SUR DES INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES ASSOCIÉS AUX AUTOMORPHISMES DU PLAN AFFINE

par

Sandra Marcello

Résumé. — Nous associons à chaque automorphisme du plan affine, une construction géométrique possédant certaines propriétés, la *résolution canonique*. Nous étudions la géométrie de la résolution canonique, en déduisons une majoration d'un invariant géométrique (l'indice ample) associé à un automorphisme du plan affine et relions la structure du cone effectif de la surface obtenue aux valeurs d'un autre invariant géométrique (l'indice effectif).

***Abstract* (Geometric invariants of automorphisms of the affine plane)**

We associate to each automorphism of the plane, a geometric construction with some properties, it is the *canonical resolution*. We study the geometry of the canonical resolution, we deduce from it an upper bound for a geometric invariant (the ample index) linked to an automorphism of the affine plane and we link the structure of the effective cone of the surface we get to values of another geometric invariant (the effective index) .

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14C20,14C22,14E5,14R10.
Mots clefs. — Automorphismes du plan affine, cone ample, cone effectif.

1. Introduction

En 1994, dans le but d'obtenir des propriétés arithmétiques de l'application de Hénon quadratique, J. Silverman [**Si94**] étudie la géométrie de cette application. Dans ce texte nous définissons, grâce à des propriétés intrinsèques des automorphismes du plan affine, cette construction de manière générale pour tout automorphisme du plan affine et étudions les propriétés géométriques de ce que nous appelons une *résolution canonique*. La résolution canonique nous permet de calculer ou de majorer des invariants géométriques (les indices amples et effectifs) que nous avons définis dans [**M4**] dans le but d'obtenir des résultats de nature arithmétiques. Pour plus de précisions sur les indices amples et effectifs nous renvoyons le lecteur à [**M4**] et pour une motivation des questions arithmétiques auxquelles nous nous intéressons, nous renvoyons le lecteur à [**M2**]. L'une de ces questions est un analogue aux problèmes classiques de décompte des points rationnels sur les variétés pour une synthèse voir [**P01**].

Il est à noter qu'en vue d'applications arithmétiques il est intéressant de connaître la valeur de ces invariants géométriques.

Le corps de base est $\mathbb{C}$. Nous notons $\mathbb{A}^2$ (resp. $\mathbb{P}^2$) l'espace affine (resp. projectif) de dimension 2 et H la droite à l'infini. Lorsque $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ est un automorphisme de $\mathbb{A}^2$, nous noterons encore $\phi : \mathbb{P}^2 \cdots \to \mathbb{P}^2$ l'application rationnelle induite et désignerons par $Z(\phi)$ le *lieu de non-définition*, *i.e* le lieu géométrique, contenu dans H, où ϕ n'est pas définie.
De plus, si $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$, alors ϕ est défini par des polynômes P_1, P_2. On définit le *degré algébrique* ou *degré* de ϕ comme suit : $deg(\phi) = d = \max_i(d_i)$ avec d_i degré total de P_i. Dans [**M4**], nous avons construit les objets en dimension quelconque, nous nous contenterons ici de rappeller les définitions dans le cadre de la dimension 2.

Définition 1.1. — Soit V une variété lisse projective. On dit que le morphisme birationnel $\pi : V \to \mathbb{P}^2$ est une *résolution* de ϕ (notée (π, V)) si $\phi \circ \pi$ et $\phi^{-1} \circ \pi$ sont des morphismes de V vers $\mathbb{P}^2$. Parfois nous noterons : $\psi = \phi\pi$ et $\psi' = \phi^{-1}\pi$.

Dans ce texte nous définissons une résolution particulière que nous appelerons *résolution canonique*, grâce à celle-ci nous majorons ou calculons des invariants géométriques associés aux automorphismes du plan affine. Ces invariants géométriques ont été définis par l'auteure dans l'optique d'applications arithmétiques qui apparaissent clairement dans [**M4**] théorème A, ces invariants sont définis comme suit.

Notations. —

– Si V est une variété, on note respectivement $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(V)$ et $\mathrm{Pic}_{\mathbb{R}}(V)$ son groupe de Picard tensorisé respectivement par $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, $\mathrm{Pic}^+_{\mathbb{Q}}(V)$ et $\mathrm{Pic}^+_{\mathbb{R}}(V)$ les cone fermés engendrés par les classes de diviseurs effectifs, $\mathrm{Pic}^a_{\mathbb{R}}(V)$ le cone (ouvert) engendré par les classes de diviseurs amples et $\mathrm{Pic}^{nef}_{\mathbb{R}}(V)$ le cone des diviseurs nef.

– Soit (π, V) une résolution de ϕ et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous notons :

$$D(\alpha, \pi, V) := (\phi \circ \pi)^* H + (\phi^{-1} \circ \pi)^* H - \alpha \pi^* H.$$

– Les nombres suivants sont également définis :

$$\alpha_{max,eff}(\phi, \pi, V) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid D(\alpha, \pi, V) \in \mathrm{Pic}^+_{\mathbb{R}}(V)\},$$

$$\alpha_{max,amp}(\phi, \pi, V) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid D(\alpha, \pi, V) \in \mathrm{Pic}^a_{\mathbb{R}}(V)\}.$$

Définition 1.2. — Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$. Les nombres suivants seront appelés respectivement l'*indice effectif* et l'*indice ample* :

$$\alpha(\phi, eff) := \sup\{\alpha_{\max,eff}(\phi, \pi, V) | \pi, V\},$$

$$\alpha(\phi, amp) := \sup\{\alpha_{\max,amp}(\phi, \pi, V) | \pi, V\}.$$

Dans [**M4**], nous montrons que ces nombres sont bien des invariants géométriques des automorphismes de l'espace affine.
Des propriétés propres aux automorphismes du plan affine nous permettent de définir la notion de *résolution canonique* (voir sa construction paragraphe 4). Cette résolution nous permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème A. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré algébrique $d \geq 2$. Alors,*

$$\alpha(\phi, amp) \leq 0.$$

Dans [**M4**], nous donnons une généralisation de ce théorème en dimension supérieure avec toutefois une condition géométrique sur les automorphismes de l'espace affine.

Peu d'informations sont connues sur la structure du cone effectif des variétés et ce bien que la structure de ce cone soit notamment importante dans le cadre des conjectures de Manin sur le décompte de points rationnels (voir par exemple [**P01**]).
La résolution canonique nous permet de relier la structure du cone effectif de la surface construite aux valeurs de l'indice effectifs :

La valeur de l'indice effectif ainsi que la connaissance du diviseur canonique de la surface V où (π, V) est la résolution canonique nous permettent de donner des informations sur la structure du cone effectif de la surface associée à la résolution canonique. Avec les notations du paragraphe 4, le diviseur canonique de V s'exprime sous la forme : il existe $a_i, a'_j \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ tels que :

$$K_V = -3H^\sharp + \sum_{i=1}^{n} a_i E_i + \sum_{j=1}^{m} a'_j F_j.$$

Théorème B. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré algébrique au moins deux. Alors, pour la résolution canonique (π, V), nous avons :*

– *si $\alpha(\phi, eff) = \frac{-1}{3}(a_n + a'_m)$ le cone des diviseurs effectifs de V est polyédral,*

– *si $\alpha(\phi, eff) > \frac{-1}{3}(a_n + a'_m)$ le cone des diviseurs effectifs de V n'est pas polyédral.*

Le plan de ce texte est le suivant, nous faisons des rappels sur le théorème général de structure du cone effectif d'une surface, ainsi que sur les automorphismes de l'espace affine. Puis nous construisons la résolution canonique associée à un automorphisme du plan affine, nous étudions ces propriétés géométriques et enfin nous prouvons les théorème A et B.

Remerciements. — Ce travail a été effectué au Max-Planck Institut fuer Mathematik que je remercie pour les excellentes conditions de travail.

2. Structure du cone effectif d'une surface

La structure du cone effectif d'une surface lisse projective découle notamment du théorème de l'indice de Hodge. En effet, d'après le théorème de l'indice de Hodge, il existe une base de NS(S) pour laquelle la forme d'intersection est donnée par :

$$x_1^2 - \sum_{i=2}^{m} x_i^2.$$

Considérons,

$$Q^+ := \{x \in NS(S) \text{ tels que } x_1 > (\sum_{i=2}^{m} x_i^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

La structure du cone effectif est alors la suivante.

Théorème 2.1 **([K96]II.4.13)**. — *Soit S une surface projective lisse. Alors,*

$$\mathrm{Pic}^+_{\mathbb{R}}(S) = \overline{Q}^+ + \sum_{D} \mathbb{R}^+[D],$$

où la sommation se fait sur toutes les courbes irréductibles $D \subset S$ telles que $D^2 < 0$.

Ainsi les arêtes extrémales sont les courbes irréductibles d'auto-intersection négative.

Remarque 2.2. — De manière équivalente on peut voir $\overline{\mathrm{Q}}^+$ comme $\mathrm{Pic}^+_{\mathbb{R}}(S)_{K_S \geq 0}$ où K_S désigne le diviseur canonique de S.

3. Propriétés et définition des automorphismes affines

Lemme 3.1. — *(**[B83]** lemme II.10) Soit $\phi : S \cdots \to S'$ une application rationnelle entre deux surfaces avec ϕ^{-1} non définie en un point $P \in S'$. Il existe une courbe C de S telle que :*

$$\phi(C) = P.$$

Lemme 3.2. — *(**[S99]** p.124) Soit ϕ un automorphisme non-linéaire de $\mathbb{A}^r$. Nous avons alors :*

$$\phi(H \setminus Z(\phi)) \subset Z(\phi^{-1}) \qquad et \qquad \phi^{-1}(H \setminus Z(\phi^{-1})) \subset Z(\phi).$$

La notion suivant a été introduite par N. Sibony [**S99**].

Définition 3.3. — Soit ϕ un automorphisme de $\mathbb{A}^r$ avec $r \geq 2$. L'automorphisme ϕ est dit *régulier* si $\deg(\phi) > 1$ et :

$$Z(\phi) \cap Z(\phi^{-1}) = \emptyset.$$

La définition suivante reprend le vocabulaire défini par S. Lamy [**Lam02**].

Définition 3.4. — Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$. Soit $\pi : V \to \mathbb{P}^2$ un produit fini d'éclatements tel que $\phi\pi$ soit un morphisme. Nous appellerons *points d'indétermination* de ϕ les points que l'on éclate lors de la construction de π. Ces points appartiennent à $\mathbb{P}^2$ ou à des éclatés de $\mathbb{P}^2$. Les points d'indétermination situés dans $\mathbb{P}^2$ seront dits *points d'indétermination propres*.

Lemme 3.5. — *(*[**Lam02**] *lemme 9) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré au moins 2. Alors :*

(1) *ϕ admet un seul point d'indétermination propre situé sur H.*
(2) *ϕ admet des points d'indétermination $P_1, \ldots, P_s$ ($s \geq 2$) tels que :*
   (a) *P_1 soit le point d'indétermination propre,*
   (b) *pour tout $i = 2, \ldots, s$ le point P_i soit situé sur le diviseur produit en éclatant P_{i-1}.*

Le lemme suivant 3.6 découle immédiatement de la première assertion du lemme 3.5.

Lemme 3.6. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$. Alors,*

$$\mathrm{Card}(Z(\phi) \cup Z(\phi^{-1})) \leq 2.$$

Plus précisément dans ce même lemme 9 [**Lam02**], nous avons, pour tout automorphisme non linéaire ϕ du plan affine, il existe une suite finie d'éclatements $\pi_i : V_i \to V_{i-1}$ de centre P_i avec $1 \leq i \leq n$ avec $V_0 = \mathbb{P}^2$, telle que : $\phi\pi_1 \cdots \pi_n$ est un morphisme de V_n dans $\mathbb{P}^2$ et $\phi\pi_1 \cdots \pi_{n-1}$ n'est pas un morphisme.
Les points P_i avec $1 \leq i \leq n$ sont des points infiniment voisins.

4. Étude d'une résolution canonique

4.1. Construction. — Nous utilisons ces propriétés géométriques des automorphismes du plan affine pour construire les résolutions canoniques pour ces applications.

4.1.1. Cas des automorphismes réguliers. — Nous utiliserons leur définition et le lemme 3.6.
Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ un automorphisme régulier. Nous avons deux familles distinctes de points associées à ϕ et ϕ^{-1}, il s'agit de :

$$P_1, \ldots, P_n$$

$$\text{et} \quad Q_1, \ldots, Q_m$$

associée respectivement à ϕ et à ϕ^{-1}. Quitte échanger ϕ et ϕ^{-1}, nous pouvons supposer $n \leq m$. Nous définissons $\pi_i : V_i \to V_{i-1}$ l'éclatement de centre P_i et Q_i pour $1 \leq i \leq n$ et de centre Q_i pour $n \leq i \leq m$. La variété V_m sera notée V, et $\pi_1 \cdots \pi_m$ sera noté π. Les diviseurs exceptionnels associés seront notés :

$$E_1, \ldots, E_n$$

$$F_1, \ldots, F_m.$$

La résolution est minimale et unique, les entiers n et m étant choisis comme dans le paragraphe précédent.

4.1.2. Cas des automorphismes non-réguliers. — Nous utiliserons le lemme 3.6.
Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ un automorphisme non-régulier non-linéaire.
Il existe $i_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\pi_i : V_i \to V_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq i_0$ des éclatements de centre respectivement $P_1, \ldots, P_{i_0}$, nous noterons

$$\psi_i = \phi \pi_1 \cdots \pi_i \quad \text{et} \quad \psi_i' = \phi^{-1} \pi_1 \cdots \pi_i,$$

avec pour tout $1 \leq i \leq i_0$, $Z(\psi_i) = Z(\psi_i')$ et $P_{i_0+1} = Z(\psi_{i_0}) \neq Z(\psi_{i_0}') = Q_{i_0+1}$.
Nous avons donc deux familles de points infiniment voisins : $P_1, \ldots, P_{i_0}, \ldots, P_n$ et $P_1, \ldots, P_{i_0}, Q_{i_0+1} \ldots, Q_m$.
Nous pouvons supposer $n \leq m$. Les éclatements pour $i \geq i_0 + 1$ sont définis de la même manière que pour le cas régulier. Les diviseurs exceptionnels associés sont :

$$E_1, \ldots, E_n$$

$$E_1,\dots,E_{i_0},F_{i_0+1},\dots,F_m.$$

Afin de traiter, dans la mesure du possible, simultanément les deux cas nous noterons la seconde famille de diviseurs exceptionnels :

$$F_1,\dots,F_{i_0},F_{i_0+1},\dots,F_m,$$

avec pour tout $1\leq i\leq i_0$, $E_i=F_i$.

4.2. Premiers résultats. —

4.2.0.1. Notations. — Soit $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ non linéaire. Soit (π,V) une résolution canonique de ϕ. Soit $H^\sharp$ la transformée stricte de H et $E_1,\dots E_n,F_1,\dots,F_m$ les diviseurs exceptionnels associés à cette résolution. Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(V)$ est donc engendré par $H^\sharp,E_1,\dots,E_n,F_1,\dots,F_m$. Nous noterons $\psi=\phi\pi$ et $\psi=\phi^{-1}\pi$ les morphismes obtenus.

Il existe donc $b,c,e,b_i,c_i,e_i,b'_j,c'_j,e'_j\in\mathbb{Z}$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq m$ tels que :

$$\psi^*(H)=bH^\sharp+\sum_{i=1}^n b_iE_i+\sum_{j=1}^m b'_jF_j,$$

$$\psi'^*(H)=cH^\sharp+\sum_{i=1}^n c_iE_i+\sum_{j=1}^m c'_jF_j,$$

$$\pi^*(H)=eH^\sharp+\sum_{i=1}^n e_iE_i+\sum_{j=1}^m e'_jF_j.$$

Si ϕ n'est pas régulier, alors il existe i_0 tel que pour tout $1\leq j\leq i_0$ nous avons :$b'_j=c'_j=e'_j=0$.

Remarque 4.1. — Dans tous les exemples que nous avons étudiés, nous avons $n=m$.

Proposition 4.2. — *Soit $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ non-linéaire. Soit (π,V) la résolution canonique de ϕ. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Pour toute courbe irréductible $C\notin\{H^\sharp,E_1,\dots E_n,F_1,\dots,F_m\}$, nous avons $\dim(\overline{\psi(C)})=\dim(\overline{\psi'(C)})=1$, $\overline{\psi(C)}\neq H$ et $\overline{\psi'(C)}\neq H$.*

(2) *Nous avons $\psi_*(H^\sharp)=\psi'_*(H^\sharp)=0$.*

(3) *Pour tout $1\leq i\leq n-1$ et pour tout $1\leq j\leq m$, nous avons :*

$$\psi_*(E_i)=0\quad et\quad \psi_*(F_j)=0.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq m-1$, nous avons :

$$\psi'_*(E_i) = 0 \quad \textit{et} \quad \psi'_*(F_j) = 0,$$

de plus,

$$\psi_*(E_n) = H \quad \textit{et} \quad \psi'_*(F_m) = H.$$

Démonstration. — Nous considérons chacun des points séparément.

(1) Soit $C \notin \{H^\sharp, E_1, \dots E_n, F_1, \dots, F_m\}$. Nous avons :

$$\pi(C \setminus ((\cup_{i=1}^n C \cap E_i) \cup (\cup_{j=1}^m C \cap F_j))) \not\subset H \setminus (P_0 \cup Q_0),$$

d'où le résultat car ϕ est construit à partir d'un automorphime de l'espace affine.

(2) Nous avons $\pi(H^\sharp \setminus (\cup_{i=1}^n H^\sharp \cap E_i)) = H \setminus (Z(\phi))$.
De là

$$\psi(H^\sharp \setminus (\cup_{i=1}^n H^\sharp \cap E_i)) = \phi(H \setminus (Z(\phi)) \subset Z(\phi^{-1}),$$

d'après le lemme 3.2. Or, $\dim(Z(\phi^{-1})) = 0$, donc $\dim(\overline{\psi(H^\sharp)}) < 1$, d'où $\psi_*(H^\sharp) = 0$. Le raisonnement est analogue pour $\psi'_*(H^\sharp)$.

(3) Nous noterons de la même manière E_{n-1} et $\pi_n(E_{n-1})$. Nous avons $\psi = \psi_{n-1}\pi_n$, or ψ_{n-1} est une application rationnelle, donc d'après le lemme 3.1 il existe C une courbe de $\mathbb{P}^2$ telle que $\psi_{n-1}^{-1}(C) = P_n$, or par construction cette courbe ne peut être que H.
De plus, par construction $\psi_{n-1}(E_{n-1}) \subset H$. Supposons que $\overline{\psi_{n-1}(E_{n-1})} = H$, alors :

Il existe un point $P \in E_{n-1}$ avec $P \neq P_0$ tel que $\psi_{n-1}(P) = Q \in Z(\psi_{n-1}^{-1})$;

de là $\psi_{n-1}^{-1}(Q) = P = P_n$, d'où la contradiction. Pour $1 \leq i < n-1$ le raisonnement est analogue.
Pour $1 \leq j \leq m$, si ϕ est régulier nous avons $\pi(F_j) = Q_1 \notin Z(\phi)$ d'où le résultat, si ϕ n'est pas régulier le raisonnement est essentiellement le même si ce n'est que l'on considère ψ_{i_1} qui est régulier.
Enfin, comme ψ est une application birationnelle il existe C une courbe de V telle que $\overline{\psi(C)} = H$ et la seule courbe possible est E_n.

□

Lemme 4.3. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré algébrique au moins deux. Soit (π, V) la résolution canonique de ϕ. Avec les notations précédentes nous* *avons :*

$$\psi^*(H).\psi'^*(H) = c_n = b'_m,$$
$$\psi^*(H).\pi^*(H) = e_n = b,$$
$$\psi'^*(H).\pi^*(H) = e'_m = c.$$

Démonstration. — D'après la formule de projection, nous avons :

$$\psi^*(H).\psi'^*(H) = H.\psi_*\psi'^*(H) = c_n H^2 = c_n,$$

et nous avons également :

$$\psi^*(H).\psi'^*(H) = \psi'_*\psi^*(H).H = b'_m H^2 = b'_m.$$

Les autres égalités s'obtiennent de façon analogue. □

4.2.0.2. Diviseur canonique associé à la résolution canonique. — Soit (π, V) la résolution canonique de ϕ. Soit K_V le diviseur canonique de V. Nous utilisons les notations précédentes. Par construction et d'après [**H77**] chapitre 5 proposition 3.3, il existe $a_i, a'_j \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ tels que :

$$K_V = -3H^\sharp + \sum_{i=1}^{n} a_i E_i + \sum_{j=1}^{m} a'_j F_j;$$

en effet $-3H$ est le diviseur canonique de $\mathbb{P}^2$.

Remarque 4.4. — Si $\pi = \pi_1$, alors la surface V obtenue est une surface de del Pezzo, et par conséquent d'après [**K96**] chapitre 2 exemple 4.15.2, le cone des diviseurs effectifs est polyédral de type fini.

4.3. Propriétés du diviseur $D(\alpha, \pi, V)$. —

Lemme 4.5. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré algébrique au moins deux. Soit (π, V) une résolution canonique de ϕ. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons :*

- *le nombre d'intersection suivant :*

$$D(\alpha, \pi, V).H^\sharp = -\alpha,$$

- *Pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et $1 \leq j \leq m-1$:*

$$D(\alpha, \pi, V).E_i = D(\alpha, \pi, V).F_j = 0,$$
$$D(\alpha, \pi, V).E_n = D(\alpha, \pi, V).F_m = 1,$$

– *l'auto-intersection suivante :*

$$D(\alpha,\pi,V)^2 = 2(1+c_n) - 2\alpha(b+c) + \alpha^2.$$

Démonstration. — Nous avons :

$$\begin{aligned} D(\alpha,\pi,V)^2 &= \psi^*(H)^2 + \psi^*(H).\psi'^*(H) - \alpha\psi^*(H).\pi^*(H) \\ &\quad + \psi'^*(H).\psi^*(H) + \psi'^*(H)^2 - \alpha\psi'^*(H).\pi^*(H) \\ &\quad - \alpha\pi^*(H).\psi^*(H) - \alpha\pi^*(H).\psi'^*(H) + \alpha^2\pi^*(H)^2 \\ &= H^2 + 2c_n - 2\alpha b + H^2 + -2\alpha c + \alpha^2 H^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

5. Preuve des théorème A et B

5.1. Résultats préliminaires. —

Théorème 5.1 **(Théorème de Kleiman ([Laz01] th 1.4.8.))**
Soit X une variété (un schéma) complet. Si D est un $\mathbb{R}$-diviseur nef de X, alors pour toute sous-variété (schéma) irréductible $V \subset X$ de dimension K, nous avons :

$$D^K.V \geq 0.$$

Théorème 5.2. — *(*[**Dem96**] *6.6) Soit X une variété algébrique projective. Nous avons,*

$$\overline{\mathrm{Pic}}^a(X) = \mathrm{Pic}^{nef}(X).$$

5.2. Calculs des nombres d'intersection. —

Proposition 5.3. — *Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ de degré algébrique au moins deux. Soit (π,V) la résolution canonique de ϕ. Soit $\alpha \leq \alpha(\phi,eff)$ alors, nous avons :*

– *si $\alpha < \frac{-1}{3}(a_n + a'_m)$ alors $D(\alpha,\pi,V) \in \mathrm{Poly}(V)$, où $\mathrm{Poly}(V)$ désigne la partie polyèdrale du cone effectif de V,*
– *si $\alpha = \frac{-1}{3}(a_n + a'_m)$ alors $D(\alpha,\pi,V) \in \mathrm{Pic}^+_{K_V=0}(V)$,*
– *si $\frac{-1}{3}(a_n + a'_m) < \alpha$ alors $D(\alpha,\pi,V) \in \mathrm{Pic}^+_{K_V>0}(V)$.*

Démonstration. — Soit (π,V) la résolution canonique de ϕ. Soit K_V le diviseur canonique de V.

Nous calculons le nombre d'intersection de $D(\alpha,\pi,V)$ avec le diviseur canonique pour déterminer dans quelle partie du cone effectif se trouve $D(\alpha,\pi,V)$. À l'aide du lemme 4.5, nous obtenons.

$$\begin{aligned} D(\alpha,\pi,V).K_V &= \psi^*(H)+\psi'^*(H)-\alpha\pi^*(H)).K_V \\ &= \psi^*(H).K_V+\psi'^*(H).K_V-\alpha\pi^*(H).K_V \\ &= H.\psi_*(K_V)+H.\psi'_*(K_V)-\alpha H.\pi_*(K_V) \\ &= H.(a_nH)+H.(a'_mH)-\alpha H.(-3H) \\ &= a_n+a'_m+3\alpha \end{aligned}$$

D'où le résultat d'après le théorème 2.1. □

La preuve du théorème A découle immédiatement des théorèmes 5.1 et et du premier point du lemme 4.5.

La preuve du théorème B repose essentiellement sur la proposition 5.3 et la définition de l'indice effectif.

Remarque 5.4. — Soit $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$. S'il existe une résolution (π,V) de ϕ pour laquelle V est une surface de del Pezzo alors nous avons $\alpha(\phi,eff)\le\frac{4}{3}$. Ce cas se produit notamment, si suivant la terminologie utilisée dans [**Lam02**], ϕ et ϕ^{-1} ont un point d'indétermination propre (voir définition 3.4) et ce que ces points soient confondus ou non.

6. Valeurs numériques de l'indice effectif

Dans ce paragraphe, nous donnons les valeurs des deux invariants géométriques pour différents exemples, dans tous ces exemples a est une constante non nulle. J. Silverman a déterminé la valeur de l'indice effectif pour l'un de ces exemples, l'application de Hénon généralisée ([**Si94**]). Pour calculer ces indices nous avons utilisé la résolution canonique. Le détail des calculs est omis.

Nous rappelons la définition du degré dynamique (voir par exemple [**S99**]) :

Définition 6.1. — Soit ϕ un automorphisme affine. La limite suivante existe et défini le degré dynamique $\delta(\phi)$:

$$\delta(\phi) := \inf_{n\geq 1} deg(\phi^n)^{1/n}.$$

Application	degré algébrique	degré dynamique	indice effectif
$\phi(x,y) =$	$\deg(\phi)$	$\delta(\phi)$	$\alpha(\phi, eff)$
(y, y^2+b+ax)	2	2	$\frac{5}{2} = 2+\frac{1}{2}$ **[Si94]**
$(y+ax^3, x)$	3	3	$\frac{10}{3} = 3+\frac{1}{3}$
$(y+ax^4, x)$	4	4	$\frac{17}{4} = 4+\frac{1}{4}$

Remarque 6.2. — Pour les exemples de degré dynamique différents de 1, nous obtenons la borne maximale du théorème C. Sur les calculs effectués, nous observons : $\alpha(\phi, eff) = \delta(\phi) + \frac{1}{\deg(\phi)}$. Une question naturelle se pose, les indices amples et effectifs ne seraient-il pas rationnels ?

Références

[B83] A. Beauville, Complex algebraic surfaces, London Mathematical Society Lecture Note series 68 (1983).

[Dem96] Jean-Pierre Demailly, L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. Transcendental methods inalgebraic geometry (Cetraro, 1994), 1–97, Lecture Notes in Math., 1646, Springer, Berlin, (1996).

[Den95] L. Denis, Points périodiques des automorphismes affines, J. reine angew. Math. 467, 157-167 (1995).

[H77] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer Verlag (1977).

[HS00] M. Hindry, J. Silverman, Diophantine geometry, an introduction, Graduate Texts in Mathematics 201, Springer Verlag (2000).

[K96] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge.Band 32, Springer (1996)

[Lam02] S. Lamy, Une preuve géométrique du théorème de Jung, L'enseignement mathématique 48 291-315 (2002).

[Laz01] R. Lazarsfeld, Positivity in algebraic geometry, manuscrit (2001).

[M1] S. Marcello, Sur les propriétés arithmétiques des itérés d'automorphismes réguliers, C. R. Acad. Sci. Paris, t.331, Série I,11-16 (2000).

[M2] S. Marcello, Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine, Bulletin de la S.M.F. 31 229-257 (2003).

[M3] S. Marcello, Sur la dynamique arithmétique p-adique des automorphismes de l'espace affine (2003).

[M4] S. Marcello, Géométrie, points rationnels et itérés des automorphismes de l'espace affine (2003).

[P01] E. Peyre, Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et *al.*], Séminaire Bourbaki volume 2000-2001 Astérisque 282 323-344 (2002).

[S99] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, Panoramas et Synthèses 8 (S.M.F.), 97-195 (1999) .

[Si94] J. Silverman, Geometric and arithmetic properties of the Hénon map, Math. Z. 215, 237-250 (1994).

---

4 novembre 2003

SANDRA MARCELLO, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111, Bonn, Deutschland, • *E-mail :* `marcello@mpim-bonn.mpg.de`