UNE NOUVELLE PREUVE DE LA COÏNCIDENCE DES CLASSES DÉFINIES PAR M.-H. SCHWARTZ ET PAR R. MACPHERSON

PAOLO ALUFFI ET JEAN-PAUL BRASSELET

Résumé. Nous donnons une courte démonstration de ce que les classes des variétés singulières définies par Marie-Hélène Schwartz au moyen des "champs radiaux" coïncident avec la notion fonctorielle définie par Robert MacPherson.

A Marie-Hélène Schwartz

1. Introduction

Marie-Hélène Schwartz ([Sch65a], [Sch65b]) a défini, au milieu des années 60, une notion de *classes de Chern pour les variétés singulières* en cohomologie relative, ou, via dualité d'Alexander, en homologie à coefficients entiers. La méthode utilisée est la théorie d'obstruction appliquée à des champs de repères dont le comportement est controlé le long de la partie singulière.

Par la suite, le travail d'Alexander Grothendieck en vue de montrer un 'théorème de Riemann-Roch discret' a été à l'origine de la conjecture de l'existence (en caractéristique zéro) d'une théorie fonctorielle de classes de Chern, comme transformation naturelle du foncteur des fonctions constructibles dans une théorie d'homologie convenable. Cette conjecture est connue sous le nom de conjecture de Deligne-Grothendieck. Celle-ci a été résolue, dans les années 70, par Robert MacPherson [Mac74], lequel a ainsi donné une autre construction de classes de Chern pour les variétés singulières.

Le travail de R. MacPherson est indépendant de celui de M.H. Schwartz, bien que les deux notions aient des points communs : d'une part, les deux notions de classes spécialisent aux classes de Chern usuelles pour les variétés lisses ; d'autre part, le fait que le résultat de M.H. Schwartz étende le Théorème de Poincaré-Hopf aux variétés singulières peut être considéré comme un aspect de la propriété de fonctorialité satisfaite par les classes de MacPherson.

Il était donc naturel de conjecturer que ces deux notions coïncident, ce qui a été démontré en 1979 par M.H. Schwartz et le second auteur du présent article :

Théorème 1.1 ([BS81]). *Les classes de Chern homologiques de Schwartz et de MacPherson sont égales.*

La méthode de démonstration consiste à relier les indices des champs radiaux et les classes de Schwartz aux ingrédients principaux de la construction des classes de MacPherson, à savoir l'*obstruction d'Euler locale* et *la classe de Chern-Mather.*

Dans cet article, nous montrons plus directement l'égalité des classes de Schwartz et de MacPherson, sans nous servir des autres invariants des singularités. Ce nouveau point de vue est inspiré par une nouvelle expression de la notion de fonctorialité des classes de Chern en termes de classes définies pour les variétés lisses (mais non nécessairement *complètes*), obtenue par le premier auteur [Alu]. En fait, des développements ultérieurs ont rendu l'argument indépendant de cette référence, ce qui permet de présenter la présente version de façon autonome.

Dans la section 2, on montre qu'une classe définie pour les variétés X (éventuellement singulières) coïncide nécessairement avec la notion fonctorielle si

– elle peut être écrite comme somme des contributions des strates d'une stratification de X ;
– la contribution d'une strate non singulière S est préservée par morphismes respectant les stratifications ; et
– la classe coïncide avec la classe de Chern du fibré tangent d'une variété complète non singulière.

Dans la section 3 on remarque que les classes définies par Marie-Hélène Schwartz satisfont ces conditions, et le fait qu'elles coïncident avec les classes de MacPherson en résulte immédiatement.

2. Une caractérisation des classes de Chern fonctorielles

Dans cette section, nous travaillons sur un corps arbitraire algébriquement clos de caractéristique zéro, et dans le groupe de Chow A_*. Les résultats sont valables *a fortiori* pour les variétés complexes, en homologie.

2.1. Soit $\tilde{c}(X) \in A_*X$ une classe définie pour toutes les variétés (éventuellement singulières) X, comme une somme de contributions d'une décomposition de X en union finie disjointe de variétés (éventuellement incomplètes) *non singulières* S_i :

$$X = \amalg_i S_i \rightsquigarrow \tilde{c}(X) = \sum_i \tilde{c}(S_i, X) \quad ;$$

on dit que de telles décompositions sont *admissibles* (pour $\tilde{c}$). Comme nous le verrons, dans certains cas *toute* décomposition de X comme union finie disjointe de sous-variétés non singulières peut être admissible. Dans d'autres situations, des restrictions peuvent être imposées sur les décompositions pour être admissibles : par exemple, on peut demander aux variétés S_i d'être éléments d'une stratification de Whitney de X.

Nous supposons que les strates d'un diviseur à croisements normaux forment une décomposition admissible. Plus précisément : si D est un diviseur à croisements normaux simples, de composantes non singulières D_j, $j \in J$, d'une variété non singulière Y, on suppose que

$$\amalg_{I \subset J} D_I^\circ$$

est une décomposition admissible de Y, où D_I° désigne

$$(\cap_{j \in I} D_j) \smallsetminus (\cup_{j \notin I} D_j) \quad .$$

(Par exemple, $D_\emptyset^\circ$ est le complémentaire de D dans Y).

Cette propriété sera immédiatement satisfaite pour les décompositions que nous considérerons.

Définition 2.1. On dit que la classe $\tilde{c}(X)$ est *localement déterminée* si la condition suivante est réalisée :

– Si $f : Y \to X$ est un morphisme propre, S et $T := f^{-1}(S)$ resp. sont éléments d'une décomposition admissible de X, resp. Y, et f se restreint à un isomorphisme $T \to S$, alors

$$f_*\tilde{c}(T, Y) = \tilde{c}(S, X) \quad .$$

Exemple 2.2 (La classe fonctorielle). On désigne par $c_*(X) \in A_*(X)$ la classe définie par MacPherson dans [Mac74] (voir [Ful84], §19.1.7, pour l'adaptation de la définition au groupe de Chow $A_*(X)$, et [Ken90] pour l'extension aux corps arbitraires algébriquement clos de caractéristique zéro). Rappelons que cette classe est la valeur

$$c_*(X) := c_*(1\!\!1_X) \in A_*X$$

prise, sur la fonction caractéristique constante $1\!\!1_X$, par une transformation naturelle

$$c_* : F \rightsquigarrow A_*$$

du foncteur des fonctions constructibles dans le foncteur groupe de Chow. Ici $F(X)$ est le groupe des fonctions constructibles à valeurs entières sur X ; si $g : Y \to X$ est une application propre, l'image directe $g_*(\varphi)$ de la fonction constructible $\varphi = \sum_Z m_Z 1\!\!1_Z \in F(Y)$ est définie comme la fonction sur X dont la valeur en $p \in X$ est

$$g_*(\varphi)(p) := \sum m_Z\, \chi(g^{-1}(p) \cap Z) \quad .$$

Ici χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique, sur $\mathbb{C}$; pour l'extension aux autres corps de caractéristique zéro voir [Ken90] ou [Alu].

Si S désigne une sous-variété quelconque (en particulier non singulière) de X, on pose

$$c_*(S, X) := c_*(1\!\!1_S) \in A_*X \quad .$$

Alors *toute* décomposition de X comme union finie disjointe de sous-variétés non singulières est admissible pour c_*. En effet, si $X = \amalg_i S_i$ alors $1\!\!1_X = \sum_i 1\!\!1_{S_i}$ et donc

$$c_*(X) = c_*(1\!\!1_X) = \sum_i c_*(1\!\!1_{S_i}) = \sum_i c_*(S_i, X) \quad .$$

De plus, c_* est localement déterminée. En effet, soit $f : Y \to X$ une application propre qui se restreint à un isomorphisme $T \to S$. Alors

$$f_*c_*(T, Y) = f_*c_*(1\!\!1_T) = c_*f_*(1\!\!1_T) = c_*(1\!\!1_S) = c_*(S, X)$$

puisque c_* est une transformation naturelle, et par définition de l'image directe des fonctions constructibles.

Théorème 2.3. *Supposons que $\tilde{c}$ soit localement déterminée, et que*

$$\tilde{c}(V) = c(TV) \cap [V]$$

pour toute variété non-singulière complète V. *Alors $\tilde{c}$ coïncide avec la classe fonctorielle c_*.*

Preuve. Soit $X = \amalg_i S_i$ une décomposition admissible de X pour $\tilde{c}$; il suffit de montrer que $\tilde{c}(S_i, X) = c_*(S_i, X)$.

Si S est un élément de la décomposition, notons $\overline{S}$ son adhérence dans X, et considérons $f : Y \to \overline{S}$ une résolution plongée de $\overline{S}$, telle que le complément de $T := f^{-1}(S)$ dans $Y = \overline{T}$ soit un diviseur D à croisements normaux, de composantes non singulières D_j, $j \in J$. Comme $\tilde{c}$ et c_* sont toutes deux localement déterminées, il suffit de montrer que

$$\tilde{c}(T, Y) = c_*(T, Y) \in A_*Y \quad .$$

On a

$$Y = \amalg_{I \subset J} D_I^\circ \quad ,$$

d'où

$$\tilde{c}(Y) = \sum_{I \subset J} \tilde{c}(D_I^\circ, Y) \quad ,$$

ce qui, par le principe d'"inclusion-exclusion", donne

$$\tilde{c}(T, Y) = \tilde{c}(D_\emptyset^\circ, Y) = \sum_{I \subset J} (-1)^{|I|} \tilde{c}(D_I, Y) \quad ,$$

où $D_I = \cap_{j \in I} D_j$, et nous notons par $\tilde{c}(D_I, Y)$ la somme $\sum_{K \supset I} \tilde{c}(D_K^\circ, Y)$. Chaque D_I est complète et non singulière (puisque D est un diviseur à croisements normaux), donc l'inclusion $\iota : D_I \to Y$ est propre. Pour $K \supset I$ on a

$$\tilde{c}(D_K^\circ, Y) = \iota_* \tilde{c}(D_K^\circ, D_I) \quad ,$$

puisque $\tilde{c}$ est localement déterminée, et donc

$$\tilde{c}(D_I, Y) = \sum_{K \supset I} \iota_* \tilde{c}(D_K^\circ, D_I) = \iota_* \tilde{c}(D_I) = \iota_*(c(TD_I) \cap [D_I]) \quad .$$

En utilisant les mêmes arguments, on a la même expression pour $c_*(T, Y)$, d'où le résultat. $\square$

3. Les classes de Schwartz

Nous supposons maintenant que le corps de base est $\mathbb{C}$, et nous travaillons en homologie à coefficients entiers ; les considérations de la section précédante s'appliquent dans ce contexte, via l'application canonique du groupe de Chow dans l'homologie.

3.1. Notons $\tilde{c}$ la classe définie par Marie-Hélène Schwartz dans [Sch65a], [Sch65b]. Cette classe coïncide avec la classe de Chern (homologique) du fibré tangent pour les variétés non singulières complètes, et se calcule, dans le cas général, comme somme des contributions des strates S_i d'une stratification de Whitney de X :

$$\tilde{c}(X) := \sum_i \tilde{c}(S_i, X) \quad .$$

Autrement dit, les stratifications de Whitney sont des décompositions admissibles pour $\tilde{c}$.

Rappelons brièvement la définition des classes de Schwartz. La variété X est plongée dans une variété non singulière M, stratifiée par $M \setminus X$ et par les strates S_i de X. Pour $x \in M$, on note $E(x)$ le sous-espace de l'espace tangent T_xM formé des vecteurs tangents à la strate de M contenant x. La collection des sous-espaces $E(x)$ détermine un sous-espace E du fibré tangent TM. Ce n'est plus un fibré mais la notion d'une section de E est bien définie, comme section de TM à valeurs dans E. On considère alors l'espace E_r des r-repères ordonnés de vecteurs tangents aux strates de M. C'est un sous-espace du fibré T_rM des r-repères ordonnés de TM.

Considèrons aussi une triangulation K de M compatible avec la stratification, et une décomposition cellulaire D de M, duale de K. Les cellules de D sont transverses aux strates.

En dimension $r-1$, la classe de Schwartz est définie comme l'obstruction à la construction d'une section particulière Z_r de E_r sur X, appelée *champ de r-repères radial*. C'est en particulier une section de T_rM sans singularité sur le squelette de dimension (réelle) $2m-2r+1$ de la décomposition cellulaire duale D et avec singularités isolées sur le D–squelette de dimension $2(m-r+1)$. La construction est faite par récurrence sur la dimension des strates :

Les strates de dimension complexe (strictement) inférieure à $r-1$ n'apparaissent pas. Considérons une strate de dimension $(r-1)$. Les cellules de dimension (réelle) $2(m-r+1)$ intersectent une telle strate en un point (lorsque l'intersection est non vide). Sur une telle cellule, le r-repère est construit comme champ radial, et donc d'indice $+1$. Si $\dim_{\mathbb{C}} S = r-1$, on a alors :

$$\tilde{c}(S,X) = \sum_{K_\alpha \subset S} K_\alpha^{r-1}$$

Supposons que la construction soit déjà effectuée sur les strates de dimension inférieure à celle de S. Le r-repère Z_r est défini sur les strates du bord de S, avec des singularités a_j. Notons U le voisinage "cellulaire" de ∂S, composé des cellules de D duales des simplexes de ∂S. La construction s'effectue de façon à ce que, dans U, l'extension de Z_r, encore notée Z_r n'a pas d'autre singularité que les points a_j. D'après la construction des champs radiaux et comme prouvé dans Schwartz [Sch00], le r-repère Z_r satisfait aux propriétés suivantes :

1) L'indice $I(Z_r, a_j)$ est le même, calculé comme section du fibré tangent à la strate de a_j ou comme section de TM,

2) Le repère Z_r est sortant du voisinage cellulaire U. Cela signifie que sur $\partial U \cap S$, le r-repère Z_r est tangent à S et entrant dans $S \setminus U$,

3) Deux champs radiaux sont homotopes sur $\partial U \cap S$, comme sections de T_rS.

On étend alors Z_r, défini dans $S \cap U$, dans l'intérieur de S, avec singularités isolées a situées dans l'intersection de S avec les D-cellules de dimension $2(m-r+1)$. Autrement dit, les points a sont situés dans l'intersection de S avec les D-cellules duales des K-simplexes de dimension $2(r-1)$ contenus dans $S \setminus U$.

La contribution $\tilde{c}(S,X)$ de la strate S se calcule en termes des indices $I(Z_r, a)$ en ces points singuliers a de Z_r, situés dans $S \setminus \partial S$.

$$\tilde{c}(S,X) := \sum_{K_\alpha \subset S \setminus \partial S} \mu_\alpha K_\alpha^{r-1}$$

où les simplexes K_α sont de dimension $2(r-1)$ et

$$\mu_\alpha = \sum_{a \in D_\alpha \cap S} I(Z_r, a) \quad ,$$

où la cellule D_α est duale de K_α.

Une conséquence des Propriétés 2) et 3) est le Lemme suivant :

Lemme 3.1. *La contribution $\tilde{c}(S,X)$ ne dépend pas de la construction du repère radial sur les strates du bord ∂S. Autrement dit, deux champs radiaux Z_r et Z_r' définis* *sur $S \cap \partial U$ donnent lieu à des cycles équivalents*

$$\sum_{K_\alpha \subset S} \mu_\alpha K_\alpha^{r-1} \sim \sum_{K_\alpha \subset S} \mu'_\alpha K_\alpha^{r-1}$$

Remarquons que, via l'isomorphisme d'Alexander $H_{2(r-1)}(S) \cong H^{2p}(M, M \backslash S)$, avec $p = m - r + 1$, la classe $\tilde{c}(S, X)$ correspond à la classe notée $\hat{c}^{2p}(S)$ dans Schwartz.

D'après le Théorème 2.3, pour montrer le Théorème 1.1 il suffit de montrer que les classes de Chern de Schwartz sont localement déterminées, ce qui est l'objet du Lemme suivant :

Lemme 3.2. *Si $f : Y \to X$ est un morphisme propre, S et $T := f^{-1}(S)$ resp. sont éléments de décompositions admissibles de X, Y resp., et f se restreint à un isomorphisme $T \to S$, alors*

$$f_* \tilde{c}(T, Y) = \tilde{c}(S, X) \quad .$$

Preuve. Notons ∂S et ∂T les bords de S et T respectivement, unions de strates de X et Y et notons k la dimension (complexe) commune de S et T. Supposons effectuée la construction des classes de Schwartz de X et Y par récurrence sur la dimension des strates jusqu'en dimension $k - 1$ incluse. Cette construction donne lieu à deux champs de r-repères : l'un Z_r, défini sur un voisinage cellulaire U de ∂S, sortant de U, et l'autre W_r, défini sur un voisinage cellulaire V de ∂T, sortant de V. Nous avons donc la situation suivante :

Sur $S \cap \partial U$ le r-repère Z_r est tangent à S et entrant dans $S \setminus U$. Sur $T \cap \partial V$ le r-repère W_r est tangent à T et entrant dans $T \setminus V$. D'après l'hypothèse du Théorème, on a un isomorphisme des paires $(S \setminus U, S \cap \partial U) \cong (T \setminus V, T \cap \partial V)$. On conclut par le Lemme 3.1. □

Références

[Alu] P. Aluffi. Limits of Chow groups, and a new construction of Chern-Schwartz-MacPherson classes. FSU05-14, arXiv :math.AG/0507029.

[BS81] Jean-Paul Brasselet and Marie-Hélène Schwartz. Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe. In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 83 of *Astérisque*, pages 93–147. Soc. Math. France, Paris, 1981.

[Ful84] William Fulton. *Intersection theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Ken90] Gary Kennedy. MacPherson's Chern classes of singular algebraic varieties. *Comm. Algebra*, 18(9) :2821–2839, 1990.

[Mac74] Robert D. MacPherson. Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 100 :423–432, 1974.

[Sch65a] M.-H. Schwartz. Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. I. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 260 :3262–3264, 1965.

[Sch65b] M.-H. Schwartz. Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. II. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 260 :3535–3537, 1965.

[Sch00] M.-H. Schwartz. *Classes de Chern des ensembles analytiques.* Hermann, Paris, 2000.

Mathematics Department, Florida State University, Tallahassee FL 32306, U.S.A.
E-mail address: `aluffi@math.fsu.edu`

IML – CNRS, Case 907, Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail address: `jpb@iml.univ-mrs.fr`