{V}P(x^{-1} \cdot 0) > = \mathbf{C}_x(1) < \mathbb{C} >$

iii.) *Der C-Modul $\mathbf{V}P(x^{-1} \cdot 0)$ ist direkt unzerlegbar.*

Beweis: i.) Wir wenden den $\mathcal{W}$-äquivarianten Isomorphismus $c :< \mathcal{P}_0 > \to \mathbb{Z}[\mathcal{W}]$ auf die behauptete Gleichung an und müssen nur

$$\sum_{y \in \mathcal{W}} [P(x^{-1} \cdot 0) : M(y^{-1} \cdot 0)]y = \mathbf{C}_x(1)$$

zeigen. Das ist aber eine Konsequenz aus den Kazhdan-Lusztig-Vermutungen.

ii.) folgt aus i.) indem wir **V** anwenden.

iii.) folgt aus dem Struktursatz. *q.e.d.*

3 Argumente aus der Topologie

3.1 Geometrische Realisierung der Hecke-Algebra

Zunächst will ich etwas Folklore über Konvolutionen aufschreiben. Für jede algebraische Varietät X konstruiert man $\mathcal{D}(X)$, die beschränkte derivierte Kategorie mit konstruktibler Kohomologie zur Kategorie von Garben komplexer Vektorräume auf X. Sei $\underline{X} \in \mathcal{D}(X)$ die konstante Garbe im Grad Null.

Seien nun X, Y und Z algebraische Varietäten über $\mathbb{C}$. Ich definiere die "Konvolution", einen Bifunktor $\mathcal{D}(X \times Y) \times \mathcal{D}(Y \times Z) \to \mathcal{D}(X \times Z), (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ durch $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = p_! \Delta^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$ wo

$$X \times Y \times Y \times Z \stackrel{\Delta}{\leftarrow} X \times Y \times Z \stackrel{p}{\rightarrow} X \times Z$$

gegeben sind durch $\Delta(x, y, z) = (x, y, y, z), p(x, y, z) = (x, z)$.

Proposition 7 *Konvolution ist kanonisch assoziativ und* $\Delta_!(\underline{X}) \in \mathcal{D}(X \times X)$ *ist kanonisch eine Einheit.*

Beweis: Weggelassen.

Sei nun $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$ und $p : X \to pt$ die konstante Abbildung. Die kanonischen Isomorphismen $\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \otimes \underline{X} \cong \underline{X} \otimes \mathcal{F}$ liefern beide denselben Homomorphismus $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{F})$. Wir erhalten so die Operation des Kohomologierings von X auf der (Ko-)Homologie $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(p_*\mathcal{F}), End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(p_!\mathcal{F})$.

Nebenbei bemerkt erhält man auch eine Rechtsoperation des Kohomologierings via $p_*\mathcal{F} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{pt}, p_*\mathcal{F}) = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \mathcal{F})$. Sie entspricht obiger Linksoperation unter dem Antiautomorphismus $f \mapsto (-1)^{|f|} f$.

Spezieller ist $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X \times Y}) = End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) \otimes End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y})$. Ich betrachte $X \times Y \xrightarrow{p} X \xrightarrow{q} pt$ die Projektionen. Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Es ist $\mathcal{F} \circ \underline{Y} \in \mathcal{D}(X)$, also operiert $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X})$ auf $q_!(\mathcal{F} \circ \underline{Y})$. Andererseits operiert offensichtlich auch $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y})$ auf diesem Raum.

Lemma 11 *Es ist* $q_!(\mathcal{F} \circ \underline{Y}) \cong (q \circ p)_! \mathcal{F}$ *als Modul über* $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) \otimes End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y})$.

Beweis: Weggelassen.

Ich betrachte nun $X = G/B$ und die Zerlegung $X \times X = \coprod_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{O}_w$ in G-Orbiten, mit $\mathcal{O}_w = G(B/B, wB/B) \subset X \times X$. Ich setze $n = dim_{\mathbb{C}} X$ und betrachte die verschobenen Schnittkohomologiekomplexe $\mathcal{I}_w = IC(\overline{\mathcal{O}_w})[-n] \in \mathcal{D}(X \times X)$. Man betrachte weiter in $\mathcal{D}(X \times X)$ die Unterkategorie $\mathcal{D}_G(X \times X)$ aller $\mathcal{I}$, deren Kohomologie-Garben $H^i(\mathcal{I})$ konstant sind auf den G-Orbiten. Wir erhalten eine Abbildung in die Hecke-Algebra $h : \mathcal{D}_G(X \times X) \to \mathcal{H}$, $\mathcal{I} \mapsto \sum_{i,w} dim H^i(\mathcal{I})_w t^i \mathrm{T}_w$, wo $H^i(\mathcal{I})_w$ den Halm der Kohomologie-Garbe an einem Punkt von $\mathcal{O}_w$ bezeichnet.

Man betrachte nun die Kategorie $\mathcal{K}$ aller Objekte von $\mathcal{D}(X \times X)$, die isomorph sind zu einer direkten Summe von einigen verschobenen $\mathcal{I}_w$. (In einer geeigneten Kategorie mit Gewichten könnte man alle reinen Komplexe vom Gewicht Null nehmen.)

Proposition 8 **i.)** $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{I} \circ \mathcal{I}' \in \mathcal{K}$

ii.) $h(\mathcal{I} \circ \mathcal{I}') = h(\mathcal{I}) h(\mathcal{I}') \quad \forall \mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{K}$

iii.) $h(\mathcal{I}_w) = \mathbf{C}_w$

iv.) $h(\mathcal{I}[1]) = t^{-1} h(\mathcal{I})$

Beweis: Siehe [Sp](Vorsicht-einige Ungenauigkeiten.)

Ich muß einige kategorientheoretische Sprechweisen einführen. Unter einer [1]-Kategorie verstehe ich eine Kategorie $\mathcal{A}$ mit einem adjungierten Paar $([1], [-1])$ von Äquivalenzen $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Ist $\mathcal{B}$ auch eine [1]-Kategorie, so verstehe ich unter einem [1]-Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ einen Funktor samt einer natürlichen Äquivalenz $F[1] \cong [1]F$. Ist schließlich $G\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein anderer [1]-Funktor, so nenne ich eine natürliche Transformation $\eta : F \to G$ eine [1]-Transformation genau dann, wenn das offensichtliche Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F[1] & \to & [1]F \\ \downarrow & & \downarrow \\ G[1] & \to & [1]G \end{array}$$

kommutiert.

Vermittels Konvolution "operiert" $\mathcal{D}(X \times X)$ auf $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(X \times pt)$. Sei $s \in \mathcal{S}$ eine einfache Spiegelung, P_s die zugehörige minimale Parabolische über B, $\pi = \pi_s : G/B \to G/P_s$ die Projektion.

Lemma 12 *Folgende* [1]*-Funktoren* $\mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ *sind natürlich* [1]*-äquivalent:*

1. $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{I}_s \circ \mathcal{F}$
2. $\mathcal{F} \mapsto \pi^*\pi_*\mathcal{F}[+1]$
3. $\mathcal{F} \mapsto \pi^!\pi_!\mathcal{F}[-1]$

Beweis: [LV].

Sei schließlich $\mathcal{L}_x \in \mathcal{D}(X)$ der Schnittkohomologiekomplex der Schubert-Varietät $\overline{BxB/B}$.

Proposition 9 *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es einen Isomorphismus $\mathcal{I}_{x^{-1}} \circ \mathcal{L}_e \cong \mathcal{L}_x$.*

Beweis: So mehr oder weniger [Sp].

3.2 Duale Verschiebung durch die Wand

Sei $X = G/B$ wie eben. Das "Borel-Bild" gibt einen Isomorphismus $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}) = C(\mathbf{h}^*, \mathcal{W}) = C$. Sei P_ι eine Parabolische, $G \supset P_\iota \supset B$. Sei $(\mathcal{W}_\iota, \mathcal{S}_\iota)$ das zugehörige Coxeter-Teilsystem von $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$. Sei $G/P_\iota = Y_\iota$ und bezeichne $\pi_\iota : X \to Y_\iota$ die Projektion. Sicher ist $\pi_\iota^*\underline{Y_\iota} = \underline{X}$. Es gilt:

Theorem 13 *Das Zurückholen $\pi_\iota^* : End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y_\iota}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X})$ ist injektiv mit Bild $C^{\mathcal{W}_\iota} \subset C = End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X})$.*

Beweis: [BGG1].

Wir werden ab jetzt $C^{\mathcal{W}_\iota} = {}^\iota C$ abkürzen und $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y_\iota}) = {}^\iota C$ identifizieren.

Wir betrachten nun die Funktoren $\mathbf{H} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X},\ ) : \mathcal{D}(X) \to C\text{-}Mod^e$ und $\mathbf{H}_\iota = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y_\iota},\ ) : \mathcal{D}(Y_\iota) \to {}^\iota C\text{-}Mod^e$. Sei $Res^\iota : C\text{-}Mod^e \to {}^\iota C\text{-}Mod^e$ die Restriktion der Skalare. Adjungiertheit $(\pi_\iota^*, \pi_{\iota*})$ gibt uns einen Isomorphismus $\mathbf{H}_\iota\pi_{\iota*}\mathcal{F} = Res^\iota\mathbf{H}\mathcal{F}$, der natürlich ist in $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$.

Andererseits haben wir für $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(Y_\iota)$ kanonisch $C \otimes_{{}^\iota C} \mathbf{H}_\iota\mathcal{F} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \pi_\iota^*\underline{Y_\iota}) \otimes_{End(\underline{Y_\iota})} Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{Y_\iota}, \mathcal{F}) \to Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \pi_\iota^*\mathcal{F}) = \mathbf{H}\pi_\iota^*\mathcal{F}$.

Theorem 14 *Die kanonische Abbildung $C \otimes_{{}^\iota C} \mathbf{H}_\iota\mathcal{F} \to \mathbf{H}\pi_\iota^*\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(Y_\iota)$.*

Beweis: Wir werden das nur benutzen und beweisen im Fall $\mathcal{S}_\iota = \{s\}$, d.h. für eine minimale Parabolische $P_\iota = P_s$. Sei $Y = Y_s, \pi = \pi_s$. Nun ist kanonisch $Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \pi^*\mathcal{F}) = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \pi^!\mathcal{F}[-2]) = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\pi_*\underline{X}[2], \mathcal{F})$.

Weiter haben wir kanonisch $\underline{Y} \to \pi_*\pi^*\underline{Y} = \pi_*\underline{X} = \pi_!\pi^!\underline{Y}[-2] \to \underline{Y}[-2]$, oder, etwas kürzer geschrieben und geshifted, $\underline{Y}[2] \to \pi_*\underline{X}[2] \to \underline{Y}$. Da $\underline{Y}$ keine negativen Kohomologiegruppen hat, ist die Komposition Null. Das "decomposition theorem" (Achtung-Overkill) zeigt, daß diese Sequenz spaltet. Das Theorem folgt. *q.e.d.*

Korollar 2 *Für alle $s \in S$ gibt es eine natürliche* [1]-*Äquivalenz* $\mathbf{H}\pi_s^*\pi_{s*} = C \otimes_{C^s} \mathbf{H}$ *von* [1]-*Funktoren* $\mathcal{D}(X) \to C\text{-}Mod^e$.

Beweis: Setzen wir die Informationen von eben zusammen, können wir sogar eine solche Äquivalenz explizit angeben. *q.e.d.*

3.3 Verschiedene Operationen der Hecke-Algebra

Sei weiter $X = G/B$. Die Hyperkohomologie liefert auch einen Funktor $\mathbf{B} : \mathcal{D}(X \times X) \to C\text{-}Mod^e\text{-}C$. Hier möge die Linksoperation von C zur linken Kopie von X gehören, die Rechtsoperation zur rechten. Ich will zeigen:

Theorem 15 *Seien* $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{K}$.

i.) $\mathbf{B}(\mathcal{I} \circ \mathcal{I}') \cong \mathbf{B}\mathcal{I} \otimes_C \mathbf{B}\mathcal{I}'$ *in* $C\text{-}Mod^e\text{-}C$.

ii.) *Die beiden* [1]-*Funktoren* $\mathcal{D}(X) \to C\text{-}Mod^e$, *die* $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$ *den graduierten C-Modul* $\mathbf{H}(\mathcal{I} \circ \mathcal{F})$ *beziehungsweise* $\mathbf{B}\mathcal{I} \otimes_C \mathbf{H}\mathcal{F}$ *zuordnen, sind natürlich* [1]-*äquivalent.*

iii.) $\mathbf{B}(\mathcal{I}_s) \cong C \otimes_{C^s} C[1]$

Bemerkung: Allgemeiner werden wir später sehen, daß $\mathbf{B}(\mathcal{I}_x) \cong B_x$, mit B_x wie in der Einleitung.

Mein Beweis des Theorems ist unangenehm gewunden. Ich hätte gerne ein direktes Argument. Aber frisch an's Werk! Um die folgenden Beweise griffig formulieren zu können, machen wir die folgende

Definition 1 *Ein Ringoid ist eine Menge R mit zwei Monoid-Strukturen $(R, +, 0)$ und $(R, \cdot, 1)$ so daß $\forall a, b, c \in R$ gilt: $a + b = b + a, a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc$. Ein Ringoid-Morphismus ist ...*

Beispiele:

1. Für jede $\mathbb{C}$-Kategorie $\mathcal{A}$ bilden die $\mathbb{C}$-Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ modulo natürlicher Äquivalenz ein Ringoid $\mathcal{R}\mathcal{A}$.

2. Ist $\mathcal{A}$ zusätzlich eine [1]-Kategorie, so bilden auch die [1]-Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ modulo natürlicher [1]-Äquivalenz ein Ringoid $\mathcal{R}^\bullet\mathcal{A}$.

3. Ist C eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra endlicher Dimension, so können wir die Menge $\overline{C\text{-}\mathit{Mod}^e\text{-}C}$ aller Isomorphieklassen in $C\text{-}\mathit{Mod}^e\text{-}C$ betrachten. Sie wird ein Ringoid unter $\otimes_C, \oplus$. Die Abbildung $\overline{C\text{-}\mathit{Mod}^e\text{-}C} \to \mathcal{R}^\bullet C\text{-}\mathit{Mod}^e$, $B \mapsto B\otimes_C$ ist dann ein Isomorphismus von Ringoiden.

4. Sei $\mathcal{K}$ die Kategorie von eben, $\bar{\mathcal{K}}$ die Menge ihrer Isomorphieklassen. Sie wird ein Ringoid unter $\circ, \oplus$. Nach Proposition 8 ist $h : \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}$ ein injektiver Ringoid-Homomorphismus. Sein Bild ist $\mathcal{H}^+$, das von den $\mathbf{C}_w, w \in \mathcal{W}$ und $t^n, n \in \mathbb{Z}$ erzeugte Teil-Ringoid von $\mathcal{H}$.

Nun gilt offensichtlich:

Lemma 13 *Konvolution definiert eine Ringoid-Homomorphismus* $\bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{R}^\bullet\mathcal{D}(X)$.

Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(X)$ die Unterkategorie aller Objekte, die in eine Summe von Objekten der Form $\underline{X}[n], n \in \mathbb{Z}$ zerfallen.

Lemma 14 *Konvolution definiert einen Ringoid-Homomorphismus* $\bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{R}^\bullet\mathcal{C}$.

Beweis: Es reicht aus, zu zeigen daß $\mathcal{I} \circ \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \quad \forall \mathcal{I} \in \mathcal{K}, \mathcal{F} \in \mathcal{C}$. OBdA dürfen wir dazu $\mathcal{I} = \mathcal{I}_s, \mathcal{F} = \underline{X}$ annehmen. Dann ist aber tatsächlich $\mathcal{I}_s \circ \underline{X} = \pi^*\pi_*\underline{X}[1] \cong \underline{X}[1] \oplus \underline{X}[-1] \in \mathcal{C}$. *q.e.d.*

Sei weiter $C\text{-}f\text{-}\mathit{Mod}^e \subset C\text{-}\mathit{Mod}^e$ die Unterkategorie aller graduiert freien Moduln. Offensichtlich ist $\mathbf{H} : \mathcal{C} \to C\text{-}f\text{-}\mathit{Mod}^e$ eine [1]-Äquivalenz von [1]-Kategorien.

Lemma 15 *Es gibt einen Ringoid-Homomorphismus* $\mathcal{E} : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{R}^\bullet C\text{-}f\text{-}\mathit{Mod}^e$ *derart daß* $\mathcal{E}(t^n) = C[-n]\otimes_C$ *und* $\mathcal{E}(\mathbf{C}_s) = C[1]\otimes_{C^s} \quad \forall s \in \mathcal{S}$.

Beweis: Wir betrachten den Ringoid-Homomorphismus aus dem vorhergehenden Lemma, transportieren ihn vermittels der Isomorphismen $h : \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{H}^+, \mathbf{H} : \mathcal{C} \to C\text{-}f\text{-}\mathit{Mod}^e$ in unsere Situation und nennen das Resultat $\mathcal{E}$. Mit dem Korollar zu Theorem 14 und Lemma 12 folgt die Behauptung. *q.e.d.*

Es folgt sofort

Lemma 16 *Es gibt einen Ringoid-Homomorphismus* $\mathcal{E} : \mathcal{H}^+ \to \overline{C\text{-}\mathit{Mod}^e\text{-}C}$ *derart daß* $\mathcal{E}(t^n) = C[-n]$ *und* $\mathcal{E}(\mathbf{C}_s) = C \otimes_{C^s} C[1] \quad \forall s \in \mathcal{S}$.

Der Leser mag sich selbst überzeugen, daß $\mathcal{E}$ wohlbestimmt ist durch die Bedingungen des Lemmas. Nun betrachten wir die Komposition $\hat{\mathbf{B}} = \mathcal{E} \circ h : \bar{\mathcal{K}} \to \overline{C\text{-}Mod^e\text{-}C}$.

Lemma 17 *Sei $\mathcal{I} \in \bar{\mathcal{K}}$. Folgende* [1]*-Funktoren $\mathcal{D}(X) \to C\text{-}Mod^e$ sind natürlich* [1]*-äquivalent: $\mathcal{F} \mapsto \mathbf{H}(\mathcal{I} \circ \mathcal{F})$ und $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathbf{B}}\mathcal{I} \otimes_C \mathbf{H}\mathcal{F}$.*

Beweis: Sei oBdA $\mathcal{I} = \mathcal{I}_s, s \in \mathcal{S}$. Das Lemma folgt nun aus den Definitionen und dem Korollar zu Theorem 14. *q.e.d.*

Unter anderem haben wir nun unser ursprüngliches Ziel erreicht. *Beweis[Theorem]:* Wir müssen nur noch zeigen, daß $\hat{\mathbf{B}}\mathcal{I} \cong \mathbf{B}\mathcal{I}\ \forall \mathcal{I} \in \mathcal{K}$. Das folgt aber sofort aus Lemma 11, wenn wir in obigem Lemma $\mathcal{F} = \underline{X}$ einsetzen. *q.e.d.[Theorem]*

Jetzt können wir zu jedem Ringoid R^+ den universellen einhüllenden Ring $U(R^+)$ mit dem kanonischen Morphismus $R^+ \to U(R^+)$ betrachten. Ist R ein Ring und $R^+ \subset R$ ein Teil-Ringoid, das R als Ring erzeugt, so ist kanonisch $U(R^+) = R$.

Theorem 16 *Wir können einen Ringhomomorphismus $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to < C\text{-}Mod^e\text{-}C >$ erklären durch $\mathcal{E}(t) =< C[-1] >, \mathcal{E}(\mathbf{C}_s) =< C \otimes_{C^s} C >$* [1]*$\forall s \in \mathcal{S}$. Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es $B_x \in C\text{-}Mod^e\text{-}C$ so daß $\mathcal{E}(\mathbf{C}_x) =< B_x >$.*

Beweis: Aufgrund der universellen Eigenschaften führt $\mathcal{E} : \mathcal{H}^+ \to \overline{C\text{-}Mod^e\text{-}C}$ zu dem gesuchten Ringhomomorphismus $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to < C\text{-}Mod^e\text{-}C >$. *q.e.d.*

Wie in der Einleitung erhalten wir so eine Operation von $\mathcal{H}$ auf $< C\text{-}Mod^e >$. Sei $\mathbb{C} \in C\text{-}Mod^e$ der eindimensionale Modul im Grad Null. Sei $D_x = B_x \otimes_C \mathbb{C} \in C\text{-}Mod^e$ wie in der Einleitung.

Proposition 10 **i.)** *$D_x \cong \mathbf{V}P(x^{-1} \cdot 0)$ in $C\text{-}mod^e$.*

ii.) *D_x ist direkt unzerlegbar selbst als nichtgraduierter Modul.*

Beweis: Es operiert $\mathcal{H}$ auf $< C\text{-}Mod^e >$. Dieselben Formeln definieren auch eine Operation von $\mathcal{H}$ auf $< C\text{-}mod^e >$. Andererseits haben wir im Abschnitt 2.6 eine Operation von $\mathbb{Z}[\mathcal{W}]$ auf $< C\text{-}mod^e >$ erklärt, und es wird offensichtlich $\mathbf{T}(1)M = \mathbf{T}M \forall\ \ \mathbf{T} \in \mathcal{H}, M \in < C\text{-}mod^e >$. Insbesondere ist $< D_x >= \mathbf{C}_x < \mathbb{C} >= \mathbf{C}_x(1) < \mathbb{C} >=< \mathbf{V}P(x^{-1} \cdot 0) >$ in $< C\text{-}mod^e >$. Es folgt *i.)* und mit 10 auch ii.). *q.e.d.*

Korollar 3 *Es ist B_x selbst als nichtgraduierter Bimodul direkt unzerlegbar.*

Beweis: Klar.

Schließlich zeigen wir noch

Lemma 18 *Sei $\mathcal{L}_x \in \mathcal{D}(X)$ der Schnittkohomologiekomplex von $\overline{BxB/B}$. So gibt es einen Isomorphismus $\mathbf{H}\mathcal{L}_x \cong D_{x^{-1}}$ in C-Mod^e.*

Beweis: Nach Proposition 9 ist $\mathcal{L}_x \cong \mathcal{I}_{x^{-1}} \circ \mathcal{L}_e$. Nach Theorem 15 ist $\mathbf{H}\mathcal{L}_x \cong \mathbf{B}\mathcal{I}_{x^{-1}} \otimes_C \mathbf{H}\mathcal{L}_e \cong \mathbf{B}\mathcal{I}_{x^{-1}} \otimes_C \mathbb{C}$. Nun ist aber $\mathbf{B}\mathcal{I}_y \cong \hat{\mathbf{B}}\mathcal{I}_y = \mathcal{E}h(\mathcal{I}_y) = \mathcal{E}(\mathbf{C}_y) = B_y$. *q.e.d.*

3.4 Erweiterungen einfacher Objekte

Wir wollen zeigen:

Erweiterungssatz 17 *Die Hyperkohomologie induziert Isomorphismen graduierter Vektorräume*

$$Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y) \to Hom^\bullet_C(\mathbf{H}\mathcal{L}_x, \mathbf{H}\mathcal{L}_y) \forall x, y \in \mathcal{W}.$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß beide Seiten dieselbe Dimension haben. In der Tat ist

$$\begin{aligned} dimHom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y) &= dimHom_{\mathfrak{g}}(P(x \cdot 0), P(y \cdot 0)) \text{ nach [BGi]} \\ &= dimHom_C(D_{x^{-1}}, D_{y^{-1}}) \text{ nach dem Struktursatz} \\ &= dimHom^\bullet_C(\mathbf{H}\mathcal{L}_x, \mathbf{H}\mathcal{L}_y) \text{ nach Lemma 18.} \end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, daß die Abbildung im Satz injektiv ist. Sei $p : X \to pt$ die Projektion. Es ist kanonisch $\mathbf{H}\mathcal{F} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X}, \mathcal{F}) = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{pt}, p_*\mathcal{F})$. Wir werden zeigen

Proposition 11 *Die von p_* induzierten Abbildungen $Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y) \to Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(p_*\mathcal{L}_x, p_*\mathcal{L}_y)$ sind injektiv, $\forall x, y \in \mathcal{W}$.*

Der Satz folgt sofort. *q.e.d.*

Beweis[Proposition]: Das folgende Spektralsequenzen-Argument ist geklaut bei [BGi] und umgespritzt. Für $n \geq 0$ setzen wir

$$X_n = \bigcup_{l(w) \leq n} BwB/B \ , \ U_n = \bigcup_{l(w) = n} BwB/B$$

und zerlegen X_n in $X_{n-1} \xrightarrow{j_n} X_n \xleftarrow{u_n} U_n$. Bezeichne schließlich $i_n : X_n \to X$ die Inklusion und $p_n : X_n \to pt$ die konstante Abbildung.

Ich bezeichne für eine komplexe Varietät X mit $D(X)$ die beschränkte derivierte Kategorie der "mixed Hodge Modules" von M.Saito.

Lemma 19 *Sei $\mathcal{M} \in D(X)$ gegeben so daß alle Einschränkungen $f^*\mathcal{M}$ auf Bruhat-Zellen konstant sind und rein von einem festen Gewicht w. So gilt für alle n :*

$i.)_n$ *Die Randabbildung des ausgezeichneten Dreiecks $p_{n*}(u_{n!}u_n^!, id, j_{n*}j_n^*)i_n^*\mathcal{M}$ verschwindet.*

$ii.)_n$ *Das Objekt $p_{n*}i_n^*\mathcal{M}$ ist rein vom obigen Gewicht w.*

Beweis[Lemma]: Der erste Term des ausgezeichneten Dreiecks ist rein vom Gewicht w : In der Tat ist $p_{n*}u_{n!}u_n^!i_n^*\mathcal{M} = (p_n \circ u_n)_!u_n^*i_n^*\mathcal{M}$, $u_n^*i_n^*\mathcal{M}$ ist nach Voraussetzung lokal konstant und rein vom Gewicht w, und $(p_n \circ u_n)_!$ ändert das nicht, ist doch $p_n \circ u_n$ schlicht die Projektion von einigen $\mathbb{C}^n$ auf einen Punkt.

Der letzte Term des ausgezeichneten Dreiecks ist rein vom Gewicht w nach $ii.)_{n-1}$. Es folgen sofort $i.)_n$ und $ii.)_n$. *q.e.d.[Lemma]*

Wir betrachten nun den Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{L}_x$ als Objekt von $D(X)$, rein vom Gewicht $l(x)$. Nach [KL2] erfüllt $\mathcal{L}_x = \mathcal{M}$ die Bedingung des Lemmas. Für feste $x, y \in \mathcal{W}$ kürze ich $l(x)-l(y)-2n = s(n)$ ab. Nach [BGi] ist $Hom_D(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y[s(n)](n)) \cong Hom_{\mathcal{D}(X)}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y[s(n)])$ und $0 = Hom_{\mathcal{D}(X)}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y[s(n)+1])$. Es reicht also, wenn wir zeigen daß jedes $f \in Hom_D(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y[s(n)](n))$ "auf der Hyperkohomologie zu sehen ist".

Sei nun $f \neq 0$. Sei n minimal mit $i_n^* f \neq 0$. Aus unserem Lemma folgt $u_{n!}u_n^!i_n^*f \neq 0$, also $u_n^!i_n^*f \neq 0$, also $(p_n \circ u_n)_!u_n^!i_n^*f \neq 0$ da $p_n \circ u_n$ schlicht die Projektion von ein paar $\mathbb{C}^n$ auf einen Punkt ist.

Weiter ist nach dem Lemma für alle $z \in \mathcal{W}$ die Abbildung $p_*\mathcal{L}_z \to p_*i_{n*}i_n^*\mathcal{L}_z = p_{n*}i_n^*\mathcal{L}_z$ die Projektion auf einen direkten Summanden, und $(p_n \circ u_n)_!u_n^!i_n^*\mathcal{L}_z \to p_{n*}i_n^*\mathcal{L}_z$ die Injektion eines direkten Summanden. So folgt aus $(p_n \circ u_n)_!u_n^!i_n^*f \neq 0$ schließlich $p_*f \neq 0$. *q.e.d.[Proposition]*

3.5 Beilinson-Ginsburg-Dualität

Sei $D = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} D_x \in \mathcal{C}\text{-}Mod^e$. Wir können die graduierte Algebra $\mathbf{D} = End_{\mathcal{C}}^\bullet(D)$ bilden. Die Projektoren d_x auf D_x bilden eine Basis von $\mathbf{D}^0$.

Wir setzen $L_x = L(xw_\circ \cdot 0)$ und betrachten $L = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} L_x \in \mathcal{O}_0$. Wir können die graduierte Algebra $\mathbf{L} = \bigoplus_i Ext_{\mathcal{O}}^i(L, L)$ bilden. Die Projektoren $l_x \in Hom_{\mathcal{O}}(L, L)$ auf L_x bilden eine Basis von $\mathbf{L}^0$.

Wir setzen $P_x = P(xw_\circ \cdot 0)$ und betrachten $P = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} P_x \in \mathcal{O}_0$. Wir können die Algebra $A = End_{\mathcal{O}}(P)$ bilden. Darin liegen die Projektoren p_x von P auf P_x. Aus abstrakten Gründen definiert $Hom_{\mathcal{O}}(P, \;\;) : \mathcal{O}_0 \to mod^e\text{-}A$ eine Äquivalenz von Kategorien. Es entspricht darunter P_x dem A-Rechtsmodul $p_x A$.

Nun führen Beilinson und Ginsburg eine Graduierung auf A ein. Ich nenne diese graduierte Version $\mathbf{A}$, in [BGi] heißt sie A_{mixed}. Die p_x bilden dann eine Basis von $\mathbf{A}^0$.

Sei $\mathbf{B}$ eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra und $x \mapsto b_x$ eine Abbildung $\mathcal{W} \to \mathbf{B}^0$. Sei $(\mathbf{B}', b'_x)$ analog. Ich schreibe kurz $(\mathbf{B}, b_x) \cong (\mathbf{B}', b'_x)$ für die Aussage: Es gibt einen Isomorphismus graduierter $\mathbb{C}$-Algebren $\mathbf{B} \cong \mathbf{B}'$ unter dem b_x in b'_x übergeht.

Sei $\mathbf{B}$ eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra. Ist $\mathbf{B}$ quadratisch im Sinne von [BGi], so kann man eine duale Algebra $\mathbf{B}^!$ erklären. Per Definitionem ist $(\mathbf{B}^!)^0 = \mathbf{B}^0$.

Theorem 18 **i.)** *Die Algebren* $\mathbf{L}, \mathbf{A}$ *und* $\mathbf{D}$ *sind formal quadratisch.*

ii.) *Es gibt graduierte Isomorphismen* $(\mathbf{A}^!, p_x) \cong (\mathbf{L}, l_x) \cong (\mathbf{D}, d_{x^{-1}}) \cong (\mathbf{A}, p_{xw_\circ}) \cong (\mathbf{A}, p_{w_\circ x})$

Bemerkungen:

1. Die Existenz eines Isomorphismus $(\mathbf{A}, p_x) \cong (\mathbf{A}^!, p_{w_\circ x})$ war von Beilinson und Ginsburg [BGi] vermutet worden. Natürlich hofft man eigentlich auf eine explizite, möglichst geometrische Konstruktion eines solchen Isomorphismus. Ich weiß noch nicht einmal, ob unter meinem Isomorphismus $C \cong EndP(w_\circ \cdot 0)$ die offensichtliche Graduierung rechts mit der Graduierung aus [BGi] links zusammenfällt.

2. Das Theorem zusammen mit [BGS] und normaler Dualität d erklärt eine kontravariante Äquivalenz $D^b(Mod\text{-}\mathbf{A})$ mit sich selber, die projektive Moduln mit einfachen Moduln vertauscht. Ich kann zeigen, daß diese Äquivalenz wie vermutet [BGi] die Verma-Moduln permutiert. Es folgt, daß Erweiterungen von Verma-Moduln rein sind und durch die R-Polynome aus [KL1] beschrieben werden. Ich will diese Argumente in einem Folgeartikel ausarbeiten.

Beweis: Beilinson und Ginsburg zeigen [BGi], daß $\mathbf{A}$ und $\mathbf{L}$ formal quadratische Algebren sind und daß $(\mathbf{A}^!, p_x) \cong (\mathbf{L}, l_x)$. Der Erweiterungssatz (zusammen mit Lokalisierung) zeigt $(\mathbf{L}, l_x) \cong (\mathbf{D}, d_{x^{-1}})$. Da

Konjugation mit w_o ein Automorphismus des Coxetersystems $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ist, gilt $(\mathbf{D}, d_{xw_o}) \cong (\mathbf{D}, d_{w_o x})$. Wir müssen also nur noch $(\mathbf{D}, d_{x^{-1}}) \cong (\mathbf{A}, p_{xw_o})$ zeigen.

Sieht man von den Graduierungen ab, wird so ein Isomorphismus durch den Struktursatz gegeben. Sei nun allgemein B eine Algebra, $\{b_x\}_{x \in \mathcal{W}}$ eine Menge von paarweise orthogonalen Idempotenten derart daß die $b_x B \in mod\text{-}B$ eindeutige irreduzible Quotienten E_x haben. Wir können dann $E = \bigoplus E_x \in mod\text{-}B$ betrachten und die graduierte Algebra $\mathbf{E} = \bigoplus_i Ext^i_B(E, E)$ bilden, mit $e_x \in \mathbf{E}^0$ den Projektoren auf E_x. Man beachte, daß ich keine Graduierung auf B vorausgesetzt habe.

Ist speziell $B = \mathbf{B}$ eine formal quadratische Algebra und b_x eine Basis von $\mathbf{B}^0$, so gibt es nach [BGi] einen graduierten Isomorphismus $(\mathbf{E}, e_x) \cong (\mathbf{B}^!, b_x)$. Auf diese Weise führt der nicht notwendig graduierte Isomorphismus $\mathbf{D} \cong \mathbf{A}$ mit $d_{x^{-1}} \mapsto p_{xw_o}$ aus dem Struktursatz zu einem graduierten Isomorphismus $(\mathbf{D}^!, d_{x^{-1}}) \cong (\mathbf{A}^!, p_{xw_o})$. Wir dualisieren nochmals und das Theorem ist bewiesen. *q.e.d.*

Literatur

[BGi] A.A.Beilinson, V.A.Ginsburg, Mixed categories, Ext-duality and Representations (Results and conjectures), Preprint

[BGS] A.A.Beilinson, V.A.Ginsburg, V.V.Schechtman, Koszul duality, Preprint (1989)

[Be] J.N.Bernstein, The trace of projective functors, erscheint in Colloque Dixmier (Mai 1989)

[BGe] J.N.Bernstein, S.I.Gelfand, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras, Compositio math. 41 (1980), 245-285

[BGG1] J.N.Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand, Schubert cells and cohomology of the spaces G/P, Russian Math. Surveys 28, No. 3 (1973), 1-26

[BGG2] J.N.Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand, Category of $\mathbf{g}$-modules, Funct. Anal. Appl. 10 (1976), 87-92

[Ga] P.Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448

[Ir] R.Irving, Projective Modules in the Category $\mathcal{O}$, Preprint

[Ja] J.C.Jantzen, Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren, Springer (1983)

[Jo] A.Joseph, Kostant's problem, Goldie rank and the Gelfand-Kirillov conjecture, Invent. math. 56 (1980), 191-213

[KL1] D.Kazhdan, G.Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. math. 53 (1979), 165-184

[KL2] D.Kazhdan, G.Lusztig, Schubert Varieties and Poincaré duality, Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980), 185-203

[LV] G.Lusztig, D.Vogan, Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds, Invent. math. 71 (1983), 365-379

[So1] W.Soergel, Universelle versus relative Einhüllende:..., Dissertation Hamburg, erscheint in den Mathematischen Annalen (1989)

[Sp] T.A.Springer, Quelques applications de la cohomologie d'intersection, exp. 589 in: Séminaire Bourbaki 1981/82, Astérisque 92-93 (1982), 249-273