DAS IKOSAEDER UND DIE GLEICHUNGEN FÜNFTEN GRADES

von

PETER SLODOWY

Mathematisches Institut
Universität Bonn
Wegelerstraße 10
5300 Bonn

Max-Planck-Institut für
Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
5300 Bonn 3

MPI/SFB 85-56

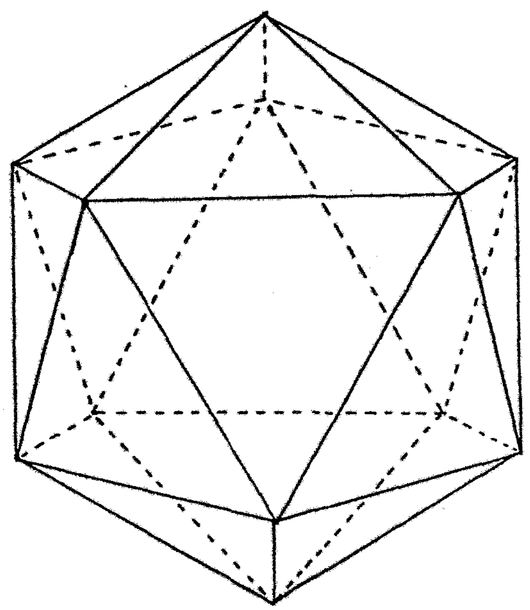
Ausarbeitung der öffentlichen Antrittsvorlesung an der Universität Bonn, 28.11.1984; erscheint als Beitrag in dem Buch "Arithmetik und Geometrie", vier Vorlesungen von H. Knörrer, C.-G. Schmidt, J. Schwermer, P. Slodowy, in der Reihe "Mathematische Miniaturen" des Birkhäuser Verlags, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.

Dieser Aufsatz möchte einen Ausflug machen in die Mathematik vor 100 Jahren, genauer will er versuchen, einige wenige Eindrücke zu vermitteln vom Gegenstand des Buches [20] von F. Klein mit dem Titel "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade". Das Buch erschien zum ersten Mal im Jahre 1884, und auch noch in heutigen Arbeiten wird oft darauf hingewiesen. Auf diese Beziehungen zur aktuellen Mathematik werden wir hier aus Gründen notwendiger Beschränkung nicht eingehen können. Der interessierte Leser mag dazu die Übersichtsartikel [1],[5],[11],[29] zu Rate ziehen, die sich allerdings auf das Gebiet der Singularitätentheorie beschränken. Für eine gründlichere historische Einordnung des Klein'schen Buches verweisen wir außerdem auf unsere Einleitung [30] zu seinem Nachdruck.

Klein's Buch handelt vom Zusammenhang dreier Objekte unterschiedlicher mathematischer Natur, nämlich

dem Ikosaeder

(Fig. 1.)



den Gleichungen fünften Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad ,$$
$$a,b,c,d,e \in \mathbb{C}$$

und der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z'' + \frac{(\alpha+\alpha'-1)+(\beta+\beta'+1)u}{u(u-1)} z' + \frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')u+\beta\beta'u^2}{u^2(u-1)^2} z = 0$$

wobei $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta & \gamma \\ \alpha', & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1/6 & 1/10 & 1/4 \\ -1/6 & -1/10 & 3/4 \end{pmatrix}$

Daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen diesen Objekten aus Geometrie, Algebra und Analysis bestehen kann, wird plausibler, wenn wir jedem der Objekte eine bestimmte Gruppe zuordnen, nämlich

die Gruppe der eigentlichen Symmetrien im Falle des Ikosaeders,

die Galoisgruppe im Falle der Gleichungen,

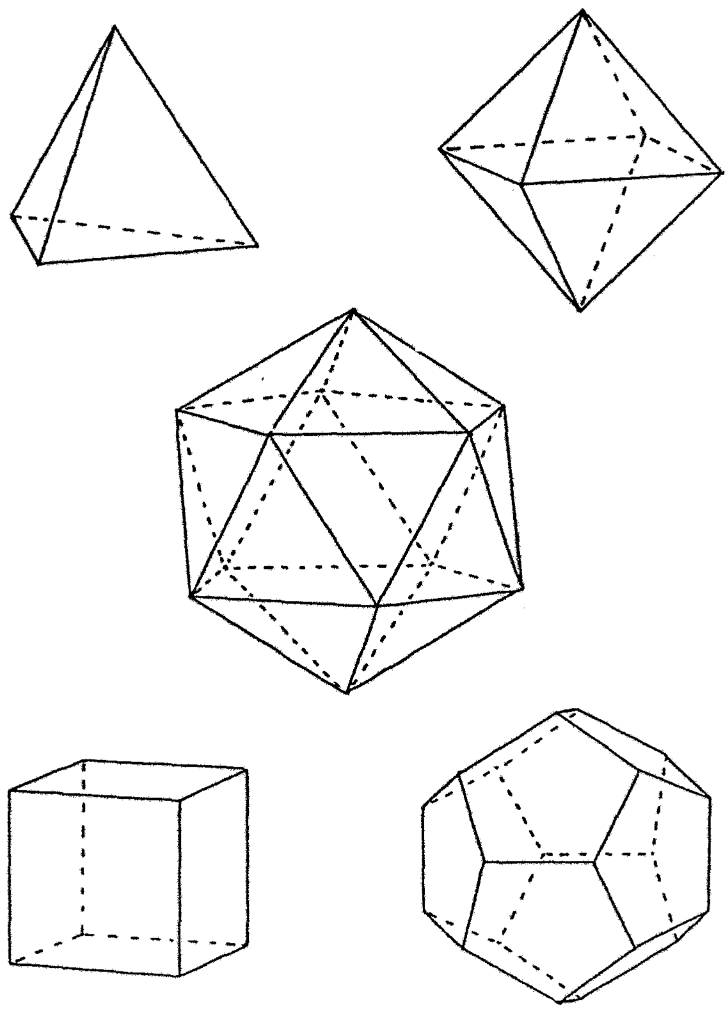
und die Monodromiegruppe im Falle der Differentialgleichung.

Wir werden dies im folgenden in jedem Einzelfall genauer darlegen.

Das Ikosaeder und seine Symmetrien.

Betrachten wir zunächst das Ikosaeder. Zusammen mit Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Dodekaeder bildet es die fünf regulären oder Platonischen Körper, die uns seit der Antike überliefert sind (vgl. Euklid XIII, [12]).

(Fig. 2)



Wir stellen fest oder vergewissern uns bei Euklid, daß das Ikosaeder 20 Seitenflächen besitzt, die reguläre Dreiecke sind, sowie 30 Kanten und 12 Eckpunkte. Letztere liegen alle auf einer dem Ikosaeder umbeschriebenen Kugel, deren Mittelpunkt wir im folgenden als den Koordinatenursprung des Raumes $\mathbb{R}^3$ festlegen wollen. Alle Rotationen dieser Kugel, oder alle Rotationen des $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung, identifizieren sich dann mit den Elementen der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3,\mathbb{R})$. Als <u>Ikosaedergruppe</u> G bezeichnen wir nun die Untergruppe aller Rotationen, die das Ikosaeder in sich überführen.

Zur Untersuchung der Struktur von G überlegen wir uns, daß die Drehachse einer Rotation $g \in G$ nur von der folgenden Art sein kann:

1) Entweder verbindet die Achse diametrale Eckpunkte des Ikosaeders, und g rotiert um diese Achse mit einem Winkel $k \cdot 2\pi/5$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$,

oder

2) sie verbindet diametrale Flächenmittelpunkte, und der Drehwinkel beträgt $k \cdot 2\pi/3$, $k \in \{0,1,2\}$,

oder

3) sie verbindet diametrale Kantenmittelpunkte, und der Drehwinkel beträgt $k \cdot \pi$, $k \in \{0,1\}$.

(Hier haben wir die identische Rotation jedesmal mitaufgeführt).

Eine Abzählung aller dieser Symmetrieachsen und der zugehörigen Rotationen zeigt uns, daß G neben dem neutralen Element folgende Elemente enthält:

$$24 = 6 \cdot 4 \quad \text{Elemente der Ordnung } 5$$
$$20 = 10 \cdot 2 \quad \text{Elemente der Ordnung } 3$$
$$15 = 15 \cdot 1 \quad \text{Elemente der Ordnung } 2$$

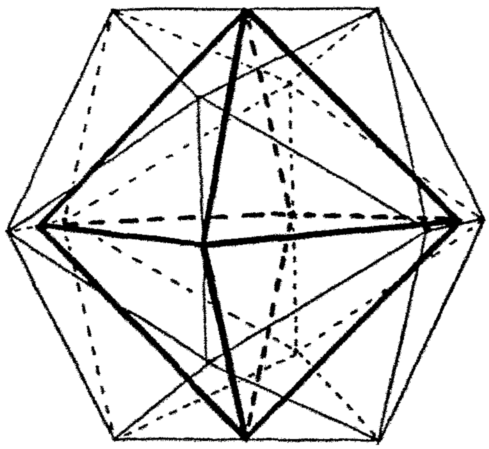
Also hat G die Ordnung $1 + 24 + 20 + 15 = 60$.
Wir können sehr schnell erkennen, daß G eine einfache Gruppe ist, also keine nichtrivialen Normalteiler enthält. Mit jeder Drehung um eine Achse enthält nämlich ein Normalteiler N von G sämtliche Drehungen um alle Achsen, die aus der gegebenen durch die Aktion von G hervorgehen. Da alle Drehachsen in einer der oben aufgezählten drei Klassen miteinander G-äquivalent sind, hat die Ordnung von N die Gestalt

$$|N| = 1 + 15a + 20b + 24c$$

mit $a,b,c \in \{0,1\}$, und zudem muß $|N|$ ein Teiler von 60 sein. Offensichtlich ist dies nur in den trivialen Fällen $a = b = c = 0$ oder $a = b = c = 1$ möglich.

Bekanntlich gibt es, bis auf Isomorphie, nur eine einfache Gruppe der Ordnung 60 , die zugleich die einfache nichtabelsche Gruppe mit der kleinsten Gruppenordnung überhaupt ist, nämlich die Gruppe A_5 der geraden Permutationen von 5 Objekten. Einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} A_5$ können wir auf die folgende geometrische Weise realisieren. Die 30 Kanten des Ikosaeders lassen sich derart in 5 zueinander disjunkte Anordnungen von je sechs aufteilen, daß die Mittelpunkte dieser 6 Kanten die Eckpunkte eines dem Ikosaeder einbeschriebenen Oktaeders bilden. Je zwei dieser 6 Kanten sind diametral. Die zugehörigen drei Drehachsen, die die diametralen Kantenmittelpunkte verbinden, bilden die zueinander orthogonalen Diagonalen des Oktaeders.

(Fig. 3)



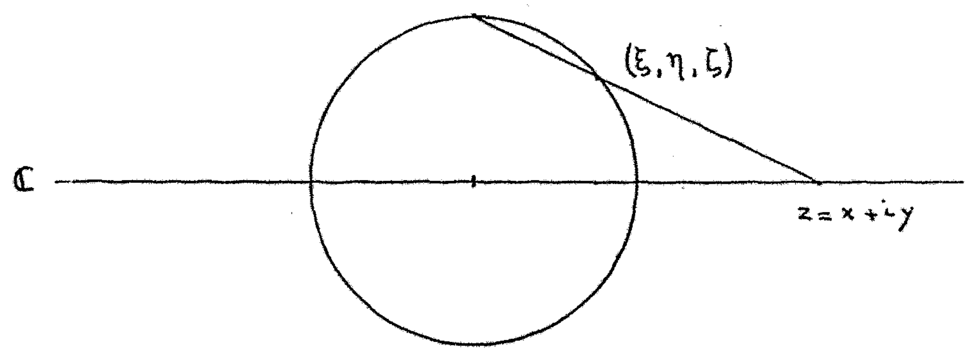
Jede Rotation des Ikosaeders induziert nun eine Permutation der fünf einbeschriebenen Oktaeder. Mittels der Einfachheit der Ikosaedergruppe G sieht man unmittelbar, daß der zugehörige Homomorphismus $G \longrightarrow S_5$ von G in die Gruppe S_5 aller Permutationen der 5 Oktaeder injektiv ist. Andererseits ist A_5 die einzige Untergruppe von S_5 mit dem Index 2. Also muß das Bild von G in S_5 gleich der Gruppe A_5 sein. Natürlich kann man dies auch explizit am Modell verifizieren.

In der Literatur findet man oft die Diskussion der Symmetriegruppe des zum Ikosaeder dualen Dodekaeders, dem sich in dualer Weise 5 Würfel einbeschreiben lassen (die vor allem beim Zeichnen des Dodekaeders von Nutzen sein können). Aufgrund der Dualität stimmen die Symmetriegruppen von Ikosaeder und Dodekaeder überein, genauso wie im Fall von Oktaeder und Hexaeder, für die man die

Gruppe S_4 (Permutationen der Hauptdiagonalen des Würfels) erhält. Die eigentlichen Symmetrien des Tetraeders bilden schließlich eine zu A_4 isomorphe Gruppe (Permutationen der 4 Eckpunkte).

In unseren weiteren Ausführungen wird das Ikosaeder nicht so sehr als Körper im $\mathbb{R}^3$ eine Rolle spielen als vielmehr die durch Zentralprojektion vom Ursprung auf der Einheitssphäre S^2 induzierte Triangulierung durch 20 reguläre sphärische Dreiecke. Weiterhin identifizieren wir die Sphäre S^2 mittels der stereographischen Projektion als Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, d.h. als komplex-projektive Gerade $\mathbb{P}^1$:

(Fig. 4)



$$S^2 \ni (\xi,\eta,\zeta) \longrightarrow \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Klein betrachtet zumeist das Ikosaeder derart in S^2 einbeschrieben, daß den 12 Eckpunkten die komplexen Werte

$$z = 0,\infty,\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4) \ , \ \varepsilon^{\nu}(\varepsilon^2+\varepsilon^3) \ , \ \nu \in \{0,1,2,3,4\}$$

entsprechen, wobei $\varepsilon \neq 1$ eine fünfte Einheitswurzel ist.

Den Rotationen der Sphäre entsprechen nun gebrochen lineare Transformationen von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mittels der explizit gegebenen Ecken des Ikosaeders kann man die Transformationen in G einfach bestimmen. Es treten dabei nur Transformationen mit Koeffizienten in dem Körper $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ auf, vgl. dazu [20] I,2,§6.

Gleichungen fünften Grades und Galoistheorie.

Formeln für die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen sind uns seit der Antike bekannt. Zu Anfang des 16. Jahrhunderts gelang italienischen Mathematikern (Scipio del Ferro, Ferrari, in den Schulen von Tartaglia und Cardano, 1515 - 1545) die Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades. Für die Lösungen der Gleichungen dritten Grades hat man die sogenannten Formeln von Cardano. Mittels der Substitution $x = y - a/3$ läßt sich jede Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx = 0 \qquad (a,b,c \in \mathbb{C})$$

auf eine solche der Form

$$y^3 + py + q = 0$$

reduzieren. Ist $d = q^2/4 + p^3/q$ die zugehörige Diskriminante, so lauten die drei Lösungen nun

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{d}} + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{d}}$$

(Die durch die beiden dritten Wurzeln verursachte Mehrdeutigkeit von i.a. neun Werten reduziert sich auf drei unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Produkt beider Wuzeln gleich $-p/3$ ist.)

Bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts versuchten viele Mathematiker, darunter Tschirnhaus, Euler, Bezout, Malfatti, Vandermonde, Lagrange auch Gleichungen höherer Grade durch Iteration und rationale Kombination von Wurzeln (d.h. Radikalen) zu lösen. Erfolg zeigte sich immer nur bei Gleichungen sehr spezieller Form, und schließlich zeigten Ruffini (1799) und Abel (1824/26), daß die Lösung allgemeiner Gleichungen 5. Grades nicht mit Hilfe von Radikalen zu bewerkstelligen ist. Die teilweise berechtigte Kritik an Ruffinis und Abels Beweisen verstummte zwar nur langsam, aber spätestens seit der öffentlichen Rezeption des Werkes von Galois (1831, publiziert 1846) wurde deren Resultat unbezweifelbar.

Aus moderner Sicht (vgl. z.B. [2],[31]) stellt sich die Galois'sche Behandlung des Auflösungsproblems für eine algebraische Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

mit komplexen oder transzendenten Koeffizienten - dies sind die klassischen Fälle - folgendermaßen dar. Sei k der von den

Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ über $\mathbb{Q}$ erzeugte Körper (oder auch eine Erweiterung desselben) und $K = k(x_1, \dots, x_n)$ der von den Lösungen $x_1, \dots, x_n$ von $P(x) = 0$ erzeugte Zerfällungskörper. Die <u>Galoisgruppe</u> $\mathrm{Gal}(P,k)$ <u>der Gleichung</u> $P(x) = 0$ <u>über</u> k ist dann gleich der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K,k)$ der Körpererweiterung $k \subset K$, d.h. gleich der Gruppe aller Körperautomorphismen von K, die k elementweise festlassen. Im klassichen Kontext ist $\mathrm{Gal}(P,k)$ eine Gruppe von Permutationen der n Wurzeln $x_1, \dots, x_n$ von P. Diese Interpretation ergibt sich jetzt durch Betrachtung der Aktion von $\mathrm{Gal}(K,k)$ auf den Wurzeln $x_1, \dots, x_n$, die einerseits von $\mathrm{Gal}(K,k)$ untereinander permutiert werden müssen und andererseits durch die Permutation einen Automorphismus über k eindeutig festlegen. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(P,k)$ ist ein qualitatives Maß für die Komplexität des Auflösungsprozesses der Gleichung $P(x) = 0$ oder, mit anderen Worten, für die Komplexität der algebraischen Körpererweiterung $k \subset K$.

Jede endliche Gruppe G besitzt eine Kompositionsreihe, d.h. eine Folge von Untergruppen G_i

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_m = \{1\}$$

so daß G_{i+1} normal in G_i und die Quotientengruppe G_i/G_{i+1} einfach ist. (Wir betrachten auch die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung als einfach.) Obwohl die Folge der G_i nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht, sind es die einfachen Quotienten G_i/G_{i+1}, bis auf Anordnung. Einer Kompositionsreihe der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(P,k) = \mathrm{Gal}(K,k)$ entspricht nun eine aufsteigende

Folge

$$k = k_1 \subset k_2 \subset \ldots \subset k_m = K$$

der Fixkörper $k_i = K^{G_i}$. Dabei ist k_{i+1} eine Galoiserweiterung von k_i mit Gruppe G_i/G_{i+1}. Das Problem der Konstruktion der Wurzeln $x_i, \ldots, x_n$ der Gleichung $P(x) = 0$ oder - abstrakter - des Körpers K ist damit in eine Reihe von einfacheren Schritten zerlegt, nämlich der Konstruktion der Lösungen geeigneter Hilfsgleichungen $P_i(y) = 0$, $P_i \in k_i[y]$, die den Körper k_{i+1} über k_i erzeugen. Besonders deutlich wird dies in dem Fall, daß die Gruppe G auflösbar ist, d.h. daß alle einfachen Quotienten einer Kompositionsreihe abelsch, also zyklisch von Primzahlordnung sind. Genau in diesem Fall lassen sich nämlich die Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ durch iterierte Radikale darstellen. Nehmen wir an, daß k alle Einheitswurzeln der Ordnung $|G|$ enthält, was sich durch Wurzelziehen erreichen läßt, so folgt die Darstellbarkeit der Wurzeln durch Radikale aus dem folgenden, etwas allgemeiner als nötig formulierten Normalformsatz für zyklische Erweiterungen, der auf die Zwischenerweiterungen $k_i \subset k_{i+1}$ anzuwenden ist.

Satz. Sei k ein Körper und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, eine nicht von $\mathrm{char}(k)$ teilbare Zahl. Der Körper k enthalte die Gruppe μ_q der q-ten Einheitswurzeln. Sei $K \supset k$ eine Galoiserweiterung mit zyklischer Gruppe $\mathrm{Gal}(K,k) = \mathbb{Z}/(q)$. Dann gibt es ein $u \in k$, so daß K alle Lösungen der Gleichung $z^q - u = 0$ enthält und von jeder solchen Lösung erzeugt wird, i.e.

$$K = k(z) \quad \text{für alle} \quad z \quad \text{mit} \quad z^q - u = 0 .$$

Außerdem gibt es einen Isomorphismus

$$\rho : \mathrm{Gal}(K,k) \longrightarrow \mu_q$$

so daß $\sigma(z) = \rho(\sigma^{-1}) \cdot z$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K,k)$ und z mit $z^q - u = 0$.

Gleichungen der Form $z^q - u = 0$ wurden früher als "reine Gleichungen" und z als Lagrange'sche Resolvente bezeichnet.

Während für ein Polynom P des Grades 2,3 oder 4 die Galoisgruppe als Untergruppe der auflösbaren symmetrischen Gruppe S_2, S_3 oder S_4 ebenfalls auflösbar und somit die Gleichung $P(x) = 0$ durch Radikale lösbar ist, begegnen wir im Fall eines Grades $n \geq 5$ den einfachen Gruppen A_n und den somit nicht auflösbaren Obergruppen S_n (mit Kompositionsreihe $S_n \supset A_n \supset \{1\}$). So tritt S_n als Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(P,\mathbb{Q}(a_1, \ldots ,a_n))$ der allgemeinen Gleichung n-ten Grades

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit algebraisch unabhängigen Koeffizienten $a_1, \ldots ,a_n$ auf. Aber auch für die "meisten" Polynome n-ten Grades P mit rationalen Koeffizienten gilt $\mathrm{Gal}(P,\mathbb{Q}) = S_n$ (vgl. z.B. [31] §66). Beispiele für rationale Polynome 5. Grades mit Galoisgruppe A_5 oder S_5 sind solche, die natürlich irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind und die genau drei reelle Nullstellen besitzen, wie z.B. das Polynom

$$x^5 - 10x - 2$$

(vgl. [2] Satz 46).

Die Existenz von Gleichungen, die nicht mit Hilfe von Radikalen gelöst werden können, wirft die folgende natürliche Frage auf: Mittels welcher zusätzlicher Funktionen lassen sich die Wurzeln dieser Gleichungen in den Gleichungskoeffizienten oder - allgemeiner - in Elementen des Grundkörpers darstellen? Natürlich möchte man mit möglichst wenigen und zudem wohlverstandenen Funktionen auskommen. In Anbetracht des weiter oben beschriebenen Reduktionsprozesses genügt es, diese Frage für Gleichungen mit einfacher (nichtabelscher) Galoisgruppe zu stellen. Da eine Antwort im zyklischen Fall durch den Normalformsatz gegeben wird, stellt sich also, in etwas abstrakterer Form, die Frage nach einer Normalform für Galoiserweiterungen $k \subset K$ mit gegebener (einfacher, nichtabelscher) Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K,k)$.

Das Ziel von Kleins Ikosaederbuch ist es, auf diese Fragen eine umfassende Antwort im Fall der Ikosaedergruppe $G = A_5$ zu geben. In anderen Arbeiten hat Klein weitere einfache Gruppen, wie z.B. A_6 und $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ betrachtet und ebenfalls allgemeine Ansätze entwickelt. In diesem Rahmen werden wir jedoch darauf nicht eingehen.

Hypergeometrische Differentialgleichungen

Im Jahre 1858 gelang es drei Mathematikern, Hermite, Kronecker und Brioschi, die Wurzeln von Gleichungen 5. Grades mittels elliptischer Integrale und Modulfunktionen auszudrücken. Obwohl Klein einen großen Teil seines Werkes der Theorie der elliptischen Funktionen widmete, betrachtete er ihre Verwendung in der Gleichungstheorie dennoch als einen Umweg, da ihre Benutzung in Analogie stand zur Darstellung der Lösungen reiner Gleichungen $x^q - u = 0$ mittels Logarithmus und Exponentialfunktion (i.e. $x = \exp((\ln u)/q)$) . Stattdessen stellte Klein in seinem Ikosaederbuch die Klasse der hypergeometrischen Funktionen in den Vordergrund, die zu seiner Zeit nach Untersuchungen von Euler (1794), Gauß (1813), Kummer (1836), Weierstraß (1856), Riemann (1858) und Schwarz (1873) als wohluntersucht gelten konnten. Auch hat Klein diesen Funktionen später ein Buch gewidmet [21], in dem der Leser weitere Details zu den folgenden Ausführungen finden kann. Ansonsten vergleiche man auch [5], und, für eine ausführliche und elementare Einführung in die Grundlagen, [18].

Euler betrachtete als erster die hypergeometrische Reihe

$$F(a,b,c;u) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}\,u + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1(1+1)c(c+1)}\,u^2 + \ldots$$

wobei a,b,c komplexe (bei Euler noch reelle) Zahlen sind, und $-c \notin \mathbb{N}$ gilt. Bis auf eine Konstante realisierte er sie als das Integral

$$\int_0^1 x^{b-1}\,(1-x)^{c-b-1}\,(1-ux)^{-a}\,dx \quad ,$$

und er bemerkte, daß sie die Differentialgleichung

$$u(1-u)F'' + (c-(a+b+1)u)F' - abF = 0$$

erfüllt. Allgemeiner als F bezeichnet man Produkte der Form

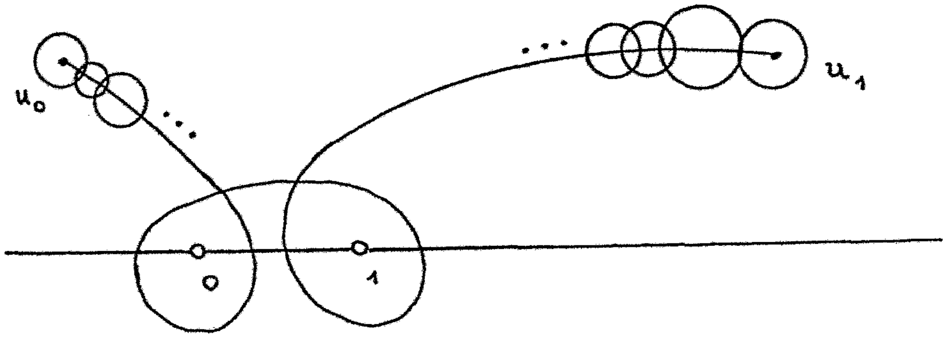
$$u^{\alpha}(1-u)^{\gamma}\,F(a,b,c,;u) \qquad (\alpha,\gamma \in \mathbb{C})$$

als hypergeometrische Funktionen. Diese erfüllen die zu Anfang erwähnte hypergeometrische Differentialgleichung

$$z'' + \frac{(\alpha+\alpha'-1)\ +\ (\beta+\beta'+1)u}{u(u-1)}\,z' \ +\ \frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')u+\beta\beta'u^2}{u^2(u-1)^2}\,z = 0$$

mit $\alpha' = 1-c+\gamma$, $\gamma' = c-a-b+\gamma$, $\beta = a-\alpha-\gamma$, $\beta' = b-\alpha-\gamma$. Diese Differentialgleichung ist regulär in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ und besitzt reguläre Singularitäten in den Punkten $0,1,\infty$ (vgl. z.B. [18] Kap. XII). Sei $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ein regulärer Punkt. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für komplexe Differentialgleichungen gibt es dann zu jeder Anfangsbedingung $(z(u_0),z'(u_0)) \in \mathbb{C}^2$ genau eine holomorphe Lösung z in einer Umgebung des Punktes u_0 . Ist ω ein Weg von u_0 zu einem anderen regulären Punkt u_1 , der vollkommen in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ verläuft, so läßt sich jede lokale Lösung in u_0 längs ω zu einer lokalen Lösung in u_1 analytisch fortsetzen.

(Fig. 5)



Diese Fortsetzung ist nur abhängig von der Homotopieklasse des Weges ω im regulären Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Ist insbesondere $u_0 = u_1$, also ω eine Schleife, und sind z_1, z_2 einmal fixierte Fundamentallösungen in u_0 , so gilt für die längs ω fortgesetzten Lösungen $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$:

$$\tilde{z}_1 = az_1 + bz_2$$
$$\tilde{z}_2 = cz_1 + dz_2$$

für eine nichtsinguläre komplexe Matrix

$$m(\omega) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Homomorphismus

$$m : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, u_0) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

der Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ in die allgemeine lineare Gruppe der komplexen 2x2-Matrixen. Dieser Homomorphismus heißt die <u>Monodromiedarstellung</u> und das Bild von m die <u>Monodromiegruppe</u> der Differentialgleichung. (Bis auf Konjugation in $GL_2(\mathbb{C})$ hängt diese Gruppe weder von der Wahl des Basispunktes u_0 noch von der Wahl der Fundamentallösungen z_1, z_2 in u_0 ab.) Betrachten wir die Wirkung der analytischen Fortsetzung längs eines Weges ω auf den meromorphen Quotienten $\zeta = z_1/z_2$ zweier Fundamentallösungen, so erhalten wir eine gebrochen lineare Transformation

$$\zeta = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{az_1+bz_2}{cz_1+dz_2} = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + b}$$

Wir nennen die Komposition $\bar{m}$

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, u_0) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$$

von m mit der natürlichen Abbildung von $GL_2(\mathbb{C})$ in die Gruppe $PGL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ der gebrochen linearen Transformationen die <u>projektive Monodromiedarstellung</u> und das Bild von $\bar{m}$ die <u>projektive Monodromiegruppe</u> der Differentialgleichung.

In seiner Arbeit von 1873 [25] hat Schwarz alle hypergeometrischen Differentialgleichungen mit endlicher Monodromiegruppe untersucht. (Bei Schwarz tritt der Begriff der Monodromiegruppe allerdings nur implizit auf.) Einer der wichtigsten Fälle ist derjenige mit dem "Exponentendatum"

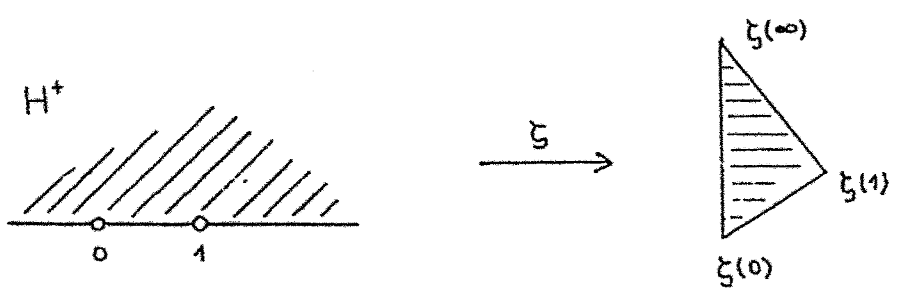
$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/10 & 1/4 \\ -1/6 & -1/10 & 3/4 \end{pmatrix} .$$

In diesem Fall identifiziert sich die projektive Monodromiegruppe nämlich mit der Ikosaedergruppe. Um dies einzusehen, wollen wir etwas genauer auf die Schwarz'sche Vorgehensweise eingehen. Schwarz betrachtet den meromorphen Quotienten $\zeta = z_1/z_2$ zweier Fundamentallösungen, der sich auf der ganzen oberen Halbebene $H^+ = \{u \,|\, \mathrm{Im}(u) > 0\}$ eindeutig wählen läßt. Tatsächlich ist die so erhaltene holomorphe Abbildung

$$\zeta : H^+ \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

auf den Rand von H^+ (die reelle Achse und ∞) fortsetzbar. Als Bild $\zeta(\bar{H}^+), \bar{H}^+ = H^+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ergibt sich dann ein Kreisbogendreieck mit den Eckwinkeln $\pi/3$, bzw. $\pi/2$, bzw. $\pi/5$, in den Punkten $\zeta(0)$, bzw. $\zeta(1)$, bzw. $\zeta(\infty)$.

. (Fig. 6)

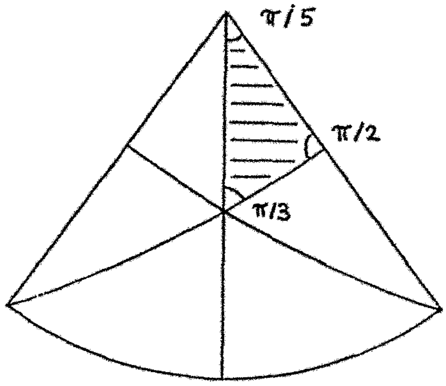


.

Ein solches Dreieck läßt sich als sphärisches Dreieck auf der Riemannschen Zahlenkugel (bzgl. einer durch das Dreieck bestimmten

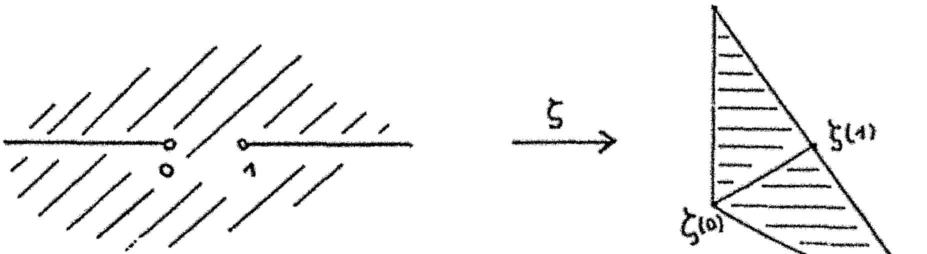
Euklidischen Metrik) realisieren. Die Fläche dieses Dreiecks umfaßt dann den hundertzwanzigsten Teil der gesamten Kugelfläche. Außerdem paßt sich das Dreieck folgendermaßen in eines der zwanzig regulären Dreiecke des Ikosaeders ein:

(Fig. 7)



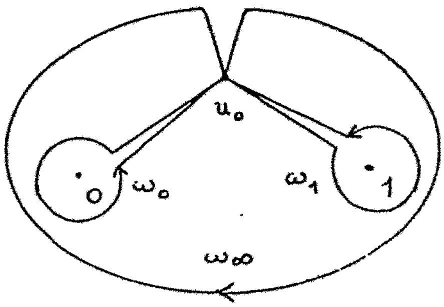
Nun läßt sich ζ von H^+ in die untere Halbebene H^- fortsetzen. Geschieht dies über den "Schnitt" $\overline{01}$ (bzw. $\overline{1\infty}$, bzw. $\overline{\infty 0}$), so erhält man als Bild $\zeta(\overline{H^-})$ das an dem Großkreis durch die Dreieckseite $\overline{\zeta(0)\ \zeta(1)}$ (bzw. $\overline{\zeta(1)\ \zeta(\infty)}$, bzw. $\overline{\zeta(\infty)\ \zeta(0)}$) gespiegelte Bild von $\zeta(\overline{H^+})$ - nach dem heute so benannten Schwarz'schen Spiegelungsprinzip.

(Fig. 8)



Weitere Fortsetzung von ζ über die drei Schnitte erfolgt in entsprechender Weise durch weitere Spiegelungen. Insbesondere können wir so die projektive Monodromie längs eines Umlaufs um die singulären Stellen $0,1,\infty$ verfolgen. Mit folgender Bezeichnung für die Homotopieklassen

(Fig. 9)



$$\omega_\infty = \omega_1^{-1} \cdot \omega_0^{-1}$$

ergibt sich:
$\bar{m}(\omega_0)$ (bzw. $\bar{m}(\omega_1)$, bzw. $\bar{m}(\omega_\infty)$) ist eine Rotation um die Achse durch $\zeta(0)$ (bzw. $\zeta(1)$, bzw. $\zeta(\infty)$) mit dem Drehwinkel $2\pi/3$ (bzw. π , bzw. $2\pi/5$). Da $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})$ von ω_0 und ω_1 und die Ikosaedergruppe G von den Rotationen $\bar{m}(\omega_0)$ und $\bar{m}(\omega_1)$ erzeugt werden, muß die projektive Monodromiegruppe die Ikosaedergruppe G sein. Die Monodromiegruppe $\hat{G}$ selbst liegt (aufgrund der Form der Exponenten) in der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$. Nun ist G das Bild von $\hat{G}$ unter der natürlichen Abbildung $SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$. Da $SL_2(\mathbb{C})$ nur ein Element der Ordnung 2 enthält, G dagegen 15 , kann die Abbildung $\hat{G} \longrightarrow G$ weder ein Isomorphismus sein noch spalten. Wir erhalten somit das folgende Diagramm mit exakten Zeilen

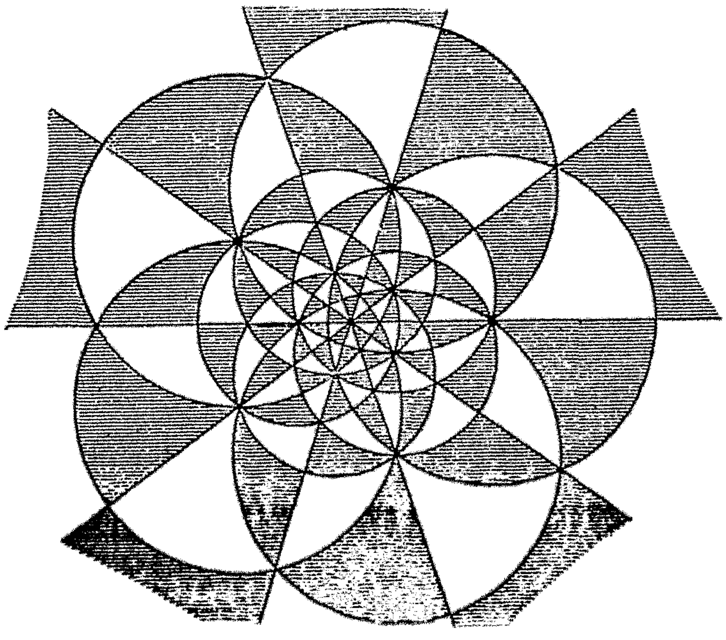
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \langle \pm 1 \rangle & \longrightarrow & SL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & PGL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \cup & & \cup & & \\
1 & \longrightarrow & \langle \pm 1 \rangle & \longrightarrow & \hat{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Die Gruppe $\hat{G}$ heißt die <u>binäre Ikosaedergruppe</u>, und die Klasse der nichttrivialen Erweiterung $\hat{G} \longrightarrow G$ entspricht dem nichttrivialen Element in der Kohomologiegruppe $H^2(G, \mathbb{Z}/(2)) \cong \mathbb{Z}/(2)$.

Die Ikosaedergleichung

Aufgrund der gerade durchgeführten Betrachtungen erkennen wir, daß die durch suksessive analytische Fortsetzung von ζ definierten Bilder der oberen und unteren Halbebene (mit $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jeweils) die gesamte Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ überdecken. Im folgenden Bild der stereographischen Projektion des Ikosaeders auf die komplexe Ebene sind die Bilder von H^+ schraffiert gezeichnet:

(Fig. 10.)



Außerdem erkennen wir, daß jedem Punkt z der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ genau ein Punkt $u \in \bar{H}^+ \cup \bar{H}^-$ entspricht, der durch eine geeignete Fortsetzung von ζ auf z abgebildet wird. Mit anderen Worten besitzt die "mehrdeutige Abbildung" ζ eine eindeutige Umkehrabbildung

$$q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \bar{H}^+ \cup \bar{H}^- \cong \mathbb{P}^1 \quad ,$$

die wir die (verzweigte) <u>Ikosaederüberlagerung</u> nennen werden. Zwei Punkte z und $z' \in \mathbb{P}^1$ haben unter q das gleiche Bild genau dann, wenn sie durch die Ikosaedergruppe G ineinander überführt werden können. Insofern ist die Abbildung q der Quotient von $\mathbb{P}^1$ nach der Aktion der Ikosaedergruppe

$$q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G \cong \mathbb{P}^1 \quad .$$

Einen Fundamentalbereich für die G-Aktion auf $\mathbb{P}^1$ erhält man durch die Vereinigung eines schraffierten mit einem benachbarten unschraffierten Dreieck. Die Abbildung q ist holomorph und wird somit durch eine G-invariante rationale Funktion realisiert, die wir gleich explizit bestimmen werden. Wir fassen zunächst noch das Verzweigungsverhalten von q zusammen. Ersichtlich besteht das Urbild $q^{-1}(0)$ (bzw. $q^{-1}(1)$, bzw. $q^{-1}(\infty)$) aus der Menge aller 20 Flächenmittelpunkte (bzw. der Menge der 30 Kantenmittelpunkte, bzw. der Menge aller 12 Eckpunkte) des sphärischen Ikosaeders, in denen q mit der Ordnung 3 (bzw. 2, bzw. 5) verzweigt. Außerhalb dieser drei exzeptionellen G-Bahnen ist q unverzweigt, und jede Faser $q^{-1}(u)$, $u \neq 0,1,\infty$, besteht aus 60 unter G äquivalenten Punkten.

Zur Bestimmung der rationalen Funktion q führen wir auf der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ homogene Koordinaten $z = (z_1 : z_2)$ ein. Bezüglich dieser muß dann q die Gestalt

$$q(z) = P(z_1, z_2)/Q(z_1, z_2)$$

annehmen, wobei P und Q homogene Polynome vom Grade 60 sind, die zudem unter der natürlichen Aktion der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ invariant bleiben ($\hat{G}$ besitzt keine nichttrivialen multiplikativen Charaktere). Aufgrund der Beschreibung der Fasern von q muß Q genau in den 12 Eckpunkten des sphärischen Ikosaeders, jeweils mit Multiplizität 5, verschwinden, entsprechend P in den 20 Flächenmittelpunkten mit Multiplizität 3 und $Q-P$ in den 30 Kantenmittelpunkten mit Multiplizität 2. Bis auf einen numerischen Faktor gibt es aber nur ein homogenes Polynom f vom Grade 12, das genau in den 12 Ikosaederecken verschwindet (und daher $\hat{G}$-invariant ist). Somit ist Q proportional zu f^5, und ähnlich muß P (bzw. $Q-P$) proportional sein zu H^3 (bzw. T^2), wobei H (bzw. T) das im wesentlichen eindeutige homogene Polynom vom Grade 20 (bzw. 30) ist, das genau in den 20 Flächenmittelpunkten (bzw. 30 Kantenmittelpunkten) verschwindet. Legt man die früher fixierten Ikosaederecken zugrunde, so erhält man mit Klein (vgl. [20] I,2,§13) folgende Formen f, H, T :

$$f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$$
$$H = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 (z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}$$
$$T = (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522 (z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005 (z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})$$

Während zur Bestimmung von f die explizite Form der 12 Ikosaederecken wesentlich ist, benötigt die Erstellung von H und T keineswegs die explizite Bestimmung aller Flächen- und Kantenmittelpunkte. Bis auf numerische Faktoren ist nämlich H die Hesse'sche Form von f und T die Jacobi'sche von f und H. Mit f sind daher auch H und T $\hat{G}$-invariant. Die geometrische Bedeutung von H und T folgt dann aus der Beschreibung der G-Bahnen auf $\mathbb{P}^1$. Setzt man nun $P = H^3$ und $Q = 1728f^5$, so ergibt sich $Q - P = T^2$.

Also wird die Ikosaederüberlagerung $q : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ gegeben durch

$$q(z_1:z_2) = H(z_1,z_2)^3/1728f(z_1,z_2)^5 \quad .$$

Schreiben wir die Bedingung $q(z) = u$ wieder in inhomogenen Koordinaten für z, so erhalten wir die <u>Ikosaedergleichung:</u>

$$((z^{20}+1)-228(z^{15}-z^5)+494z^{10})^3+1728uz^5(z^{10}+11z^5-1)^5 = 0 \quad .$$

Diese Gleichung ist vom Grade 60 in z und besitzt nur einen Parameter, u. Nach den vorangegangenen Ausführungen über die hypergeometrische Differentialgleichung sind ihre Lösungen mittels hypergeometrischer Funktionen in u darstellbar. Für $|u| > 1$ erhält man etwa für die fünf Wurzeln, die in dem lokalen Blatt von 0 über ∞ liegen, die folgende Darstellung:

$$z = F\left(\frac{11}{60},\frac{31}{60},\frac{6}{5};\frac{1}{u}\right) \Big/ \sqrt[5]{1728}\; F\left(\frac{-1}{60},\frac{19}{60},\frac{4}{5};\frac{1}{u}\right) \quad .$$

Für andere Bereiche von u vergleiche man [19] I, §8 .

Bevor wir zur Erläuterung des Klein'schen Hauptresultats fortschreiten, wollen wir noch kurz einen Abstecher machen und auf die Identität $Q - P = T^2$ oder , in ausgeschriebener Form,

$$1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$$

eingehen. Mit Überlegungen ähnlich denen zur expliziten Form von q erhalten wir sehr leicht, daß sich jedes $\hat{G}$-invariante Polynom in z_1 und z_2 als ein Polynom in den Grundinvarianten f,H,T ausdrücken läßt. Außerdem reduziert sich jede zwischen f,H und T bestehende algebraische Identität auf die obige. Mit anderen Worten ist der Ring der $\hat{G}$-invarianten Polynome $\mathbb{C}[z_1,z_2]^{\hat{G}}$ isomorph zum Quotienten $\mathbb{C}[f,H,T]/(R)$ eines Polynomrings in drei Variablen nach dem von der "Relation"

$$R = 1728f^5 - H^3 - T^2$$

erzeugten Ideal. Geometrisch heißt dies, daß die Quotientenvarietät $\mathbb{C}^2/\hat{G}$, d.h. die Varietät der $\hat{G}$-Bahnen der binären Ikosaedergruppe bezüglich der durch die Inklusion $\hat{G} \subset SL_2(\mathbb{C})$ gegebenen Operation von $\hat{G}$ auf $\mathbb{C}^2$, isomorph ist zu der durch die Gleichung

$$1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$$

definierten Hyperfläche X im $\mathbb{C}^3$ (mit Koordinaten f,H,T). Diese Fläche X besitzt eine isolierte Singularität, die seit über 50 Jahren immer wieder das Interesse der Mathematiker auf sich gezogen hat und zum Beispiel mit der einfachen komplexen Liegruppe von Typ E_8 in engster Beziehung steht. Eine ausführliche Schilderung dieser Verhältnisse findet man in der zu Anfang zitierten Literatur ([1] [5] [11] [29]) und den dort angeführten Originalarbeiten.

Der Klein'sche Satz

Etwas vereinfacht besagt das Hauptresultat von Klein's Ikosaederbuch, daß sich die Lösung einer Gleichung fünften Grades auf die Lösung einer Ikosaedergleichung reduzieren läßt. Zudem wird diese Reduktion explizit durchgeführt, was übrigens den größten Teil der zweiten Häfte des Buches ausmacht. Die Möglichkeit der Reduktion läßt sich in zeitgemäßer und präzisierter Form durch den folgenden Normalformsatz für ikosaedrale Erweiterungen ausdrücken, der bis auf einen kleinen "Schönheitsfehler" in vollständiger Analogie zu dem Normalformsatz für zyklische Erweiterungen steht.

Satz: Sei $k \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper der komplexen Zahlen, der die Gruppe μ_5 der fünften Einheitswurzel enthalte, und sei

$K \subset \mathbb{C}$ eine Galoiserweiterung von k mit Gruppe $Gal(K,k) \cong A_5$. Nach gegebenenfalls erforderlicher Ersetzung von k (und entsprechend von K) durch eine quadratische Erweiterung gibt es ein $u \in k$, so daß K von jeder Lösung der Ikosaedergleichung $q(z) = u$ erzeugt wird. Außerdem gibt es zu jeder Lösung z von $q(z) = u$ einen Isomorphismus

$$\rho : Gal(K,k) \xrightarrow{\sim} G \subset PGL_2(k)$$

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{bmatrix}$$

der Galoisgruppe auf die Ikosaedergruppe G in $PGL_2(k)$, so daß

$$\sigma^{-1}(z) = \rho(\sigma)(z) = \frac{a(\sigma)z+b(\sigma)}{c(\sigma)z+d(\sigma)}$$

für alle $\sigma \in Gal(K,k)$.

Als Schönheitsfehler in diesem Satz haben wir natürlich die gegebenenfalls erforderliche Ersetzung von k durch eine quadratische Erweiterung $k' \subset \mathbb{C}$ bezeichnet. Da $Gal(K,k)$ keine Untergruppe vom Index 2 enthält, ist k' nicht in K enthalten, und es gilt $Gal(K.k',k') \cong Gal(K,k)$. Eine solche Erweiterung, oder eine die Erweiterung erzeugende Quadratwurzel nannte Klein "akzessorisch". Kronecker hatte schon 1861 behauptet, daß die Heranziehung dieser akzessorischen Erweiterung unvermeidbar ist, wenn man allgemeine Gleichungen fünften Grades auf

Gleichungen mit nur einem Parameter (wie die Ikosaedergleichung) reduzieren will. Ein erster Beweis dazu wurde von Klein im Jahre 1877 erbracht. Eine Modifikation dieses Beweises schließt das Ikosaederbuch ab.

Ebenfalls als störend in der Formulierung des Satzes mag die Einbettung von k und K in den Körper der komplexen Zahlen empfunden werden. Diese haben wir jedoch nur gefordert, um die Ikosaedergleichung $q(z) - u = 0$ durch hypergeometrische Reihen oder andere transzendente Verfahren lösen zu können. Für eine Abschwächung an die Charakteristik von k vergleiche man Anhang I.

Im folgenden werden wir ein erzeugendes Element z wie im obigen Satz als Ikosaederresolvente für die Erweiterung $k \subset K$ bezeichnen. (Historisch korrekter wäre es, diese Bezeichnung auf die Gleichung $q(z) - u = 0$ anzuwenden.)

Ein konstruktiver Beweis des Normalformsatzes ist einer der wesentlichen Schritte in Klein's effektiver Reduktion der Lösung der Gleichungen fünften Grades auf die Lösung der Ikosaedergleichung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir K als den Zerfällungskörper eines Polynoms fünften Grades

$$P(x) = x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5 \quad ,$$

$a_1, \dots ,a_5 \in k$, ansehen. Sind dann $x_1, \dots ,x_5$ die Wurzeln von P , so gilt $K = k(x_1, \dots ,x_5)$, und $\mathrm{Gal}(K,k)$ identifiziert sich mit der Gruppe der geraden Vertauschungen dieser Wurzeln. (Zur Konstruktion eines solchen Polynoms P genügt es ein Element $x \in K \setminus k$ zu finden, das von einer zu A_4 isomorphen Untergruppe von $\mathrm{Gal}(K,k)$ fixiert wird. Dann erfüllt nämlich x eine Gleichung 5. Grades.) Zur Vereinfachung nehmen wir vorerst die Gleichung $P(x) = 0$ als "allgemein" an, d.h. wir beschränken unsere Betrachtung auf den Fall, daß $K = \mathbb{Q}(\mu_5)(x_1, \dots ,x_5)$ der Körper der rationalen Funktionen in fünf Unbestimmten $x_1, \dots ,x_5$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\mu_5)$ ist. Dann ist $k = \mathbb{Q}(\mu_5)(a_1, \dots ,a_5,\sqrt{d})$ der Unterkörper von K , der über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ von den elementarsymmetrischen Funktionen $a_1, \dots ,a_5$ der x_i und von der Wurzel

$$\sqrt{d} = \prod_{i<j} (x_i-x_j)$$

der Diskriminante d von P erzeugt wird. Das Klein'sche Reduktionsverfahren beruht nun auf den folgenden drei Konstruktionen:

I) Nach Ersetzung von k durch eine akzessorische Erweiterung, die z.B. durch eine Quadratwurzel $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{Q}[a_1, \dots ,a_5] \subset k$ erzeugt werden kann, gibt Klein eine explizite Ikosaederresolvente $z \in \mathbb{Q}(\mu_5)(a_1, \dots ,a_5,\sqrt{d},\sqrt{a})$ an. (Daraus erhält man einen konstruktiven Beweis des Normalformsatzes, auch im allgemeinen Fall.)

II) Da die Ikosaederüberlagerung q invariant bezüglich der Ikosaedertransformationen ist, muß das Element $u = q(z) = H(z,1)^3/1728f(z,1)^5$ invariant unter $\mathrm{Gal}(K,k)$ sein, also in k liegen. Klein bestimmt u als explizites Element von $k = \mathbb{Q}(\mu_5)(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{d}, \sqrt{a})$.

III) In Umkehrung zu I konstruiert Klein fünf rationale Funktionen $X_i \in k(Z)$, $i = 1, \ldots, 5$. so daß $x_i = X_i(z)$ für alle i .

Wir können nun den von Klein vorgeschlagenen Weg für die Lösung einer Gleichung fünften Grades

$$P(x) = x^5+\alpha_1x^4+\alpha_2x^3+\alpha_3x^2+\alpha_4x+\alpha_5 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ skizzieren. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen, die erst an expliziten Formeln festzumachen sind, nehmen wir die Koeffizienten α_i als genügend allgemein an. Dann erweisen sich die im folgenden beschriebenen Substitutionen als durchführbar. Klein selbst diskutiert auch nur diesen allgemeinen Fall bis zu Ende, obwohl seine geometrische Theorie die Existenz expliziter Formeln in allen Fällen garantiert. Zunächst ordnet Klein der Gleichung $P(x) = 0$ eine Ikosaedergleichung $q(z) = \beta$ zu, wobei sich $\beta \in \mathbb{P}^1$ durch die Substitution $a_i \longmapsto \alpha_1$ aus dem Element u der Konstruktion II ergibt. Mittels analytischer Methoden, z.B. mittels hypergeometrischer Reihen, läßt sich nun eine Lösung z der Ikosaedergleichung $q(z) = \beta$ angeben. Schließlich erhält man die Wurzeln $x_1, \ldots, x_5$ von $P(x)$ aus den rationalen Funktionen X_i der Konstruktion III durch die Substitution $X \longmapsto z$, $a_i \longmapsto \alpha_i$.

Die geometrische Theorie der Hauptgleichungen

Die im vorigen Abschnitt aufgeführten Konstruktionen werden von Klein auf dem Hintergrund einer geometrischen Interpretation durchgeführt. Wir wollen hier einige der Ideen skizzieren, die einem der beiden im Ikosaederbuch eingeschlagenen Wege zugrundeliegen. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Gleichung fünften Grades bereits die Gestalt einer "Hauptgleichung"

$$P(y) = y^5 + ay^2 + by + c = 0$$

hat, oder, mit anderen äquivalenten Worten, daß sowohl die Summe der Wurzeln als auch die Summe der Quadrate der Wurzeln verschwindet:

$$\text{(H)} \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0$$

Eine beliebige Gleichung fünften Grades

$$R(x) = x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5 = 0$$

läßt sich durch sogenannte Tschirnhaustransformationen auf eine Hauptgleichung reduzieren. Nach der einfachen Substitution $x' = x + a_1/5$ erhält man eine Gleichung mit der Bedingung $\sum_{i=1}^{5} x_i' = 0$. Wir können also ohne weiteres $a_1 = 0$ annehmen. Statt $R(x)$ betrachten wir nun das Polynom

$$T(y) = \prod_{i=1}^{5} (y - y_i) \quad ,$$

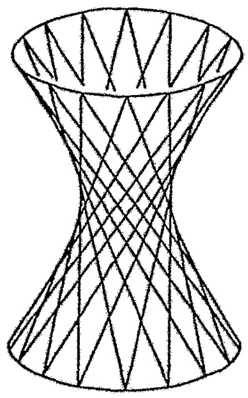
wobei $y_i = \lambda x_i + (x_i^2 - \frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{5} x_i^2))$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ so gewählt ist, daß $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0$. Es gilt dann auch $\sum_{i=1}^{5} y_i = 0$, d.h. $T(y) = 0$ ist eine Hauptgleichung. Bei der Bestimmung von λ wird man auf eine quadratische Gleichung geführt, die im allgemeinen erst in einer akzessorischen quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\mu_5)(a_2,a_3,a_4,a_5)$ lösbar ist. Zur Konstruktion von $T(y)$ aus $R(x)$ ist die Kenntnis der Wurzeln x_i von $R(x)$ nicht erforderlich. Andererseits berechnen sich die Wurzeln x_i als rationale Funktionen der Wurzeln y_i von $T(y)$ (über der quadratischen Erweiterung des Grundkörpers)(vgl. z.B. [13] I,6).

Grundlegend für Klein's geometrisches Vorgehen ist die Interpretation der fünf Wurzeln $x_1, \ldots, x_5$ einer Gleichung fünften Grades als homogene Koordinaten eines Punktes im vierdimensionalen komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ (die triviale Gleichung $x^5 = 0$ dürfen wir getrost vergessen). Auf diesem Raum operiert die symmetrische Gruppe S_5 durch Vertauschung der Koordinaten. Diese Aktion ist über $\mathbb{Q}$ definiert. Einer einzelnen Gleichung entsprechen im allgemeinen 120 Punkte, die aus allen möglichen Anordnungen der fünf Wurzeln $x_1, \ldots, x_5$ hervorgehen.

Die Wurzelquintupel $(y_1: \ldots :y_5)$ einer Hauptgleichung $P(y) = 0$ unterliegen den obigen Bedingungen (H) und liegen dementsprechend auf einer nichtsingulären, zweidimensionalen, über $\mathbb{Q}$ definierten Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^4$:

$$
\begin{array}{lcl}
Q & = & \{(y_1: \ldots :y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum\limits_{i=1}^{5} y_i = \sum\limits_{i=1}^{5} y_1^2 = 0\} \\
\cap & & \\
\mathbb{P}^3 & = & \{(y_1: \ldots :y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum\limits_{i=1}^{5} y_i = 0\} \\
\cap & & \\
\mathbb{P}^4 & &
\end{array}
$$

. (Fig. 11.)



Die zwei Regelscharen auf einer solchen Quadrik liefern bekanntlich einen Isomorphismus

$$Q \cong \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)} \quad ,$$

der in unserem Fall über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definiert ist. Die Gruppe S_5 überführt Q in sich. Dabei vertauschen die ungeraden

Permutationen die Regeln beider Scharen, während die Gruppe A_5 jede der Scharen in sich überführt. Somit gibt es Aktionen von A_5 auf $\mathbb{P}^1_{(1)}$ und $\mathbb{P}^1_{(2)}$, so daß das Produkt $\mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)}$ mit der Diagonalaktion A_5-isomorph zu Q wird. Bis auf die Einführung geeigneter Koordinaten auf den projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{(i)}$ identifizieren sich die Bilder von A_5 in $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{(i)})$ mit der "Standard"-Ikosaedergruppe. Beide Aktionen sind jedoch nicht linear äquivalent. Sie gehen durch einen nichttrivialen äußeren Automorphismus von A_5 auseinander hervor. (Solche Automorphismen werden durch Konjugation mit Elementen aus $S_5 \setminus A_5$ induziert!) Sei nun
$\tilde{Q} = \{(y_1, \ldots, y_5) \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0\}$
und

$$\zeta_i : \tilde{Q} \longrightarrow Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(i)} \quad , \quad i = 1,2 \quad ,$$

die A_5-äquivariante und über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierte Komposition der natürlichen Abbildung $\tilde{Q} \longrightarrow Q$ und der i-ten Projektion $Q \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(i)}$. Dann liefert ζ_i eine Ikosaederresolvente für die allgemeine Hauptgleichung. Zusammengesetzt mit den anfänglich beschriebenen Tschirnhaustransformationen erhalten wir eine Ikosaederresolvente z wie unter I) beschrieben. In den expliziten Formeln unterscheiden sich ζ_1 und ζ_2 nur durch das Vorzeichen vor der Wurzel aus der Diskriminante.

Auf die nötigen Rechnungen zur Bestimmung des Elementes u in der Konstruktion II gehen wir nicht ein. Sie ist bei Klein verwoben mit den Rechnungen zur Konstruktion III, d.h. zur Rekonstruktion der Wurzeln der Gleichung fünften Grades aus der Ikosaederresolvente. Diese wollen wir hier (wie Klein) nur für den Fall der Hauptgleichungen erläutern.

Zur Darstellung der fünf Wurzeln einer allgemeinen Gleichung mittels der zugehörigen Ikosaederresolvente benötigen wir fünf rationale Funktionen auf $\mathbb{P}^1$, oder zunächst fünf binäre Formen, die gerade permutiert werden, wenn auf ihr Argument eine Transformation der (binären) Ikosaedergruppe ausgeübt wird. Dies führt uns zurück zur Geometrie des Ikosaeders, wie wir sie im ersten Abschnitt beschrieben haben. Jedem der fünf einbeschriebenen Oktaeder $O_1, \ldots, O_5$ entspricht eine im wesentlichen eindeutige binäre Form 6. Grades t_ν, $\nu = 1, \ldots, 5$, die genau in den sechs Eckpunkten des Oktaeders verschwindet. Bei geeigneter Normierung werden diese fünf Formen von der (binären) Ikosaedergruppe in gerader Weise permutiert. Ähnliches gilt von den Hesse'schen Formen 8. Grades W_ν der t_ν. Ihre Nullstellen auf $\mathbb{P}^1$ repräsentieren jeweils die acht Eckpunkte eines zu einem Oktaeder dualen Würfels. Klein betrachtet nun die bihomogene, über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierte Abbildung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^5 \\
&((\lambda,\mu), (z_1,z_2)) \longmapsto (y_1, \ldots, y_5), \\
&y_\nu = \lambda T(z_1,z_2)W_\nu(z_1,z_2) + \mu f^2(z_1,z_2)t_\nu(z_1,z_2)W_\nu(z_1,z_2) .
\end{aligned}$$

Hierbei sind T und f die Invarianten der binären Ikosaedergruppe $\hat{G}$ vom Grade 30 und 12. Diese Abbildung induziert aufgrund ihrer Homogenität eine (wohldefinierte) Abbildung

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^4 \\ ((\lambda:\mu),(z_1:z_2)) &\longmapsto (y_1: \dots :y_5) \end{aligned} ,$$

deren Bild mit der Quadrik Q übereinstimmt. Letzteres beruht im wesentlichen auf den Identitäten

$$\sum_{\nu=1}^{5} y_\nu = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=1}^{5} y_\nu^2 = 0 \quad ,$$

deren Gültigkeit aus der Nichtexistenz von $\hat{G}$-invarianten binären Formen der Grade 8 und 14 bzw. der Grade 16, 22 und 28 folgt. Wie man leicht sieht, genügt zur Berechnung der Wurzeln $y_1, \dots ,y_5$ einer (nichttrivialen) Hauptgleichung die Konstruktion eines entsprechenden Punktes $(y_1: \dots :y_5) \in Q \subset \mathbb{P}^4$. Sei z die Ikosaederresolvente einer solchen Hauptgleichung. Mit invarianten-theoretischen Methoden bestimmt nun Klein Koeffizienten λ,μ (in rationaler Abhängigkeit von den Koeffizienten a,b,c und der Wurzel aus der Diskriminante der Gleichung), so daß $\eta((\lambda:\mu),(z:1)) = (y_1: \dots :y_5)$, wobei $y_1, \dots ,y_5$ die Wurzeln der Gleichung sind. Klein's explizite Formeln lassen sich zwar nur im "allgemeinen" Fall anwenden, aufgrund der geometrischen Situation existieren solche Formeln jedoch in allen Fällen.

Anhang I:

Ein moderner Beweis des Normalformsatzes

Wir wollen hier einen "modernen" Beweis für Klein's Normalformsatz geben. Es handelt sich dabei um die Ausführung eines leicht allgemeineren Argumentes von Serre [28] . Für die verwendeten Begriffe und Sachverhalte aus der Galoiskohomologie vergleiche man [26],[27]. Ansonsten beziehen wir uns auf die Formulierung des Satzes, wie er im Text gegeben wurde.

Wir bemerken zunächst, daß die Abbildung q über dem Grundkörper k definiert ist. Daher ist die Existenz eines erzeugenden Elementes z von K über k, das die Ikosaedergleichung $q(z) = u$ für ein $u \in k$ erfüllt, äquivalent zur Existenz eines Elementes $z \in K \subset \mathbb{P}^1(K)$, für das die Galoiskonjugierten $\sigma(z), \sigma \in \mathrm{Gal}(K,k)$, sowohl paarweise verschieden sind als auch durch gebrochen lineare Transformationen der Ikosaedergruppe $G \subset PGL_2(k)$ auseinander hervorgehen. In dieser Situation gibt es dann einen Isomorphismus $\rho : \mathrm{Gal}(K,k) \xrightarrow{\sim} G$, so daß $\sigma^{-1}(z) = \rho(\sigma)(z)$ oder

$$\sigma(\rho(\sigma)(z)) = z$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(K,k)$. Diese letzte Bedingung besagt jedoch, daß z ein Fixpunkt von $\mathrm{Gal}(K,k)$ unter der mit dem Homomorphismus ρ abgeänderten Galoisaktion

$$({}_\rho\sigma)(x) = \sigma(\rho(\sigma)(x)) \quad , \quad x \in \mathbb{P}^1(K) \quad ,$$

auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist. Mit anderen Worten ist z ein k-rationaler Punkt derjenigen k-Form ${}_\rho\mathbb{P}^1$ von $\mathbb{P}^1$, die aus der über k definierten projektiven Gerade $\mathbb{P}^1$ entsteht durch "Twisten" mit dem Kozykel

$$\rho \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K,k),G) \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K,k),\mathrm{PGL}_2(k)) \subset Z^1(\mathrm{Gal}(K,k),(\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1)(K)) \quad .$$

Also suchen wir einen k-rationalen Punkt von ${}_\rho\mathbb{P}^1$, der nicht zu den endlich vielen Ausnahmepunkten von $\mathbb{P}^1(K)$ mit nichttrivialer G-Isotropie gehört. Enthält jedoch ${}_\rho\mathbb{P}^1(k)$ überhaupt einen Punkt, so ist ${}_\rho\mathbb{P}^1$ isomorph zu $\mathbb{P}^1$, und dann enthält ${}_\rho\mathbb{P}^1(k)$ unendlich viele Punkte. Gilt also ${}_\rho\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$, so existiert ein Element z mit den verlangten Eigenschaften. Andernfalls wird ${}_\rho\mathbb{P}^1$ isomorph zu $\mathbb{P}^1$ nach einem Basiswechsel $k \hookrightarrow k'$, wobei k' eine geeignete (akzessorische) quadratische Erweiterung von k ist.

Die obige Argumentation macht ersichtlich, daß man die von uns geforderten Voraussetzungen an den Körper k erheblich abschwächen kann. Zur Herleitung des Normalformsatzes bedarf es nur einer Einbettung der Ikosaedergruppe in die Gruppe $\mathrm{PGL}_2(k)$. Auch in positiver Charakteristik (2,3,5, eingeschlossen) läßt sich die Abbildung q als Quotient $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1/G$ definieren. Die explizite Gestalt von q mag dabei von der in Charakteristik Null abweichen. Mit einer leicht abstrakteren Argumentation kann man auch die Situation behandeln, daß G nur in die Gruppe der k-rationalen Punkte einer k-Form von PGL_2 eingebettet ist (z.B. falls $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$) . Die Abbildung q realisiert dann den Quotienten $C \longrightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$ der zugehörigen k-Form C von $\mathbb{P}^1$ (vgl. [28]).

Noch wichtiger an der obigen Argumentation ist jedoch, daß sie eine unmittelbare Verallgemeinerung des Normalformsatzes auf den Fall beliebiger Galoisgruppen und ihrer linearen oder projektiven Darstellungen ermöglicht. Dies wurde zuerst von R. Brauer in einer Arbeit [3] aus dem Jahre 1934 erkannt. Terminologisch bewegte sich Brauer dabei noch in der Theorie der zentraleinfachen Algebren, die erst später in die Theorie des Galoisabstiegs integriert wurde. Brauer hat eine kurze Darstellung seiner Ergebnisse in [4] gegeben. In elementarer Form findet man sie auch in Krull's Büchlein [23], Abschnitt IV, entwickelt.

Anhang II:
Eine geometrische Theorie der Diagonalgleichungen

Neben der Theorie der Hauptgleichungen wird im Ikosaederbuch eine zweite Methode zur Lösung der Gleichungen fünften Grades beschrieben, die sich mehr an den historisch vorhergehenden Arbeiten von Brioschi, Clebsch, Hermite und Kronecker über Gleichungen fünften Grades orientiert und stärkere

Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen (Transformationsgleichungen fünfter Ordnung, Jacobi's Parametrisierung der Wurzeln von Multiplikatorgleichungen) aufweist. Wir werden hier von dieser zweiten Methode nur einige algebraisch-geometrische Elemente herausgreifen und sie in einer zur Theorie der Hauptgleichungen parallelen Weise zusammenfügen. Obwohl Klein die Möglichkeit einer solchen Präsentation bekannt war, ist er im Ikosaederbuch vor allem aus historischen Gründen einen etwas anderen Weg gegangen. Insofern ist die folgende Darstellung als nicht authentisch zu erachten.

Eine Gleichung fünften Grades nennt Klein eine "Diagonalgleichung" falls sie die folgende Form hat:

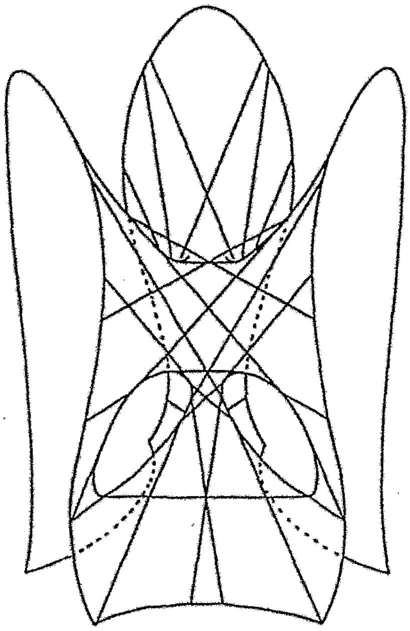
$$P(y) = y^5 + ay^3 + by + c = 0 .$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung, daß die Summe der Wurzeln $\sum_{i=1}^{5} y_i$ und die Summe der Kuben der Wurzeln $\sum_{i=1}^{5} y_i^3$ verschwinden. Durch Tschirnhaustransformationen läßt sich jede Gleichung fünften Grades auf eine Diagonalgleichung reduzieren. Bei geschickter Vorgehensweise benötigt man dabei keine akzessorischen Grundkörpererweiterungen. Dies folgt aus den Arbeiten von Kronecker [22], Brioschi [6] und Hermite [15].

Sind $y_1, \dots, y_5$ die Wurzeln einer Diagonalgleichung, so liegt der Punkt $(y_1 : \dots : y_4) \in \mathbb{P}^4$ auf einer nichtsingulären kubischen Fläche $F \subset \mathbb{P}^4$:

$$
\begin{aligned}
F &= \{(y_1 : \ldots : y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i^3 = 0\} \\
&\cap \\
\mathbb{P}^3 &= \{(y_1 : \ldots : y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum_{i=1}^{5} y_i = 0\} \\
&\cap \\
\mathbb{P}^4 &
\end{aligned}
$$

. (Fig. 12.)



.

Diese kubische Fläche wurde eingehend von Clebsch [8] studiert und "kubische Diagonalfläche" genannt, weil sich 15 der 27 in ihr gelegenen Geraden durch die Diagonalen des Koordinatenpentaeders realisieren lassen. Die symmetrische Gruppe S_5 operiert in natürlicher Weise auf F durch Vertauschung der Koordinaten. Ebenso wie F ist diese Aktion über $\mathbb{Q}$ definiert. Unter der Aktion von S_5 und A_5 bilden die 15 Diagonalgeraden einen Orbit, die restlichen 12 Geraden sind äquivalent unter S_5 , zerfallen aber bezüglich der Gruppe A_5 in zwei Bahnen der Kardinalität 6. Mehr noch bilden die 12

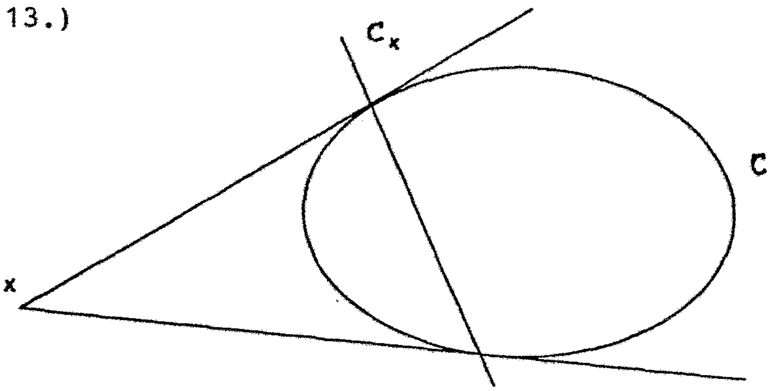
Geraden in dieser Aufspaltung eine Schläfli'sche Doppelsechs, so daß sich die 6 Geraden einer Bahn mittels einer (über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ definierten) Abbildung

$$\pi : F \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

von F auf die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ kontrahieren lassen. (Für die grundlegenden Eigenschaften kubischer Flächen vergleiche man z.B. [14] V,4.) Die Operation von A_5 auf F induziert eine natürliche Operation auf $\mathbb{P}^2$, die sich (bis auf äußeren Automorphismus) mit der projektiv linearen Aktion der Ikosaedergruppe $G \subset SO_3(\mathbb{R}) \subset SO_3(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{P}^2$ identifizieren läßt (diese Aktion ist ebenfalls über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ definierbar). In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ liegt genau ein G-invarianter Kegelschnitt C, der der G-invarianten quadratischen Form auf $\mathbb{R}^3$ entspricht und über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$ wird. Die Aktion von G auf dieser Geraden identifiziert sich wieder mit der Aktion der Standard-Ikosaedergruppe in $PGL_2(\mathbb{C})$.

Wir kommen nun zu einer geometrischen Konstruktion der Ikosaederresolvente für Diagonalgleichungen. Zunächst können wir einem Lösungsquintupel $(y_1, \ldots, y_5)$ einer Diagonalgleichung den zugehörigen Punkt $(y_1 : \ldots : y_5)$ auf der Fläche F, und dann den Punkt $x = \pi(y_1 : \ldots : y_5)$ in der projektiven Ebene zuordnen. Um x in A_5-äquivarianter Weise einen Punkt auf $C \cong \mathbb{P}^1$ zuzuordnen, kann man einen der Schnittpunkte von C mit der Polaren C_x von x auswählen:

(Fig. 13.)



Die Berechnung, und damit die Unterscheidung der beiden Punkte von $C \cap C_x$ benötigt eine Quadratwurzel, die in Bezug auf unsere Ausgangsgleichung im allgemeinen von akzessorischem Charakter ist. Geometrisch entspricht die Adjunktion dieser Quadratwurzel dem Übergang von $\mathbb{P}^2$ zu der längs C verzweigten, zweifachen Überlagerung $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong C \times C \longrightarrow \mathbb{P}^2$, die $\mathbb{P}^2$ als den Quotienten von $C \times C$ nach der natürlichen Aktion der symmetrischen Gruppe S_2 realisiert. Diese Überlagerung ist A_5-äquivariant, wenn $C \times C$ mit der Diagonalaktion versehen wird.

Auf die explizite Form der so entstehenden Ikosaederresolvente für allgemeine Diagonalgleichungen und die resultierende Ikosaedergleichung wollen wir hier ebenso wenig eingehen wie bei der Theorie der Hauptgleichungen.

Die Rekonstruktion der Wurzeln einer Diagonalgleichung aus der Ikosaederresolvente greift natürlich wieder auf die dem Ikosaeder einbeschriebenen fünf Oktaeder zurück. Zunächst kann man mit Klein eine einparametrige Familie

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times C \longrightarrow C \times C \quad ,$$

von A_5-äquivarianten, über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierten Abbildungen

$$\varphi_{(\lambda:\mu)} : C \longrightarrow C \times C \quad ,$$

$$\varphi_{(\lambda:\mu)}(z_1:z_2) = \varphi((\lambda:\mu),(z_1:z_2)) \quad ,$$

konstruieren mit Bild $(\varphi) = C \times C$. Dann polarisiert man die 5 den Oktaedern zugeordneten binären Formen $t_\nu(z_1,z_2)$, $\nu = 1, \ldots ,5$, zu bikubischen Formen $\delta_\nu(z_1,z_2;z_1',z_2')$, mittels derer man eine rationale, A_5-äquivariante und über $\mathbb{Q}(\mu_5)$ definierte Abbildung

$$\psi : C \times C \dashrightarrow \mathbb{P}^4 \quad ,$$

$$\psi((z_1:z_2),(z_1':z_2')) = (y_1: \ldots :y_5) \quad , \quad y_\nu = \delta_\nu(z_1,z_2;z_1',z_2') \quad ,$$

erhält, deren "Bild" die kubische Fläche F ist. (Die polarisierten Formen δ_ν erweisen sich als invariant bezüglich der natürlichen S_2-Operation auf $C \times C$ und definieren daher kubische Kurven in $\mathbb{P}^2$. Diese passieren durch alle 6 Fundamentalpunkte der Abbildung $\pi : F \longrightarrow \mathbb{P}^2$, und das von ihnen erzeugte Linearsystem vermittelt gerade die bekannte rationale Umkehrung von π durch Aufblasen der 6 Fundamentalpunkte.)
Wir betrachten die Komposition $\eta = \psi \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \times C \arrow[r] & C \times C \arrow[r, dashed] \arrow[d] & F \subset \mathbb{P}^4 \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^2 & \end{tikzcd}$$

Bei einer vorgegebenen, genügend allgemeinen Diagonalgleichung $P(y) = y^5 + ay^3 + by + c = 0$ kann man dann einen Parameter $(\lambda:\mu)$ als rationalen Ausdruck in den Koeffizienten a,b,c, der Wurzel aus der Diskriminante und einer weiteren, i.a. akzessorischen, Quadratwurzel finden, so daß für die Wurzeln $y_1, \ldots, y_5$ von $P(y)$ die Gleichung $\eta((\lambda:\mu),(z:1)) = (y_1: \ldots :y_5)$ gilt, wenn z die zugehörige Ikosaederresolvente bezeichnet.

Einige der Konstruktionen dieses und die Kurve B des folgenden Anhangs haben Eingang gefunden in neuere Untersuchungen zur Theorie der Hilbert'schen und elliptischen Modulflächen. Der interessierte Leser sei dazu auf die Artikel [7],[16] [17] und [24] verwiesen.

Anhang III:

Bring-Jerrard-Gleichungen und Sternkörper

Eine Gleichung fünften Grades $P(y) = 0$ heißt eine Bring-Jerrard-Gleichung, wenn sie sowohl Haupt- als auch Diagonalgleichung ist, d.h. wenn sie die Gestalt

$$P(y) = y^5 + by + c = 0$$

hat. Von dem Schweden Bring (1786) und unabhängig von dem Engländer Jerrard (1834) wurde gezeigt, daß sich jede Gleichung fünften Grades durch Tschirnhaustransformationen, die i.a. akzessorische Quadrat- und Kubikwurzeln erfordern, auf eine solche Gleichung reduzieren läßt. Hermite's erste Lösung der Gleichungen fünften Grades (1858) baute auf diesem Resultat auf.

Geometrisch betrachtet liegt ein projektives Lösungsquintupel $(y_1 : \ldots : y_5)$ einer Bring-Jerrard-Gleichung als Punkt auf der Durchschnittskurve $B = Q \cap F$ der Quadrik Q mit der Kubik F :

$$B = \{(y_1 : \ldots : y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i^3 = 0\} \quad .$$

Diese Kurve B , oft Bring'sche Kurve genannt, ist nichtsingulär und daher vom Geschlecht 4. Sie ist nicht hyperelliptisch, und die Einbettung

$$B \hookrightarrow \mathbb{P}^3 = \{(y_1 : \ldots : y_5) \in \mathbb{P}^4 \mid \sum_{i=1}^{5} y_i = 0\}$$

identifiziert sich mit der kanonischen Einbettung. Nach Definition von B operiert die symmetrische Gruppe S_5 wieder auf B. Die Geometrie von B, sowie die Aktionen von S_5 und A_5, lassen sich am einfachsten verstehen, wenn wir die Ikosaederresolventen der Hauptgleichungen betrachten. Wir erhalten durch diese zwei Abbildungen p_1, p_2 vom Grad 3 :

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \overset{p_1}{\swarrow} & \cap & \overset{p_2}{\searrow} & \\ & & Q & & \\ & & \| & & \\ \mathbb{P}^1_{(1)} & \longleftarrow & \mathbb{P}^1_{(1)} \times \mathbb{P}^1_{(2)} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{(2)} \end{array}$$

(Bei Benutzung der Ikosaederresolventen für Diagonalgleichungen kämen wir zu im wesentlichen gleichen Abbildungen). Da jede Abbildung p_i A_5-äquivariant vom Grad 3 und B vom Geschlecht 4 ist, liefert die Riemann-Hurwitz-Formel für p_i genau 12 einfache Verzweigungspunkte

$$b_{i,j} \in B \quad , \quad j = 1, \ldots, 12 \quad ,$$

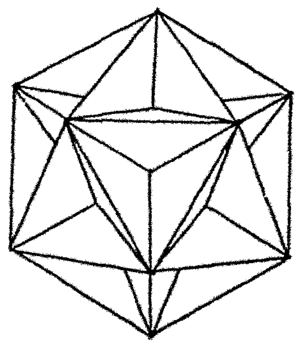
die unter A_5 einen Orbit bilden und durch p_i auf die 12 Ikosaederecken in $\mathbb{P}^1_{(i)}$ abgebildet werden. Da S_5 keine zyklische Untergruppe der Ordnung 10 enthält, müssen alle 24 Punkte $b_{i,j}$ paarweise verschieden und äquivalent unter S_5 sein. Diese 24 Punkte sind die einzigen Punkte auf B, die bezüglich A_5 eine Isotropiegruppe der Ordnung 5 haben. Somit bilden sie das volle Urbild unter p_i der 12 Ikosaederecken auf $\mathbb{P}^1_{(1)}$. Außerdem lassen sie sich als die projektiven Lösungsquintupeln $(y_1 : \ldots : y_5)$ der reinen Gleichungen $y^5 + c = 0$

charakterisieren, d.h. als Schnitt von B mit der durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{5} y_i^4 = 0$ definierten S_5-invarianten Quartik.

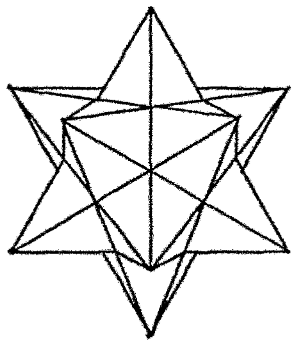
In Verfolgung oben ausgeführter Argumente kann man sich leicht überlegen, daß das Paar der Überlagerungen p_1 und p_2 aufgrund der A_5-Äquivarianz bis auf Isomorphie (und Umnumerierung) eindeutig bestimmt ist. Insbesondere sind p_1 und p_2 analytisch isomorph (dies folgt schon aus der Tatsache, daß die ungeraden Permutationen aus S_5 die Regelscharen von Q , und damit die Abbildungen p_1 und p_2 , bis auf die Koordinatenwechsel, vertauschen). Andererseits sind p_1 und p_2 nicht isomorph als A_5-äquivariante Abbildungen, da die Aktionen von A_5 auf $\mathbb{P}^1_{(1)}$ und $\mathbb{P}^1_{(2)}$ nicht äquivalent sind und nur durch einen äußeren Automorphismus (induziert von der Konjugation mit einer ungeraden Permutation) in äquivalente überführt werden.

Eine sehr anschauliche Vorstellung von der Geometrie und von dem gegenseitigen Verhältnis der Abbildungen p_1 und p_2 kann man sich mittels zweier Kepler-Poinsot'scher Sternkörper verschaffen, nämlich

dem großen Dodekaeder und dem kleinen gesternten Dodekaeder



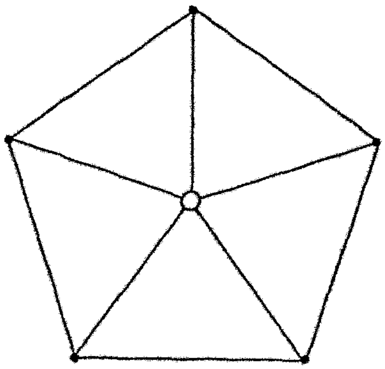
(Fig. 14)



(Fig. 15.)

(in der Terminologie von Coxeter [9] Ch. 6). Durch Projektion auf die umbeschriebene 2-Sphäre, die wir mit der Riemann'schen Zahlenkugel identifizieren, definieren diese Sternkörper verzweigte dreiblättrige Überlagerungen. Dazu haben wir uns die Hüllen der Sternkörper als sich selbst durchdringende Bilder stückweise linearer Abbildungen $j_1, j_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ von einer kompakten, triangulierten Fläche M in den $\mathbb{R}^3$ vorzustellen. Die Fläche M setzt sich aus 12 regulären Fünfecken zusammen, an deren Eckpunkten jeweils fünf von ihnen aneinanderstoßen, so daß M insgesamt aus 12 Fünfecken, 30 Kanten und 12 Eckpunkten besteht. Also hat M das Geschlecht 4 und ist topologisch isomorph zu B. Eine Triangulierung von M denken wir uns durch die Unterteilung der Fünfecke in 5 gleichschenklige Dreiecke gegeben.

(Fig. 16.)

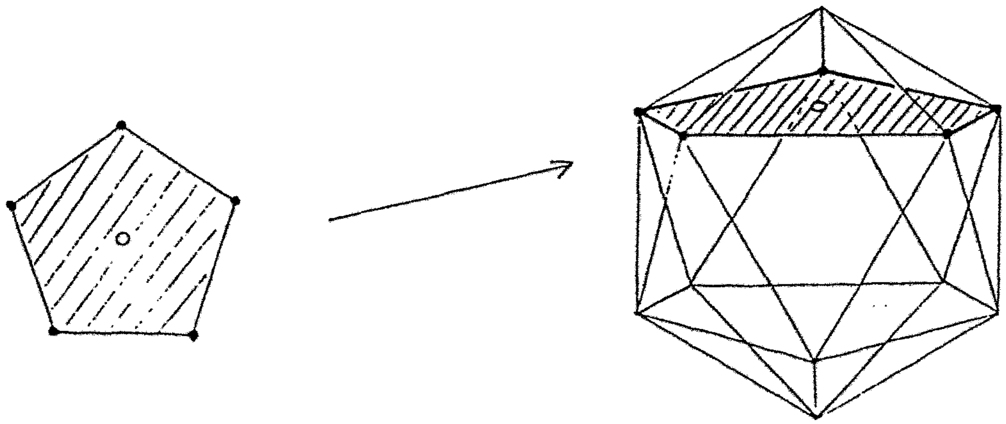


Im Falle des großen Dodekaeders haben wir die zugehörige Abbildung $j_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ als linear auf jedem der 12 Fünfecke anzusehen. Die Zusammensetzung π_1 von j_1 mit der Projektion auf die Sphäre

$$M \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow S^2$$

ist dann in den 12 Eckpunkten von M verzweigt mit der Ordnung 2 und ansonsten unverzweigt. Das Bild dieser Eckpunkte auf S^2 sind die Ecken eines Ikosaeders. Als Urbilder dieser Ikosaederecken unter π_1 erhalten wir außer den 12 Eckpunkten von M auch die 12 unverzweigten Mittelpunkte der Fünfecke von M :

. (Fig. 17.)

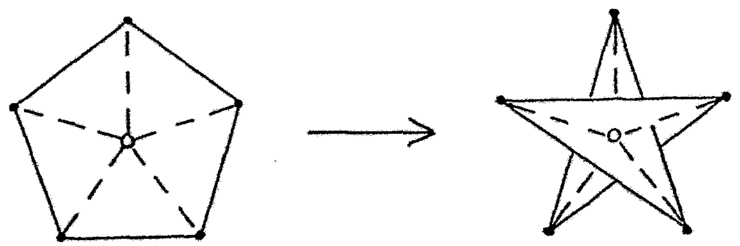


.

Über die Abbildung $j_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wird auf M eine Aktion der Ikosaedergruppe $G \cong A_5$ induziert und mittels der Abbildung $\pi_1 : M \longrightarrow S^2 \cong \mathbb{P}^1$ erhält M die Struktur einer Riemannschen Fläche. Wir können nun nicht bloß, wie weiter oben erwähnt, die Riemannschen Flächen M und B miteinander identifizieren, sondern auch die A_5-äquivarianten Abbildungen $p_1 : B \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(1)}$ und $\pi_1 : M \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Insbesondere identifizieren sich dabei die 12 Verzweigungspunkte $b_{1,j}$, $j = 1, \ldots ,12$, mit den Eckpunkten von M .

Im Falle des kleinen gesternten Dodekaeders ist die zugehörige Abbildung j_2 nur noch linear auf den 5 Dreiecken eines Fünfecks. Das Bild unter j_2 eines Fünfecks ist nun ein ebenes reguläres Pentagramm:

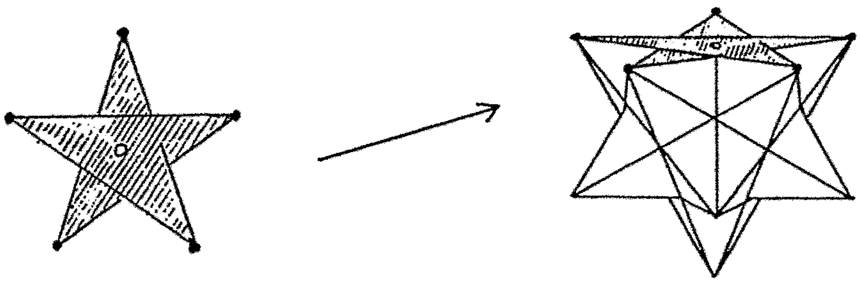
• (Fig. 18.)



•

Die Zusammensetzung π_2 von j_2 mit der Projektion auf S^2 ist dann verzweigt mit der Ordnung 2 in den 12 Mittelpunkten der Fünfecke und ansonsten unverzweigt. Die Bilder dieser 12 Verzweigungspunkte auf S^2 bilden wieder die 12 Ecken eines Ikosaeders, und das Urbild unter π_2 dieser Ikosaederecken enthält außer den 12 Mittelpunkten der Fünfecke noch die 12 Eckpunkte von M :

(Fig. 19.)



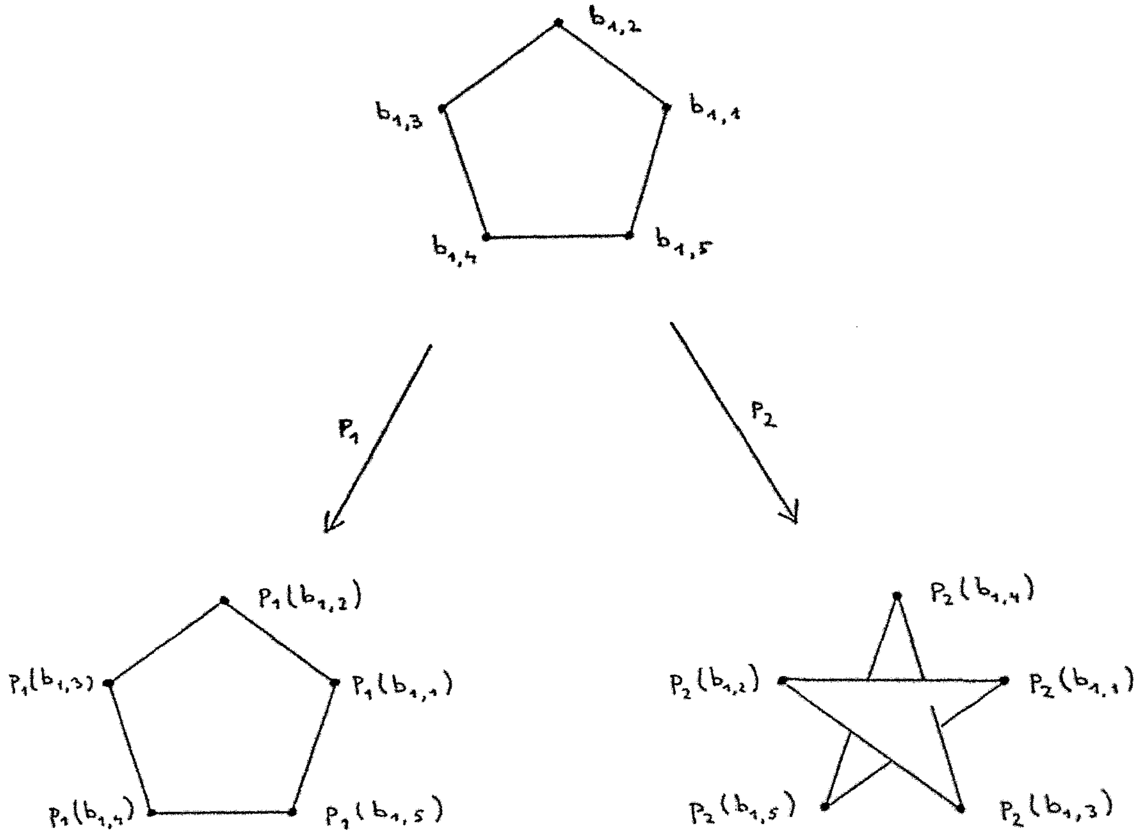
Legen wir nun die Identifikation der Abbildungen π_1 und $p_1 : B \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(1)}$ zugrunde, so haben wir offensichtlich π_2 mit $p_2 : B \longrightarrow \mathbb{P}^1_{(2)}$ zu identifizieren. Die 12 Fünfecksmittelpunkte von M gehen dabei in die 12 Verzweigungspunkte $b_{2,j}$, $j = 1, \ldots ,12$, von p_2 auf B über.

Die Nichtäquivalenz der beiden Aktionen der Ikosaedergruppe G auf $\mathbb{P}^1_{(1)}$ und $\mathbb{P}^1_{(2)}$ läßt sich ebenfalls in diesem Bilde veranschaulichen. Ist nämlich $g \in G$ eine Rotation von $\mathbb{P}^1_{(1)}$ um den Winkel $2\pi/5$, so entspricht ihr mittels der Abbildungen

$$\mathbb{P}^1_{(1)} \xleftarrow{p_1} B \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}^1_{(2)}$$

eine Rotation um den Winkel $4\pi/5$ von $\mathbb{P}^1_{(2)}$. Dies erkennt man unmittelbar durch Betrachtung eines geeigneten Fünfecks auf B :

(Fig. 20.)



Für weitere Einzelheiten vergleiche man auch [9] 6.6 und [19] (Ergänzende Bem. 1922).

Literatur:

[1] Arnol'd, V.I.: Critical points of smooth functions; Proc. Int. Math. Cong. Math. Vancouver, Vol.I. 19-39 (1974)

[2] Artin, E.: Galoissche Theorie; Verlag Harri Deutsch, Zürich-Frankfurt, 1968

[3] Brauer, R.: Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen; Math. Annalen, 110, 473-500 (1934)

[4] Brauer, R.: Symmetrische Funktionen. Invarianten von linearen Gruppen endlicher Ordnung; Math. J. Okayama Univ. 21, 91-113 (1979)

[5] Brieskorn, E.: Singularitäten; Jber. Deutsch. Math.-Verein. 78, 93-112 (1976)

[6] Brioschi, F.: Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade; Math. Annalen. 13, 109-160 (1878)

[7] Burns, D.: On the geometry of elliptic modular surfaces and representations of finite groups; in "Algebraic Geometry", Proceedings, Ann Arbor 1981, Ed. I. Dolgachev, Springer Lecture Notes in Math. 1008, 1-29 (1983)

[8] Clebsch, A.: Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits; Math. Annalen 4, 284-345 (1871)

[9] Coxeter, H.S.M.: Regular Polytopes; Dover, New York, 1973

[10] Dickson, L.E.: Modern Algebraic Theories; Benj.H. Sanborn, Chicago-New York-Boston, 1930

[11] Durfee, A.: Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points; L'Enseignement mathématique 25, 131-163 (1979)

[12] Euklid: Die Elemente; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Akad. Verlagsges., Leipzig 1937

[13] Fricke, R.: Lehrbuch der Algebra, I,II; Vieweg, Braunschweig, 1924, 1926

[14] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry; Springer, New York, 1977

[15] Hermite, Ch.: Sur l'équation du cinquième degré; C.R.A.S. 61/62 (1865/66), Oeuvres t. II, 347-424, Gauthiers-Villars, Paris 1905-1917

[16] Hirzebruch, F.: Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surfaces of Clebsch and Klein; Russian Math. Surveys 31:5, 96-110 (1976)

[17] Hirzebruch, F.: The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant; in "Modular Functions of One Variable VI", Ed. J.-P.Serre, D.B. Zagier, Springer Lecture Notes in Math. 627, 288-323 (1977)

[18] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure; Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983

[19] Klein, F.: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder; Math. Annalen 12 (1877), mit Zusätzen versehen in: Ges. math. Abhandlungen II, Springer, Berlin, 1922 (Nachdruck 1973)

[20] Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade; Teubner, Leipzig, 1884

[21] Klein, F.: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Hrsg. v. O. Haupt, Springer, Berlin, 1933 (Nachdruck 1981)

[22] Kronecker, L.: Mitteilung über algebraische Arbeiten; Akad. d. Wiss., Berlin, 1861, in "L. Kronecker's Werke" IV, 53-62, Chelsea, New York, 1968

[23] Krull, W.: Elementare und klassische Algebra II, Sammlung Göschen Band 933, W. de Gruyter, Berlin 1959

[24] Naruki, I.: Über die Kleinsche Ikosaederkurve sechsten Grades; Math. Annalen 231, 205-216 (1978)

[25] Schwarz, H.A.: Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt; J. reine angew. Math. 75, 291-335 (1873)

[26] Serre, J.-P.: Corps Locaux, Hermann, Paris 1968

[27] Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne; Springer Lecture Notes in Math. 5 (1965)

[28] Serre, J.-P.: Extensions icosaédriques; Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Année 1979-1980, exposé n° 19

[29] Slodowy, P.: Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups; in "Algebraic Geometry", Proc., Ann Arbor, 1981, Ed. I. Dolgachev, Springer Lecture Notes in Math. 1008, 102-138 (1983)

[30] Slodowy, P.: Einleitung zum Nachdruck der englischen Ausgabe von [20], erscheint im Verlag Springer

[31] van der Waerden, B.L.: Algebra I; Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966