ÜBER NICHTARCHIMEDISCHE SYMMETRISCHE QUADRATE VON SPITZENFORMEN

by

A.A. Pančiškin

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

Moskauer Staatsuniversität
Mechanisch–Mathematische
Fakultät
119899 Moskau
UdSSR

MPI/89 – 52

ÜBER NICHTARCHIMEDISCHE SYMMETRISCHE QUADRATE VON SPITZENFORMEN

von

A.A. Pančiškin

Moskau

§ 0. Einleitung

0.1. Sei p eine Primzahl und S eine endliche Menge von Primzahlen, die p enthält. In dieser Arbeit wird eine neue Konstruktion von nichtarchimedischen Zeta–Funktionen gegeben, die spezielle Werte symmetrischer Quadrate [18] elliptischer Spitzenformen S–adisch interpolieren. Solche Reihen wurden zum ersten Mal in den Arbeiten von B. Arnaud [1] und C.–G. Schmidt [24] als nichtarchimedische Mellin–Transformierte gewisser p–adischer Maße (im Sonderfall $S = \{p\}$) konstruiert. In den angegebenen Arbeiten wurde bemerkt, daß diese p–adischen Maße von p–adischen Distributionen herstammen, die ihrerseits früher durch den Autor dieses Artikels konstruiert worden sind, vgl. [19], [20]. Die neue Konstruktion fundiert auf einer anderen Methode, die gedanklich der p–adischen Methode von Renkin–Selberg nahesteht, die in der letzten Zeit ausgearbeitet worden ist [6], [21]. Diese neue Methode erlaubt unter anderem, präzisere arithmetische Eigenschaften spezieller Werte symmetrischer Quadrate zu finden, z. B. eine p–adische Identität, die solche Werte an verschiedenen Stellen in Verbindung bringt.

Vor kurzem hat C.–G. Schmidt [32] genauere Ergebnisse über p–adische symmetrische Quadrate im Fall $S = \{p\}$ erhalten, insbesondere die oben erwähnte Identität.

Er formuliert seine Resultate mittels des primitiven symmetrischen Quadrates. Man kann letzteres an schlechten Primstellen sehr natürlich durch ℓ–adische Darstellungen interpretieren. Die Grundidee seiner Arbeit ist der unserigen ähnlich.

Wir verwenden allerdings bei der Behandlung eines holomorphen Projektionsoperators auf den Raum der (holomorphen) Modulformen eine etwas andere Technik.

Wir beweisen einen allgemeinen Satz, der die Aktion dieses Operators durch Fourierentwicklungen ausdrückt. Für diesen Zweck verwenden wir Poincaré–Reihen vom Exponential–Typ (in zwei Variablen, siehe [3], [9]). Diese Technik ist in etlichen anderen Fällen anwendbar, z. B. auf Standard–Zetafunktionen Siegelscher Modulformen von geradem Grad (siehe [31]).

0.2. Sei C eine positive ganze Zahl, f eine primitive Spitzenform des Vektorraums $\mathcal{S}_k(C,\psi)$ der Spitzenformen vom ganzen Gewicht k bezüglich der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(C)$ von $SL_2(\mathbb{Z})$, mit Dirichlet–Charakter $\psi \bmod C$.

Wir setzen $e(z) = e^{2\pi i z}$ für $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$, und sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e(nz) \tag{0.1}$$

die Fourier–Entwicklung der Form f. Für einen beliebigen Dirichlet–Charakter $\chi \bmod M$ ist die nachfolgende Funktion definiert

$$\mathcal{D}(s,f,\chi) = L_{MC}(2s-2k+2,\psi^2\chi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)a(n^2)n^{-s} \tag{0.2}$$

wobei $L_{MC}(s,w)$ die Dirichlet–Reihe mit Charakter ω bezeichnet, und der Index MC anzeigt, daß aus dem Euler–Produkt sämtliche Faktoren entfernt wurden, die den Primteilern der Zahl MC entsprechen.

Die Konstruktion der zu (0.2) analogen nichtarchimedischen Reihen basiert auf der folgenden Eigenschaft der Algebraizität der Werte der Zeta–Funktionen $\mathscr{D}(s,f,\chi)$ in einigen ganzen Punkten im kritischen Streifen $0 < s < 2k-1$ die nachstehenden Zahlen sind algebraisch,

$$\pi^{-m}\langle f,f \rangle^{-1} \mathscr{D}(m,f,\chi) \in \overline{\mathbb{Q}} \tag{0.3}$$

falls $1 \leq m \leq k-1$, $\chi(-1) = (-1)^{m+1}$

$$\pi^{k-2m-1}\langle f,f \rangle^{-1} \mathscr{D}(m,f,\chi) \in \overline{\mathbb{Q}} \tag{0.4}$$

falls $k \leq m \leq 2k-2$, $\chi(-1) = (-1)^{m}$, $\langle f,f \rangle$ das Peterssonsche Skalarprodukt bezeichnet, vgl. [27], [1], [18], [3].

0.3. Für die nichtarchimedische Konstruktion betrachten wir die S–adische Vervollständigung

$$\mathbb{Z}_S = \prod_{q \in S} \mathbb{Z}_q$$

von $\mathbb{Z}$. Wenn $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}) = G_S$ die Galois–Gruppe der maximalen abelschen Erweiterung $\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}$, die unverzweigt außerhalb S und ∞ ist, so folgt

$$G_S \cong \mathbb{Z}_S^{\times} = \prod_{q \in S} \mathbb{Z}_q^{\times} . \tag{0.5}$$

Wir betrachten den Tate'schen Körper $\mathbb{C}_p = \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$, d.h. die Vervollständigung des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{Q}_p$, versehen mit der Norm $|\cdot|_p$, normalisiert durch $|p|_p = p^{-1}$. Wir fixieren eine Einbettung

$$i_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p . \tag{0.6}$$

Der Definitionsbereich der Zeta–Funktionen ist die p–adisch analytische Lie Gruppe

$$X_S = \mathrm{Hom}_{\mathrm{contin}}(G_S, \mathbb{C}_p^{\times})$$

bestehend aus allen stetigen p–adischen Charakteren der Gruppe G_S . Die Charaktere endlicher Ordnung $\chi \in X_S^{\mathrm{tors}}$ identifiziert man mit jenen Dirichlet–Charakteren, deren Führer nur Primteiler aus S enthalten, mit Hilfe der folgenden Zerlegung:

$$\chi : G_S \cong \mathbb{Z}_S^{\times} \longrightarrow (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^{\times} \xhookrightarrow{i_p} \mathbb{C}_p^{\times} \tag{0.7}$$

weil jeder solcher Charakter χ sich gemäß dem folgenden Diagram (für ein geeignetes M, $M \geq 1$)

$$\chi : \mathbb{Z}_S^{\times} \longrightarrow (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}_p^{\times}$$

aufspalten läßt. Wir bezeichnen mit ein und dem gleichen Buchstaben χ Elemente $\chi \in X_S^{\mathrm{tors}}$ und die entsprechenden Dirichlet–Charaktere. Bezeichne x_p die Komposition

$$x_p : G_S \cong \mathbb{Z}_S^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{C}_p^\times \tag{0.8}$$

der natürlichen Projektion und der fixierten Einbettung. Setzen wir außerdem

$M_0 = \prod_{q \in S} q$, $N_0 = 4CM_0$.

Ausgehend von (0.3) und (o.4) konstruieren wir für eine beliebige natürliche Zahl C mit $(C,N_0) = 1$, $c > 1$ p–adisch analytische Funktionen

$$\mathscr{D}^{c+} , \mathscr{D}^{c-} : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p , \quad \mathscr{D}^{c\pm} = \mathscr{D}^{c\pm}(x,f) \tag{0.9}$$

derart, daß die Werte $\mathscr{D}^{c+}(\chi x_p^{s-k+1}))$ (bzw. $\mathscr{D}^{c-}(\chi x_p^{s-k+1}))$ bis auf einen elementaren algebraischen Faktor mit den folgenden Zahlen

$i_p(\pi^{k-2s-1}\langle f,f \rangle^{-1} \mathscr{D}(s,f,\chi))$ falls $s \in \mathbb{Z}$, $k \le s \le 2k-2$, $(-1)^s = \chi(-1)$, (bzw. $i_p(\pi^{-s}\langle f,f \rangle^{-1} \mathscr{D}(s,f,\chi))$ falls $1 \le s \le k-1$, $(-1)^{s+1} = \chi(-1))$ zusammenfallen. Diese Werte bestimmen die Funktionen (0.9) eindeutig. Außerdem gibt es eine Funktionalgleichung, die die Funktionen $\mathscr{D}^{c+}(x,f)$ und $\mathscr{D}^{c-}(x_p x^{-1}, f^\rho)$ verknüpft

$(x \in X_S$, $f^\rho(z) = \overline{f(-\bar{z})} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a(n)}e(nz)$ die komplex–konjugierte Spitzenform). Für die Konstruktion ist wesentlich, daß für alle

$$|i_p(a(q))|_p = 1 \text{ (die p–Gewöhnlichkeitseigenschaft).} \tag{0.10}$$

<u>Aufbau des Artikels</u>: In § 1 wird eine genaue Formulierung der Resultate gegeben. Danach (§ 2) werden die grundlegenden Eigenschaften S–adischer Maße und Distributionen aufgeführt.

In § 3 wird eine komplexwertige Distribution definiert, die zu $\mathscr{D}(s,f,\overline{\chi})$ assoziiert ist. In diesem Paragraph werden auch einige Integrale der Dirichlet–Charaktere bezüglich dieser Distributionen berechnet. Dann in (§ 4) wird eine Integraldarstellung (nach Rankin–Selberg) für die Distributionen mit Hilfe von Eisenstein–Reihen von halbganzzahligem Gewicht formuliert. Anschließend werden Fourier–Entwicklungen normalisierter Eisenstein–Reihen gegeben. In § 5 wird die Eigenschaft der Algebraizität der Werte der Distributionen unter Anwendung einer holomorphen Projektion untersucht. Die Eigenschaft der Ganzheit der Distributionen und die oben erwähnte p–adische Identität sind Inhalt des Paragraphen 6. Zuletzt (§ 7) wird die S–adische Funktionengleichung für (0.9) hergeleitet.

Für die unschätzbare Hilfe bei der Vorbereitung des Manuskripts möchte sich der Autor bei Rolf Hofmann aus Heidelberg und Juri Tschinkel aus Berlin recht herzlich bedanken.

Der Autor möchte außerdem dem Max–Planck–Institut für Mathematik in Bonn und den dortigen Mathematikern für die Gastfreundschaft und die hilfreichen Diskussionen danken.

Bezeichnungen

Sei H die obere komplexe Halbebene, auf der die Gruppe $GL_2^+(\mathbb{R})$ der reellen Matrizen $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit $\det \gamma > 0$ operiert. Für eine beliebige Funktion $f(z)$ auf H und eine beliebige ganze Zahl k ist die Aktion durch

$$(f|_k\gamma)(z) = (\det \gamma)^{k/2} f(\gamma(z))(cz + d)^{-k}$$

definiert. Die Kongruenzuntergruppen

$$\Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$$

sind durch

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \bmod N\}$$

$$\Gamma_1(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \bmod N \,,\, a \equiv d \equiv 1 \bmod N\}$$

für ein natürliches N definiert. Wenn Γ eine von diesen Untergruppen ist, bedeuten die Symbole $\mathcal{M}_k(\Gamma) \supset \mathcal{S}_k(\Gamma)$ den komplexen Vektorraum holomorpher Modulformen und den Unterraum der Spitzenformen vom Gewicht k bzgl. Γ. Für eine Dirichlet–Charakter $\psi \bmod N$ sei

$$\mathcal{M}_k(N,\psi) = \{f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \,|\, f|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \psi(d) f \text{ für } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)\}$$

und

$$\mathscr{S}_k(N,\psi) = \mathscr{S}_k(\Gamma_1(N)) \cap \mathscr{M}_k(N,\psi) .$$

Für beliebige $f_1 \in \mathscr{S}_k(N,\psi)$, $f_2 \in \mathscr{M}_k(N,\psi)$ ist das Peterssonsche Skalarprodukt gegeben durch $\langle f_2,f_1 \rangle_N = \int\limits_{H/\Gamma_0(N)} \overline{f_2(z)}f_1(z)y^{k-2}dxdy \; (z = x + iy \in H)$.

§ 1. Formulierung der Hauptresultate

1.1. Wir beschreiben die p–adisch analytische Gruppe auf der die S–adischen L–Funktionen definiert sind [29]. Es gibt einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}_S^\times \cong \bigoplus_{q\in S} \mathbb{Z}_q^\times .$$

Wir schreiben

$$X(\,\cdot\,) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{contin}}(\,\cdot\,, \mathbb{C}_p^\times)$$

für die Gruppe der p–adischen Charaktere einer topologischen Gruppe und setzen $X_S = X(\mathbb{Z}_S^\times)$, dann ist $x_p \in X_S$, die Komposition der natürlichen Projektion $\mathbb{Z}_S^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ und der Einbettung $\mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{C}_p^\times$. Je nachdem, ob $p > 2$ oder $p = 2$ setze man $\chi = 1$ oder 2, und es sei

$$U = \{x \in \mathbb{Z}_p^\times \mid x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^\nu)\} .$$

Dann gibt es eine Zerlegung

$$X_S = X((\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^\times \times \prod_{q\neq p} \mathbb{Z}_q^\times) \times X(U) . \tag{1.1}$$

Die analytische $\mathbb{C}_p$–Struktur auf $X(U)$ ist definiert durch den Isomorphismus

$$\varphi : X(U) \xrightarrow{\sim} T = \{x \in \mathbb{C}_p^\times \mid |x-1|_p < 1\}$$

mit $\varphi(x) = x(1 + p^{\nu})$, $1 + p^{\nu}$ ist die topologische Erzeugende der Gruppe U .

Eine analytische Funktion $F : T \longrightarrow \mathbb{C}_p$ wird definiert als die Summe der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-1)^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}_p$, die für alle $t \in T$ konvergiert. Der Begriff der analytischen Funktionen kann auf ganz X_S erweitert werden.

Die Elemente der Torsionsgruppe $\chi \in X_S^{tors} \subset X_S$ werden identifiziert mit den primitiven Dirichlet–Charakteren χ , so daß $S(\chi) \subset S$, wobei $S(\chi)$ die Menge der Primteiler der Führer $C(\chi)$ der Charaktere χ bezeichnet. Es ist bekannt, daß eine beschränkte $\mathbb{C}_p$–analytische Funktion F auf X_S eindeutig bestimmt ist durch ihre Werte $F(\chi_0\,\chi)$ für festes $\chi_0 \in X_S$ und alle $\chi \in X_S^{tors}$ unter möglicher Ausschließung einer Anzahl von Charakteren, die mit jeder Analytizitätskomponente in (1.1) einen endlichen Durchschnitt hat. Sei μ ein beschränktes $\mathbb{C}_p$–wertiges Maß auf $\mathbb{Z}_S^{\times}$ (siehe § 2) dann ist die Mellin–Transformierte

$$L_{\mu}(x) = \mu(x) = \int_{\mathbb{Z}_S^{x}} x d_{\mu}(x \in X_S) \tag{1.2}$$

eine beschränkte $\mathbb{C}_p$–analytische Funktion

$$L_{\mu} : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p .$$

1.2. Es seien $\alpha(q)$, $\beta(q)$ die Wurzeln des Hecke–Polynoms

$$X^2 - a(q)X + \psi(q)q^{k-1} = (X - \alpha(q))(X - \beta(q)) .$$

Dann gilt für die Funktionen (0.2) die Indentität [26], [18]

$$\mathscr{D}(s,f,\chi) = L_{CC(\chi)}(2s-2k+2,\psi^2\chi^2)\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)a(n^2)n^{-s} =$$

$$\prod_q [1-\chi(q)\alpha(q)^2q^{-s})(1-\chi(q)\alpha(q)\beta(q)q^{-s})(1-\chi(q)\beta(q)^2q^{-s})]^{-1}\,. \tag{1.3}$$

Wir nehmen an, daß

$$|i_p(a(p))|_p = 1 \tag{1.4}$$

$$S \cap S(C) = \phi \quad (\text{d.h. } (C,M_0) = 1)\,. \tag{1.5}$$

Für alle Primzahlen q fixieren wir eine der Wurzeln, so daß

$$|i_p(\alpha(q))|_p = 1 \text{ für alle } q \in S \tag{1.6}$$

(selbstverständlich kann man bei $q \neq p$ die beliebige dieser Wurzeln nehmen, wegen der Bedingung $q \nmid C$, weil dann $\alpha(q)\beta(q) = \psi(q)q^{k-1}$) . Bei $q \nmid C$ sind die Zahlen $\hat{\alpha}(q) = \overline{\psi}(q)\alpha(q)$, $\hat{\beta}(q) = \overline{\psi(q)\beta(q)}$ Wurzeln des komplexkonjugierten Polynoms

$$X^2 - \overline{a(q)}X + \overline{\psi(q)}q^{k-1} = (X-\hat{\alpha}(q))(X-\hat{\beta}(q))\,. \tag{1.7}$$

Die Funktionen $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $2(n)$, $\hat{\beta}(n)$ kann man mittels der Multiplikativität auf alle natürlichen n erweitern.

Es ist natürlich folgende normalisierte symmetrische Quadrate einzuführen

$$\mathscr{D}^{+}(s,f,\chi)=\frac{2i^{-\delta}\Gamma(s-k+1)\Gamma(s)}{(2\pi)^{2s-k+1}}\cos\frac{\pi(s-k+\delta)}{2}\,\mathscr{D}(s,f,\chi) \tag{1.8}$$

$$\mathscr{D}^{-}(s,f,\chi)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,\mathscr{D}(s,f,\chi) \tag{1.9}$$

wobei $\delta=0,1$, $(-1)^{\delta}=\chi\,\psi(-1)$.

Dann gilt

$$\langle\, f,f\,\rangle^{-1}\mathscr{D}^{+}(s,f,\chi)\in\overline{\mathbb{Q}}\quad\text{falls}\quad s\in\mathbb{Z}\,,\ k\le s\le 2k-2$$

$$\langle\, f,f\,\rangle^{-1}\mathscr{D}^{-}(s,f,\chi)\in\overline{\mathbb{Q}}\quad\text{falls}\quad s\in\mathbb{Z}\,,\ 1\le s\le k-1$$

(vgl. (0.3), (0.4)), wobei für ganze s mit nicht erfüllter Geradheitsbedingung diese Werte gleich Null sind.

1.3. Hauptsatz. Seien die Voraussetzungen (1.4). (1.5) erfüllt. Dann existieren für ein natürliches c mit $(c,N_0)=1$, $c\neq 1$ beschränkte $\mathbb{C}_p$–analytische Funktionen

$$\mathscr{D}^{c+}(x,f)\,,\ \ \mathscr{D}^{c+}(x,f):X_S\longrightarrow\mathbb{C}_p$$

die eindeutig durch die folgenden Bedingungen definiert sind

$$\mathscr{D}^{c+}(\chi\,x_p^{s-k+1},f)=\frac{G(\chi)\,C(\chi)^{s-1}}{\alpha(C(\chi))^{2}}\;\frac{C(\psi\overline{\chi})^{s-k+1}}{G(\psi\overline{\chi})}\;\frac{\mathscr{D}^{+}(s,f,\overline{\chi})}{\langle\ f,f\,\rangle_{C}}\times$$

$$(1-(\bar\chi\psi)^2(c)c^{-2(s-k+1)})B(s,\chi,\alpha)\prod_{q\in S\setminus S(\chi)}(1-(\bar\psi\chi)(q)q^{s-k})\times$$

$$(1-(\bar\chi\psi)^2(2)2^{-2(s-k+1)})\prod_{q\mid 2c}\{(1-\psi\bar\chi(q)q^{s-k})/(1-\bar\chi\psi(q)q^{-(s-k+1)})\} \tag{1.10}$$

für alle $\chi \in X_S^{tors}$, $k \le s \le 2k-2$, $s \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{D}^{c-}(\chi x_p^{s-k+1}, f) = \frac{G(\chi)C(\chi)^{s-1}}{\alpha(C(\chi))^2}\,\frac{\mathcal{D}(s,f,\bar\chi)}{\langle f,f\rangle_C}\times$$

$$(1-(\chi\bar\psi)^2(c)c^{2(s-k)})\prod_{q\in S\setminus S(\chi)}(1-(\psi\bar\chi)(q)q^{-(s-k+1)})\times \tag{1.11}$$

$$B(s,\chi,\alpha)(1-(\bar\chi\psi)^2(2)2^{-2(s-k+1)}$$

für alle $\chi \in X_S^{tors}$, $1 \le s \le k-1$, $s \in \mathbb{Z}$, wobei

$$B(s,\chi,\alpha) = \prod_{q\in S\setminus S(\chi)}(1-\chi(q)\alpha(q)^{-2}q^{s-1})(1-\bar\chi(q)\beta(q)^{2-s}q) =$$

$$\prod_{q\in S\setminus S(\chi)}(1-\chi(q)\alpha(q)^{-2}q^{s-1})(1-\bar\chi(q)\hat\alpha(q)^{-2}q^{2k-2-s}) \tag{1.12}$$

und $G(\chi)$ die Gauß'sche Summe des Charakters χ mit dem Führer $C(\chi)$ ist.

1.4. Zum Beweis des Hauptsatzes wird eine nichtarchimedische Entsprechung der Rankin–Selberg–Methode entwickelt und die Darstellung der Funktionen (1.3) in Form einer Konvolution

$$\mathscr{D}(s-\nu,f,\chi) = L_{MC}(2s-2\nu-2k+2,\chi^2\psi^2)L(s,f,\theta(\chi)) \tag{1.13}$$

verwendet. Hier wurde die folgende Bezeichnung angenommen:

$$L(s,f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)b(n)n^{-s} \text{ für } g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)e(nz)$$

wobei

$$g = \theta(\chi) = 2^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n)n^{\nu}e(n^2z) \tag{1.14}$$

die Theta–Funktion mit dem Charakter χ mod M ist, die zum Vektorraum $\mathscr{M}_{(2\nu+1)/2}(\Gamma_0(4M^2),\chi\,\theta_{-1}^{\nu})$ der Modulformen vom halbganzen Gewicht $(2\nu+1)/2$ mit dem geraden Dirichlet–Charakter $\chi\,\theta_{-1}^{\nu}$ bzgl. $\Gamma_0(4M^2)$ gehört, wobei $\nu = 0$ oder 1, $\chi(-1) = (-1)^{\nu}$ und $\theta_{-1}(d) = \left[\frac{-1}{d}\right]$ der quadratische Charakter, der dem Körper $\mathbb{Q}(i)$ entspricht. Weiterhin gilt die Integraldarstellung

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f,\theta(\chi)) = \langle f^{\rho},\theta(\chi)E(z,2(s+1-k))\rangle_N \tag{1.15}$$

in der $N = 4M^2C$, $j_{\theta}(\gamma,z) = \theta(\gamma z)/\theta(z)$, $z = x+iy \in H$,

$$E(z,s) = y^{s/2} \sum_{\gamma\in\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma_0(N)} \omega(d_{\gamma})j_{\theta}(\gamma,z)^{-2k+2\nu+1}|j_{\theta}(\gamma,z)|^{-2s} \tag{1.16}$$

die Eisenstein–Reihe vom halbganzen Gewicht $k-\nu-1/2$ mit dem Dirichlet–Charakter $\omega = \chi\psi\,\theta_{-1}^{k+\nu}$ bedeutet, siehe § 4.

1.5. Zur Formulierung des Satzes über die Funktionengleichung ist es notwendig, Hilfsfaktoren $\rho_q(x,f) : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p$ für $q \mid \mathbb{C}$ einzuführen, die in den Bezeichnungen der Arbeit von Li [13] (Theorem 2.2) im wesentlichen mit den Hilfsfaktoren $\theta_q(s)$ der Funktionengleichung der Archimedischen Konvolution

$$L_{F_1,F_2}(s) = L_{MC}(2s,\psi^2\overline{\chi}^2)L(s+k-1,f,f(\overline{\chi}))$$

mit $F_1 = f$, $F_2 = f^{\rho}(\chi)$ übereinstimmen. Genauer, definieren wir $\rho_q(x,f)$ so, daß die Bedingung $\rho_q(\chi x_p^s,f) = i_p(\theta_q(s))$ für alle $s \in \mathbb{Z}$, $\chi \in X_S^{tors}$ erfüllt wird. Jetzt definieren wir die Funktionen

$$\begin{gathered} R^{c\pm}(x,f) = \mathscr{D}^{c\pm}(x,f) \times \\ (1-\psi^{-2}(x_p^{-1}x)^2(2)) \prod_{q/2C} (1-\psi(q)x^{-1}(q))\rho_q(x_p x^{-1},f^{\rho}) . \end{gathered} \tag{1.17}$$

Wir benötigen $x_p^{1/2}(n) = i_p(\sqrt{n})$ für alle $n \in N$ mit $(n,M_0) = 1$ (es sei bemerkt, daß $x_p^{1/2}$ keinen p–adischen Charakter darstellt).

1.6. Der Satz über die Funktionalgleichung.

Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes 1.3. betrachten wir die Funktionen $R^{c\pm}(x,f)$, die mit (1.17) definiert sind. Zusätzlich nehmen wir an, daß die Spitzenform f p–primitiv ist (siehe [13]) für alle $q \mid C$, d. h. nicht durch Twistung aus einer Spitzenform von der Stufe, die C/q teilt, gewonnen werden kann.

Dann gilt die folgende Funktionengleichung: für alle

$$R^{c-}(x_p x^{-1}, f^{\rho}) = R^{c+}(x,f)A(x,f) \qquad (1.18)$$

wobei

$$A(x,f) = W_f \cdot (x_p^{1/2} x^{-1})(C_* C(\psi)^2)$$

und C_* eine natürliche Zahl ist, $W_f \in i_p(\bar{\mathbb{Q}}^{\times})$ eine Konstante, die nur von f abhängt; die Primteiler von C_* und C stimmen überein, $W_f W_{f_\rho} = 1$. Explizit werden die Konstanten C_* und W_f im § 7 (Satz 7.5.) angeführt.

1.7. Der Beweis des Satzes 1.6. basiert auf der Eigenschaft der Eindeutigkeit nicht-archimedischer symmetrischer Quadrate und wird aus der archimedischen Funktionalgleichung (siehe) hergeleitet. Dabei benutzen wir die Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(s,f,\bar{\chi}) &= \frac{L_{MC}(2s-2k+2,(\psi\bar{\chi})^2)}{L_{MC}(s-k+1,\psi\bar{\chi})} L(s,f,f(\chi)) \\ &= \frac{L_{f,f^{\rho}(\chi)}(s-k+1)}{L_{MC}(s-k+1,\psi\bar{\chi})}\end{aligned} \qquad (1.19)$$

wobei χ primitiv mod M ist.

Es ist möglich, daß auch ein rein p–adischer Beweis des Satzes 1.6, der von ziemlich expliziten Formeln des § 6 für die Werte der S–adischen Maße $\mathscr{D}^{c\pm}$ ausgehen könnte, existiert.

§ 2. Distributionen und S–adische Maße auf der Galois–Gruppe G_S.

2.1. Distributionen. Betrachten wir einen kommutativen assoziativen Ring R und sei $\mathscr{M}$ – ein beliebiger R–Modul. Weiter sei

$$Y = \varprojlim Y_i\ ,\ \pi_{ij} : Y_i \longrightarrow Y_j\ ,\ i\ ,\ j \in I$$

eine proendliche Menge mit der gerichteten Indexmenge I. Wir betrachten den R–Modul Step(Y,R) bestehend aus allen R–wertigen lokal–konstanten Funktionen $\varphi : Y \longrightarrow R$ Definition. Eine Distribution auf Y mit Werten aus dem R–Modul $\mathscr{M}$ ist ein R–linearer Homomorphismus

$$\mu : \mathrm{Step}(Y,R) \longrightarrow \mathscr{M}. \tag{2.1}$$

Für $\varphi \in \mathrm{Step}(Y,R)$ werden folgende Bezeichnungen benutzt

$$\mu(\varphi) = \int_Y \varphi\, d\mu = \int_Y \varphi(y) d\mu(y)\ .$$

Eine beliebige Distribution μ kann angegeben werden mit Hilfe einer Funktionenfamilie $\mu^{(i)} : Y_i \longrightarrow \mathscr{M}$ die die folgende Bedingung der endlichen Additivität erfüllt

$$\mu^{(j)}(y) = \sum_{x \in \pi_{ij}^{-1}(y)} \mu^{(i)}(x)\ . \tag{2.2}$$

Dafür ist es ausreichend zu setzen

$$\mu^{(i)}(x) = \mu(\delta_{i,x}) \in \mathcal{M} \quad (x \in Y_i)$$

hierbei ist $\delta_{i,x}$ die charakteristische Funktion des gesamten Urbildes $\pi_i^{-1}(x) \subset Y$ bei der natürlichen Projektion $\pi_i : Y \longrightarrow Y_i$. Für eine beliebige Funktion $\varphi_j : Y_j \longrightarrow R$ werden mit Hilfe der natürlichen Projektionen die Funktionen $\varphi_i = \varphi_j \circ \pi_{ij}$, $\varphi = \varphi_j \circ \pi_j$,

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow Y_j \longrightarrow R\,, \quad \varphi : Y \longrightarrow Y_j \longrightarrow R$$

definiert. Damit eine beliebige Funktionenfamilie $\mu^{(i)} : Y_i \longrightarrow \mathcal{M}$ die Bedingung (2.2) erfüllt, reicht es aus, zu fordern:

$$\mu(\varphi) = \mu^{(i)}(\varphi_i) = \sum_{y \in Y_i} \varphi_i(y)\mu^{(i)}(y) \quad \begin{array}{l} \text{bei hinreichend großem} \quad i \geq j \\ \text{unabhängig von} \quad j \\ \text{und für alle} \quad \varphi_j \in \mathrm{Step}(Y_j, R) \end{array} \quad . \tag{2.3}$$

Sei $Y = G = \varprojlim G_i$ eine proendliche abelsche Gruppe, und sei R ein Integritätsbereich, der alle Einheitswurzeln enthält deren Grad die Ordnung von G (eine übernatürliche Zahl) teilt. Dann reicht es aus, die Bedingung (2.3) für alle Charaktere endlicher Ordnung $\chi : G \longrightarrow R^\times$ zu überprüfen, da ihre $R \otimes \mathbb{Q}$–lineare Hülle mit $\mathrm{Step}(G, R \otimes \mathbb{Q})$ zusammenfällt, vgl. [10], [17].

2.2. Maße. Sei R ein topologischer Ring, und $\mathcal{C}(Y,R)$ bezeichne den topologischen Modul der stetigen R–wertigen Funktionen auf Y .

<u>Definition</u>. Ein Maß auf Y mit Werten im topologischen R–Modul $\mathcal{M}$ ist ein stetiger R–Homomorphismus

$$\mu : \mathscr{C}(Y,R) \longrightarrow \mathcal{M} .$$

Die Beschränkung von μ auf den R–Untermodul $\mathrm{Step}(Y,R) \subset \mathscr{C}(Y,R)$ definiert eine Distribution, die mit den gleichen Buchstaben bezeichnet wird, und eindeutig das entsprechende Maß definiert, da der R–Untermodul Step(Y,R) überall dicht in $\mathscr{C}(Y,R)$ ist.

Sei, wie in der Einleitung, S eine endliche Menge von Primzahlen, die p enthält. Wir betrachten die Distributionen und Maße auf der Gruppe

$$Y = \mathbb{Z}_S^\times \cong G_S = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q})$$

für die

$$G_S = \varprojlim_M G(M) , \quad G(M) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(1^{1/M})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$$

hierbei durchläuft M alle natürliche Zahlen mit $S(M) \subset S$ wobei
$S(M) = \{q \text{ Primzahl} \mid q \text{ teilt } M\}$ den Träger der Zahl M bezeichnet. Für R wählen wir Unterringe von $\mathbb{C}$ oder geschlossene Unterringe im Tate–Körper $\mathbb{C}_p$. Im letzten Fall sei $\mathcal{M}$ ein vollständiger normierter Modul mit der Norm $| \cdot |_{\mathcal{M}}$ bzgl. $| \cdot |_p$ auf R. Die Bedingung dafür, daß sich die Distribution (Funktionenfamilie) $\mu^{(M)} : G(M) \longrightarrow R$ erweitern läßt zu einem $\mathcal{M}$–wertigen Maß μ auf G_S ist gleichbedeutend damit, daß die Familie $\mu^{(M)}$ beschränkt ist, d.h. für eine bestimmte Konstante $B > 0$ und alle M gilt:

$$|\mu^{(M)}(x)|_{\mathscr{A}} < B \quad (x \in G(M)).$$

Insbesondere, falls $\mathscr{A} = R = \mathcal{O}_p = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p \leq 1\}$, so fällt die $\mathcal{O}$–wertige Distribution mit dem $\mathcal{O}$–wertigen Maß zusammen.

2.3. Nichtarchimedische Mellin–Transformation und abstrakte Kummer'sche Kongruenzen [10]. Sei μ ein $\mathbb{C}_p$–wertiges Maß auf G_S, $X_S = \mathrm{Hom}_{\mathrm{contin}}(G_S, \mathcal{O}_p^\times)$ so definieren wir die (nichtarchimedische) Mellintransformierte $L_\mu : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p$ des Maßes μ durch $L_\mu(\chi) = \int_{GS} \chi \, d\mu \, (\chi \in X_S)$, die eine beschränkte p–adisch–analytische Funktion auf X_S ist. Für ein fixiertes $\chi_0 \in X_S$ kann man das Maß μ durch die Werte

$$L_\mu(\chi_0 \chi) = a_{\chi_0 \chi}, \quad \chi \in X_S^{\mathrm{tors}} \tag{2.4}$$

von Charakteren χ endlicher Ordnung eindeutig bestimmen, unter möglicher Ausschließung einer Anzahl von Charakteren, die mit jeder Analytizitätskomponente in (1.1) einen endlichen Durchschnitt hat, insbesondere genügt es, in (2.4) nur Charaktere χ mit S–vollständigem Führer $C(\chi)$, d.h. $S(\chi) = S$. Umgekehrt bestimmt die Familie der Zahlen $\{a_{\chi_0\chi}\}$ ein Maß μ auf G_S, so daß (2.4) gilt, dann und genau dann, wenn $a_{\chi_0\chi} \in \mathcal{O}_p$ den folgenden abstrakten Kummer'schen Kongruenzen bzgl. der Funktionenfamilie $\{\chi_0\chi\}$ genügt (vgl. [10], S. 258).

Die abstrakten Kummer'schen Kongruenzen. Sei $\{f_i\}$ eine solche Funtionenfamilie, $f_i \in \mathscr{C}(G_S, \mathcal{O}_p)$, so daß der $\mathbb{C}_p$–Vektorraum, der von $\{f_i\}$ erzeugt wird, dicht in $\mathscr{C}(G_S,\mathbb{C}_p)$ ist. Sei $\{a_i\}$ die Familie der Elemente $a_i \in \mathcal{O}_p$, dann ist die Existenz eines $\mathcal{O}_p$–wertigen Maßes mit der Bedingung $\int_{GS} f_i d\mu = a_i$ gleichbedeutend mit der Gültigkeit der folgenden Kongruenzen: für eine beliebige Wahl von Elementen $b_i \in \mathbb{C}_p$, nur endlich viele b_i ungleich Null, gilt:

$$\text{aus } \sum_i b_i f_i(y) \in p^n \mathcal{O}_p (y \in G_S) \text{ folgt } \sum b_i a_i \in p^n \mathcal{O}_p . \tag{2.5}$$

<u>Bemerkung</u>. Jedes $\mathbb{C}_p$–wertiges Maß wird zu einem $\mathcal{O}_p$–wertigen Maß nach der Multiplikation mit einer geeigneten Konstante.

<u>2.4. Beispiel</u>. Das Mazur'sche Maß und die S–adische Zeta–Funktion von Kubota—Leopoldt [4], [8], [30]. Zuerst sei $R = \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{Z}_S^\times \cap \mathbb{N}$, $c > 1$ eine natürliche Zahl. Wir identifizieren die Dirichlet–Charaktere (mit $S(\chi) \subset S$) mit den Charakteren $\chi : G_S \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ($S(\chi)$ Träger des Führers des Charakters χ.) Für jede komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$ ist eine komplexwertige Distribution μ_s auf G_S gegeben, die eindeutig durch die folgenden Bedingungen definiert ist: für alle $\chi \in \mathrm{Hom}(G_S, \overline{\mathbb{Q}}^\times)^{\mathrm{tors}}$

$$\mu_s^c(\chi) = L_{M_0}(-s,\chi)(1 - \chi^{-1}(c)c^{-1-s}) \tag{2.6}$$

wobei $M_0 = \prod_{q \in S} q$, der rechte Teil von (2.6) ist holomorph für alle $s \in \mathbb{C}$, $s = -1$ eingeschlossen. Jetzt sei s eine ganze Zahl, $s \geq 0$, so liegt die rechte Seite von (2.6) im Körper $\mathbb{Q}(\chi) \subset \mathbb{Q}^{ab} \subset \overline{\mathbb{Q}}$, erzeugt von den Werten des Charakters $\chi : G_S \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$. Deshalb erhalten wir eine Distribution mit Werten in $\overline{\mathbb{Q}}$. Man kann zeigen, daß bei der Einbettung $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ die Distribution $\mu = i_p(\mu_0^c)$ ein $\mathcal{O}_p$–Maß auf G_S definiert, hierbei gilt die folgende S–adische Gleichung

$$\mu^{c}(\chi\, x_p^{r}) = i_p(\mu_r^{c}(\chi)) \tag{2.7}$$

die die Funktionswerte der Dirichletschen L–Funktionen an verschiedenen ganzen nichtpositiven Stellen in Verbindung bringt. Der Beweis dieser Tatsache beruht auf einer Verallgemeinerung der klassischen Kummer'schen Kongruenzen [4]. Die Funktion $L : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p$,

$$L(x) = (1 - c^{-1}x(c)^{-1})^{-1} L_{\mu}c(x)$$

ist holomorph auf X_S, mit Ausnahme eines einfachen Poles im Punkt $x = x_p^{-1} \in X_S$ und im Wesentlichen mit der nichtarchimedischen Zeta–Funktion von Kubota–Leopoldt identisch [8], [30].

§ 3. Komplexwertige Distributionen auf G_S, die zu $\mathscr{D}(s,s,\chi)$ gehört.

3.1. Sei, wie in der Einleitung, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e(nz) \in \mathscr{S}_k(C,\psi)$ eine primitive Spitzenform und

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \prod_q \left[(1-\alpha(q)q^{-s})(1-\beta(q)q^{-s})\right]^{-1}$$

ihre Mellin–Transformierte. Zuerst definieren wir die Funktion

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,f_0)e(nz) = \sum_{d\mid M_0} \mu(d)\beta(d)f(dz) \tag{3.1}$$

μ ist die Möbius–Funktion, $M_0 = \prod_{q\in S} q$ und $\beta(d)$ wird bestimmt durch die Multiplikativitätsbedingung. Dann ist $f_0 \in \mathscr{S}_k(CM_0,\psi)$ und (3.1) gleichbedeutend mit der Identität, die die entsprechenden Dirichlet–Reihen verbindet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n,f_0)n^{-s} = \prod_{q\in S}(1-\beta(q)q^{-s})L(s,f)\,. \tag{3.2}$$

Die Funktion (3.1) besitzt die volle Multiplikativitätseigenschaft der Fourier–Koeffizienten bezüglich der natürlichen Zahlen M, die nur von Primzahlen aus S und Teilern der Stufe C geteilt werden:

$$a(Mn,f_0) = \alpha(M)a(n,f_0)\ . \tag{3.3}$$

Weiter setzen wir $N_0 = 4CM_0$.

<u>3.2. Hilfssatz</u>. Sei $s \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(s) >> 0$. Dann existiert eine komplexwertige Distribution auf G_S , die eindeutig bestimmt wird durch ihre Werte auf den Dirichlet–Charakteren $\chi \in \mathrm{Hom}(G_S,\overline{\mathbb{Q}}^\times)$ mit Hilfe der Gleichungen:

$$\mathscr{D}_{s,M}(\chi) = C^{(2\nu+1)/4}\ \frac{(CM_0M'\,)^{(2s-1)/4}}{\alpha\,(M_0M')}\ L_{N_0}(2s-2k+2,\bar\chi^{\,2}\psi^2)$$

$$L((s+\nu)/2,f_0\,|\,V(C)\,,\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(N_0M')) \tag{3.4}$$

wobei $f_0\,|\,V(C)(z) = f_0((z)$, $\nu = 0{,}1$, $\chi(-1) = (-1)^\nu$

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M) = 2^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}(M,n)=1} \chi(n)\,n^\nu e(n^2z)\ ,$$

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(N_0M')(z) = (-iz\,\sqrt{N_0M'})^{-(2\nu+1)/2}\theta^{(\nu)}(\chi_M)(-1/N_0M'_z)$$

und angenommen wird, daß M , M' beliebige natürliche Zahlen mit $S(M) = S(M') = S$ sind, und $M_0C(\chi)\,|\,M$, $M_0^2C(\chi)^2\,|\,M'$.

<u>Beweis</u>. Wegen (2.3) reicht es aus zu zeigen, daß der rechte Teil von (3.4) nicht von M oder M' abhängt. Die Unabhängigkeit von M folgt aus der Teilbarkeit durch alle Primzahlen $q \in S$, für die Prüfung der Unabhängigkeit von M' setzen wir

$M' = M_0^2 C(\chi)^2 M_1$ und benutzen die Gleichung $W(AB) = W(B) \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $W(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ aus der folgt, daß

$$\theta^{(\nu)}(\chi) \,|\, W(N_0 M') = M_1^{(2\nu+1)/4} g \,|\, (V(M_1) ,$$

wobei

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) e(nz) = \theta^{(\nu)}(\chi_M) \,|\, W(N_0 M_0^2 C(\chi)^2) \;, \; g \,|\, V(M_1)(z) = g(M_1 z) \,.$$

Jetzt sieht man, daß

$$L(s,f_0 \,|\, V(C), \theta^{(\nu)}(\chi_M) \,|\, W(N_0 M')) = M^{(2\nu+1)/4} L(s,f_0 \,|\, V(C), g \,|\, V(M_1))$$

$$= M^{(2\nu+1)/4} \sum_{n=1}^{\infty} a(M_1 n, f_0) b(Cn)(M_1 Cn)^{-s} = \tag{3.6}$$

$$= M^{(2\nu+1)/4-s} \, \alpha(M_1) \sum_{n=1}^{\infty} a(C^{-1} n, f_0) b(n) n^{-s}$$

und der Beweis folgt durch die Einsetzung von (3.6) in (3.4) mit s gleich $(s+\nu)/2$. Einen anderen Beweis von 3.2 erhält man auch durch die explizite Berechnung der Integrale $\mathscr{D}_{s,M}(\chi)$, wie unten angeführt.

3.3. Hilfssatz. Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\mathscr{D}_{s,M}(\chi) = (-1)^{\nu} \frac{G(\chi)}{\sqrt{C(\chi)}} \frac{C(\chi)^{(2s-1)/2}}{\alpha(C(\chi))^2} \mathscr{D}(s,f,\overline{\chi}) M(s,f,\overline{\chi}) \tag{3.7}$$

$G(\chi)$–Gauß'sche Summe,

$$M(s,f,\overline{\chi}) = (1 - \psi^2 \overline{\chi}^2(2) 2^{-2(s-k+1)}) \times$$

$$\times \prod_{q \in S \setminus S(\chi)} [(1 - \psi \overline{\chi}(q) q^{-(s-k+1)})(1 - \chi(q)\alpha(q)^{-2} q^{s-1})(1 - \overline{\chi(q)} \beta(q)^2 q^{-s}]$$

– ein endliches Euler–Produkt.

Beweis. Für die Möbius'sche Funktion gilt

$$\sum_{t \mid (n,M)} \mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (n,M) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

es folgt (für primitives $\chi \bmod C(\chi)$), daß

$$\theta(\chi_M) = 2^{-1} \sum_{(n,M)=1} \chi(n) n^{\nu} e(n^2 z) =$$

$$= \sum_{t \mid (M/C(\chi))} \mu(t) \chi(t) t^{\nu} \cdot 2^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) n^{\nu} e((nt)^2 z) =$$

$$\sum_{t\,|\,(M_1(\chi)} \mu(t)\chi(t)t^{\nu}\theta^{(\nu)}(x)\,|\,V(t^2)\,,\quad M_1(\chi) = \prod_{q\in S\setminus S(\chi)} q\,.$$

Wir benutzen jetzt die Gleichung

$$h\,|\,V(A)W(AB) = A^{-(2\gamma+1)/4}h\,|\,W(B) \tag{3.9}$$

der Aktion des Gewichts $(2\nu+1)/2$ (A,B – natürliche Zahlen) und die bekannte Formel für die Aktion von $W(4C(\chi)^2)$ auf die Theta–Reihe $\theta^{(\nu)}(\chi)$ in der χ bereits primitiv ist, siehe [25]

$$\theta^{(\nu)}(\chi)\,|\,W(4C(\chi)^2) = (-1)^{\nu}G(\chi)C(\chi)^{-1/2}\,\theta^{(\nu)}(\overline{\chi})\,. \tag{3.10}$$

Aus (3.8) – (3.10) zusammen folgt

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(N_0M') = (-1)^{\nu}\,\frac{G(\chi)}{\sqrt{C(\chi)}}\,(CM_0M'C(\chi)^{-2})^{(2\nu+1)/4}\times$$
$$\sum_{t\,|\,(M_1(\chi)} \mu(t)\chi(t)t^{\nu}\theta(\overline{\chi})\,|\,V(CM_0M'(C(\chi)t)^{-2})\,. \tag{3.11}$$

Die Gleichung (3.4) wird jetzt mit Hilfe von (3.11) umgeformt

$$\mathscr{D}_{s,M}(\chi) = C^{(2\nu+1)/4}(CM_0M')^{(2s-1)/4}\alpha(M_0M')^{-1}\times$$

$$(-1)^{\nu}G(\chi)C(\chi)^{-1/2}(CM_0M'C(\chi)^{-2})^{(2\nu+1)/4}\sum_{t\,|\,(M_1(\chi)} \mu(t)\chi(t)t^{\nu}\times \tag{3.12}$$

$$L_{N_0}(2s-2k+2,\psi^2\overline{\chi}^2)L((s+\nu)/2,f_0\,|\,V(C),\theta^{(\nu)}(\overline{\chi})\,|\,V(CM_0M'(C(\chi)t)^{-2}))\,.$$

Aus der Definition der Konvolution folgt es, daß

$$L(s,f_0\,|\,V(C),\theta^{(\nu)}(\overline{\chi})\,|\,V(CM_0M'(C(\chi)t)^{-2}))=C^{-s}L(s,f_0,\theta^{(\nu)}(\overline{\chi})\,|\,V(B)) \tag{3.13}$$

mit $B=M_0M'(C(\chi)t)^{-2}$. Jetzt berechnen wir die Eulerfaktoren jeder der Reihen in der Summe bei t in (3.12):

$$L_{N_0}(2s-2k+2,\psi^2\overline{\chi}^2)L((s+\nu)/2,f_0,\theta^{(\nu)}(\overline{\chi})\,|\,V(B))=$$

$$=L_{N_0}(2s-2k+2,\psi^2\overline{\chi}^2)\sum_{n=1}^{\infty}a(Bn^2,f_0)\overline{\chi}(n)n^{\nu}(Bn^2)^{-(s+\nu)/2}=$$

$$=\alpha(B)B^{-(s+\nu)/2}L_{N_0}(2s-2k+2,\psi^2\overline{\chi}^2)\sum_{n=1}^{\infty}a(n^2,f_0)\overline{\chi}(n)n^{-2}= \tag{3.14}$$

$$=\alpha(B)B^{-(s+\nu)/2}(1-\psi^2\overline{\chi}^2(2)2^{2(s-k+1)})\,\mathscr{D}(s,f,\overline{\chi})$$

$$\prod_{q\in S\setminus S(\chi)}(1-\overline{\chi}(q)(\alpha\beta)(q)q^{-s})(1-\overline{\chi}(q)\beta(q)^2q^{-s})\,.$$

In der Identität (3.14) haben wir die Definition (1.3) bezogen auf die Spitzenformen f und f_0 sowie die Identität

$$L_{N_0}(2s,\psi^2\overline{\chi}^2)=(1-\psi^2\overline{\chi}^2(2)2^{-2s})L_{M_0}(2s,\psi^2\overline{\chi}^2)$$

berücksichtigt.

Es bleibt, (3.14) in (3.12) einzusetzen unter Einbeziehung der Gleichung (3.13) und bezüglich t zu summieren.

§ 4. Archimedische Integraldarstellung der Distributionen

4.1. Die Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften der Distributionen $\mathscr{D}_{s,M}$ beruht auf der Verwendung der Integraldarstellung für die Konvolution $L(s,f_0,\theta^{(\nu)}(\overline{\chi}))$ nach Rankin–Reihen vom halbganzen Gewicht formuliert wird.

Seien N , λ ganze Zahlen, $N \geq 1$, $\lambda \geq 0$, $4|N$ und $\omega \bmod N$ ein gerader Dirichlet–Charakter. Dann sind folgende Eisenstein–Reihen vom halbganzen Gewicht $\lambda + (1/2)$ definiert:

$$E(z,s) = y^{s/2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \omega(d_\gamma) j_\theta(\gamma,z)^{-(2\lambda+1)} |j_\theta(\gamma,z)|^{-2s} \tag{4.1}$$

wobei $z = x + iy$ und $\gamma = \begin{bmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{bmatrix}$ ein Vertretersystem der Rechtnebenklassen von $\Gamma_0(N)$ bezüglich $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma_0(N) | c_\gamma = 0\}$ durchläuft,

$$j_\theta(\gamma,z) = \theta(\gamma z)/\theta(z) \text{ , } \theta(z) = 2^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z) \tag{4.2}$$

ist der Theta–Multiplikator von $\gamma \in \Gamma_0(4)$ (siehe [25]). Die Reihe (4.1) konvergiert absolut bei $2\lambda + 1 + 2s > 4$. Zur Erinnerung: $j_\theta(\gamma,z) = \varepsilon_d^{-1} \left[\frac{c}{d} \right] (cz + d)^{-1/2}$ für $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad d \equiv 1 \bmod 4 \\ i & \text{falls} \quad d \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

$$\left[\frac{c}{d}\right] = \begin{cases} \left[\frac{c}{|d|}\right] & \text{falls } c < 0 \text{ , } d < 0 \text{ ,} \\ \left[\frac{c}{|d|}\right] & \text{sonst,} \end{cases}$$

hierbei $\left[\frac{c}{|d|}\right]$ ist das gewöhnliche Jacobi–Symbol. Bei der Potenzierung wird der Zweig des Logarithmus wie folgt gewählt

$$v^{\alpha} = \exp(\alpha \log v) \text{ , } -\pi \le \operatorname{Im}(\log v) < \pi$$

(vgl. [25], pp. 446–448). Um die Integraldarstellung der Distributionen $\mathscr{D}_{s,M}(\chi)$, die durch (3.4) über die Konvolution

$$L((s+\nu)/2 \text{ , } f_0 | V(C) \text{ , } \theta^{(\nu)} \cdot (\chi_M) | W(N_0 M'))$$

definiert worden, benutzt man eine Variante der Rankin Methode (vgl. [26]), angewendet auf die Spitzenform

$$f_0^{\rho} | (V(C) = \sum_{d | M_0} \mu(d) \beta(d) f(dCz) \in \mathscr{S}_k(C^2 M_0, \bar{\psi})$$

vom Gewicht k und die Modulform

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M) | W(N_0 M')$$

vom halbganzen Gewicht $\nu + (1/2)$. Es bezeichne θ_c einen solchen primitiven quadratischen Charakter, so daß $\theta_c(d) = \left[\frac{c}{d}\right]$ für $c \neq 0$, $(d;4C) = 1$. Bekanntlich ist dann (siehe [25])

$$\mathscr{M}_{\lambda+(1/2)}(\Gamma_0(N),\psi)\,|\,W(N) \subset \mathscr{M}_{\lambda+(1/2)}(\Gamma_0(N),\overline{\psi}\,\theta_N)$$

$$\mathscr{M}_{\lambda+(1/2)}(\Gamma_0(N),\psi)\,|\,V(C) \subset \mathscr{M}_{\lambda+(1/2)}(\Gamma_0(NC),\psi\,\theta_N)\,.$$

Im weiteren wählen wir eine genügend große Zahl M', so daß M_0M' ein vollständiges Quadrat ist. Dann gilt

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(N_0M') =$$

$$= C^{(2\nu+1)/4}\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(4M_0M')V(C) \in \mathscr{M}_{\nu+(1/2)}(\Gamma_0(N),\overline{\chi}\theta_C)$$

wobei $N = 4CN_0M' = 4C^2M_0M'$ auch eine Quadratzahl ist.

Unter Ausnutzung der Rankin Methode wie in [26, 18] erhalten wir

<u>4.2. Hilfssatz</u>. Setzen wir $N = 4C^2M_0M'$, $\lambda = k-\nu+1$
$\omega(d) = \psi\overline{\chi}(d)\left[\frac{-1}{d}\right]^{k+\nu}\theta_C(d)$ so gilt die folgende Darstellung

$$(4\pi)^{-(s+\nu)/2}\Gamma((s+\nu)/2)\,\mathscr{D}_{s,M}(\chi_M) =$$

$$\frac{C^{(2\nu+1)/4}(CM_0M')^{(2s-1)/4}}{\alpha(M_0M')}\,L_{N_0}(2s-2k+2,\psi^2\overline{\chi}^2)\,\times \tag{4.3}$$

$$\langle f_0^{\rho}\,|\,V(C),\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,W(N_0M')E(z,s+\nu+2-2k)\rangle_{CN_0M'}$$

wobei $E(z,s) = E(z,s;\lambda + (1/2),\omega,N)$.

4.3. Wir benötigen auch die Reihen

$$E'(z,s) = (-iz\sqrt{N})^{-(2\lambda+1)/2}E(-1/Nz,s) = E(z,s)\,|\,W(N)\,, \tag{4.4}$$

$$E^*(z,s) = N^{(2s+2\lambda+1)/4}\, i^{-(2\lambda+1)/2} y^{-s/2} E'(z,s) =$$

(4.5)

$$\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty} \omega(d)\left[\frac{-Nb}{d}\right] \varepsilon_d^{2\lambda+1}(dz+b)^{-(2\lambda+1)/2}\,|\,dz+b\,|^{-s}$$

und bemerken, daß (4.5) nur von ω und nicht von N abhängt, deshalb N ein Quadrat ist.

<u>4.4. Anwendung des Spuroperators</u>. Für (nicht unbedingt holomorphe) Modulformen F vom Gewicht k bezüglich $\Gamma_0(CN_0M')$ mit Dirichlet–Charakter $\psi \bmod M_0$ definieren wir den Spuroperator

$$F\,|\,Tr_{CN_0}^{CN_0M'} = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(CN_0M')\backslash\Gamma_0(CN_0)} F\,|\,\gamma = \sum_{u \bmod M'} F\,|\left[\begin{matrix}1 & 0\\ CN_0u & 1\end{matrix}\right]. \tag{4.6}$$

Dann wird das Skalarprodukt aus (4.3) umgeformt zu

$$\langle f_0^\rho | V(C), \theta^{(\nu)}(\chi_M) | W(N_0M')E(z,s+\nu+2-2k) \rangle_{CN_0M'} =$$
$$\langle f_0^\rho | V(C), F | \mathrm{Tr}_{CN_0}^{CN_0M'} \rangle_{CN_0} \tag{4.7}$$

wobei $F(z) = \theta^{(\nu)}(\chi_M) | W(N_0M')(z)E(z,s+\nu+2-2k)$. Wir wenden jetzt die Formel (siehe [16], [18]):

$$F | \mathrm{Tr}_{CN_0}^{CN_0M'} = (M')^{1-k/2} F | W(CN_0M')U(M')W(CN_0) \tag{4.8}$$

für die Aktion vom Gewicht k an, wobei

$$F | U(M') = (M')^{1-k/2} \sum_{u \bmod M'} F|_k \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & M' \end{bmatrix}$$

und die Aktion von $U(M')$ auf die Fourier–Entwicklung durch die folgende Formel gegeben wird: für $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n;y)e(nx)$ gilt

$$F | U(M') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(M'n; \frac{y}{M'})e(nx) .$$

Aus der Definition der Aktion von $W(A)$ folgt, daß

$$\theta^{(\nu)}(\chi_M) | W(N_0M')W(CN_0M') = (-1)^\nu C^{-(2\nu+1)/4} \theta^{(\nu)} | (\chi_M) | V(C) . \tag{4.9}$$

Verbindet man (4.7) – (4.9), so erhält man die folgende, für arithmetische Anwendungen angenehmere Formel für die Distributionen

$$(4\pi)^{-(s+\nu)/2}\Gamma((s+\nu)/2)\mathscr{D}_{s,M}(\chi_M) =$$

$$(-1)^{\nu}(M')^{1-k/2}\frac{(CM_0M')^{(2s-1)/4}}{\alpha(M_0M')}L_{N_0}(2s-2k+2,\bar{\chi}^2\psi^2)\times \tag{4.10}$$

$$\times\langle f_0^{\rho}\,|\,V(C),[\theta^{(\nu)}(\chi_M)\,|\,V(C)\cdot E(z,s+\nu+2-2k)\,|\,W(CN_0M')]\,|\,U(M')W(CN_0)\rangle_{CN_0}\,.$$

Jetzt wird, ausgehend von (4.10), die normalisierte Distribution definiert, die algebraische Werte an speziellen ganzen Stellen des kritischen Streifens annimmt.

Definition der normalisierten Eisenstein–Reihen:

$$G(z,s) = G(z,s;(2\lambda+1)/2,\omega) =$$

$$N^{(2s+2\lambda+1)/4}\,\tilde{\Gamma}(s,\lambda)L_N(2s+2\lambda,\omega^2)E(z,s)\,|\,W(N) = \tag{4.11}$$

$$i^{2\lambda+1}(2\pi)^{-(2s+2\lambda+1)/2}\Gamma((s+2\lambda+1)L_N(2s+2\lambda,\omega^2)(4\pi y)^{s/2}E^*(z,s)$$

wobei

$$\tilde{\Gamma}(s,\lambda) = (2\pi)^{-(2s+2\lambda+1)/2}(4\pi)^{s/2}\Gamma((s+2\lambda+1)/2) \tag{4.12}$$

den normalisierenden Γ–Faktor bezeichnet, dessen Herkunft durch die in § 5 angeführten Formeln für die Fourierkoeffizienten von Eisenstein–Reihen erklärt wird.

Wir setzen

$$\langle f,f \rangle_C \mathscr{D}^{-}_{s,M}(\chi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\,\mathscr{D}_{s,M}(\chi) =$$

$$= (4\pi)^{-(s+\nu)/2}\Gamma((s+\nu)/2)\,\mathscr{D}_{s,M}(\chi) \times \tag{4.13}$$

$$\times\, 2^{2k-3+(2s-2k+3)/2}\,\tilde{\Gamma}(s+\nu+2-2k,k-\nu-1)\,,$$

$$\mathscr{D}^{+}_{s,M}(\chi_M) = \frac{2i^{-\delta}\Gamma(s-k+1)\Gamma(s)}{(2\pi)^{2s-k+1}} \cos\frac{\pi(s-k+\delta)}{2} \times$$

$$\times\, \mathscr{D}_{s,M}(\chi_M)\langle f,f \rangle_C^{-1} \tag{4.14}$$

wobei $\delta = 0,1$, $(-1)^{\delta} = (-1)^{k-\nu}$ (vgl. mit den Definitionen (1.8), (1.9)). In der zweiten Identität (4.13) wurde die Formel der Verdopplung der Γ–Funktion beachtet:

$$\Gamma((s+\nu)/2)\Gamma((s-\nu+1)/2) = \Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,.$$

Sei, wie in (4.3), $\lambda = k-\nu-1$,

$$N = CN_0M' = 4C^2M_0M'\,,\quad \omega(d) = \psi\bar{\chi}(d)\left[\frac{-1}{d}\right]^{k+\nu}.$$

<u>4.5. Satz</u>. Für die normalisierten Distributionen gilt die folgende Integraldarstellung:

$$\langle f,f \rangle_C \mathscr{D}^+_{s,M}(\chi) = \frac{2i^{-\delta}\Gamma(s-k+1)}{(2\pi)^{s-k+1}} \cos \frac{\pi(s-k+\delta)}{2} \, C^{-(2s-2k+3)/4}\gamma(M') \times$$

$$\times \langle f_0^{\rho} | V(C), [\theta^{(\nu)}\chi_M) | V(C)G(z,s+\nu+2-2k)] \,|\, U(M')W(CN_0)\rangle_{CN_0}$$

$$\langle f,f \rangle_C \mathscr{D}^-_{s,M}(\chi) = C^{-(2s-2k+3)/4}\gamma(M') \times$$

$$\times \langle f_0^{\rho} | V(C), [\theta^{(\nu)}\chi_M) | V(C)G(z,s+\nu+2-2k)] \,|\, U(M')W(CN_0)\rangle_{CN_0}$$

wobei

$$\gamma(M') = (-1)^{\nu} 2^{2k-3} (M_0C)^{k/2-1} C^{(2\nu+1)/4} \alpha(M_0M')^{-1} . \qquad (4.15)$$

Der Beweis folgt aus den Definitionen (4.11) – (4.13) und der Formel (4.10).

§ 5. Algebraizitätseigenschaften der Werte der normalisierten Distributionen

5.1. Die Eigenschaften der Algebraizität der Werte der normalisierten Distributionen $\mathscr{D}^{+}_{s,M}$, $\mathscr{D}^{-}_{s,M}$ werden aus der Integraldarstellung (Satz 4.5) auf folgende Weise hergeleitet: Ausgehend von der Fourier–Entwicklung der normalisierten Eisenstein–Reihen $G(z,s)$ und unter Verwendung des holomorphen Projektionsoperator [5], [28] zeigen wir, daß

$$\mathscr{D}^{+}_{s,M}(\chi) = \gamma(M')\,\frac{\langle f_0^{\rho} \,|\, V(C), V^{+}(z, s, \chi) \,|\, W(CN_0)\rangle_{CN_0}}{\langle f, f\rangle_C} \tag{5.1}$$

bei ganzem s, $k \leq s \leq 2k-2$, $\psi^2\bar{\chi}^2 \neq 1$ falls $s = k$,

$$\mathscr{D}^{-}_{s,M}(\chi) = \gamma(M')\,\frac{\langle f_0^{\rho} \,|\, V(C), V^{-}(z, s, \chi) \,|\, W(CN_0)\rangle_{CN_0}}{\langle f, f\rangle_C} \tag{5.2}$$

bei ganzem s, $k \leq s \leq k-1$, $\psi^2\bar{\chi}^2 \neq 1$ falls $s = k-1$ wobei

$$V^{+}(z,s,\chi),\ V^{-}(z,s,\chi) \in \mathscr{M}_k(CN_0, \bar{\psi})$$

Modulformen mit algebraischen Fourier–Koeffizienten (genauer: mit Koeffizienten aus Q^{ab}, dem maximalen Kreisteilungskörper), die wir explizit ausrechnen, und $\gamma(M')$ ist durch (4.15) gegeben.

Für eine präzisere Formulierung des Resultates erinnern wir an die Ergebnisse Shimuras [26] über die Fourier–Entwicklung von Eisenstein–Reihen von halbzahligen Gewicht angewendet auf die normalisierten Reihen $G(z,s)$. Diese Entwicklung wird mit

Hilfe von Whittakerschen Funktion $W(y,\alpha,\beta)$ gegeben. Sie ist definiert für $y > 0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ durch

$$W(y,\alpha,\beta) = \Gamma(\beta)^{-1} \int_0^\infty (u+1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} e^{-yu} du \tag{5.3}$$

falls $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, und kann mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$W(y,\alpha,\beta) = y^{1-\alpha-\beta} W(y,1-\beta,1-\alpha) \tag{5.4}$$

zu einer holomorphen Funktion auf der ganzen β–Ebene erweitert werden. Danach benötigt man auch die folgende Formel (für $\beta = -r$, r eine nichtnegative ganze Zahl):

$$W(y,\alpha,-r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-i)} y^{r-i} \tag{5.5}$$

5.2. Satz. Seien wie i, 4.4 N, λ ganze Zahlen, $N \geq 1$, $\lambda \geq 0$, $4 \mid N$ and $\omega \bmod N$ ein gerader Dirichlet–Charakter. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &G(z,s) = \\ &(4\pi y)^{s/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n,s+\lambda,w) w_n(y,(s+2\lambda+1)/2,s/2) e(nx) \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei die Funktionen $w_n(y,\alpha,\beta)$ definiert werden durch

$$w_n(y,\alpha,\beta) = \begin{cases} n^{\alpha+\beta-1}e^{-2\pi ny}W(4\pi ny,\alpha,\beta) & \text{für } n > 0 , \\ |n|^{\alpha+\beta-1}e^{-2\pi|n|y}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}W(4\pi|n|y,\beta,\alpha) & \text{für } n < 0 , \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\beta)}(4\pi y)^{1-\alpha-\beta} & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

die Koeffizienten $g(n,s)$ werden auf folgende Weise durch die Dirichlet–L–Funktionen bestimmt: Für die Zerlegung $n = tm^2 \in \mathbb{Z}$, t quadratfrei) gibt es primitive Dirichlet–Charaktere ω_n mit der Bedingung

$$\omega_n(a) = \left[\frac{-1}{a}\right]^\lambda \left[\frac{tN}{a}\right] \omega(a) \text{ falls } (a,N) = 1$$

dann gilt für $n \neq 0$

$$g(n,s,\omega) = L_N(s,\omega_n)\beta(n,s,\omega) \tag{5.7}$$

wobei

$$\beta(n,s,\omega) = \sum_{a,b}^{*} \mu(a)\omega_n(a)\omega^2(b)a^{-s}b^{1-2s}$$

eine endliche Sumem ist $a,b > 0$ durchlaufen alle Paare natürlicher Zahlen mit $ab|m$, $(a,N) = (b,N) = 1$ und für $n = 0$

$$g(0,s,\omega) = L_N(2s-1,\omega^2) \tag{5.8}$$

Beweis. Bis auf eine kleine Modifikation der Bezeichnungen ist der Satz identisch mit

Proposition 1 aus [26]: unser $\beta(n,s+\lambda,\omega)$ entspricht $\beta(n,s)$ bei Shimura. Jetzt spezialisieren wir Satz 5.2 auf den Fall jener ganzen Werte von s bei denen die Fourier–Entwicklung nur Glieder mit nichtnegativem Index enthält.

5.3. Satz. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.2. gilt die folgende Entwicklung:
(a) bei ganzem s mit $s+\lambda > 0$, $s \leq 0$

$$G^+(z,s) = \frac{2i^\delta \Gamma(s+\lambda)\cos(\pi(s+\lambda-\delta)/2)}{(2\pi)^{s+\lambda}} G(z,s) =$$

$$(4\pi y)^{s/2} \sum_{n=1}^{\infty} g^+(n,s+\lambda,\omega) n^{(2s+2\lambda-1)/2} W(4\pi ny, \tfrac{s+2\lambda+1}{2}, \tfrac{s}{2}) e(nz) \tag{5.9}$$

b) bei ganzem s mit $s+\lambda \leq 0$, $s+2\lambda+1 > 0$

$$G^-(z,s) = G(z,s) =$$

$$(4\pi y)^{(1-s-2\lambda)/2} \left[\frac{\Gamma((2s+2\lambda-1)/2}{\Gamma(s/2)} g^-(0,s+\lambda,\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g^-(n,s+\lambda,\omega) W(4\pi ny, \tfrac{2-s}{2}, \tfrac{1-s-2\lambda}{2}) e(nz) \right] \tag{5.10}$$

wobei $\delta = 0,1$, $\delta \equiv \lambda (\mathrm{mod}\ 2)$ falls $n \neq 0$

$$g^+(n,s,\omega) = \frac{2i^\delta \Gamma(s)\cos(\pi(s-\delta)/2)}{(2\pi)^s} \times$$

$$\times L_N(s,\omega_n) \beta(n,s,\omega) , \tag{5.11}$$

$$g^{-}(n,s,\omega) = L_N(s,\omega_n)\beta(n,s,\omega) ,$$
$$g^{-}(0,s,\omega) = L_N(2s-1,\omega^2)$$

Beweis. Im Fall a) verschwinden alle Glieder mit nichtpositiven Koeffizienten n wegen des Faktors $\Gamma(\frac{s}{2})^{-1}$ in (5.6) unter der Bedingung, daß s gerade ist. Hierbei ist der Fall eingeschlossen, wenn $s+\lambda = 1$ und die Funktionen $L_N(s+\lambda,\omega_n)$ und $L_N(2s+2\lambda-1,\omega^2)$ einen einfachen Pol besitzen können, falls $\omega^2 = 1$, weil im letzteren Fall der normierende Faktor

$$\frac{2i^{\delta}\Gamma(s+\lambda)\cos(\pi(s+\lambda-\delta)/2)}{(2\pi)^{s+\lambda}}$$

Null wird. Falls s ungerade ist, so sind im Falle a) wieder alle Fourier–Koeffizienten gleich Ull, aufgrund des normalisierenden Faktors.

Im Fall b) sind einige spezielle Werte der Dirichlet–L–Funktionen gleich Null: $L(s+\lambda,\omega_n) = 0$ bei $n < 0$ und ungeradem s wegen der Geradheitsbedingung für ω_n . In diesem Fall ist $\omega_n(-1) = (-1)^{\lambda+1}$, und gleichzeitig ist die Funktion $w_n(y,(s+2\lambda+1)/2,s/2)$ in (5.6) regulär bei diesen Werten n wegen der Bedingung $s+2\lambda+1 > 0$. Falls im Falll b) s gerade ist, so verschwinden die Glieder mit positivem Index aus dem gleichen Grund, ebenso auch alle übrigen Summanden wiedr wegen des Faktors $\Gamma(\frac{s}{2})^{-1}$ aus (5.6).

Es sei bemerkt, daß der Koeffizient bei $n = 0$ sich mit (5.8) finden läßt. Im Fall b) für ungerade Werte s erhält man aus Satz 5.2 durch Anwendung der Funktionalgleichung (5.4) der Whittaker–Funktion.

Jetzt spezialisieren wir die Integraldarstellungen aus Satz 4.5 auf den Fall s ganz, $0 < s < 2k-1$, unter Berücksichtigung der Fourier–Entwicklungen aus Satz 5.3, wobei man jetzt setzt: $N = CN_0M'$, $N_0 = 4M_0C$, s gleich $s + \nu + 2-2k$, $\lambda = k-\nu-1$, so daß wir anstelle von $s+\lambda$ $s-k+1$ schreiben, anstelle von $s+2\lambda+1$ $s-\nu+1$ und anstelle von $2s+2\lambda+1$ $2s+3-2k$, und statt des Charakters $\omega_n(d)$ haben wir $\omega_n\overline{\chi}(d)$, wobei $\omega_n(d) = \left[\frac{-Ct}{d}\right] \psi(d)$, $n = tm^2$ (t quadratfrei).

5.4. Satz. Bei ganzem s, $0 < s < 2k-1$ gelten die folgenden Integraldarstellungen

a) falls $k \leq s \leq 2k-2$ so

$$\mathscr{D}^{+}_{s,M}(\chi) = \lambda(M')<f,f>_C^{-1} \times$$
$$\times <f_0^{\rho} \,|\, V(C), F^{+}(z,s,\chi) \,|\, U(M')W(CN_0)>_{CN_0} \tag{5.12}$$

b) falls $1 \leq s \leq k-1$ so

$$\mathscr{D}^{-}_{s,M}(\chi) = \lambda(M')<f,f>_C^{-1} \times$$
$$\times <f_0^{\rho} \,|\, V(c), F^{-}(z,s,\chi) \,|\, U(M')W(CN_0)>_{CN_0} \tag{5.13}$$

wobei

$$F^{+}(z,s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} v^{+}(n,s,x)e(nz) ,$$

$$F^{-}(z,s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} v^{-}(n,s,x)e(nz)$$

Modulformen aus $\mathscr{M}_k(CN_0M',\overline{\psi})$ deren Koeffizienten gegeben werden durch

$$v^+(n,s,\chi) = C^{-(2s+3-2k)/4} \times$$

$$\sum_{\substack{Cn_1^2+n_2 = n \\ n_1, n_2 > 0}} \chi_M(n_1) n_1^\nu n_2^{(2s-2k+3)/2} P^+(n_2,n) g^+(n_2, s-k+1, \omega_{n_2}\overline{\chi}) \,, \tag{5.14}$$

$$v^-(n,s,\chi) = C^{-(2s-2k+3)/4}$$

$$\sum_{\substack{Cn_1^2+n_2 = n \\ n_1, n_2 > 0}} \chi_M(n_1) n_1^\nu P^-(n_2,n) g^-(n_2, s-k+1, \omega_{n_2}\overline{\chi}) +$$

$$+ \delta\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right] \chi_M\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right] \left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right]^\nu n^{(s-1-\nu)/2} \times \tag{5.15}$$

$$g^-(0, s-k+1, \omega_1\overline{\chi}) \frac{\Gamma((2s-2k+1)/2)\Gamma(k-(s-\nu-1)/2)}{\Gamma((s+\nu)/2+1-k)\Gamma(k-1)}$$

wobei $P^+(x,y)$, $P^-(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y]$ Polynome mit rationalen Koeffizienten sind, die nur von s,k,ν abhängen, und deren Nenner nur Potenzen von 2 enthalten. Die Funktionen $g^+(n,s,\chi)$, $g^-(n,s,\chi)$ werden durch die Gleichung (5.11) definiert. Hierbei ist in (5.15) $\delta(x) = 1$ oder 0 je nachdem, ob x ganz ist oder nicht und der Faktor $\gamma(M')$ in (5.12) ist durch (4.15) gegeben.

Im Verlauf des Beweises wird ebenso gezeigt, daß

$$P^+(x,y) = x^{k-1-(s+\nu)/2} + y\, Q^+(x,y) \tag{5.16}$$

$$P^-(x,y) = x^{(s-1-\nu)/2} + y\, Q^-(x,y) \tag{5.17}$$

für gewisse Polynome $Q^{+}(x,y)$, $Q^{-}(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y]$.

5.5. Der Operator der holomorphen Projektion. Zuerst beschreiben wir den Vektorraum, in dem dieser Operator agiert. Eine Funktion $F : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $F \in C^{\infty}(H)$ heiße C^{∞}–Modulform vom Gewicht k bezgl. der Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit dem Dirichlet–Charakter $\psi \bmod N$, wenn die Bedingung

$$F\left[\frac{az+b}{cz+d}\right] = \psi(d)(cz+d)^k F(z)$$

für alle $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$ erfüllt wird. Den Raum solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$. Analog, sei $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma(N))$ der Raum der C^{∞}–Modulformen vom Gewicht k bzgl. der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$. Für alle $F \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$ gilt die Fourier–Entwicklung

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A(y,n)e(nx) \tag{5.18}$$

und für $F \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma(N))$ hat die analoge Entwicklung die Gestalt

$$F(z) = \sum_{n \in N^{-1}\mathbb{Z}} A(y,n)e(nx) \tag{5.18a}$$

wobei $A(y,n)$ C^{∞}–Funktionen auf $Y = R_+$ sind. Das Peterssonsche Skalarprodukt für eine beliebige holomorphe Spitzenform $f \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$ und $F \in \widetilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$ ist durch die Formel

$$<f,F>_N = \int_{H/\Gamma_0(N)} \overline{f(z)}\, F(z) y^{k-2} dxdy$$

gegeben.

Wir nennen $F \in \mathscr{N}_k(\Gamma(N))$ eine Funktion vom beschränkten Wachstum, wenn für alle $\epsilon > 0$

$$\int_0^N \int_0^\infty |F(z)| y^{k-2} e^{-\epsilon y} dydx < \infty \tag{5.19}$$

absolut konvergiert.

Dementsprechend ist $F \in \mathscr{N}_k(\Gamma(N))$ vom gemäßigten Waxhstum, wenn für alle $z \in H$ und bei hinreichend großem $\mathrm{Re}(s) >> 0$ das Integral $(w = u+iv,\ v > 0)$

$$\int_H F(w)(\overline{w}-z)^{-k-|2s|} \mathrm{Im}(w)^{k+s-2} dudv \tag{5.19a}$$

absolut konvergiert und eine analytische Fortsetzung nach $s = 0$ gestattet.

In (5.19a) wurde die Bezeichnung $w^{-k-|2s|} = w^{-k}|w|^{-2s}$ verwendet. Diese Definition kann von der traditionellen abweichen, das wird motiviert durch das weiter unten angeführte Resultat, das das Theorem 1 der Arbeit von J. Sturm [28] sowie den Satz 5.1. des Artikels von B. Gross und Don Zagier [5] präzisiert. Aus dem Beweis wird sich ergeben, daß Funktionen vom beschränkten Wachstum bereits automatish vom gemäßigten Wachstum im Sinne der vorgeschlagenen Definitionen sind.

5.6. Satz. Sei $F \in \mathscr{N}_k(N,\psi)$, $k \geq 2$. Setzen wir für $n > 0$

$$a(n) = \frac{(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \int_0^\infty A(y,n) e^{-2\pi n y} y^{k-2} dy \tag{5.20}$$

wo $A(y,n)$ die Koeffizienten der Entwicklung (5.18) sind. Nehmen wir an, die Integrale in (5.20) konvergieren absolut. Definieren wir die Funktion

$$\mathcal{H}ol\, F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e(nz) \tag{5.20a}$$

Dann gilt

a) Wenn $F \in \tilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$ vom beschränkten Wachstum (siehe (5.19)), ist, so $\mathcal{H}ol\, F \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$.

b) Wenn $F \in \tilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$ und für alle $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\epsilon > 0$ die Bedingung

$$(F|_k\gamma)(z) = \mathcal{O}(y^{-\epsilon}) \text{ für } y = \mathrm{Im}(z) \longrightarrow \infty$$

erfüllt ist, so $\mathcal{H}ol\, F \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$

c) Wenn die Fourier–Entwicklung (5.18) der Funktion $F \in \tilde{\mathcal{M}}_k(N,\psi)$ nur Glieder mit positiven $n > 0$ enthält und für alle $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ die Funktion $(F|_k\gamma)(z) \in \tilde{\mathcal{M}}_k(\Gamma(N))$ eine Funktion vom gemäßigten Wachstum ist (siehe (5.19a)), so

$$\mathcal{H}ol\, F \in \mathcal{M}_k(N,\psi)$$

Unter den Bedingungen von a), b) und c) gilt für alle $g \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$ die Identität

$$\langle g,F\rangle_N = \langle g, \mathcal{H}ol\, F\rangle_N \tag{5.21}$$

Bemerkung. Die Identität (5.21) bestimmt die Spitzenform $\mathcal{H}al(F)$ eindeutig in den Fällen a) und b), aber nicht im Fall c), da die Gleichung (5.21) sich nicht ändert, wenn man zu g eine Eisensteinreihe aus $\mathcal{M}_k(N,\psi)$ addiert.

Teil a) des Theorems 5.6 ist im Artikel von Sturm [28] enthalten, Teil b) – im Artikel von Gross – Zagier [5], deshalb führen wir nur den Beweis von c) nur diesen Teil benötigen wir im Folgenden. Unser Beweis basiert auf der Verwendung von Poincaré–Reihen in zwei Veränderlichen, die von Böcherer [3] und Klingen [9] in großer Allgemeinheit betrachtet wurden.

5.7. Poincaré–Reihen in zwei Veränderlichen. Betrachten wir die Doppelnebenklasse $(\Gamma g \Gamma)$, wo $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $g \in \Delta = \Delta_0(N)$,

$$\Delta_0(N) = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2^+(\mathbb{Q}) \mid N \mid c, (a,N) = 1 \right\}$$

Für $z,w \in H$ setzen wir

$$P^k(z,w,g,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma g \Gamma} \psi(a) j(\gamma,z)^{-k-|2s|} (\gamma(z)+w)^{-k-|2s|} \tag{5.22}$$

die Summierung erfolgt über alle $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma g \Gamma$ wobei die Reihe (5.22) absolut und gleichmäßig auf $H(d) \times H(d)$ für $k + \mathrm{Re}(s) > 3$, $d > 0$;

$$H(d) = \{z = x+iy \in H \mid y \geq d, x^2 \leq 1/d\}$$

konvergiert.

Sei außerdem

$$\mathscr{P}^k(z,w,g,s) = \mathrm{Im}(z)^s \mathrm{Im}(w)^s P^k(z,w,g,s) \tag{5.22a}$$

Es gelten folgende Eigenschaften der Reihen $\mathscr{P}^k(z,w,g,z)$

a) Symmetrie

$$\mathscr{P}^k(z,w,g,s) = \mathscr{P}^k(w,z,g,s) \tag{5.23}$$

b) Automorphie nach zwei Argumenten

$$\begin{aligned} &\mathscr{P}^k(\gamma_1(z),\gamma_2(w),g,s) = \\ &\psi(d_1)\psi(d_2)j(\gamma_1,z)^k j(\gamma_2,w)^k \mathscr{P}^k(z,w,g,s) \end{aligned} \tag{5.24}$$

wobei $\gamma_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \in \Gamma$, $i = 1,2$

c) Die Integralformel: für alle $f \in \mathscr{S}_k(N,\psi)$ gilt die Identität

$$< \mathscr{P}^k(-\bar{z},w,g,s),f(w)>_{N,w} = \mu(k,s)f|_k(\Gamma_g\Gamma)(z) \tag{5.25}$$

wo

$$\mu(k,s) = 2^{3-2s-k} i^{-k} \pi(k+s-1)^{-1}$$

Der Beweis von a) folgt aus der Symmetriebeziehung

$$j(\gamma,z)(\gamma(z)+w) = j(\tilde{\gamma},w)(\tilde{\gamma}(w)+z) ,$$

die für alle $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ (hierbei $\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$ und $\Gamma g \Gamma = \Gamma \tilde{g} \Gamma$ bei $g \in \Delta$) gültig ist. Dann wird (5.24) unmittelbar aus der Definition hergeleitet. Der Beweis der Integralformel (5.25) geht zurück auf den Fall $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (siehe [3]). Dabei entfaltet sich die Integration auf der linken Seite von 5.25 vom Fundamentalbereich $\Phi_0(N)$ der Gruppe $\Gamma_0(N)$ auf die ganze obere Halbebene:

$$H = \bigcup_{\gamma} \gamma(\Phi_0(N)), \quad \gamma \in \Gamma = \Gamma_0(N)$$

Das Verlangte folgt jetzt aus der Integraldarstellung

$$\int_H f(w)(\overline{w}-z)^{-k-|2s|} \, IM(w)^{k+s-2} du dv =$$

$$i^k 2^{2-2s-k} I(k+s-2) f(z) \mathrm{Im}(z)^{-s}, \tag{5.26}$$

$$I(s) = \int_{|w| \leq 1} (1-|w|^2)^s du dv = \frac{\pi}{s+1} \tag{5.27}$$

($w = u+iv$, $v > 0$, das Integral in (5.27) konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > -1$; dabei ergibt sich die Integraldarstellung (5.26) aus der Integralformel von Cauchy durch die Anwendung der Caley–Transformation $w \longmapsto \frac{w-i}{w+i}$ die die obere Halbebene H in den Einheitskreis überführt).

5.8. Die Herleitung des Satzes 5.6 aus den Eigenschaften der Poincaré–Reihen. Wir setzen in den Formeln (5.24) und (5.25) $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und definieren

$$K^k(z,w,s) = \mu(k,s)^{-1} \wp^k(-\bar{z},w,1_2,s)$$

Unter den Bedingungen des Punktes c) des Satzes 5.6 zeigen wir, daß die Funktion

$$\mathcal{H}\!\mathit{ol}F(z) = \langle K^k(z,w,s), F(w)\rangle_{N,w}\Big|_{s=0} \tag{5.28}$$

die durch die analytische Fortsetzung der rechten Seite in den Punkt $s = 0$ erhalten wurde, allen Forderungen des Satzes 5.6 genügt, d.h. $\mathcal{H}\!\mathit{ol}F$ stimmt mit der Funktion, die in (5.20) und (5.20a) definiert wurde, überein. Dabei gelten $\mathcal{H}\!\mathit{ol}F \in \mathcal{M}_k(N,\psi)$ und die Identität (5.21). Dazu bemerken wir, daß – wie im Beweis – für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$ die rechte Seite von (5.28) als Integral über die gesamte obere Halbebene darstellbar ist:

$$\begin{gathered}\langle K^k(z,w,s), F(w)\rangle_{N,w} = \mu(k,s)^{-1}\mathrm{Im}(z)^s \times \\ \int_H (w)(\overline{w}-z)^{-k-|2s|}\,\mathrm{Im}(w)^{k+s-2}du\,dv\end{gathered} \tag{5.29}$$

Die Veränderung der Reihenfolge der Summation und Integration ist für $\mathrm{Re}(s) >> 0$ begründet, aufgrund der Voraussetzung des gemäßigten Wachstums der Funktion (siehe (5.19a)). Betrachten wir die Untergruppe

$$\Gamma_\infty = \left\{\gamma = \pm \begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} \mid \gamma \in \Gamma\right\} \subset \Gamma$$

Dann ist die Menge $\{w = u+iv \in H \mid 0 \le u \le 1,\ v > 0\}$ ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ_∞ auf H und wir erhalten, daß für $\mathrm{Re}(s) >> 0$ die rechte Seite von (5.29) die Gestalt annimmt:

$$2\mu(k,s)^{-1}\mathrm{Im}(z)^{-s}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^\infty F(w)\sum_{b\in\mathbb{Z}}(\overline{w}-z+b)^{-k-|2s|}\mathrm{Im}(w)^{k+s-2}dudv \tag{5.30}$$

$$2\mu(k,s)^{-1}\mathrm{Im}(z)^{-s}\times$$

$$\int_0^1\int_0^\infty F(w)S(\overline{w}-z;k+s,s)\mathrm{Im}(w)^{k+s-2}dudv$$

wo

$$S(z;k+s,s)=\sum_{b\in\mathbb{Z}}(z+b)^{-k-|2s|}$$

eine Funktion ist, die die analytische Fortsetzung auf alle $s\in\mathbb{C}$ gestattet, hierbei gilt für $k\geq 2$

$$S(\overline{w}-z;k+s,s)\Big|_{s=0}=$$

$$(-2\pi i)^k\Gamma(k)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e(n(z-\overline{w})) \tag{5.31}$$

Unter der Voraussetzung über das gemäßigte Wachstum der Funktion F gestattet das Integral (5.29) eine analytische Fortsetzung nach $s=0$. Da $n>0$ für die Koeffizienten $A(y,n)$ gilt, können wir das Ergebnis dieser Fortsetzung in der Form der Fourier–Entwicklung mit Hilfe von (5.30) und (5.31) gewinnen. Wir erhalten:

$$\mathcal{H}ol F(z)=(4\pi)^{k-1}\Gamma(k-1)^{-1}\times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \int_0^1 \int_0^{\infty} F(w)e(n(z-\overline{w}))\mathrm{Im}\, w^{k-2} du dv$$

und die Formel (5.20) erfolgt aus der Identität

$$\int_0^1 \int_0^{\infty} F(w)e(n(z-\overline{w}))\mathrm{Im}\, w^{k-2} du dv =$$

$$e(nZ) \int_0^{\infty} A(v,n)e(inv)v^{k-2} dv$$

Zum Beweis der übrigen Behauptungen über die Funktion $\mathcal{H}\!\mathit{al}F$ bemerken wir, daß die Funktion, die mit (5.20) definiert wurde, holomorph ist und den Eigenschaften der Automorphie bzgl. $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht j mit dem Dirichlet–Charakter $\psi \bmod N$ genügt. In der Tat, diesen Eigenschaften genügt die Funktion $K^k(z,w,s)$ und folglich auch (5.28) für $\mathrm{Re}(s) >> 0$. Aber die Identität, die die Automorphieeigenschaft ausdrückt, bleibt bei der analytischen Fortsetzung bzgl. s erhalten, und wir bekommen $\mathcal{H}\!\mathit{al}(F) \in \mathcal{M}_k(N,\psi)$. Zum Nachweis der Regularität von $\mathcal{H}\!\mathit{al}F$ in den Spitzen wird eine analoge Überlegung auf alle Funktionen der Gestalt $F|_k\gamma$ für $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ angewendet, die nach der Voraussetzung von c) ein gemäßigtes Wachstum haben. Zum Beweis der Identität (5.21) verwenden wir die Eigenschaft (5.25) der Poincaré–Reihen, aus der folgt, daß für $\mathrm{Re}(s) >> 0$ die Gleichungen gelten: für $g \in \mathcal{S}_k(N,\psi)$

$$<g,<K^k(z,w,s), F(w)>_{N,w}>_{N,z} =$$

$$<<K^k(z,w,s), g(z)>_{N,z}, F(w)>_{N,w} = <g,F>_N$$

Diese Gleichungen erhält man durch Vertauschung der Reihenfolge der Integration, das ist aufgrund der absoluten Konvergenz der Integrale möglich, unter der Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaft (5.23), die die Gestalt

$$\overline{K^k(z,w,s)} = K^k(w,z,\bar{s})$$

annimmt. Hiermit ist der Satz 5.6 bewiesen.

Wir verwenden die Formel (5.20) des Satzes 5.6 in der speziellen Situation, so wie sie im Folgenden beschrieben wird.

5.9. Satz. Sei die C^∞–Modulform $F \in \tilde{\mathscr{M}}_k(N,\psi)$ von der Gestalt $F(z) = g(z)\, G(z)$, wo

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e(nz)\,,$$

$$G(z) = (4\pi y)^{-r}\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, W(4\pi ny,\alpha,-r)e(nz)\right]$$

wobei $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ und r eine nichtnegative ganze Zahl ist, $r \leq k-2$.

Wenn F einer der Bedingungen a), b) oder c) des Satzes 5.6 genügt, so

$$\mathscr{H}ol\, F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)e(nZ) \in \mathscr{M}_k(N,\psi)\,, \tag{5.32}$$

wo

$$A(n) = \frac{\Gamma(k-1-r)}{\Gamma(k-r)} B_n C_0 + \sum_{\substack{n = n_1+n_2 \\ n_1, n_2 > 0}} B_{n_1} C_{n_2} P(n_2,n) e(nz) ,$$

und

$$P(x,y) = P(x,y;k,\alpha,-r) =$$
$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-j)} \frac{\Gamma(k-j-1)}{\Gamma(k-1)} x^{r-j} y^j =$$
$$x^r + y\, Q(x,y)$$

ein Polynom, dessen Koeffizienten rational sind, wenn $\alpha \in Q : P(x,y), Q(x,y) \in Q[x,y]$. Der Beweis des Satzes 5.9 erfolgt durch die Anwendung der Formel (5.20) auf die Fourier–Koeffizienten von F

$$A(y,n) = (4\pi y)^{-r} B_n C_0 + \tag{5.33}$$
$$(4\pi y)^{-r} \sum_{\substack{n = n_1+n_2 \\ n_1, n_2 > 0}} B_{n_1} C_{n_2} W(4\pi n_2 y, \alpha, -r) e^{-2\pi n y}$$

Aus der üblichen Darstellung der Γ–Funktion als Integral, angewandt in der Formel (5.20), folgt, daß

$$A(n) = \frac{\Gamma(k-1-r)}{\Gamma(k-1)} B_n C_0 +$$

$$\sum_{\substack{n = n_1+n_2 \\ n_1, n_2 > 0}} B_{n_1} C_{n_2} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k-1-i)}{\Gamma(\alpha-i)\Gamma(k-1)} n_2^{r-i} n^i$$

Ende des Beweises.

5.10. Nun sind die Vorarbeiten für den Beweis des Satzes 5.4 geleistet. Wir verwenden den Satz 5.9, hier setzen wir $g(z) = \theta^{(\nu)}(\chi_M) \mid V(C)$ und $G(z) = G^+(z,s+\nu+2-2k)$, $G^-(z,s+\nu+2-2k)$. Wir behaupten, daß die Voraussetzungen c) des Satzes 5.6 erfüllt werden. Zum Beweis der absoluten Konvergenz von (5.19a) für $\mathrm{Re}(s) >> 0$ werden Abschätzungen des Wachstums von holomorphen und nichtholomorphen Modulformen verwendet. Erstens, wenn $h \in \mathcal{M}_\ell(\Gamma)$ eine Modulform von halbganzen oder ganzen Gewicht ℓ bzgl. einer gewissen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ ist, dann gilt die Abschätzung (mit einer Konstante $c_1 > 0$):

$$|h(z)| \le c_1(1+y^{-\ell}) \quad (\ell \in 2^{-1}\mathbb{Z},\ \ell > 0) \tag{5.34}$$

In der Tat, in diesem Fall kann man, wie in der Arbeit von Sturm [28] Satz 2 die folgende Überlegung anstellen: Die Funktion $\varphi(z) = y^{\ell/2}|h(z)|$ ist invariant bzgl. der Aktion der Gruppe Γ und genügt der Abschätzung

$$|\varphi(z)| \le c_0 y^{\ell/2} \quad (z \in \Phi(\Gamma),\ c_0 > 0) \tag{5.35}$$

im Fundamentalgebeit $\Phi(\Gamma) = H/\Gamma$, dabei folgt (5.35) unmittelbar aus der Fourier–Entwicklung der Funktion $h(z)$. Für ein beliebiges $z \in H$ wählen wir $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ mit der Bedingung $g(z) \in \Phi(\Gamma)$, dann gelten die Abschätzungen

$$\varphi(z) = \varphi(g^{-1}(g(z))) = \varphi(g(z)) < c_0 \mathrm{Im}(g(z))^{\ell/2} = c_0 y^{\ell/2} |cz+d|^{-\ell}$$

Offensichtlich, bei $c \neq 0$ gilt $|cz+d| \geq |c| y \geq y$ und deshalb $|\varphi(z)| < c_0 y^{\ell/2} \cdot y^{-\ell} < c_0 y^{-\ell/2}$. Wenn aber $c = 0$ so $|cz+d| \geq 1$, und daher $|\varphi(z)| < c_0 y^{\ell/2}$. Aus beiden Abschätzungen folgt $|\varphi(z)| < c_0(y^{-\ell/2} + y^{\ell/2})$, das beweist (5.34). Zweitens, was die Reihen

$$G^{\pm}(z,s+\nu+2-2k) = G^{\pm}(z,s+\nu+2-2k;k-\nu-1/2,\omega,N)$$

betrifft, so kann man für die Abschätzung ihres Wachstums den Satz 3 aus der Arbeit von Shimura [26] verwenden. Solche Abschätzung wird aus der Fourier–Entwicklung der Reihen $G^{\pm}(z,s+\nu+2-2k)$ und aus der Abschätzung des Wachstums der Whittaker–Funktionen $W(4\pi ny,\alpha,\beta)$ erhalten. Bei speziellen Werten von $s \in \mathbb{Z}$, $0 < s < 2k-1$, wenn die Fourier–Entwicklung von $G^{\pm}(z,s+\nu+2-2k)$ nur nichtnegative Glieder enthält, erhalten wir, daß die Abschätzung des Wachstums für diese Reihen mit der Abschätzung für holomorphe Modulformen übereinstimmt: für eine gewisse Konstante $c_2 > 0$ gilt:

$$|G^{+}(z,s+\nu+2-2k)| < c_2(1+y^{-(k-\nu-1/2)})$$

wenn $s \in \mathbb{Z}$, $k \leq s \leq sk-2$,

$$|G^{-}(z,s+\nu+2-2k)| < c_2(1+y^{-(k-\nu-1/2)})$$

wenn $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s \leq k-1$.

Schließlich erhalten wir die Abschätzung

$$|F(z) < c_3(1+y^{-\nu/2})(1+y^{-k+\nu+1/2})(c_3 > 0) \tag{5.36}$$

für die Funktion

$$F(z) = g(z)G(z) = \theta^{(\nu)}(\chi_M)G^{\pm}(z,s+\nu+2-2k)$$

Eine analoge Abschätzung gilt auch für die Funktionen $F|_k\gamma$ wo $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Die Eigenschaft des gemäßigten Wachstums der Funktionen $F|_k\gamma$ überprüft man unschwer durch das Einsetzen der Abschätzungen (5.36) in die Formel (5.19a). Dafür ist es erneut angebracht, die Transformation $w \longmapsto \frac{w-z}{w-\bar{z}}$ zu verwenden, die H in den Einheitskreis $U = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ überführt. Die Existenz der analytischen Fortsetzung in den Punkt für das Integral (5.19a) mit der Funktion $F = gG$ wird mit Hilfe der Fourier–Entwicklung des Integrals (5.19a) nach z und der analytischen Fortsetzung jedes einzelnen Koeffizienten gewonnen. Jetzt ergeben sich die Formeln für die Fourier–Koeffizienten von (5.14) und (5.15) wenn man die Formel (5.32a) des Satzes 5.9 auf die Fourier–Entwicklungen (5.9) und (5.10) anwendet. Aus dem Satz 5.9 folgt ebenfalls, daß

$$P^{+}(x,y) = P(x,y;k,(s-\nu+1)/2, -(k-1-(s+\nu)/2)) =$$
$$x^{k-1-(s+\nu)/2} + y\,Q^{+}(x,y)\,,$$
$$P^{-}(x,y) = P(x,y;k,(2-s)/2, -(s-1-\nu)/2) =$$
$$x^{(s-1-\nu)/2} + y\,Q^{-}(x,y)$$

hierbei erhält man auch die Eigenschaften (5.16) und (5.17). Der Satz 5.4 ist vollständig bewiesen. Aus dem Satz 5.4 folgen auch die Formeln für die Fourier–Koeffizienten der Modulformen (5.1), (5.2):

$$V^{\pm}(z,s,\chi) = F^{\pm}(z,s,\chi) \mid U(M') = \sum_{n=1}^{\infty} v^{\pm}(M'n,s,\chi) e(nz) \in \mathcal{M}_k(N_0,\overline{\psi}) \qquad (5.36)$$

5.11. Die Algebraizitätseigenschaften der Fourier–Koeffizienten der Modulformen (5.1) und (5.2) folgen unmittelbar aus dem Satz 5.4:

$$v^{+}(n,s,\chi) \in \mathbb{Q}(\chi) \subset \mathbb{Q}^{ab} (s \geq k,\ s \in \mathbb{Z}) \qquad (5.37)$$

$$v^{-}(n,s,\chi) \in \mathbb{Q}(\chi) \subset \mathbb{Q}^{ab} (s \leq k-1,\ s \in \mathbb{Z}) \qquad (5.37a)$$

Dafür genügt zu bemerken, daß in den Formeln (5.14), (5.15)

$$g^{+}(n,s,\omega) \in \mathbb{Q}(\chi) \quad (s > 0,\ s \in \mathbb{Z}) \qquad (5.38)$$

$$g^{-}(n,s,\omega) \in \mathbb{Q}(\chi) \quad (s \leq 0,\ s \in \mathbb{Z}) \qquad (5.38a)$$

Kraft der klassischen Formeln für speziellen Werte der L–Reihen von Dirichlet in ganzen Punkten, die diese Werte durch verallgemeinerte Bernoulli–Leopoldt–Zahlen ausdrücken [4], [12], [30].

§ 6. Ganzheitseigenschaften und Kongruenzen für Distributionen

6.1. Zum Beweis des Hauptsatzes werden $\overline{\mathbb{Q}}$–wertige Distributionen $\mathscr{D}^{+}_{s,M}$ $(k \le s \le 2k-2,\ s \in \mathbb{Z})$, $\mathscr{D}^{-}_{s,M}$ $(1 \le s \le k-1,\ s \in \mathbb{Z})$ verwendet, die im § 5 konstruiert wurden. Mittels fixierter Einbettung $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ werden diese Distributionen als $\mathbb{C}_p$–wertige betrachtet, wir werden sehen, wie sie nach einer bestimmten Regularisation p–adisch beschränkt werden.

Sei c eine natürliche Zahl, so daß $(c,N_0) = 1$ und $c > 1$. Gemäß 2.3 existieren solche eindeutig bestimmte Distributionen $\mathscr{D}^{c+}_{s}$ und $\mathscr{D}^{c-}_{s}$, so daß

$$\mathscr{D}^{c-}_{s,M}(\chi) = (1-(\chi\overline{\psi})^2(c)c^{2(s-k)})\,\mathscr{D}^{-}_{s,M}(\chi)\,, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{c+}_{s,M}(\chi) &= (1-(\overline{\chi}\psi)^2(c)c^{-2(s-k+1)})\,\mathscr{D}^{+}_{s,M}(\chi)\,\times\\ &\prod_{q\mid N_0}\left\{(1-(\psi\overline{\chi})(q)q^{-(s-k+1)})^{-1}(1-(\overline{\psi}\chi)(q)q^{s-k})\right\}\times\\ &\times\, C(\overline{\psi}\chi)^{s-k+1}G(\overline{\chi}\psi)^{-1}\,,\end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $\mathscr{D}^{+}_{s,M}(\chi)$ und $\mathscr{D}^{-}_{s,M}(\chi)$ in 4.4 definiert sind. Unter den Voraussetzungen des § 1 gilt u.a. $(C,C(\chi)) = 1$, wo $C(\chi)$ Führer des Charakters χ ist. Aus den Eigenschaften der Gauß'schen Summen folgt, daß

$$\frac{C(\overline{\psi}\chi)^s}{G(\overline{\chi}\psi)} = \frac{C(\psi)^s\, C(\chi)^s}{G(\overline{\chi})\overline{\chi}(C(\psi))\, G(\psi)\psi(C(\chi))} = \tag{6.3}$$

$$C(\psi)^s \chi(C(\psi))\, \frac{C(\chi)^s}{G(\overline{\chi})}\, [G(\psi)\psi(C(\chi))]^{-1}$$

Jetzt können wir S–adische Maße aus dem Hauptsatz definieren:

$$\mathscr{D}^{c-} = i_p(D_{k-1}^{c-}),\quad \mathscr{D}^{c+} = i_p(D_k^{c+}) \tag{6.4}$$

6.2. Satz. a) Für alle ganzen s mit $k \leq s \leq 2k-2$ sind die Distributionen $i_p(\mathscr{D}_s^{c+})$ beschränkt und es gilt die folgende S–adische Identität:

$$\int_{G_S} \chi\, x_p^{s-k+1}\, d\, \mathscr{D}^{c+} = i_p(\mathscr{D}_{s,M}^{c+}(\chi)) \tag{6.5}$$

wobei für $s \not\equiv \nu \pmod 2$ beide Seiten verschwinden.

b) Für alle ganzen s mit $1 \leq s \leq k-1$ sind die Distributionen $i_p(\mathscr{D}_s^{c-})$ beschränkt und es gilt die S–adische Identität:

$$\int_{G_S} \chi\, x_p^{s-k+1} d\, \mathscr{D}^{c-} = i_p(\mathscr{D}_{s,M}^{c-}(\chi)) \tag{6.6}$$

wobei für $s \equiv \nu \pmod 2$ beide Seiten verschwinden.

6.3. Der Beweis basiert auf der Benutzung der Integraldarstellungen (5.12) und (5.13) aus denen folgt, daß

$$\mathscr{D}^{c+}_{s\,,\,M}(\chi)<f,f>_C =$$

$$\gamma(M')<f_0^{\rho}\,|\,V(C),\ F^{c+}(z,s,\chi)\,|\,U(M')W(CN_0)>_{CN_0} \tag{6.7}$$

für $s = k,\ldots,2k-2$,

$$\mathscr{D}^{c-}_{s,M}(\chi)<f,f>_C =$$

$$\gamma(M')<f_0^{\rho}\,|\,V(C),\ F^{c-}(z,s,\chi)\,|\,U(M')W(CN_0)>_{CN_0} \tag{6.8}$$

für $s = 1,\ldots,k-1$, wobei

$$F^{c\pm}(z,s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} v^{c\pm}(n,s,\chi)e(nz) \tag{6.9}$$

hierbei

$$v^{c+}(n,s,\chi) = C^{-(2s+3-2k)/4} \times$$

$$\sum_{\substack{n=Cn_1^2+n_2\\ n_1\,,\,n_2>0}} \chi_M(n_1)n_1^{\nu}n_2^{(2s-2k+3)/2}P^{+}(n_2,n)\beta(n_2,s-k+1,\omega_{n_2}\overline{\chi}) \tag{6.10}$$

$$(1-(\overline{\chi}\psi)^2(c)c^{-2(s-k+1)})\,\frac{2i^{\delta}\Gamma(s-k+1)\cos\frac{\pi(s-k+1+\delta)}{2}}{(2\pi)^s}\times$$

$$\frac{C(\psi\overline{\chi})^{s-k+1}}{G(\psi\overline{\chi})} L_N(s-k+1, w_{n_2}\overline{\chi}) \prod_{q\,|\,N_0} \frac{1-(\overline{\psi}\chi)(q)q^{s-k}}{1-(\overline{\chi}\psi)(q)q^{-(s-k+1)}}$$

$$v^{c-}(n,s,\chi) = C^{-(2s+3-2k)/4} \times \tag{6.11}$$

$$\sum_{\substack{n=Cn_1^2+n_2 \\ n_1,\, n_2>0}} \chi_M(n_1)n_1^{\nu} P^{-}(n_2,n)\beta(n_2,s-k+1,\omega_{n_2}\overline{\chi}) +$$

$$(1-(\chi\overline{\psi})^2(c)c^{2(s-k)})L_N(s-k+1,\omega_{n_2}\overline{\chi}) +$$

$$\delta\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right] \chi_M\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right]\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right]^{\nu} n^{(s-1-\nu)/2}(1-(\chi\overline{\psi})^2(c)c^{2(s-k)}) \cdot$$

$$\frac{\Gamma((2s-2k+1)/2)\,\Gamma(k-(s-\nu+1)/2)}{\Gamma((s+\nu)/2+1-k)\Gamma(k-1)} L_N(2s-2k+1,\psi^2\chi^{-2})$$

Es sei daran erinnert (siehe Hilfssatz 4.2 und der Punkt 5.3), daß in (6.10) und (6.11) $N = CN_0M' = 4C^2M_0M'$ ein Quadrat ist und ω_{n_2} einen solchen primitiven Charakter bezeichnet, für den

$$\omega_{n_2}(d) = \left[\frac{-tN}{d}\right]\chi_c(d)\psi(d) = \left[\frac{-tC}{d}\right]\psi(d) \tag{6.11a}$$

bei $(d,N_0) = 1$ und $n_2 = tm^2$ (t quadratfrei). Die Funktionen (6.9) und ihre Fourier Koeffizienten (6.10) und (6.11) genügen offensichtlich der Verträglichkeitsbedingung (2.3), deshalb bestimmen sich die Gleichungen (6.10) und (6.11) bei entsprechenden Werten von s gewisse Distributionen

$$v^{c+}(n,s)\ ,\ v^{c-}(n,s)$$

auf G_S mit Werten in $\mathbb{Q}^{ab}$.

6.4. Betrachten wir das $\mathbb{C}$–lineare Funktional

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_f : h \longmapsto \frac{<f_0^\rho \,|\, V(C), h \,|\, W(CN_0)>_{CN_0}}{<f, f>_C} \tag{6.12}$$

auf dem komplexen Vektorraum $\mathscr{M}_k(CN_0,\psi)$ und sei

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,h)e(nz) \in \mathscr{M}_k(CN_0,\psi)$$

Aus der Atkin–Lehner Theorie und den Eigenschaften des Petersson'schen Skalarproduktes folgt, daß das Funktional $\mathscr{L}$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, d.h. für eine bestimmte endliche Anzahl von Indexen $n_i \in \mathbb{N}$ und bestimmte algebraische Zahlen $\ell(n_i) \in \overline{\mathbb{Q}}$ hat man

$$\mathscr{L}(h) = \sum_i a(n_i,h)\ell(n_i) \tag{6.13}$$

und unsere regularisierten normalisierten Distributionen $\mathscr{D}_s^{c\pm}$ mit Hilfe von (6.12) (gemäß (6.7) und (6.8) in der Form aufgeschrieben werden können:

$$\mathscr{D}^{c\pm}_{s,M}(\chi) = \gamma(M')\,\mathscr{L}(V^{c\pm}_{M'}(z,s,\chi)) \tag{6.14}$$

wobei

$$V^{c\pm}_{M'}(z,s,\chi) = F^{c\pm}(z,s,\chi)\,|\,U(M') \tag{6.15}$$

Jetzt folgt aus 6.13, daß

$$\mathscr{D}^{c\pm}_{s,M}(\chi) = \sum_i \gamma(M')\ell(n_i)v^{c\pm}(M'n_i,s,\chi) \tag{6.16}$$

und die Behauptungen des Satzes 6.2 a) b) sind unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes äquivalent zu entsprechenden Behauptungen über die Distributionen $v^{c\pm}(M'n,s)$ weil bei wachsendem M' $|i_p(\gamma(M'))|_p$ konstant bleibt aufgrund der Bedingung $|i_p(\alpha(M'))|_p = 1$ und der Definition (4.15). Wir werden zeigen, daß die Distributionen $v^{c\pm}(M'n,s)$ im wesentlichen zum S–adischen Mazur–Maß (siehe (2.4)) reduziert werden und daraus den Satz 6.2 ableiten. Aber vorerst werden die Resultate von 2.4 in einer für unsere Belange bequemere Form übersetzt.

6.5. Sei $\omega \bmod A$ ein primitiver Dirichlet–Charakter mit dem Führer A dessen Träger $S(A)$ disjunkt zu ist, d.h. $(A,M_0) = 1$, $M_0 = \prod_{q\in S} q$. Definieren wir die normalisierten Dirichletschen L–Funktionen

$$L^{+}_{M_0}(s,\overline{\chi}\omega) = \frac{2i^{\delta}\Gamma(s)\cos\frac{\pi(s-\delta)}{2}}{(2\pi)^{s}} L_M(s,\overline{\chi}\omega)\,, \tag{6.17a}$$

$$L^{-}_{\overline{M}_0}(s,\chi\overline{\omega}) = L_{\overline{M}}(s,\chi\overline{\omega}) \tag{6.17b}$$

wobei

$$\delta = 0,1,\ (-1)^{\delta} = \overline{\chi}w(-1)\,,$$
$$\overline{S} = S \cup S(A),\ \overline{M} = \prod_{q\in\overline{S}} q$$

Dann kann man die Funktionalgleichung für die Dirichletschen L–Reihen in der folgenden Form schreiben (siehe [30])

$$L^{-}_{\overline{M}_0}(1-s,\chi\overline{\omega}) = \frac{C(\overline{\chi}\omega)^s}{G(\overline{\chi}\omega)} \prod_{q\in\overline{S}\setminus S(\chi)} \frac{1-\chi\overline{\omega}(q)q^{s-1}}{1-\overline{\chi}\omega(q)q^{-s}} \cdot L^{+}_{M_0}(s,\overline{\chi}\omega) \tag{6.18}$$

dabei wird die Primitivität von w berücksichtigt.

6.6. Satz. Sei c eine natürliche Zahl mit $(c,\overline{M}) = 1$, $c > 1$. Dann existieren $\mathbb{C}_p$–wertige Maße $\mu^{+}(c,\omega)$, $\mu^{-}(c,\omega)$ auf $\mathbb{Z}_S^{\times}$ die durch die folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt sind:

$$\int_{\mathbb{Z}_S^{\times}} \chi\, x_p^s d\mu^{+}(c,\omega) = i_p\Big[(1-\overline{\chi}\omega(c)c^{-s})\, \frac{C(\omega\overline{\chi})^s}{G(\omega\overline{\chi})} \times$$
$$L^{+}_{M_0}(s,\overline{\chi}\omega) \prod_{q\in\overline{S}\setminus S(\chi)} \left\{(1-\chi\overline{\omega}(q)q^{s-1})(1-\overline{\chi}\omega(q)q^{-s})^{-1}\right\}\Big] \tag{6.19}$$

$$s \in \mathbb{Z},\ s > 0\,,$$

$$\int_{\mathbb{Z}_S^\times} \chi\, x_p^s d\mu^-(c,\omega) =$$

$$i_p((1-\chi\overline{\omega}(c)c^{s-1})L_{\overline{M}_0}(s,\overline{\chi}\omega)) \tag{6.20}$$

$$s \in \mathbb{Z},\ s \leq 0\,.$$

Zum Beweis betrachten wir die kanonische Projektion $\mathbb{Z}_{\overline{S}}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_S^\times$ und das $\overline{S}$ adische Mazur–Maß μ^c auf $\mathbb{Z}_{\overline{S}}^\times$. Dann werden $\mu^+(c,\omega)$ und $\mu^-(c,\omega)$ durch Integration längst der Projektionsfasern gegeben:

$$\int_{\mathbb{Z}_S^\times} \chi\, d\mu^-(c,\omega) = \int_{\mathbb{Z}_{\overline{S}}^\times} \chi^{-1}\omega\, d\mu^c\ (x \in X_S) \tag{6.21a}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_S^\times} \chi\, d\mu^+(c,\omega) = \int_{\mathbb{Z}_{\overline{S}}^\times} x\, x_p^{-1}\omega^{-1}\, d\mu^c \tag{6.21b}$$

Es sei bemerkt, daß die konstruierten Maße der Funktionalgleichung

$$\int_{\mathbb{Z}_S^\times} x_p^{-1}x^{-1} d\mu^-(c,\omega) = \int_{\mathbb{Z}_S^\times} x\, d\mu^+(c,\omega) \tag{6.22}$$

genügen, die ihrerseits unmittelbare Folge der archimedischen Funktionalgleichung (6.18) ist.

6.7. Der Beweis des Satzes 6.2 wird mit Hilfe der abstrakten Kummerschen Kongruenzen durchgeführt, siehe (2.3). Dabei wird die Funktionenfamilie benutzt, die aus allen Charakteren $\chi \in X_S^{tors}$ endlicher Ordnung besteht. Eben diese Kongruenzen kann man auch für den Beweis der S–adischen Identitäten (6.5), (6.6) benutzen, da die Gültigkeit der Kongruenzen (2.5) die eindeutige Definierbarkeit des entsprechenden Maßes nach sich zieht [10], p. 259. Dafür wird die größere Funktionenfamilie

$$\chi x_p^s \quad (\chi \in X_S^{tors}, s \in \mathbb{Z}, 0 \le s \le k-2)$$

benutzt.

Jetzt wählen wir für eine beliebige endliche Anzahl von Charakteren $\chi \in X_S^{tors}$ ein geeignetes M und M' genügend groß, so daß für jeden der Charaktere die Integralformel des Satzes 4.5 (als auch (6.7), (6.8)) für $\mathscr{D}_{s,M}^{c\pm}(\chi)$ gültig ist. Dann verwenden wir (6.16) und reduzieren den Beweis der entsprechenden Kongruenzen für die Zahlen $v^{c\pm}(M'n,s,\chi)$. Dann fixiert man n_1, n_2 in den Summen (6.10) und (6.11) und berücksichtigt die Kongruenz $C\,n_1^2 + n_2 \equiv 0 \pmod{M'}$. Daraus folgt:

$$P^+(n_2,n) \equiv (-Cn_1^2)^{(2k-2-s-\nu)/2} \pmod{M'} \tag{6.23}$$

$$P^-(n_2,n) \equiv (-Cn_1^2)^{(s-1-\nu)/2} \pmod{M'} \tag{6.24}$$

Außerdem gilt $(n_1,M') = (n_2,M') = 1$ aufgrund des Faktors $\chi_M(n_1)$ in (6.10) and (6.11) und des Kongruenzes $Cn_1^2 \equiv -n_2 \pmod{M'}$. Der zweite Summand in (6.11) entfällt aufgrund des Faktors $\delta\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right]\chi_M\left[\frac{\sqrt{n}}{C}\right]$ mit $M'n$ anstelle von n. Es sei erinnert, daß in (6.10) und (6.11) ω_{n_2} den primitiven Charakter bezeichnet, sodaß bei $(d,N_0n_2) = 1$ und $n_2 = tm^2$ (t quadratfrei) gilt $w_{n_2}(d) = \left[\frac{-tC}{d}\right]\psi(d)$. Dann ist $\omega_{n_2}^2(d) = \psi^2(d)$ und falls $q \mid M_0$

$$\left[\frac{-tC}{q}\right] = \left[\frac{-tm^2C}{q}\right] = \left[\frac{Cn_1^2\,C}{q}\right] = 1 \tag{6.25}$$

Man sieht, daß $\omega_{n_2} = \theta_{-Ct}\psi$, wobei θ_{-Ct} der primitive quadratische Charakter von $\mathbb{Q}(\sqrt{-Ct})$ ist.

Wir vergleichen jetzt (6.10) mit (6.19), und (6.11) mit (6.20). Hierbei wird berücksichtigt, daß

$$C(\omega_{n_2}\overline{\chi}) = C(\omega_{n_2})C(\overline{\chi}),\ \ C(\psi\overline{\chi}) = C(\psi)C(\overline{\chi}),\ \ \omega_{n_2}(C(\overline{\chi})) = \psi(C(\overline{\chi}))$$

(deshalb $\left[\frac{-tC}{C(\chi)}\right] = 1$)

$$\begin{aligned} G(\omega_{n_2}\overline{\chi}) &= G(\omega_{n_2})\omega_{n_2}(C(\overline{\chi}))G(\overline{\chi})\overline{\chi}(C(\omega_{n_2})) = \\ &= G(\omega_{n_2})\psi(C(\overline{\chi}))G(\overline{\chi})\overline{\chi}(C(\omega_{n_2})), \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$1-(\overline{\chi}\psi)^2(c)c^{-2s} = (1-\omega_{n_2}\overline{\chi}(c)c^{-s})(1+\omega_{n_2}\overline{\chi}(c)c^{-s})\,, \tag{6.27}$$

$$G(\psi\overline{\chi}) = G(\psi)\psi(C(\overline{\chi}))G(\overline{\chi})\overline{\chi}(C(\psi)) \tag{6.28}$$

Als Resultat erhält mn (unter Berücksichtigung von (6.26)–(6.28)) bei Anendung der Einbettung i_p , daß die entsprechenden Summanden in (6.10), (6.11) bei fixierten n_1, n_2 in folgende Gestalt überführt werden können

$$\begin{aligned}&\chi_M(n_1)n_1^{\nu}n_2^{(2s-2h+3)/2}\,P^+(n_2,n)\beta(n_2,s-k+1,w_{n_2}\overline{\chi}) \times \\ &\times \frac{G(\omega_{n_2})}{G(\psi)} \cdot \frac{C^{-(2s-2k+3)/4}}{\chi(C(\omega_{n_2})/C(\psi))(C(\omega_{n_2})/C(\psi))^{s-k+1}} \times \\ &(1+\omega_{n_2}\overline{\chi}(c)c^{-(s-k+1)}) \int_{\mathbb{Z}^{\times}_{S(N_0)}} \chi\, x_p^{s-k+1}d\mu^+(c,\omega_{n_2})\,,\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}&\chi_M(n_1)n_1^{\nu}\,P^-(n_2,n)C^{-(2s-2k+3)/4}\beta(n_2,s-k+1,\omega_{n_2}\overline{\chi}) \\ &(1+\overline{\omega}_{n_2}\chi(c)c^{s-k}) \int_{\mathbb{Z}^{\times}_{S(N_0)}} \chi\, x_p^{s-k+1}d\mu^-(c,\omega_{n_2})\end{aligned} \tag{6.30}$$

Wir benutzen jetzt die Kongruenzen (6.22) und (6.23) und bemerken, daß der Ausdruck $\beta(n_2,s-k+1,\omega_{n_2}\overline{\chi})$ eine endliche Linearkombination mit ganzen algebraischen Koeffizienten von Gliedern der Art

$$\chi(a)\overline{\chi}(b)(a/b)^{s-k+1}((a,N_0) = (b,N_0) = 1)$$

darstellt. Aus (6.29) und (6.30) folgt unter Anwendung der Einbettung i_p, daß

$$v^{c\pm}(M'n,s,\chi) \pmod{M'}$$

bei entsprechenden Werten von s die Gestalt annimmt:

$$\sum A_i\, \chi(y_i)y_i^{s-k+1} \int_{\mathbb{Z}^\times_{S(N_0)}} \chi\, x_p^{s-k+1} d\mu^{\pm}(c,\omega_{n_{2,i}}) \tag{6.31}$$

wobei $y_i \in \mathbb{Z}^\times_{S(N_0)}$. Hierbei sind $A_i \in i_p(\mathbb{Q})$ gewisse p–beschränkte Koeffizienten. Es bleibt zu bemerken, daß für die Ausdrücke (6.31) die abstrakten Kummerschen Kongruenzen offensichtlich erfüllt sind. Deshalb sind die entsprechenden Behauptungen auch für die Distributionen $i_p(\mathscr{D}_s^{c\pm})$ gültig, und es gelten die Identitäten (6.5), (6.6). Satz 6.2 ist gezeigt.

Der Hauptsatz folgt jetzt aus den Sätzen 6.2, 3.3 und den Definitionen (6.1), (6.2), (4.13) sowie (4.14). Die nichtarchimedische Mellin Transformierte

$$\mathscr{D}^{c\pm}(x,f) : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p \quad (x \in X_S)$$

der S–adischen Maßen $\mathscr{D}^{c\pm}$ genügen allen Bedingungen des Hauptsatzes.

§ 7. Die nichtarchimedische Funktionalgleichung

7.1. Die Herleitung der Funktionalgleichung aus dem Theorem 1.6 basiert auf dem Vergleich spezieller Funktionswerte von $\mathcal{D}^{c+}(\chi x_p^{s-k+1}, f)$ und $\mathcal{D}^{c-}(\chi^{-1} x_p^{k-s}, f^\rho)$ bei $\chi \in X^{tors}$, $k \leq s \leq 2k-2$, $s \in \mathbb{Z}$. Dazu verwenden wir (1.10) und (1.11), es folgt

$$
\begin{gathered}
i_p^{-1}(\mathcal{D}^{c-}(\chi^{-1} x_p^{k-s}, f^\rho)) = \frac{C(\chi)^{2k-2-s} G(\bar{\chi})}{\alpha(C(\chi))^2} \times \\
B(2k-1-s, \chi^{-1}\hat{\alpha})\, \mathcal{D}^{-}(2k-1-s, f^\rho, \chi)(1-(\chi\bar{\psi})^2(2)2^{2(s-k)}) \\
(1-(\bar{\chi}\psi)^2(c)c^{-2(s-k+1)} \prod_{q \in S \setminus S(\chi)} (1-(\bar{\psi}\chi)(q)q^{s-k}) \\
(\hat{\alpha}(C(\chi)) = \bar{\psi}(C(\chi))\alpha(C(\chi)))
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

wobei $\mathcal{D}^{\pm}(s, f, \chi)$ durch (1.8) und (1.9) definiert sind und

$$
\begin{gathered}
B(s, \chi, \alpha) = B(2k-1-s, \chi^{-1}, \hat{\alpha}) = \\
\prod_{q \in S \setminus S(\chi)} (1-\chi(q)\alpha(q)^2 q^{s-1})(1-\chi^{-1}(q)\hat{\alpha}(q)^2 q^{2k-2-s})
\end{gathered}
\tag{7.2}
$$

ein endliches Eulerprodukt (1.12) ist. Jetzt vergleichen wir (7.1) und (1.10). Es sei

$$\tau(x,f) = \prod_{q\,|\,2C} \frac{1-\overline{\psi}(q)(x_p^{-1}x)(q)}{1-\psi(q)x^{-1}(q)} : X_S \longrightarrow \mathbb{C}_p \tag{7.3}$$

Dann folgt aus (7.1) und (1.10) unter Berücksichtigung von (7.2), daß

$$\frac{\mathscr{D}^{c+}(x,f)}{\mathscr{D}^{c-}(x_p x^{-1},f^\rho)} \cdot \tau(x,f) \frac{(1-\psi^{-2}(2)(x_p^{-1}x)^2(2))}{(1-\psi^2(2)x^{-2}(2))} =$$

$$i_p\left[\frac{\mathscr{D}^{+}(s,f,\overline{\chi})}{\mathscr{D}^{-}(2k-1-s,f^\rho,\chi)}\,\overline{\psi}(C(\chi))^2\,\frac{G(\chi)}{G(\overline{\chi})}\,\frac{\sqrt{C(\chi\psi)}}{G(\overline{\chi}\psi)}\,(C(\chi)^3/C(\psi))^{(2s-2k+1)/2}\right] \tag{7.4}$$

bei $\chi \in X_S^{tors}$, $s = k,\dots,2k-2$, $x = \chi x_p^{s-k+1} \in X_S$.

7.2. Zur Umformung der rechten Seite von (7.4) verwenden wir die Identität (1.19) und die Funktionalgleichung für die Konvolutionen, die in voller Allgemeinheit in der Arbeit von Li [13] entwickelt wurde. In den Bezeichnungen von [13]

$$L_{C(\chi)C}(2s-2k+2,(\psi\overline{\chi})^2)L(s,f,f(\overline{\chi})) = L_{F_1,F_2}(s-k+1) \tag{7.5}$$

wo $F_1 = f$, $F_2 = f^\rho(\chi)$ primitive Spitzenformen sind (wesentlich für die Primitivität ist die Bedingung $(C,C(\chi)) = 1$). Sie $\psi = \prod_q \psi_q$ die Zerlegung des Charakters ψ in das Produkt der Charaktere ψ_q mit q–primären Führern. Wir erinnern an die Definition der Ausgleichskoeffizienten $\theta_q(s)$ mit Hilfe des Begriffs der n(q)–Nähe von primitiven Spitzenformen F_1, F_2 mit der Bedingung $Q_1 = Q_2$ auf die q–Komponenten ihrer Führer

N_1, N_2. Laut Definition, ist $n(q)$ die größte ganze Zahl m mit der Eigenschaft

$$\lambda_q(F_1(w))\,\overline{\lambda_q(F_2(w))} = \lambda_q(F_1)\,\overline{\lambda_q(F_2)} \tag{7.6}$$

für alle Charaktere w mit Führern, die q^m teilen, wo $\lambda_q(F)$ der pseudo–Eigenwert der Atkin–Lehner–Involution W_q auf der primitiven Form F ist (siehe [2]), der für alle Primteiler des Führers F definiert ist. Wenn (7.6) für alle q–primäre Dirichlet–Charaktere erfüllt ist, so $n(q) = \infty$. In unserem Fall ist $F_1 = f$, $F_2 = f^{\rho}(\mu)$, $N_1 = C$, $N_2 = C(\chi)^2 C = N$, $\epsilon = \bar{\psi}\chi^2$, $C(\epsilon)$–Führer von ϵ. Wir definieren ganze $r(q)$ durch die Bedingung

$$(C(\chi)^2 C)/C(\epsilon) = \prod_q q^{r(q)} \tag{7.7}$$

Es ist bekannt, daß dann entweder $n(q) \leq [r(q)/2]$ oder $n(q) = \infty$ (siehe [13], Th. 1.7 und 1.8). Es seien Q und Q_ϵ die q–primären Komponenten der Zahlen N und $C(\epsilon)$. Für alle Primzahlen $q \mid C$ definieren wir ganze Zahlen

$$m(q) = \begin{cases} \min\,(n(q, [r(q)/2]) & \text{falls } a(q) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.8}$$

und für $q \mid C$ mit der Eigenschaft $Q_\epsilon = 1$ setzen wir die Koeffizienten $\theta_q(s)$ ([13], S. 142):

$$\theta_q(s) = \begin{cases} 1-(\psi\overline{\chi})_0(q)q^{-s}, \text{ falls } qC_0\psi_q \text{ trivial and } Q = q, \\ 1-\psi_0^2\overline{\chi}(q)\overline{a(q)}^2 q^{-(s+k-1)}, \text{ falls } Q = q^{\mathrm{ord}_q C(\psi)} > 1, \\ 1-(\psi\overline{\chi})_0^2(q)q^{-2s}, \text{ falls } m(q) = \left[\frac{r(q)}{2}\right], \; r(q) \text{ gerade}, \\ 1-(\psi\overline{\chi})_0(q)q^{-s}, \text{ falls } m(q) = \left[\frac{r(q)}{2}\right], \; r(q) \text{ ungerade}, \\ 1, \text{ sonst} \end{cases} \tag{7.9}$$

Hier und im weiteren weist der Index 0 auf den primitiven Charakter hin. Der Arbeit [24] folgend, führen wir die normalisierten primitiven symmetrischen Quadrate (mit dem primitiven Charakter χ)

$$\tilde{\mathscr{D}}^{\pm}(s,f,\overline{\chi}) = \prod_{q \mid C} \theta_q(s-k+1)^{-1} \mathscr{D}^{\pm}(s,f,\overline{\chi}) \tag{7.10}$$

ein. Jetzt verwenden wir die Funktionalgleichung für die Konvolution aus [13]. Setzt man

$$\Phi(s,f,\overline{\chi}) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+1) \prod_{q \mid C} \theta_q(s-k+1)^{-1} L_{f,f^{\rho}(\chi)}(s-k+1), \tag{7.10a}$$

so, angewandt auf unseren Fall, nimmt die Identität des Theorems 2.2 aus [13] die Gestalt

$$\Phi(s,f,\overline{\chi}) = A(s,f,\chi)\Phi(2k-1-s,f^{\rho},\chi) \tag{7.11}$$

an, wobei wir durch $A(s,f,\chi)$ den entsprechenden Faktor $A(s-k+1)$ aus dem Theorem 2.2 bezeichnet haben, er wird weiter unten explizit beschrieben (Satz 7.3). Nutzen wir die Identität (1.19) für die Eulerprodukte, die unter Berücksichtigung von (7.5) die Gestalt

$$L_{MC}(s-k+1,\psi\overline{\chi})\,\mathscr{D}(s,f,\overline{\chi}) = L_{f,f^{\rho}(\chi)}(s-k+1)$$

annimmt, wobei χ primitiv ist mod M .

Verknüpfen wir diese Identität mit den Definitionen (1.8), (1.9) und (7.10) für die Reihen $\mathscr{D}^{\pm}(s,f,\chi)$ und $\tilde{\mathscr{D}}^{\pm}(s,f,\chi)$ dann folgt aus (7.11) und der Funktionalgleichung (6.18) für die Dirichletschen L–Reihen die Funktionalgleichung für normalisierte symmetrische Quadrate

$$\frac{\tilde{\mathscr{D}}^{+}(s,f,\overline{\chi})}{\tilde{\mathscr{D}}^{-}(2k-1-s,f^{\rho},\chi)} = A(s,f,\chi) \times$$

$$\frac{C(\psi\overline{\chi})^{s-k+1}}{G(\overline{\chi}\psi)} \prod_{q\mid C} \frac{1-\chi\overline{\psi}(q)q^{s-k}}{1-\overline{\chi}\psi(q)q^{-(s-k+1)}} \tag{7.11a}$$

Zur Beschreibung des Faktors $A(s)$ aus (7.11) definieren wir für $q\mid C$ die Zahlen

$$n_*(q) = \begin{cases} 2(\mathrm{ord}_q Q-m(q))\ , \text{falls } Q_\epsilon = 1 \\ 2(\mathrm{ord}_q Q-n(q))\ , \text{falls } Q_\epsilon > 1,\ a(q) = 0\ , \\ 2\ \mathrm{ord}_q Q + \mathrm{ord}_q Q_\epsilon\ , \text{falls } Q_\epsilon > 1,\ a(q) \neq 0\ , \end{cases}$$

$$C_* = \prod_{q \mid C} q^{n_*(q)}, \quad C_0' = \prod_{q \mid C, Q_\epsilon > 1, a(q) \neq 0} q^{r(q)}, \tag{7.12}$$

$$C_*' = \prod_{q \mid C, Q_\epsilon > 1, a(q)=0} q^{n_*(q)}, \quad C_*'' = \prod_{q \mid C, Q_\epsilon = 1} q^{n_*(q)}, \quad C' = C_0' \, C_*'$$

7.3. Satz. Sei für alle $q \mid C(\chi)$ der Charakter χ_q^2 nichttrivial, d.h. $Q_\epsilon > 1$. Dann gilt in den Bezeichnungen von (7.12) des Punktes 7.2

$$A(s) = \overline{\chi}(C_*) C_*^{(1-2s/2} B_f \times$$
$$\times \, \psi(C(\chi))^4 \frac{G(\overline{\chi})^4}{C(\chi)^2} C(\chi)^{2(1-2s)} \tag{7.13}$$

bei der Bedingung der Minimalität (q–Primitivität) von f für $q \mid C$ wo B_f eine von s und χ unabhängige Konstante ist:

$$B_f = \lambda(f)^2 \frac{G(\psi)^2}{\sqrt{C(\psi^2)}} a^2(C_0') C_0'^{\,1-k} \psi_0^2(C_*'') \Lambda_*'(f),$$
$$\lambda(f) = \prod_{q \mid C} \lambda_q(f) \psi_{C/Q}(Q) \tag{7.14}$$

Konstante aus der Funktionalgleichung für $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$

$$\Lambda_*'(f) = \prod_{q \mid C, Q_\epsilon > 1, a(q)=0} \Lambda_q(f, f^\rho) / \lambda_q(f)^2,$$

$$\Lambda_q(f,f^\rho) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{[(r(q)+1)/2]} S_q(m,f,f^\rho)\ , \text{ falls } n(q) = [r(q)/2] \\ \\ S_q(r(q)-n(q),f,f^\rho)\ , \text{ sonst} \end{cases} \tag{7.15}$$

und die Bezeichnung von Li

$$S(m,f,f^\rho) = \frac{q}{q-1} \sum_{\omega} \lambda_q(f(\omega))\lambda_q(f(\overline{\omega})) \tag{7.16}$$

(die Summierung in (7.16) geschieht über die primitven Charaktere w des Führers q^m) angenommen wurde.

Bemerkung. Die n(q)–Nähe aus (7.15) gehört zu den Spitzenformen $F_1 = f$ und $F_2 = f^\rho(\chi)$, doch ist $n(q)$ unter den Voraussetzungen des Satzes in der Tat von χ unabhängig. Und zwar, wenn Nähe $n(q)$ für das Paar f und f^ρ wird durch $n_0(q)$ bezeichnet, so kann man leicht nachprüfen, daß wenn $a(q) = 0$, so

$$n(q) = \min(\,[r(q)/2]\,,\, n_0(q)) \tag{7.17}$$

Einerseits gilt immer $n(q) \lesssim [r(q)/2]$ da χ^2 nichttrivial ist (siehe Theorem 1.8 in [13]). Weiterhin sei Q(F) die q–primäre Komponente des Führers der primitiven Spitzenform F . In unserem Fall gilt $F_2(\omega) = F_1^\rho(\omega\chi)$ und $m \lesssim [(r(q)+1)/2] \lesssim \mathrm{ord}_q q$ deshalb gilt für $q\,|\,C_*'$ $Q(F_2(\omega)) = \max(Q(F_1),q^{2m}) = Q$ und da $(C,C(\chi)) = 1$ so ist für diese q

$$\lambda_q(F_2(\omega)) = \overline{\chi}(Q)\lambda_q(F_1^{\rho}(\omega)) \tag{7.18}$$

Unter Berücksichtigung der Definition der n(q)–Nähe (7.6) beweist es (7.17). Der Beweis des Satzes 7.3 erfolgt durch die Berechnung der Faktoren des im Theorem 2.2 aus [13] definierenden Produktes $A(s)$ mit der Beziehung

$$G(\omega) = \prod_{q \mid A} G(\omega_q)\omega_{A/Q}(Q)$$

(w ist primitiv mod A, $Q = q^{\mathrm{ord}_q A}$) für Gauß'sche Summen und aus den bekannten Formeln

$$\lambda_q(F(\chi)) = \overline{\chi}(Q)\lambda_q(F)$$

(falls q teilt N, der Führer von F),

$$\lambda_q(F(\chi)) = \overline{\psi}(Q_\chi)\,\frac{G(\chi_q)^2}{Q_\chi}\,\overline{\chi}^2_{NC(\chi)^2/Q}(Q_\chi)$$

($q \mid C(\chi)$, $Q = Q_\chi^2$, $NC(\chi)^2$ der Führer von $F(\chi)$). Diese Formeln sind gültig, wenn der Führer N der primitiven Spitzenform teilerfremd mit dem Führer des Charakters χ ist.

7.4. Jetzt definieren wir die nichtarchimedischen Ausgleichsfaktoren $\rho_q(x,f)$ ($x \in X_S$) so daß $\rho_q(\chi\, x_p^s, f) = i_p\,(\theta_q(s))$ bei $s \in Z$, $\chi \in X_S^{\mathrm{tors}}$ (vgl. mit (7.9))

$$\rho_q(x,f) = \begin{cases} 1-\psi_0(q)x(q)^{-1}\text{ , falls } q\,|\,C,\ \psi_q \text{ trivial und } Q=q \\ 1-\psi_0^2(q)\overline{a(q)}^2(x_p^{k-1}x)^{-1}q\text{ , falls } \mathrm{ord}_q Q = \mathrm{ord}_q C(\psi) > 1 \\ 1-\psi_0^2(q)x(q)^{-2}\text{ , falls } m(q) = [r(q)/2],\ r(q) \text{ gerade} \\ 1-\psi_0(q)x(q)^{-1}\text{ , falls } m(q) = [r(q)/2] > 0,\ r(q) \text{ ungerade} \\ 1\text{ , sonst} \end{cases}$$

Definieren wir wie in (1.17) die Funktionen

$$R^{c\pm}(x,f) = \mathscr{D}^{c\pm}(x,f)\times$$

$$(1+\overline{\psi}(2)(x_p^{-1}x)(2))\prod_{q\,|\,C}(1-\psi(q)x(q)^{-1})^2\rho_q(x_px^{-1},f)$$

7.5. Der Satz über die Funktionalgleichung. Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes 1.3 nehmen wir zusätzlich an, daß f minimal ist (d.h. daß man f nicht aus einer Form non niedrigerer Stufe mit Hilfe der Twistung mit einem Dirichlet–Charakter bekommen kann). Dann gilt für alle $x \in X_S$

$$R^{c-}(x_px^{-1},f^{\rho}) = R^{c+}(x,f)A(x,f)\ ,$$

wobei

$$A(x,f) = (x_p^{1/2}x^{-1})(C_*C(\psi)^2)W_f,\ \ W_f = i_p(B_f\frac{C(\psi)}{G(\psi)^2})\ ,$$

und die Konstanten C_*, B_f durch (7.12) und (7.14) definiert sind.

7.6. Zum Beweis des Satzes 7.5 betrachten wir den Ring $\mathcal{A}(X_S)$ der beschränkten analytischen Funktionen auf X_S und seinen Quotientenring $\mathcal{M}(X_S)$ bzgl. der Funktionen $G(x) \in \mathcal{A}(X_S)$ so daß für alle Komponenten der Zerlegung (1.1) $\chi T = \chi X(U)$ $(\chi \in X_S^{tors})$ der Potenzreihe $t \longmapsto G(\chi t)$ nicht identisch verschwindet. Angenommen, für die Funktion $H(x) \in \mathcal{M}(X_S)$ sind spezielle, von Null verschiedene Werte $H(\chi_0\chi) = a_{\chi_0\chi}$ gegeben, für ein fixiertes $\chi_0 \in X_S$ und für fast alle $\chi \in X_S^{tors}$. Dann bestimmen diese Werte die Funktion $H(x)$ eindeutig. Tatsächlich, nehmen wir an, daß es zwei Funktionen

$$H_1(x) = F_1(x)/G_1(x) \quad \text{und} \quad H_2(x) = F_2(x)/G_2(x)$$

mit der Bedingung

$$H_1(\chi_0\chi) = a_{\chi_0\chi} = H_2(\chi_0\chi)$$

gibt. Dann

$$G_1(\chi_0\chi)G_2(\chi_0\chi)a_{\chi_0\chi} = F_1(\chi_0\chi)G_2(\chi_0\chi) = F_2(\chi_0\chi)G_1(\chi_0\chi)$$

Folglich, gilt für alle $x \in X_S$

$$F_1(x)G_2(x) = F_2(x)G_1(x) \text{ und } H_1(x) = H_2(x)$$

aufgrund der Eindeutigkeit (siehe (2.3)) für Ringelelemente aus $A(X_S)$. Daraus folgt, daß $A(x,f)$ aus dem Satz 7.5 eindeutig durch die Werte

$$\frac{R^{c+}(\chi x_p^{s-k+1},f)}{R^{c-}(\chi^{-1}x_p^{k-s},f^\rho)} \quad (\chi \in X_S^{tors},\ k \leq s \leq 2k-2)$$

bestimmt wird. Dabei kann man sich auf solche Charaktere $\chi \in X_S^{tors}$ beschränken, bei den der Führer von χ^2 S–voll ist, d.h. für alle $q \in S$ der Charakter χ_q^2 nichttrivial ist, weil diese Beschränkung nur endlich viele Charaktere in jeder Analytizitätskomponente in (1.1) betrifft. Jetzt folgt aus den Gleichungen (7.4) und (7.11)

$$R^{c+}(\chi x_p^{s-k+1},f)/R^{c-}(\chi^{-1}x_p^{k-1},f^\rho) =$$

$$i_p\Bigg[A(s,f,\chi)\,\frac{C(\chi)^2}{G(\overline{\chi})^4}\,\frac{C(\psi)}{G(\psi)^2}\times \tag{7.19}$$

$$\times\ \overline{\psi}^4(C(\chi))\chi^2(C(\psi))(C(\chi)^2C(\psi))^{2s-2k+1}\Bigg]$$

Zum Abschluß des Beweises des Satzes 7.5 genügt es, die Formel des Satzes 7.3 und die Gleichung (7.19) anzuwenden.

Literaturverzeichnis

1. Arnaud Bertrand Interpolation p–adique d'un produit de Rankin. Comptes rendus A.S. Paris, série I, 1984, V. 299, 527–530

2. Atkin A., Li W. Twists of newforms and pseudo–eigenvalues of W–operators. Invent. Math., 1978, V. 48, 221–243

3. Böcherer S. Über die Funktionalgleichung automorpher L–Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe. J. reine u. angew. Math., 1985, Bd. 362, 146—168

4. Borewic S.I., Schafarewic I.R. Zahlentheorie, 3. Aufl. Moskau, "Nauka", 1985 (in Russisch)

5. Gross B., Zagier D. Heegner points and derivatives of L–series. Invent. Math., 1986, V. 84, 225–320

6. Hida H. A p–adic measure attached to the zeta–functions associated with two elliptic cusp forms. I., Invent. Math., 1985, V. 79, 159–195

7. Hua Lo–Ken Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains. Providence, 1963

8. Iwasawa K. Lectures on p–adic L–functions, Ann. of Math. Studies, N 74, Princeton Univ. Press, 1972

9. Klingen H. Über Poincaréshe Reihen vom Exponentialtyp Math. Ann., 1978, Bd. 234, 145–157

10. Katz N.M. p–adic L–functions for CM fields. Invent. Math., 1978, V. 49, 199–297

11. Koblitz N. p–adic congruences and modular forms of half integral weight. Math. Annalen. 1986, V. 274, 199–220

12. Kubota T., Leopoldt H.–W. Eine p–adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p–adischen Dirichletschen L–Funktionen. J. Reine u. Angew. Math., 1964, Bd. 214/215, 328–339

13. Li W. L–series of Rankin type and their functional equations. Math. Annalen, 1979, Bd. 244, 135–166

14. Manin Y.I. Perioden von Spitzenformen und p–adische Hecke–Reihen, Mat. Sbornik, 1973, V. 92, 376–401 (in Russisch)

15. Manin Y.I. Nichtarchimedische Integrierung und p–adische L–Funktionen von Jaquet––Langlands. Uspehi Mat. Nauk, 1976, V. XXXI, 1, 5–53 (in Russisch)

16. Manin Y.I., Pančiškin A.A. Konvolutionen der Hecke–Reihen und ihre Werte in ganzen Stellen. Mat. Sbornik, 1977, V. 104, 617–651 (in Russisch)

17. Mazur B., Swinnerton–Dyer H.P.F. Arithmetic of Weil curves, Invent. Math., V. 1974, 25, 1–61.

18. Pančiškin A.A. Symmetrische Quadrate von Hecke–Reihen und ihre Werte in ganzen Punkten. Mat. Sbornik, 1979, V. 108, 393–417 (in Russisch)

19. Pančiškin A.A. Kompexwertige Maße, die mit Euler–Produkten verbunden sind. Trudi sem. I.G. Petrovski, 1981, Nr. 7, 239–244 (in Russisch)

20. Pančiškin A.A. Le prolongement p–adique analytique des fonctions L de Rankin, Comptes rendus A.S. Paris, série I, 1982, V. 295, 51–53, 227–230

21. Pančiškin A.A. A functional equation of the non–archimedian Rankin convolution. Duke Math. J., 1987, V. 54, Nr. 1, 77–89

22. Rankin R.A. Contribution of the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, I, II, Proc. Camb. Phil. Soc., 1939, V. 35, 351–372

23. Rankin R.A. The scalar product of modular form. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 1952, V. 2, pp. 198–217

24. Schmidt C.–G. The p–adic L–functions attached to Rankin convolutions of modular forms. J. reine u. angew. Math., 1986, Bd. 368, S. 201–220

25. Serre J–P., Stark H.M. Modular forms of weight 1/2. Lect. Notes Math., 1977, N 627,. pp. 27–67

26. Shimura G. On the holomorphy of certain Dirichlet series. Proc. Lond. Math. Soc. 1975, V. 31, pp. 79–98

27. Sturm J. Special values of zeta functions and Eisenstein series of half integral weight. Amer. J. Math. 1980, V. 102, pp. 219–240

28. Sturm J. The critical values of the zeta–functions associated to the symplectic grpup II Duke Math. J. 1981, V. 18, pp. 327–350

29. Višik M.M. Nicht archimedische Maße die mit Dirichletshen Reihen verbunden sind. Mat. Sbornik, 1976, V. 99, pp. 248–260 (in Russisch)

30. Washington L. Introduction to cyclotomic fields. Springer–Verlag, Berlin–Hdbg–N.Y., 1982

31. Pančiškin A.A. Nicht archimedische automorphe Zetafunktionen, Moskauer–Univ.–
–Verlag, 1988.

32. Schmidt, C.–G. p–adic measures attached to automorphic representations of GL(3) . Invent. Math. 1988, V. 92, pp. 597–631.