Drinfeld's shtukas and Langlands' correspondence

Laurent Lafforgue (IHES)

Résumé en français

X = courbe projective lisse (géométriquement connexe) / $\mathbf{F}_q$
$F = F(X)$ = corps des fonctions de X
$\mathbf{A}$ = anneau des adèles de F

Théorème (correspondance de Langlands): *Pour tout entier $r \geq 1$, il existe une (unique) bijection préservant les facteurs L locaux*

$$\begin{array}{ccc} \pi & \to & \sigma_\pi \\ \pi_\sigma & \leftarrow & \sigma \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{représentations } \pi \\ \textit{automorphes cuspidales} \\ \textit{de } GL_r(\mathbf{A}) \\ \textit{avec } \chi_\pi \textit{ d'ordre fini} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{représentations } l\textit{-adiques} \\ \sigma \textit{ de } G_F\textit{, non ramifiées} \\ \textit{presque partout, irréductibles} \\ \textit{de dimension } r\textit{, avec } \det \sigma \\ \textit{d'ordre fini} \end{array} \right\}$$

Le cas $r = 1$ est la théorie du corps de classes.
Le cas $r = 2$ a été démontré par Drinfeld.

Pour $r \geq 2$, on suppose le théorème déjà connu en les rangs $< r$. D'après le "principe de récurrence de Deligne" (qui combine cette hypothèse de récurrence, le "théorème réciproque" de Piatetski-Shapiro, l'équation fonctionnelle de Grothendieck et la formule du produit de Laumon), $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ est alors connu en rang r.

On cherche à construire $\pi \mapsto \sigma_\pi$ dans la cohomologie l-adique au-dessus du point générique de $X \times X$ des:
• Cht^r = champ des chtoucas de Drinfeld de rang r,
• Cht^r_N = champ des chtoucas de Drinfeld de rang r
avec structure de niveau $N \hookrightarrow X$.

On choisit un idèle $a \in \mathbf{A}^\times$ de degré $\neq 0$.

On note $\mathcal{H}^r = C_c^\infty(GL_r(\mathbf{A}))$ l'algèbre de Hecke et $\mathcal{H}_N^r$ sa sous-algèbre des fonctions bi-invariantes par

$$K_N = \mathrm{Ker}[K = GL_r(O_{\mathbf{A}}) \to GL_r(\mathcal{O}_N)].$$

Voici les principales propriétés des objets géométriques qu'on construit à partir des $Cht_N^r/a^{\mathbf{Z}}$:

champs de chtoucas	ouverts tronqués	compactifications totales ou partielles
$Cht_N^r/a^{\mathbf{Z}}$ $\hookleftarrow$	$Cht_N^{r,\bar{p}\le p}/a^{\mathbf{Z}}$ $\hookrightarrow$	$\overline{Cht^{r,\bar{p}\le p}}/a^{\mathbf{Z}}$ $\overline{Cht_N^{r,\bar{p}\le p}}'/a^{\mathbf{Z}}$
• lisse sur $(X-N)\times(X-N)$ • action de $\mathcal{H}_N^r$	• de type fini • formule de comptage des points fixes	• lisse sur $(X-N)\times(X-N)$ • bord = DCN relatif • chaque $h \in \mathcal{H}_N^r$ induit une correspondance
mais • pas de type fini	**mais** • pas de correspondances de Hecke	**mais** • cela ne définit pas une action de $\mathcal{H}_N^r$ • pas de comptage des points fixes

Afin de rapporter toutes les propriétés positives à un unique objet au lieu de 3, on pose:

Définition. Une représentation l-adique irréductible de G_{F^2} (où $F^2 = F(X\times X)$) est dite r-négligeable si elle est facteur direct d'une

$$q'^*\sigma' \otimes q''^*\sigma''$$

(où $q', q'' : G_{F^2} \rightrightarrows G_F$ sont déduites de $X\times X \rightrightarrows X$) pour σ', σ'' deux représentations de G_F irréductibles de dimensions $< r$.

On montre alors:

Théorème. *$Cht_N^r/a^{\mathbf{Z}}, Cht_N^{r,\bar{p}\le p}/a^{\mathbf{Z}}, \overline{Cht_N^{r,\bar{p}\le p}}'/a^{\mathbf{Z}}$ ont même cohomologie essentielle. Comme représentation de $\mathcal{H}_N^r \times G_{F^2}$, elle a la forme*

$$\bigoplus_{\substack{\pi \\ \chi_\pi(a)=1}} \pi^{K_N} \otimes (q'^*\sigma_\pi \otimes q''^*\sigma_\pi^\vee)(1-r).$$

Référence. "Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands", article à paraître dans la revue Inventiones (la version définitive est disponible sur le serveur des prépublications de l'IHES et sur celui d'Orsay).