Une caractérisation différentielle des points de Weierstraß généralisés d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$.

Franck Leprévost

Université Paris 7
Département de Mathématiques
tour 45-55, 5ème étage
2 place Jussieu
75252 Paris cedex 05
FRANCE

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
53225 Bonn
GERMANY

MPI/95-47

Une caractérisation différentielle des points de Weierstraß généralisés d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$.

Franck Leprévost

Introduction

Soit S une surface de Riemann compacte, de genre $g \geq 2$, munie de sa métrique hermitienne canonique, dite jacobienne (*cf.* [5]) et K_S un diviseur canonique. Dorénavant n désigne un entier ≥ 1 fixé. La plupart des objets définis dans cet article dépendent de n. Cependant, le contexte excluant toute ambiguité, nous omettrons, pour alléger les notations, de signaler indiciellement cette dépendance. Nous montrons dans cet article que les éléments de l'ensemble $S[n]$ des points de Weierstraß d'ordre n associés au système linéaire $|nK_S|$ (*cf.* [1]) sont exactement les points annulant le représentant canonique de la première classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe et hermitien pour une métrique déduite de la métrique jacobienne sur S. Ces points constituent, selon Mumford (*cf.* [7], p. 11), l'analogue, pour les courbes de genre $g \geq 2$, de l'ensemble $E[n]$ des points d'ordre n d'une courbe elliptique E. Le présent travail donne donc une interprétation de ces points en termes différentiels, prolongeant [6] où une caractérisation est donnée, dans le cas $n = 1$, pour les points de Weierstraß hyperelliptiques. Ce résultat s'étend au cas des points de Weierstraß associés à un système linéaire $|G|$ (*cf.* [1]), complet et sans points fixes.

Cet article est structuré de la manière suivante : dans la première partie, nous définissons des *espaces fondamentaux d'ordre n* en un point $p \in S$. Dans la deuxième partie, nous rappelons la définition des points et lacunes de Weierstraß. Ceci nous permet, dans une troisième partie, de définir des fibrés, que nous appelons osculateurs par analogie avec la cinématique, desquels nous déduisons des fibrés en droites holomorphes et hermitiens. Dans la dernière partie, nous calculons explicitement le représentant canonique de la première classe de Chern de ces fibrés, et prouvons notre résultat.

1 Espaces fondamentaux

Fixons quelques notations. Pour tout diviseur D, notons $\mathcal{L}(D) = \{\varphi\ ;\ (\varphi) + D \geq 0\} \cup \{0\}$ et $l(D)$ sa dimension. En particulier, on définit l'entier d comme égal à $l(nK_S)$, *i-e.*

$$d = \begin{cases} g & \text{si } n = 1, \\ (2n-1)(g-1) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Pour tout entier $s \geq 0$ et toute fonction holomorphe f, notons $\partial^s f = \frac{\partial^s}{\partial z^s} f$ et, si $f_1, \ldots, f_d$ sont d fonctions holomorphes, désignons par $\partial^i f(z)$ le vecteur $(\partial^i f_1(z), \ldots, \partial^i f_d(z))$.
Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ une base de $H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$. Avec ces notations, si, pour $1 \leq k \leq d$, ω_k s'écrit dans une carte holomorphe locale (U, z) d'ordre 1 (*i.e.* $\mathrm{ord}_p(z - z(p)) = 1$) en $p \in S$

$$\omega_k(z) = f_k(z)(dz)^n,$$

on définit le *i-ème espace fondamental d'ordre n de S en p* par

$$V_0(p) = \{0\}$$

*Adresse : Université Paris 7, Département de Mathématiques, tour 45-55, 5ème étage, 2 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France. E-mail : leprevot@mathp7.jussieu.fr

et, pour $i \geq 1$,

$$V_i(p) = \mathrm{Vect}(f(z), \ldots, \partial^{i-1} f(z))_{|_p}.$$

Cette définition est justifiée par le lemme suivant :

Lemme 1.1 $\forall i \geq 0$, *$V_i(p)$ ne dépend ni du choix de la carte holomorphe locale d'ordre* 1 *en $p \in S$, ni de celui de la base $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$.*

Soient en effet (U, z) et (U', z') 2 cartes holomorphes locales en p. Sur $U \cap U'$, la fonction de transition est donnée par $z' = \varphi(z)$. Pour $1 \leq k \leq d$, ω_k s'écrit dans ces cartes : $\omega_k(z) = f_k(z)(dz)^n$ et $\omega_k(z') = f'_k(z')(dz')^n$. On montre aisément par récurrence que, pour tout entier $\nu \geq 1$ et $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z'^\nu} f'_k(z') = \sum_{m=0}^{\nu-1} \lambda_{\nu+1,m+1}(z) \frac{\partial^m}{\partial z^m} f_k(z) + \kappa^{\nu+1}(z) \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} f_k(z),$$

où, $\forall m \in \{0, \ldots, \nu-1\}$, $\lambda_{\nu+1,m+1}(z)$ est une fonction holomorphe sur $U \cap U'$ et $\kappa(z) = \frac{dz}{dz'}$, soit, en termes matriciels,

$$\begin{pmatrix} \kappa(z) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_{2,1}(z) & \kappa^2(z) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \kappa^\nu(z) & 0 \\ \lambda_{\nu+1,1}(z) & \lambda_{\nu+1,2}(z) & \ldots & \lambda_{\nu+1,\nu}(z) & \kappa^{\nu+1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_k(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} f_k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_k(z') \\ \frac{\partial}{\partial z'} f'_k(z') \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial^\nu}{\partial z'^\nu} f'_k(z') \end{pmatrix}$$

Comme $\kappa(p) \neq 0$, $V_i(p) = V'_i(p)$, ce qui établit la première partie du lemme. La seconde assertion du lemme découle de ce que, si $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ et $(\omega'_1, \ldots, \omega'_d)$ sont deux bases de $H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$ telles que, dans une carte locale (U, z) en p, l'on ait pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$, $\omega_k(z) = f_k(z)(dz)^n$ et $\omega'_k(z) = f'_k(z)(dz)^n$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ tel que

$$f(z) = f'(z)P.$$

Dorénavant, S sera supposé muni de sa métrique hermitienne canonique h (*cf.* [5], [6]), dite jacobienne, telle que, si $\omega_1, \ldots, \omega_g$ désigne une base orthonormale de l'espace des 1-formes holomorphes globales alors, si $u, v \in T_p(S)$, l'on ait

$$h_p(u, v) = \sum_{k=1}^{g} \omega_k(p).u \, \overline{\omega_k(p).v}.$$

Avec les notations adoptées ici, dans une carte holomorphe locale, on obtient $h = \sum_{k=1}^{g} |f_k(z)|^2 dz \otimes d\bar{z}$.

2 Points de Weierstraß d'ordre n

L'ensemble des *points de Weierstraß d'ordre n* sur S est

$$S[n] = \{p \in S \; ; \; l(nK_S - d(p)) \geq 1\}.$$

Donnons une autre description de ces points. Soit p un point de S. Par induction, l'on construit une base $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ de l'espace $H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$, telle que, pour $1 \leq i \leq d$, la quantité

$$v_p(\omega_i) = \rho_i(p) - 1$$

soit minimale. On définit ainsi la suite

$$1 = \rho_1(p) < \rho_2(p) < \cdots < \rho_d(p) \leq d + g$$

des *lacunes de Weierstraß d'ordre n en p*. Les *non-lacunes de Weierstraß d'ordre n en p* sont les g entiers

$$2 \leq r_1(p) < r_2(p) < \cdots < r_g(p) \leq d + g,$$

tels que

$$[\![1, d+g]\!] = \{\rho_1(p), \ldots, \rho_d(p)\} \cup \{r_1(p), \ldots, r_g(p)\}.$$

On définit le *poids de Weierstraß d'ordre n en p* par

$$\mathcal{P}_n(p) = \sum_{i=1}^{d} (\rho_i(p) - i).$$

Comme $\rho_i(p) \geq i$, cette quantité est ≥ 0. Un point $p \in S$ est un *point de Weierstraß d'ordre n* si $\mathcal{P}_n(p) > 0$. Les points de Weierstraß d'ordre n sont donc les points en lesquels les lacunes de Weierstraß n'atteignent pas leurs valeurs minimales *i.e.* les $p \in S$ tels que $2 \leq r_1(p) \leq d$. Il n'y a en fait qu'un nombre fini de tels points (*cf.* [4]). Plus précisément, $\mathcal{P}_n(p) \leq \frac{1}{2}g(g+1)$ et le poids total des points de Weierstraß d'ordre n est

$$\sum_{p \in S[n]} \mathcal{P}_n(p) = \begin{cases} g^3 - g & \text{si } n = 1, \\ d^2 g & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

La proposition suivante donne une caractérisation, en des termes plus pratiques pour notre propos, des points de Weierstraß d'ordre n.

Proposition 2.1 *Soit r un entier tel que $2 \leq r \leq d$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) p est un point de Weierstraß et r est la plus petite non-lacune ≥ 2 en p.
b) Soit $\{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$ et (U, z) une carte holomorphe locale d'ordre 1 en p en laquelle, $\forall k \in \{1, \ldots, d\}$, $\omega_k(z) = f_k(z)(dz)^n$. Les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{r-2} f(p))$ forment une famille libre et $(f(p), \ldots, \partial^{r-1} f(p))$ une famille liée.

En vertu du lemme **1.1**, la condition *b)* ci-dessus ne dépend ni de la base des $(1,0)$-formes holomorphes choisie, ni de la carte holomorphe choisie en p. Cette proposition, bien connue. est établie dans le cas $r = 2$ dans [6]. Pour le confort du lecteur, nous en donnons une démonstration par récurrence sur r.

En effet, supposons $r \geq 3$, la propriété vraie pour $s = 2, \ldots, r-1$ et, dans un premier temps, *b)* remplie. Soit $\omega = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \omega_k \in H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$. Localement en p, $\omega(z) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k f_k(z)(dz)^n = f(z)(dz)^n$ où $f(z) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k f_k(z)$. Il vient $\frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} f(p) = \sum_{i=0}^{r-2} \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial z^i} f(p)$. Supposons $v_p(\omega) \geq r-1$. Alors, $\forall i \in \{0, \ldots, r-2\}$, $\frac{\partial^i}{\partial z^i} f(p) = 0$, si bien que $\frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} f(p) = 0$ *i.e* $v_{z_0}(\omega) \geq r$ et r n'est pas une lacune de Weierstraß en p. Soit s la plus petite non-lacune de Weierstraß > 1 en p et supposons $1 < s < r$ (rappelons que $r \geq 3$). La proposition étant vraie pour s par l'hypothèse de récurrence, le *b)* correspondant montre que les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{s-1} f(p))$ forment une famille liée, ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance des vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{r-2} f(p))$, car $s - 1 \leq r - 2$. Par suite r est la plus petite non-lacune de Weierstraß.

Supposons maintenant la condition *a)* remplie : p est un point de Weierstraß et r la plus petite non-lacune de Weierstraß > 1 en p. Si les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{r-2} f(p))$ sont liés, soit s le plus grand entier tel que les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{s-2} f(p))$ forment un système libre. $\forall z \in \mathbf{C}$, $(f_1(z), \ldots, f_d(z)) \neq (0, \ldots, 0)$ (*cf.* [2] p. 119), donc $2 \leq s < r$. Par maximalité de s, le système de vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{s-1} f(p))$ est lié et il existe $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}) \in \mathbf{C}^s - \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\},\ \beta_{s-1} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} f_k(p) = \sum_{i=0}^{s-2} \beta_i \frac{\partial^i}{\partial z^i} f_k(p).$$

De plus $\beta_{s-1} \neq 0$ (sinon $\beta = 0$) et l'on peut poser, pour $i \in \{0, \ldots, s-2\}$, $\tilde{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\beta_{s-1}}$. On a alors $\partial^{s-1} f(p) = \sum_{i=0}^{s-2} \tilde{\beta}_i \partial^i f(p)$. Les conditions du *b)* de la proposition pour $s < r$ sont remplies : s est la plus petite non-lacune Weierstraß > 1 en p, ce qui contredit la minimalité de r. Donc les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{r-2} f(p))$ sont libres. Soit ρ le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1(p) & \partial f_1(p) & \ldots & \partial^{r-1} f_1(p) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_d(p) & \partial f_d(p) & \ldots & \partial^{r-1} f_d(p) \end{pmatrix}.$$

Comme $2 \leq r \leq d$, $1 \leq \rho \leq r$. Supposons $\rho = r$; en changeant au besoin l'ordre des indices, on peut supposer que la matrice $M(p)$, obtenue en supprimant à la matrice précédente les $d-r$ dernières lignes, est de déterminant non nul. Le système $(\mu_1, \ldots, \mu_r)M(p) = (0, \ldots, 0, 1)$ admet donc une unique solution $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbf{C}^r$. En ce cas, l'élément $\omega(z) = \sum_{i=1}^r \mu_i \omega_i(z)$ de $H^0(S, \mathcal{L}(nK_S))$ vérifie $\omega(p) = \cdots = \omega^{(r-2)}(p) = 0$ et $\omega^{(r-1)}(p) = 1$, si bien que $v_p(\omega) = r-1$ et r est une lacune de Weierstraß, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent $\rho < r$ et les vecteurs $(f(p), \ldots, \partial^{r-1} f(p))$ sont liés. La proposition en découle.

Par ailleurs, les espaces fondamentaux en $p \in S$ vérifient la

Proposition 2.2 *Pour tout $p \in S$, et tout entier i tel que $1 \leq i \leq d$, on a* $\dim V_{\rho_i(p)}(p) = i$. *Plus précisément,* $V_{\rho_i(p)}(p) = \mathrm{Vect}(\partial^{\rho_1(z)-1} f(z), \ldots, \partial^{\rho_i(z)-1} f(z))_{|_p}$.

Pour montrer la première assertion de cette proposition, il suffit d'établir que, $\forall i \in \{0, d-1\}$, l'inclusion $V_{\rho_i(p)}(p) \subset V_{\rho_{i+1}(p)}(p)$ est stricte, en posant $\rho_0(p) = 0$ et $V_0(0) = \{0\}$. Il est tout d'abord clair que $V_{\rho_1(p)}(p) = V_1(p) \neq \{0\}$. Notons $I = \{i \; ; \; 1 \leq i \leq d-1 \text{ et } V_{\rho_i(p)}(p) = V_{\rho_{i+1}(p)}(p)\}$. Supposons $I \neq \emptyset$ et soit i son plus petit élément. Comme $V_{\rho_{i+1}(p)}(p) = V_{\rho_i(p)}(p)$, il vient que $\forall j$ tel que $\rho_i(p) \leq j \leq \rho_{i+1}(p) - 1$ (dont l'existence est assurée par l'inégalité $\rho_i(p) \leq \rho_{i+1}(p) - 1$), l'on a $\partial^j f(p) \in V_{\rho_i(p)}(p)$. En particulier $\partial^{\rho_{i+1}(p)-1} f(p) \in V_{\rho_i(p)}(p)$. Par conséquent

$$\partial^{\rho_{i+1}(p)-1} f(p) = \sum_{m=0}^{\rho_i(p)-1} \beta_m \partial^m f(p)$$

où $(\beta_0, \ldots, \beta_{\rho_i(p)-1}) \in \mathbf{C}^{\rho_i(p)}$. Or $\rho_i(p) - 1 \leq \rho_{i+1}(p) - 2$, donc $\forall m \in \{0, \ldots, \rho_i(p) - 1\}$, $\partial^m f_{i+1}(p) = 0$, donc $\partial^{\rho_{i+1}(p)-1} f_{i+1}(p) = 0$, ce qui contredit la définition de $\rho_{i+1}(p)$. Par conséquent $I = \emptyset$ et $\forall i \in \{1, \ldots, d-1\}$, $V_{\rho_i(p)}(p)$ est strictement inclus dans $V_{\rho_{i+1}(p)}(p)$, si bien que $\dim V_{\rho_i(p)}(p) = i$. De plus, on a clairement l'inclusion $\mathrm{Vect}(\partial^{\rho_1(p)-1} f(p), \ldots, \partial^{\rho_i(p)-1} f(p)) \subset V_{\rho_i(p)}(p)$. Par récurrence sur i, on montre aisément que les vecteurs $(\partial^{\rho_1(p)-1} f(p), \ldots, \partial^{\rho_i(p)-1} f(p))$ forment un système libre. D'après ce qui précède, ceci montre l'inclusion inverse $V_{\rho_i(p)}(p) \subset \mathrm{Vect}(\partial^{\rho_1(p)-1} f(p), \ldots, \partial^{\rho_i(p)-1} f(p))$, et termine la démonstration de la proposition.

3 Fibrés osculateurs

Les résultats précédents permettent de définir, pour $1 \leq i \leq d$, l'application de Gauß généralisée [1]

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g_i} & \mathbf{G}(i, \mathbf{C}^d) \\ & & \\ p & \longrightarrow & V_{\rho_i(p)}(p) \end{array}$$

où $\mathbf{G}(i, \mathbf{C}^d)$ désigne la Grassmanienne d'ordre i de $\mathbf{C}^d$. On construit ainsi, pour $0 \leq i \leq d$, des fibrés *osculateurs* E_i de rang i au dessus de S par

$$E_0 = S \times \{0\}$$

et, pour $1 \leq i \leq d$,

$$E_i = \bigcup_{p \in S} (p, V_{\rho_i(p)}(p)) .$$

En effet, d'une part, si U est l'ouvert formé des points de S qui ne sont pas de Weierstraß, il est clair que les E_i construits ci-dessus sont des fibrés holomorphes au dessus de S, obtenus comme image réciproque par

[1] Dans le cas $n = i = 1$, cette application n'est autre que l'application de Gauß qui à un point d'une surface de Riemann compacte associe son espace tangent.

g_i du fibré tautologique au dessus de $\mathbf{G}(i, \mathbf{C}^g)$. Tel est encore le cas au-dessus des points de Weierstraß. En effet, au voisinage d'un point de Weierstraß p, S est un anneau local régulier de dimension 1, car S est une courbe lisse, donc un anneau de valuation discrète Spec$R$. Le morphisme

$$g_i : U \longrightarrow \mathbf{G}(i, \mathbf{C}^g)$$

s'interprète alors comme un morphisme

$$g_i : \mathrm{Spec} K \longrightarrow \mathbf{G}(i, \mathbf{C}^g),$$

où K est le corps des fractions de R. Par compacité de $\mathbf{G}(i, \mathbf{C}^g)$, le critère valuatif de propreté ([3], p. 101) affirme que g_i se prolonge de Spec$K$ à Spec$R$ de manière unique, on note encore g_i ce prolongement. On reproduit ce procédé en chaque point de Weierstraß (rappelons qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de Weierstraß).

Ces fibrés forment une tour :

$$S \times \{0\} = E_0 \subset TS = E_1 \subset \cdots \subset E_{d-1} \subset E_d = S \times \mathbf{C}^d$$

L'inclusion $E_i \subset S \times \mathbf{C}^d$ permet de munir E_i d'une métrique hermitienne canonique, induite par les métriques canoniques de S et de $\mathbf{C}^d$. On définit alors, pour $1 \leq i \leq d$, le fibré ξ_i comme étant le quotient E_i/E_{i-1}. Ce fibré hérite également d'une métrique hermitienne canonique. En effet

$$E_i/E_{i-1} \simeq E_{i-1}^{\perp},$$

l'isomorphisme étant C^{∞}. En d'autres termes,

$$\xi_i = \bigcup_{p \in S} \left(p, V_{\rho_{i-1}(p)}^{\perp}(p)\right),$$

et l'on a la

Proposition 3.1 *Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq d$, ξ_i est un fibré en droites sur S, hermitien et holomorphe.*

Une section holomorphe naturelle de chaque fibré ξ_i est donnée par l'application

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{\quad s_i \quad} \xi_i, \\ p &\longrightarrow \left(p, [\partial^{\rho_i(p)-1} f(p)]\right), \end{aligned}$$

où $[\partial^{\rho_i(p)-1} f(p)]$ désigne la classe de $\partial^{\rho_i(p)-1} f(p)$ dans $V_{\rho_i(p)}(p)/V_{\rho_{i-1}(p)}(p)$. Les fibrés ξ_i ainsi construits permettent de définir, pour $1 \leq k \leq d$, les fibrés en droites hermitiens et holomorphes F_k par :

$$F_k = \bigotimes_{i=1}^{k} \xi_i.$$

4 La caractérisation différentielle

Nous nous proposons ici de calculer explicitement, $\forall k \in [\![1, d]\!]$, le représentant canonique de la première classe de Chern du fibré F_k.

Posons $G_0(\emptyset) = 1$ et, pour tout entier $m \geq 1$, $G_m(< x_1, \ldots, x_m >)$ le déterminant de la matrice de Gramm du système de vecteurs $x_1, \ldots, x_m$. Si s est un entier ≥ -1, notons plus simplement $G_{s+1} = G_{s+1}(< f, \partial f, \ldots, \partial^s f >)$. On montre alors la formule suivante, établie pour le cas $s = 2$ dans [6] :

Proposition 4.1

$$\forall s \geq 2,\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \mathrm{Log}\,(G_{s-1}) = \frac{G_{s-2}G_s}{G_{s-1}^2}$$

La démonstration donnée ci-dessous de cette formule nous a été communiquée par J.-B. Bost ([2]), et simplifie grandement notre argumentation initiale. Il s'agit en effet d'établir que, si f est un germe d'applications holomorphes de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}^d$, on a :

$$||\Lambda_{i=0}^k f^{(i)}||^4 . \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \mathrm{Log}||\Lambda_{i=0}^k f^{(i)}||^2 = ||\Lambda_{i=0}^{k-1} f^{(i)}||^2 . ||\Lambda_{i=0}^{k+1} f^{(i)}||^2,$$

où l'on note $\Lambda_{i=0}^k f^{(i)} = f \wedge f' \wedge \cdots \wedge f^{(k)}$. Ceci découle des relations suivantes :

(i) Si φ ne s'annule pas, $\varphi^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \mathrm{Log}\varphi = \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \overline{z}} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}$.

(ii) $\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}} ||\Lambda_{i=0}^k f^{(i)}||^2} = \frac{\partial}{\partial z} ||\Lambda_{i=0}^k f^{(i)}||^2 = < f \wedge f' \wedge \cdots \wedge f^{(k-1)} \wedge f^{(k+1)}, f \wedge f' \wedge \cdots \wedge f^{(k)} >$.

(iii) $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} ||\Lambda_{i=0}^k f^{(i)}||^2 = ||f \wedge f' \wedge \cdots \wedge f^{(k-1)} \wedge f^{(k+1)}||^2$.

(iv) Si $a_1, \ldots, a_k, a, b \in \mathbf{C}^d$, on a

$$\begin{aligned} ||a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge a||^2 . ||a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b||^2 &= ||a_1 \wedge \cdots \wedge a_k||^2 . ||a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge a \wedge b||^2 \\ &\quad + | < a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge a, a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b > |^2. \end{aligned}$$

La relation (i) est élémentaire, (ii) et (iii) découlent de la sesquilinéarité de $<,>$ et de la formule de Leibniz. Enfin, pour établir (iv), il suffit de traiter le cas où les a_i sont orthonormés, et où a et b sont orthogonaux aux a_i. La relation (iv) se réduit ainsi à la formule de Lagrange classique : $||a||^2||b||^2 = ||a \wedge b||^2 + | < a, b > |^2$.

Nous avons construit des fibrés en droites, ξ_i, holomorphes et munis d'une métrique hermitienne canonique. Il existe alors (*cf.* [8] p. 63) une unique connexion sur ξ_i préservant la métrique hermitienne et de type $(1,0)$. Cette connexion canonique, ∇_i, induit une $(1,1)$-forme de courbure, R^{∇_i}. Notons ici $c_1(\xi_i)$ le représentant canonique de la première classe de Chern de ξ_i dans $H^2(S, \mathbf{R})$. Il est donné (*cf.* [8] p. 68) par la $(1,1)$-forme

$$c_1(\xi_i) = \frac{1}{2i\pi} R^{\nabla_i}.$$

Compte tenu de ce que

$$F_k = \bigotimes_{i=1}^k \xi_i,$$

le représentant canonique de la première classe de Chern de F_k est donné par

$$c_1(F_k) = \sum_{i=1}^k c_1(\xi_i) = \frac{1}{2i\pi} R_k$$

où $R_k = \sum_{i=1}^k R^{\nabla_i}$ est la $(1,1)$-forme de courbure canonique du fibré F_k. Or pour toute section sans zéros s du fibré ξ_i, on a (*cf.* [8] p. 72)

$$c_1(\xi_i) = \frac{1}{2i\pi} \partial \overline{\partial} \mathrm{Log}||s||^2.$$

En particulier, l'on peut choisir $s = s_i$. Il vient alors

$$||s_i(z)||^2 = \mathrm{d}^2(s_i(z), V_{\rho_{i-1}(z)}(z)) = \frac{G(< \partial^{\rho_1(z)-1} f(z), \ldots, \partial^{\rho_{i-1}(z)-1} f(z), \partial^{\rho_i(z)-1} f(z) >)}{G(< \partial^{\rho_1(z)-1} f(z), \ldots, \partial^{\rho_{i-1}(z)-1} f(z) >)},$$

et donc

$$R_k = \partial \overline{\partial} \mathrm{Log} \left(G_k(< \partial^{\rho_1(z)-1} f(z), \ldots, \partial^{\rho_k(z)-1} f(z) >) \right).$$

Soit p un point de Weierstraß de S, de plus petite non-lacune de Weierstraß $r \in [\![2, d]\!]$: les r premiers termes de la suite des lacunes de Weierstraß en p sont

$$(\rho_1(p), \ldots, \rho_{r-1}(p), \rho_r(p)) = (1, \ldots, r-1, \rho_r(p))$$

où $\rho_r(p) \geq r+1$. D'une part, d'après la proposition **2.1**, $\forall i \in [\![0, r-1]\!]$, $G_i(p) \neq 0$ et $G_r(p) = 0$. D'autre part, $\forall k \in [\![2, r]\!]$,

$$R_{k-1} = \partial\overline{\partial}\mathrm{Log}\,(G_{k-1}) = \frac{G_{k-2}G_k}{G_{k-1}^2},$$

en vertu de la proposition **4.1**.

Par suite, si $r \geq 3$, l'on a, $\forall k \in [\![1, r-2]\!]$, $R_k(p) \neq 0$ et $R_{r-1}(p) = 0$ et, si $r = 2$, $R_1(p) = 0$.

Réciproquement, si

$$r = \inf\{k \in [\![2, d]\!]\ ;\ R_{k-1}(p) = 0\},$$

il est clair, en vertu de la proposition **4.1**, que p est un point de Weierstraß de plus petite non-lacune de Weierstraß r.

Finalement nous avons établi la caractérisation suivante des points de Weierstraß d'ordre n en termes des fibrés holomorphes et hermitiens F_k, généralisant [6] où le cas $n = 1$ et $r = 2$ est traité :

Théorème 4.2 *Soit $p \in S$ et r un entier tel que $2 \leq r \leq d$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
a) p est un point de Weierstraß d'ordre n de plus petite non-lacune de Weierstraß r.
b) Le représentant canonique de la première classe de Chern du fibré F_{r-1} est nul en p et r est minimal pour cette propriété.

Remerciements : Je remercie chaleureusement J.-B. Bost, A. Chambert-Loir, M. Hindry, F. Lescure, V. Maillot et S. Nag pour les discussions que nous avons eues, et dont cet article a bénéficié, ainsi que le Max-Planck-Institut für Mathematik pour son hospitalité.

Bibliographie

[1] *R. D. M. Accola*, On generalized Weierstraß points on Riemann sufaces, *in* "Modular Functions in Analysis and Number Theory, ed. by T. A. Metzger, $n^0 5$, Lecture Notes in Math. and Stat. " Univ. of Pittsburgh, Pittsburgh, PA (1983), 1-19.

[2] *J.-B. Bost*, Communication personnelle, (15 mars 1995).

[3] *R. Hartshorne*, Algebraic Geometry, Springer-Verlag ; Heidelberg, 1977.

[4] *D. Laksov*, Weierstraß points on curves, *Astérisque* **87-88** (1981), 221-248.

[5] *F. Lescure*, Une métrique hermitienne canonique sur les surfaces de Riemann de genre ≥ 1, *C. R. Acad. Sci. Paris.* t. 281, Série I (1975), 459-462.

[6] *F. Lescure*, Une caractérisation différentielle des points de Weierstraß hyperelliptiques, *C. R. Acad. Sci. Paris.* t. 281, Série I (1975), 1043-1045.

[7] *D. Mumford*, Curves and their Jacobians, Univ. of Mich. Press, Ann Arbor. (1975).

[8] *A. Polombo*, Classes de Chern *in* Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi, Astérisque 58 (1978), 51-75.