REFLEXIVE MODULN AUF EINFACH-ELLIPTISCHEN FLÄCHENSINGULARITÄTEN

Constantin Kahn

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

(bis 1.8.1987)

Brandeis University
Department of Mathematics
Waltham, Massachusetts 02254
USA

(ab 15.8.1987)

MPI 87-25

INHALTSVERZEICHNIS.

EINLEITUNG.

Eines der Leitmotive in der Singularitätentheorie, namentlich bei der Untersuchung isolierter Singularitäten normaler komplexer Flächen, worauf wir uns im folgenden beschränken wollen, besteht in der Frage nach aussagekräftigen Invarianten von Singularitäten und deren Beziehungen zu anderen Daten, insbesondere etwa zur Geometrie der Auflösungen der Singularitäten.

Ein naheliegendes Objekt dieser Art, das nur von dem biholomorphen Isomorphietyp einer Flächensingularität $x \in X$ abhängt, ist die Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren Vektorraumbündeln auf dem punktierten Spektrum $X-\{x\}$. (Dabei sei X von der Gestalt eines Durchschnittes einer komplexen Fläche mit einer hinreichend kleinen Kugel um x in einem affinen Raum.) Diese Isomorphieklassen von unzerlegbaren Vektorraumbündeln stehen in natürlicher Bijektion zu den Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der Singularität. (Ein Modul M über $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,x}$ heißt reflexiv, wenn die natürliche Abbildung $M \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M,\mathcal{O}),\mathcal{O})$ ein Isomorphismus ist.)

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zu der in jüngerer Zeit populär gewordenen Untersuchung der Mengen von Isomorphieklassen unzerlegbarer reflexiver Moduln über den lokalen Ringen normaler Flächensingularitäten geleistet werden, indem eine neue geometrische Methode zur Klassifikation der reflexiven Moduln unter Zuhilfenahme der Auflösungen von Singularitäten vorgestellt wird und anschließend ein umfangreiches Beispiel mit diesem Verfahren untersucht wird.

Ehe wir auf die in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse eingehen, widmen wir eine Reihe von Bemerkungen der Vorgeschichte des hier betrachteten Gegenstandes. (Dafür sei auch auf die beiden ausgezeichneten Übersichtsartikel [**Kn₁**] und [**Sch**] von H. Knörrer und F.-O. Schreyer hingewiesen. Dort sind auch Nachweise der im folgenden nicht explizit zitierten Originalarbeiten zu finden.)

Zieht man an Stelle von Vektorraumbündeln auf dem punktierten Spektrum einer Singularität nur Geradenbündel in Betracht, so handelt es sich bei dem oben aufgeworfenen Klassifikationsproblem um die Frage nach der Divisorenklassengruppe des lokalen Ringes, die ein prominenter Gegenstand der kommutativen Algebra ist und auch in ihren Beziehungen zur Geometrie der Auflösungen von Singularitäten schon früh von Mumford, Brieskorn und Lipman ([**Mu**], [**Bri**], [**Li**]) untersucht wurde.

Vektorraumbündel auf dem Komplement eines singulären Punktes beschreibt dann J. Herzog (in der Sprache von Moduln) in [He] (1978) für den Fall eines rationalen Doppelpunktes $0 \in X = \mathbb{C}^2/G$, wobei G eine endliche (und spiegelungsfreie) Untergruppe von $SL_2(\mathbb{C})$ ist. Man erhält hier jedes Bündel auf $X-\{0\}$ als das zu einer Darstellung der zu G isomorphen Fundamentalgruppe $\pi_1(X-\{0\})$ assoziierte Bündel. In dieser Weise besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den Isomorphieklassen der unzerlegbaren Bündel und den Konjugationsklassen der irreduziblen Darstellungen von G.

Kurz darauf hat J. McKay eine bemerkenswerte Beobachtung veröffentlicht (1980): Wenn man auf der Menge der Konjugationsklassen von irreduziblen Darstellungen von G (wie zuvor) eine Köcherstruktur dadurch definiert, daß man einen Pfeil $\rho \to \rho'$ schreibt, wenn ρ' ein direkter Summand des Tensorproduktes $\rho \otimes \rho_0$ von ρ mit der natürlichen zweidimensionalen Darstellung ρ_0: $G \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ ist, und man Paare einander entgegengerichteter Pfeile zu ungerichteten Kanten zusammenfaßt, dann ergibt sich ein zum erweiterten Dynkin-Diagramm der Auflösung der Singularität $0 \in \mathbb{C}^2/G$ isomorpher Graph. Außerdem entsprechen die Ränge der Darstellungen gerade den Multiplizitäten der zugehörigen irreduziblen Kurven im Fundamentalzykel der Auflösung. (Der im erweiterten Dynkin-Diagramm hinzukommende Punkt, der zu keiner Kurve im exzeptionellen Ort korrespondiert, entspricht der trivialen eindimensionalen Darstellung $\rho = 1$.)

Intrinsische und mehr oder weniger geometrische Begründungen für diesen Sachverhalt sind in der Folge von Gonzalez-Sprinberg und Verdier, Artin und Verdier, Esnault und Knörrer, sowie Auslander und Reiten gegeben worden. 1985 hat J. Wunram zudem diesen Zusammenhang für beliebige zweidimensionale Quotientensingularitäten verallgemeinert.

Schon in den zuvor zitierten Beweisen der nun so genannten McKay-Korrespondenz ist offenkundig geworden, daß die von McKay beschriebene Köcherstruktur lediglich eine viel allgemeinere Konzeption widerspiegelt, die aus der moderneren Darstellungstheorie bekannt ist. Bei diesen sogenannten Auslander-Reiten-Köchern entsprechen die Punkte den Isomorphieklassen von unzerlegbaren Objekten einer geeigneten Kategorie und die Pfeile den irreduziblen Homomorphismen zwischen derartigen Objekten. (In einer ersten Annäherung handelt es sich bei den irreduziblen Homomorphismen um diejenigen Nicht-Isomorphismen, die nur in trivialer Weise faktorisiert werden können.) Mit den zugehörigen Auslander-Reiten-Köchern gewinnt man insbesondere eine zusätzliche kombinatorische Struktur auf den Mengen von Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln über den lokalen Ringen von normalen Flächensingularitäten.

Die naheliegende erste Frage nach dem endlichen Darstellungstyp, also wann es nur endlich viele Isomorphietypen von unzerlegbaren reflexiven Moduln gibt, ist von Artin-Verdier, Auslander und Esnault vollständig beantwortet worden: Genau die Quotientensingularitäten sind die normalen Flächensingularitäten von endlichem Darstellungstyp. Deren Moduln kennt man nach Herzog; die Köcher hat Wunram explizit beschrieben.

Darüber hinaus gibt es verblüffend wenige explizite Resultate über die nicht endlichen Auslander-Reiten-Köcher von reflexiven Moduln über den lokalen Ringen normaler Flächensingularitäten, die keine Quotientensingularitäten sind. Dieser Mißstand liegt im wesentlichen in einem Mangel an geeigneten Methoden zur Klassifikation reflexiver Moduln begründet. Im Falle der Quotientensingularitäten verfügt man über starke invariantentheoretische Hilfsmittel, die in anderen Situationen nicht vorhanden sind. Zwar gibt es für Hyperflächensingularitäten nach Eisenbud eine elegante Beschreibung von reflexiven Moduln durch Matrixfaktorisierungen (i.e. periodischen Auflösungen mit Periode 2; vgl. [**Sch**]), jedoch hat sich dieser Zugang bislang hauptsächlich in theoretischen Untersuchungen bewährt.

Eine der aus der Betrachtung von Matrixfaktorisierungen gewonnenen Aussagen ist die von H. Knörrer in [$\mathbf{Kn_2}$] bewiesene Korrespondenz zwischen den reflexiven Moduln auf einer Hyperflächensingularität X der Multiplizität 2, die sich generisch zweiblättrig dem $\mathbb{C}^2$ überlagern läßt, und den torsionsfreien Moduln auf der als Verzweigungsort einer solchen Überlagerung in $\mathbb{C}^2$ definierten ebenen Kurvensingularität Y. Diese Korrespondenz erlaubt - nicht ohne Mühe - Rückschlüsse zu ziehen aus der Struktur des Auslander-Reiten-

Köchers der unzerlegbaren torsionsfreien Moduln auf Y auf den Auslander-Reiten-Köcher der reflexiven Moduln auf X.

Tatsächlich verfügt man im Bereich der Klassifikation von torsionsfreien Moduln über den lokalen Ringen von ebenen Kurvensingularitäten über die meisten expliziten Resultate. So hat E. Dieterich in [Di₁] den entsprechenden Auslander-Reiten-Köcher für die Kurvensingularitäten vom Typ $\tilde{E}_8$ (s.u.) vollständig bestimmt. Darüber hinaus hat A. Schappert eine komplette Klassifikation der torsionsfreien Moduln vom Rang 1 auf den ebenen unimodularen Kurvensingularitäten angegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, das es, ohne die behandelbaren Singularitäten a priori starken Einschränkungen zu unterwerfen, gestattet, die reflexiven Moduln auf einer normalen Flächensingularität in einer geometrischen Weise zu beschreiben und zumindest prinzipiell auch zu klassifizieren. Dies geschieht, indem das Problem der Klassifikation der reflexiven Moduln über dem lokalen Ring einer normalen Flächensingularität $x \in X$ auf das gleichwertige Problem der Klassifikation gewisser lokal freier Garben über einem im exzeptionellen Ort $E \subset \tilde{X}$ einer Auflösung $\tilde{X}$ von $x \in X$ konzentrierten Zykel $Z > 0$ zurückgeführt wird. (Ein solcher Zykel beschreibt ein abgeschlossenes Unterschema von $\tilde{X}$ und über diesem werden die lokal freien Garben betrachtet.)

Dieser Zugang bietet insbesondere den Vorteil, gänzlich ohne die Kenntnis der Erzeugenden und Relationen des lokalen Ringes der Singularität auszukommen. Wir bestimmen mit dieser Methode die Auslander-Reiten-Köcher zu allen einfach-elliptischen Flächensingularitäten.

Wir geben nun einen Überblick über die in den folgenden Kapiteln enthaltenen Aussagen.

Die beiden ersten Kapitel sind reine Übersichtskapitel. Im ersten Kapitel werden Eigenschaften von normalen Flächensingularitäten zusammengestellt, wobei besonderes Augenmerk den auf der Auflösung einer Flächensingularität geltenden Dualitätssätzen zukommt. Außerdem werden kurze Übersichten über die Klassen der rationalen und der minimal-elliptischen Flächensingularitäten gegeben.

Das zweite Kapitel besteht seinerseits aus zwei Teilen. In dem ersten Teil werden die diversen garbentheoretischen und algebraischen Charakterisierungen von reflexiven Moduln über den lokalen Ringen von normalen Flächensingularitäten einander gegenüber gestellt. Im zweiten Teil werden die oben nur kurz angerissenen Definitionen und Eigenschaften der Auslander-Reiten-Köcher von reflexiven Moduln ausführlich dargestellt. Dazu gehört auch die von Auslander beschriebene Methode zur Bestimmung der Pfeile im Auslander-Reiten-Köcher mit Hilfe der von ihm eingeführten Fundamentalsequenz (2.30, 2.32). Die einzige nicht in der Literatur zu findende Aussage des Kapitels 2 ist die Proposition 2.35, die die Fundamentalsequenz in dem Fall einer quasihomogenen Flächensingularität angibt.

Zusammen mit dem darauf folgenden Kapitel bildet das dritte Kapitel den technischen Kern der vorliegenden Arbeit.

Hierfür sei $x \in X$ eine normale Flächensingularität, $\pi: \tilde{X} \to X$ eine Auflösung mit exzeptionellem Ort E und Z ein effektiver Divisor auf $\tilde{X}$ mit Trägermenge E. Dann wird einer reflexiven Modulgarbe M auf X eine lokal freie Garbe auf $\tilde{X}$ dadurch zugeordnet, daß das Bidual (über $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$) der Urbildgarbe π^*M gebildet wird. Die Einschränkung dieser lokal freien Garbe auf das durch Z definierte abgeschlossene Unterschema von $\tilde{X}$ mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ ist eine lokal freie Garbe über $\mathcal{O}_Z$, die mit $R_Z(M)$ bezeichnet wird. Bei geeigneter Wahl des Zykels Z als sogenanntem "Reduktionszykel" (3.20) definiert R_Z eine injektive Abbildung von der Menge der Isomorphieklassen reflexiver $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln in die Menge der Isomorphieklassen lokal freier $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben. Auch das Bild der Abbildung R_Z kann explizit beschrieben werden, wenn Z ein Reduktionszykel ist. Als Ergebnis erhalten wir mit Theorem 3.21, daß die Menge der Isomorphieklassen reflexiver $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln via R_Z bijektiv der Menge der Isomorphieklassen derjenigen lokal freien Garben F über $\mathcal{O}_Z$ entspricht, für die gilt:

(i) F wird außerhalb diskreter Punkte von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) Es gibt eine Ausdehnung von F zu einer lokal freien Garbe F_{2Z} über $\mathcal{O}_{2Z}$, so daß die durch die Sequenz $0 \to F \to F_{2Z}(Z) \to F(Z) \to 0$ definierte Corandabbildung $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ injektiv ist.

Die Bedingung (ii) wird im vierten Kapitel genauer untersucht. Am Ende von Kapitel 3 wird noch ausgeführt, daß sich Reduktionszykel von Auflösungen von rationalen Singularitäten analog zum Artinschen Fundamentalzykel durch

Berechnungssequenzen gewinnen lassen und daß auf der minimalen Auflösung einer minimal-elliptischen Singularität der Fundamentalzykel selbst ein Reduktionszykel ist. Das das Kapitel 3 beschließende Beispiel 3.28 zeigt, daß dies bei rationalen Singularitäten nicht der Fall ist: Hier muß der Reduktionszykel im allgemeinen größer als der Fundamentalzykel gewählt werden.

In dem dritten Kapitel wurden keine einschränkenden Annahmen über die normale Flächensingularität $x \in X$ gemacht. Dementsprechend abstrakt und unzugänglich erscheint bei erster Betrachtung auch das dort hergeleitete zur Klassifikation der reflexiven Moduln äquivalente Klassifikationsproblem von lokal freien $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben F, die den beiden oben genannten Bedingungen (i) und (ii) genügen. In dem Kapitel 4 wird die Aussage des Theorems 3.21 für rationale und für minimal-elliptische Singularitäten konkretisiert - sie erweist sich als sogar besonders gut zugänglich. Man erhält nämlich:

(1) Ist $x \in X$ eine rationale Singularität, so sind die Bilder unter R_Z von unzerlegbaren reflexiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln genau die unzerlegbaren lokal freien $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben F, für die gilt:

(i) F wird von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) $H^0(E,F(Z)) = 0$.

(2) Ist $x \in X$ eine minimal-elliptische Singularität, $\tilde{X}$ die minimale Auflösung von X und Z der Fundamentalzykel, so sind die Bilder unter R_Z der zu $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht isomorphen unzerlegbaren reflexiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln genau die lokal freien Garben der Form $n\mathcal{O}_Z \oplus G$ über $\mathcal{O}_Z$, für die gilt:

(i) G ist unzerlegbar und wird außerhalb diskreter Punkte von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) $H^1(E,G) = 0$;

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(E,G(Z)) = n$.

In Kapitel 5 wird die zuletzt unter (2) gemachte Aussage zur Klassifikation der reflexiven Moduln auf den einfach-elliptischen Singularitäten verwendet. Dies sind normale Flächensingularitäten, deren minimale Auflösungen als exzeptionelle Kurven E einzelne glatte elliptische Kurven mit negativen Selbstschnittzahlen aufweisen. In diesem Fall ist der Fundamentalzykel die reduzierte elliptische Kurve E und man kann sich der von Atiyah angegebenen Klassifikation der Vektorraumbündel auf E bedienen, die zu Beginn von Kapitel 5 kurz resümiert und in einem Anhang am Ende des Kapitels eingehender erläutert wird.

Die Anwendung der Resultate des Kapitels 4 erbringt, daß die Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln über dem lokalen Ring einer einfach-elliptischen Singularität eine disjunkte Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Kopien der Kurve E ist (5.16). Der daraus gebildete Auslander-Reiten-Köcher ist eine über die Menge der Tripel $(r,d,\lambda)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times E$, für die r,d teilerfremd sind und $r\leq d<(b+1)r$ mit $b:=-E^2$ gilt, indizierte disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten der Gestalt

$$M_{r,d}(\lambda) \rightleftarrows M_{2r,2d}(\lambda) \rightleftarrows M_{3r,3d}(\lambda) \rightleftarrows M_{4r,4d}(\lambda) \rightleftarrows \dots$$

wobei der erste Index jeweils den Rang des betreffenden Moduls angibt und der zweite Index in gewisser Hinsicht als ein "Grad" interpretiert werden kann und $\lambda\in E$ (richtiger: $\lambda\in \mathrm{Pic}^\circ E$) ein kontinuierlicher Modulparameter ist. Es sei noch bemerkt, daß es sich in bezug auf λ hierbei nicht um flache Familien von Moduln handelt (5.22). In Kapitel 5 wird eine Reihe von elementaren Eigenschaften der unzerlegbaren reflexiven Moduln über den lokalen Ringen von einfach-elliptischen Singularitäten bewiesen, darunter im Schlußabschnitt des Kapitels eine Kennzeichnung der im Sinne von Herzog und Kühl ([**HeKü**]) "orientierbaren" unzerlegbaren Moduln.

In Kapitel 6 wird untersucht, inwieweit die bei Quotientensingularitäten nach Herzog ([**He**]) vorhandene bijektive Beziehung zwischen den Konjugationsklassen von (endlich-dimensionalen) unzerlegbaren Darstellungen der lokalen Fundamentalgruppe und den Isomorphieklassen der unzerlegbaren reflexiven Moduln bei den in Kapitel 5 betrachteten einfach-elliptischen Singularitäten fortbesteht.

Die lokale Fundamentalgruppe einer einfach-elliptischen Singularität mit Selbstschnittzahl -b der exzeptionellen elliptischen Kurve E in der minimalen Auflösung ist eine sogenannte diskrete Heisenberg-Gruppe H_b, die von drei Elementen α,β,γ mit (multiplikativen) Kommutator-Relationen

$$[\alpha,\gamma] = 1, \qquad [\beta,\gamma] = 1 \qquad \text{und} \qquad [\alpha,\beta] = \gamma^b$$

erzeugt wird. Es wird gezeigt, daß sich jede unzerlegbare endlich-dimensionale Darstellung ρ von H_b in ein Tensorprodukt $\chi\otimes\tau\otimes\sigma$, bestehend aus einem Charakter χ mit $\chi(\gamma)=1$, einer unitären Darstellung τ und einer Darstellung σ in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, faktorisieren läßt (6.13). Als leichte Konsequenz daraus folgt, daß jedes Vektorraumbündel auf dem punktierten Spektrum einer einfach-elliptischen Singularität das assoziierte

Vektorraumbündel zu einer geeigneten Darstellung der lokalen Fundamentalgruppe H_b ist (6.15), so daß nach wie vor jeder unzerlegbare reflexive Modul durch eine unzerlegbare endlichdimensionale Darstellung der lokalen Fundamentalgruppe induziert wird.

Weil aber das Klassifikationsproblem der Darstellungen von H_b, wie in 6.19 gezeigt wird, ein "wildes" Problem ist, das alle Pathologien der Aufgabe der Klassifikation von Paaren von Matrizen unter simultaner Konjugation aufweist, kann man keine bijektive Beziehung zwischen Konjugationsklassen von Darstellungen und Isomorphieklassen von reflexiven Moduln erwarten, weil schon die Frage nach der Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen von H_b nicht sinnvoll ist.

Allerdings zeigen wir in der zweiten Hälfte des Kapitels 6, daß eine vollständige Klassifikation derjenigen Darstellungen möglich ist, deren assoziierte Vektorraumbündel auf dem punktierten Spektrum unzerlegbar sind. (Dies ist eine erheblich stärkere Bedingung als nur die Unzerlegbarkeit der Darstellung.) Wegen der Kompliziertheit des Ergebnisses (6.25) verzichten wir hier auf eine Wiedergabe. Es sei aber zumindest erwähnt, daß den Modulräumen selbst solcher Darstellungen die Hausdorff-Eigenschaft fehlt. (6.27-6.29)

In Kapitel 7 bestimmen wir die Auslander-Reiten-Köcher der torsionsfreien Moduln auf den ebenen Kurvensingularitäten der Typen $\tilde{E}_8$ und $\tilde{E}_7$. Singularitäten vom Typ $\tilde{E}_8$ bestehen aus drei glatten Zweigen, die sich in einem Punkt tangential von erster Ordnung berühren; bei den Singularitäten des Typs $\tilde{E}_7$ handelt es sich um vier glatte Zweige mit einem gemeinsamen transversalen Schnittpunkt. Beide Arten von Kurvensingularitäten treten als Verzweigungsorte von generisch zweiblättrigen Überlagerungen des $\mathbb{C}^2$ durch einfach-elliptische Flächensingularitäten der Multiplizität 2 in Erscheinung, so daß die schon früher in dieser Einleitung erwähnte Knörrersche Korrespondenz zwischen den reflexiven Moduln der Flächensingularität und den torsionsfreien Moduln der Kurvensingularität zur Ableitung der Auslander-Reiten-Köcher von Kurvensingularitäten der Typen $\tilde{E}_8$ und $\tilde{E}_7$ aus den Ergebnissen von Kapitel 5 herangezogen werden kann.

Damit wird ein Ergebnis von E. Dieterich über $\tilde{E}_8$ ([Di_1]) in qualitativer Hinsicht reproduziert. In der Tat hat aber umgekehrt die Kenntnis des Dieterichschen Ergebnisses mitsamt der vermuteten Aussage des Kapitels 7 dem Verfasser bei der Entwicklung seiner Ergebnisse von Kapitel 5 geholfen.

Wir weisen noch kurz auf eine Reihe von Konventionen in dieser Arbeit hin. Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$ werden wie üblich die natürlichen Zahlen (ohne 0), die ganzen Zahlen und die komplexen Zahlen mit und ohne 0 bezeichnet. weiter seien $M_r(\mathbb{C})$ und $GL_r(\mathbb{C})$ die Mengen der $r \times r$-Matrizen mit komplexen Einträgen und der invertierbaren Matrizen darin; mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ werden die Null- und die Einheitsmatrix bezeichnet. In Kapitel 6 kommen noch die Bezeichnungen $Unip_r(\mathbb{C})$ und $Nilp_r(\mathbb{C})$ für die unipotenten und die nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen in $M_r(\mathbb{C})$ hinzu.

Direkte Summen von n Kopien eines Moduls oder einer Garbe G werden hier mit nG bezeichnet (gebräuchlicher sind G^n oder $G^{\oplus n}$). Wenn in dieser Arbeit von einer Garbe die Rede ist, so ist stets eine kohärente Garbe von Moduln über der Strukturgarbe des unterliegenden komplexen Raumes darunter zu verstehen.

Bei der Angabe von Matrizen in Kapitel 6 folgen wir der Konvention, mit 0 besetzte Einträge in der Regel einfach offen zu lassen. Vor einer weiteren Untiefe in Kapitel 6 sei auch schon hier gewarnt: Kommutatoren werden in der ersten Hälfte des Kapitels, die von Darstellungen von Gruppen handelt, multiplikativ, also als $[X,Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$, verstanden, in der zweiten Hälfte des Kapitels im Zusammenhang mit Darstellungen von Liealgebren aber selbstverständlich im Sinne von $[X,Y] = XY - YX$ gebraucht. (Diese Ambiguität hat nicht der Verfasser zu verantworten. Es ist versucht worden, es im Text nicht an Hinweisen fehlen zu lassen.)

Im übrigen verweisen wir als allgemeine Referenzen für Aussagen über komplexe Räume auf die beiden Bände [**CAS**] und [**AS**], für normale Flächensingularitäten auf [**NTS**] und für kommutative Algebra auf [**CRT**].

Schließlich möchte ich für die Anregungen und Diskussionen, mit denen sie zu dieser Arbeit beigetragen haben, K. Behnke, E. Dieterich, H. Esnault und F.-O. Schreyer herzlich danken. Mein Dank gilt auch dem Max-Planck-Institut für Mathematik und Prof. F. Hirzebruch für die Förderung durch ein Promotionsstipendium.

Ganz besonders aber will ich H. Knörrer danken, der nicht nur das interessante und ergiebige Thema für diese Arbeit gestellt hat, sondern auch durch zahllose Hinweise und Ermutigungen das Gelingen der Arbeit erst möglich gemacht hat.

1. NORMALE FLÄCHENSINGULARITÄTEN.

Dies ist ein Übersichtskapitel, in dem zahlreiche Definitionen und Sätze aus der Theorie der isolierten Singularitäten von komplexen Flächen zusammengetragen werden. Die Darstellung erfolgt durchgängig ohne die Angabe von Beweisen. Die hier aufgeführten Sätze und Definitionen werden in den folgenden Kapiteln in der Regel ohne ausdrückliche Verweise herangezogen werden. Eine der Funktionen des vorliegenden Kapitels besteht daher in der Festlegung der betrachteten Situation nebst einer Reihe von daran gebundenen Bezeichnungen.

Als eine generelle Referenz für die im folgenden gemachten Aussagen kann das Buch [**NTS**] von Laufer dienen.

Allgemeines und Bezeichnungen. Unter (X,x) wollen wir in diesem Kapitel stets den Keim einer komplex-analytischen Flächensingularität verstehen. Wir untersuchen in dieser Arbeit ausschließlich normale Flächensingularitäten $x \in X$, für die der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ keine Nullteiler enthält und ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist. Jede normale Flächensingularität ist isoliert.

Zu jeder zweidimensionalen Singularität (X,x) existiert eine Auflösung, also eine komplexe zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$ und eine eigentliche holomorphe Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$, so daß das Komplement der exzeptionellen Faser $E := \pi^{-1}(x)$ dicht in $\tilde{X}$ ist und die Einschränkung $\pi' : \tilde{X}-E \to X-\{x\}$ von π biholomorph ist. Zweckmäßigerweise versteht man $\tilde{X}$ als den Keim einer lokal um die exzeptionelle Faser definierten komplexen Mannigfaltigkeit; dies soll durch die Schreibweise $\pi : (\tilde{X},E) \to (X,x)$ zum Ausdruck gebracht werden.

Die exzeptionelle Faser E ist eine zusammenhängende eindimensionale kompakte komplexe Untervarietät von $\tilde{X}$, die im allgemeinen aus mehreren irreduziblen Komponenten $E_1,\dots,E_k$ besteht, die selbst Singularitäten aufweisen können. Mit Hilfe des in der singulären Cohomologie von $\tilde{X}$ definierten Schnittproduktes (vgl. [**PAG**, pp. 49-53]) ist der exzeptionellen Faser E eine ganzzahlige Schnittmatrix $S = (E_i \cdot E_j)$ zugeordnet. Durch endlich viele quadratische Transformationen in $\tilde{X}$ kann erreicht werden, daß alle Komponenten

E_i singularitätenfrei sind und je zwei Kurven E_i, E_j $(i \neq j)$ sich höchstens transversal schneiden. Für diesen Fall hat Mumford bewiesen, daß die Schnittmatrix S negativ definit ist. (Gewöhnlich wird das Schnittverhalten der E_i in Form des sogenannten dualen Graphen der Auflösung notiert; vgl. [NTS].)

Unter den Auflösungen einer Flächensingularität (X,x) gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte minimale Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$, die dadurch charakterisiert ist, daß $\tilde{X}$ keine singularitätenfreie rationale Kurve $C \cong \mathbb{P}_1$ mit Selbstschnittzahl -1 enthält. Die minimale Auflösung von (X,x) besitzt die universelle Eigenschaft, daß sich jede andere Auflösung $\pi': (\tilde{X}',E') \to (X,x)$ mit einer holomorphen Abbildung $f: (\tilde{X}',E') \to (\tilde{X},E)$ über π faktorisieren läßt: $\pi' = \pi \circ f$. (In diesem Fall ist f bis auf biholomorphe Abbildungen eine Folge von quadratischen Transformationen.) Eine Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$, deren exzeptionelle Faser nur aus glatten irreduziblen Komponenten $E_1,\dots,E_k$ besteht, so daß sich je zwei davon entweder gar nicht oder transversal in einem Punkt treffen, heißt eine gute Auflösung von (X,x); auch unter den guten Auflösungen einer Flächensingularität (X,x) gibt es ein minimales Objekt.

Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine beliebige Auflösung einer Flächensingularität (X,x), $E_1,\dots,E_k$ seien die irreduziblen Komponenten von E. Unter einem Zykel Z auf $(\tilde{X},E)$ verstehen wir in dieser Arbeit - etwas abweichend vom üblichen Sprachgebrauch - immer eine formale Linearkombination $Z = \sum_{i=1}^{k} r_i E_i$ mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten $r_i \geq 0$, also einen effektiven Divisor auf $\tilde{X}$ mit Träger in E. (Zur Verdeutlichung schreiben wir auch $Z \geq 0$.) Insbesondere kann E selbst als exzeptioneller Zykel $E = \sum E_i$ aufgefaßt werden. Durch $Z \geq E$ bringen wir die Bedingung $r_i \geq 1$ für $i = 1,\dots,k$ zum Ausdruck.

Jedem Zykel $Z \geq 0$ mit Trägermenge* $|Z|$ ist in eindeutiger Weise ein eindimensionales abgeschlossenes Unterschema von $\tilde{X}$ zugeordnet, das aus dem topologischen Raum $|Z| \subset E$ mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_{\tilde{X}} / \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ besteht. Sind keine Mißverständnisse zu erwarten, so werden wir dieses Unterschema einfach wieder mit Z bezeichnen. Ist insbesondere $|Z| = E$, so nennt man das zu Z gehörige Unterschema auch eine infinitesimale Umgebung (der

*) $|Z|$ ist die Vereinigung aller E_i mit $r_i > 0$ in $Z = \sum r_i E_i$.

Ordnung r_i-1 längs E_i) von E.

Wir fixieren jetzt eine Reihe von Bezeichnungen, von denen wir die ganze Arbeit hindurch Gebrauch machen werden.

Bezeichnungen 1.1: $\pi: (\tilde{X},E)\to(X,x)$ sei die Auflösung einer Flächensingularität, D ein Divisor, Z ein Zykel und F eine $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Modulgarbe auf $\tilde{X}$.

(a) $F(D) := F\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$;

(b) $F_Z := F|_Z := F\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\mathcal{O}_Z$, die Einschränkung von F auf Z;

(c) $F_Z(D) := F(D)|_Z$;

(d) $N_Z := N_{Z/\tilde{X}} := \mathcal{O}_Z(Z) \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(Z)/\mathcal{O}_{\tilde{X}}$, die Normalengarbe von Z in $\tilde{X}$;

(e) $\omega_{\tilde{X}} := \Omega^2_{\tilde{X}}$, die Garbe der Keime von holomorphen 2-Formen auf $\tilde{X}$; $\omega_{\tilde{X}}$ heißt kanonische oder dualisierende Garbe von $\tilde{X}$;
$K_{\tilde{X}}$: der zugehörige kanonische Divisor (modulo rationaler Äquivalenz bestimmt);

(f) $\omega_Z := \omega_{\tilde{X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} N_Z \cong \omega_{\tilde{X}}(Z)|_Z$, die dualisierende Garbe von Z;

(g) $F^{\vee} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(F,\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, die zu F duale Garbe.

Bemerkungen 1.2: (1) Zu (b) und (c): Wir werden auch dann, wenn F eine nur über Z' mit $Z'\geq Z$ definierte Garbe ist, F_Z für $F\otimes_{\mathcal{O}_{Z'}}\mathcal{O}_Z$ schreiben. Dies ist wegen der Assoziativität des Tensorproduktes über $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ mit (b) verträglich; aus dem selben Grunde birgt auch die abkürzende Schreibweise von (c) kein Risiko.

(2) Zu (g): Auch hier werden wir, wenn F eine lediglich über Z definierte Garbe ist, $F^{\vee} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(F,\mathcal{O}_Z)$ schreiben. Hier ist aber eine Warnung angebracht: Im allgemeinen ist $(F^{\vee})|_Z \neq (F_Z)^{\vee}$, wenn F eine Garbe auf $\tilde{X}$ ist! Jedoch vertauschen Dualisierung und Einschränkung, wenn F lokal frei ist, und nur in diesem Fall werden wir kurz $F_Z^{\vee}$ für $F^{\vee}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\mathcal{O}_Z$ schreiben.

(3) Die in 1.1 notierten Tensorprodukte sind stets als Tensorprodukte in der analytischen Kategorie (vgl. [AS, Kapitel III, §5.4]) zu verstehen! Wenn kein Zweifel darüber möglich ist, werden wir es im folgenden unterlassen, die unterliegenden Garben von Ringen an den Tensorprodukten zu kennzeichnen.

Wählt man einen Divisor $D = \sum d_i E_i$ mit $d_i > 0$ und der Eigenschaft, daß $D \cdot E_i < 0$ für alle $i = 1,\ldots,k$ gilt, was wegen der negativen Definitheit der Schnittmatrix $(E_i \cdot E_j)$ jederzeit möglich ist, so definieren die Schnitte in $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\mu D)$ für hinreichend große $\mu > 0$ Einbettungen von einer Umgebung der exzeptionellen Faser E in einen projektiven Raum $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. (Siehe [**Gra**, §3] oder [**NTS**, Lemma 6.18].) Insbesondere folgt daraus, daß jedes einem Zykel $Z = \sum r_i E_i \geq 0$ zugeordnete Schema eine projektive Untervarietät ist. (Vgl. auch [**AG**, Exercise III.5.8]) Das bedeutet, daß der oben definierte Divisor D durch $\mathcal{O}_Z(-D)$ ein amples Geradenbündel auf Z definiert.

Der folgende Satz ist wohlbekannt. (Er kann leicht mit den in [**Gra**, §3] entwickelten Methoden bewiesen werden und wird in [**NTS**, Chapter VId] für den Fall begründet, daß $\tilde{X}$ eine gute Auflösung und $\mathcal{F}$ eine Untergarbe einer trivialen Garbe $s\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ist; beide Annahmen sind nicht wesentlich.)

<u>**Satz 1.3:**</u> D sei ein effektiver Divisor auf $\tilde{X}$ mit Träger in E, der jede irreduzible Komponente E_i von E negativ schneidet: $D \cdot E_i < 0$. Dann ist $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D)$ ein amples Geradenbündel. Insbesondere gibt es zu jeder $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ein $k_0 \geq 0$, so daß für alle $k \geq k_0$ gilt:

(i) $\mathcal{F}(-kD)$ wird von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) $H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}(-kD)) = 0$.

<u>Anmerkung **1.4**:</u> Die Cohomologiegruppen $H^i(\tilde{X}, \mathcal{F})$ sind von der Wahl eines Repräsentanten $\tilde{X}$ der Auflösung $\pi : (\tilde{X}, E) \to (X, x)$ abhängig. Zieht man hingegen nur streng pseudokonvexe Umgebungen von E, also etwa Urbilder Steinscher Umgebungen von x in X in Betracht, so sind die Cohomologiegruppen wohldefiniert und $H^i(\tilde{X}, \mathcal{F})$ ist kanonisch isomorph zum über x liegenden Halm der i-ten direkten Bildgarbe $R^i\pi_*\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ unter π. Wir werden die Cohomologie auf $\tilde{X}$ stets in diesem Sinne verstehen. Die Gruppen $H^1(\tilde{X}, \mathcal{F})$ sind stets endlichdimensional ([**AnGr**, Théorème 14]) und für $i \geq 2$ gilt $H^i(\tilde{X}, \mathcal{F}) = 0$ ([**Si**]).

Jede infinitesimale Umgebung Z von der exzeptionellen Faser E der Auflösung einer Flächensingularität kann projektiv eingebettet werden. Nach dem Satz von Chow ([**PAG**, p. 167]) trägt Z dann auch die Struktur einer algebraischen Varietät. Die GAGA-Sätze von Serre ([**Se**]) besagen, daß jede holomorphe kohärente Modulgarbe zu einer algebraischen kohärenten Garbe assoziiert ist und in dieser Situation die analytischen und algebraischen Cohomologiegruppen in natürlicher Weise zueinander isomorph sind. Damit können die Aussagen der Grothendieckschen Dualitätstheorie auf infinitesimale Umgebungen exzeptioneller Fasern angewendet werden.

Dualitätssätze. (Siehe auch [Ba].) Es sei $Z \geq E$ ein Zykel auf der Auflösung $(\tilde{X}, E)$ einer komplexen Flächensingularität. Als Konsequenz aus der Projektivität von Z zusammen mit der Tatsache, daß alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Z,z}$ (als Ringe von ebenen Kurvensingularitäten) Cohen-Macaulaysch sind, folgt die Existenz einer dualisierenden Garbe ω_Z mit $H^1(E, \omega_Z) \simeq \mathbb{C}$, so daß der folgende Satz gilt, der die Serre-Dualität beinhaltet ([GDT, Chapter IV.5]). Überdies berechnet sich ω_Z wie in 1.1(f) vorweggenommen:

$$\omega_Z \simeq \omega_{\tilde{X}}(Z) \otimes \mathcal{O}_Z \qquad \text{(Adjunktionsformel)}$$

([GDT, Chapter I, Proposition 2.4].)

Satz 1.5 (Dualität für Kurven): Sei $Z \geq E$ ein Zykel auf der Auflösung einer komplexen Flächensingularität und ω_Z die dualisierende Garbe von Z. Dann gibt es für jede $\mathcal{O}_Z$-Modulgarbe F nicht ausgeartete $\mathbb{C}$-lineare Paarungen

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^i(E,F) \times \mathrm{Ext}^{1-i}_{\mathcal{O}_Z}(F, \omega_Z) \to H^1(E, \omega_Z) \simeq \mathbb{C}, \qquad i = 0,1.$$

Bemerkung 1.6: Bei $\langle\ ,\ \rangle$ handelt es sich um das Yoneda-Produkt. Ist insbesondere F eine lokal freie Garbe, so ist $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_Z}(F, \omega_Z) \simeq H^j(E, F^\vee \otimes \omega_Z)$, wobei $F^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(F, \mathcal{O}_Z)$ sei. (Siehe [GDT, Chapter IV.1].) Die Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^i(E,F) \times H^{1-i}(E, F^\vee \otimes \omega_Z) \to H^1(E, \omega_Z)$$

entsteht dann durch Bildung des Cup-Produktes mit nachfolgender Anwendung der von der Kontraktion $F \otimes F^\vee \otimes \omega_Z \to \omega_Z$ auf H^1-Niveau induzierten Abbildung. (Dies ergibt sich aus dem Umstand, daß gleicherweise das Yoneda-Produkt wie auch das Cup-Produkt mit Kontraktion als Derivierte des funktoriellen Morphismus

$$\Gamma(E,-) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(-, \omega_Z) \to \Gamma(E, \omega_Z)$$

entstehen. Siehe auch [LC, §6].)

Als Konsequenz aus der Dualität für Zykel läßt sich verhältnismäßig leicht ein Dualitätssatz für $\tilde{X}$ gewinnen. Dazu bemerken wir, daß sich einer Garbe

F auf $\tilde{X}$ die lokale Cohomologie $H^i_E(\tilde{X},F)$ mit Träger in E zuordnen läßt, die a priori von der Wahl eines Repräsentanten des Umgebungskeimes $(\tilde{X},E)$ unabhängig ist. Die Funktoren $H^i_E(\tilde{X},-)$ werden als die Rechtsderivierten des Funktors der globalen Schnitte mit Träger in E,

$$\Gamma_E(\tilde{X},F) := \{s \in \Gamma(\tilde{X},F) \mid \operatorname{supp}(s) \subset E\},$$

definiert. ([LC, §1])

Neben den üblichen langen exakten Sequenzen, die auch für die lokale Cohomologie den kurzen exakten Sequenzen von Modulgarben zugeordnet werden, existiert noch die folgende lange exakte Sequenz, die eine Verbindung zu den übrigen Cohomologiegruppen auf $\tilde{X}$ herstellt ([LC, Corollary 1.9]):

(1.7) $$\ldots \to H^{i-1}(\tilde{X}-E,F) \to H^i_E(\tilde{X},F) \to H^i(\tilde{X},F) \to H^i(\tilde{X}-E,F) \to \ldots$$

Insbesondere enthält also die Gruppe $H^1_E(\tilde{X},F)$ die Obstruktionen für die Fortsetzbarkeit von Schnitten in F über $\tilde{X}-E$ zu Schnitten über $\tilde{X}$. Eine Präzisierung liefert

Satz 1.8 (Wahl, [Wa_1, Lemma B.2]): F sei eine lokal freie Garbe auf $\tilde{X}$. Dann ist

$$H^1_E(\tilde{X},F) \simeq \varinjlim_Z H^0(E,F \otimes N_Z),$$

wobei der Limes über alle Zykel $Z \geq 0$ (mit der natürlichen Anordnung) gebildet wird, und für $Z \leq Z'$ gilt: $H^0(E,F\otimes N_Z) \hookrightarrow H^0(E,F\otimes N_{Z'})$.

Bemerkungen 1.9: (1) Die injektiven Pfeile des induktiven Systems erhält man für $Z' \geq Z$ durch Tensorieren der exakten Sequenz $0 \to N_Z \to N_{Z'} \to \mathcal{O}(Z')/\mathcal{O}(Z) \to 0$ mit F und Anwendung von $H^0(\tilde{X},-)$.

(2) Jede der Gruppen $H^0(E,F\otimes N_Z)$, deren Elemente als meromorphe Schnitte in F über der infinitesimalen Umgebung Z mit Polen längs E bis zur durch Z angegebenen Ordnung verstanden werden können, ist injektiv in $H^1_E(\tilde{X},F)$ enthalten.

Satz 1.10 (Relative Dualität, [Ba, Theorem 2.1]): $(\tilde{X},E)$ sei die Auflösung einer Flächensingularität und F eine lokal freie Garbe auf $\tilde{X}$. Dann gibt es eine nicht ausgeartete $\mathbb{C}$-lineare Paarung

$$H^1_E(\tilde{X},F) \times H^1(\tilde{X},F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}}) \to \mathbb{C}.$$

Anmerkung 1.11: Die relative Dualität ist mit der Dualität (1.5) auf Zykeln Z in $\tilde{X}$ kompatibel in der Weise, daß man über natürliche kommutative Diagramme verfügt:

$$\begin{array}{ccc} H^1_E(\tilde{X},F) & \xrightarrow{\simeq} & H^1(\tilde{X},F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}})' \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(E,F\otimes N_Z) & \xrightarrow{\simeq} & H^1(E,F_Z^{\vee}(-Z)\otimes\omega_Z)' \end{array}$$

Dabei steht $(-)'$ für den dualen $\mathbb{C}$-Vektorraum und die vertikalen Pfeile erhält man aus Bemerkung 1.9(2) bzw. als Transponierte der Restriktion* $H^1(\tilde{X},F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}}) \to H^1(E,F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}}\otimes \mathcal{O}_Z)$ unter Beachtung der Adjunktionsformel. (Diese Aussage ergibt sich direkt aus der Konstruktion in [**Ba**].)

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Zusammenstellung einiger Aussagen über zwei spezielle Klassen von Flächensingularitäten, die wir später untersuchen wollen, nämlich die rationalen und die minimal-elliptischen Singularitäten.

Rationale Singularitäten. (Vgl. [**Ar₁**], [**La₁**], [**Li**].)

Definition 1.12 (Artin, [**Ar₁**]): Eine normale komplexe Flächensingularität heißt rational, wenn für eine (und damit für jede) Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ gilt: $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$.

Zu den rationalen Flächensingularitäten gehören unter anderem alle zweidimensionalen Quotientensingularitäten ([**Bri**]).

Nach Artin kann man ein numerisches Kriterium für die Rationalität einer Flächensingularität angeben. Dazu sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine Auflösung einer zunächst beliebigen normalen Flächensingularität; $E_1,\dots,E_k$ seien die irreduziblen Komponenten der exzeptionellen Kurve E. Als Konsequenz aus der negativen Definitheit der Schnittmatrix $(E_i\cdot E_j)$ erhält man:

Satz / Definition 1.13 (Artin, [**Ar₁**]): Es gibt einen eindeutig bestimmten kleinsten Zykel Z_0 unter allen Zykeln $Z \geq 0$ mit der Eigenschaft, daß $Z\cdot E_i \leq 0$ für alle $i=1,\dots,k$ gilt. Z_0 heißt Fundamentalzykel der Auflösung.

*) Restriktionsabbildungen $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_Z$ sind auf H^1-Niveau stets surjektiv, weil die Obstruktionen dafür in $H^2(\tilde{X},\mathcal{G}(-Z))=0$ liegen. (Vgl. Anmerkung 1.4.)

Das <u>arithmetische Geschlecht</u> $p_a(Z)$ eines Zykels Z auf $\tilde{X}$ wird durch

$$p_a(Z) := \frac{1}{2}(Z^2 + K\cdot Z) + 1$$

definiert, wobei $K = K_{\tilde{X}}$ ein kanonischer Divisor von $\tilde{X}$ ist. Um $p_a(Z)$ berechnen zu können, muß man das Schnittverhalten von K mit den E_i kennen. Für den Fall einer glatten Kurve E_i mit Geschlecht g_i liefert die Adjunktionsformel

$$g_i = p_a(E_i) = \frac{1}{2}(E_i^2 + K\cdot E_i) + 1,$$

also

(1.14) $\quad K\cdot E_i = -E_i^2 + 2(g_i - 1).$

Für singuläre Kurven gibt es ähnliche Formeln, in die Art und Anzahl der Singularitäten eingehen; siehe etwa [AG, Corollary V.3.7].

<u>Satz 1.15</u> (Artin, [Ar_1, Theorem 3]): Es sei $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ eine Auflösung einer normalen Flächensingularität (X,x) und Z_0 der zugehörige Fundamentalzykel. Dann und nur dann ist (X,x) rational, wenn $p_a(Z_0) = 0$ gilt.

<u>Bemerkung 1.16:</u> Man kann leicht einen <u>Algorithmus</u> zur Bestimmung des Fundamentalzykels angeben ([La_1, Proposition 4.1]): Man beginne mit einer beliebigen Kurve $Z^{(0)} := E_{i_0}$. Wenn $Z^{(\mu)}$ im letzten Schritt konstruiert wurde, dann ist entweder $Z^{(\mu)}\cdot E_i \leq 0$ für alle $i = 1,\dots,k$: dann ist $Z^{(\mu)}$ der Fundamentalzykel, oder es gibt ein i mit $Z^{(\mu)}\cdot E_i > 0$: dann bilde man $Z^{(\mu+1)} := Z^{(\mu)} + E_i$ und fahre rekursiv fort. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab.

Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir noch eine kurze Zusammenstellung:

<u>Eigenschaften rationaler Singularitäten 1.17:</u> (X,x) sei eine rationale Flächensingularität und $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ eine beliebige Auflösung mit Fundamentalzykel Z_0. Dann gilt:

(1) Die exzeptionelle Faser E besteht nur aus glatten rationalen Kurven, die sich transversal schneiden, wobei keine drei Kurven einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. (D.h.: π ist eine gute Auflösung.) Der duale Graph der Auflösung enthält keine Zyklen, ist also ein Baum.([Bri, Lemma 1.3])

(2) Bezeichnet $\mathfrak{m}_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$, so ist $\pi^*\mathfrak{m}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0)$. ([$Ar_1$, Theorem 4])

(3) Die Einbettungsdimension von (X,x) ist $-Z_0^2+1$ und die Multiplizität ist $-Z_0^2$. ([Ar_1, Theorem 4])

Insbesondere erhält man als Hyperflächensingularitäten genau die bekannten rationalen Doppelpunkte. Die Ergebnisse von Wahl ([Wa_2, Theorem 2.1]) zeigen zudem, daß die rationalen Doppelpunkte die einzigen vollständigen Durchschnitte unter den rationalen Flächensingularitäten sind.

Minimal-elliptische Singularitäten. (Vgl. [La_2], [Re].)

Definition / Satz 1.18 (Laufer, [La_2]): (X,x) sei eine normale Flächensingularität, $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ sei die minimale Auflösung von (X,x) und Z_0 der zugehörige Fundamentalzykel. (X,x) wird als minimal-elliptisch bezeichnet, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gilt $p_a(Z_0)=1$ und für jede echte zusammenhängende Teilmenge E' von E ist $(\tilde{X},E')$ die Auflösung einer rationalen Singularität.

(b) Für alle irreduziblen Komponenten E_i, $i=1,\dots,k$, der exzeptionellen Faser E gilt $E_i\cdot Z_0=-K\cdot E_i$, wobei K ein kanonischer Divisor von $\tilde{X}$ ist.

(c) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})=1$ und $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein Gorenstein-Ring.

Bemerkungen 1.19: (1) Die Zahl $\dim H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ hängt von der Wahl der Auflösung nicht ab und wird geometrisches Geschlecht p_g von (X,x) genannt.

(2) Ein lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ wird als Gorensteinsch bezeichnet, wenn sein dualisierender Modul $\omega_{X,x}$ lokal frei vom Rang 1 ist. Weil $\omega_{X,x}$ für eine normale Flächensingularität als Halm der Garbe $j_*\Omega^2_U$ über x definiert werden kann, wobei $U:=X-\{x\}$ der reguläre Ort von X und $j:U\to X$ die offene Inklusion seien, ist die Gorenstein-Eigenschaft dazu äquivalent, daß es eine holomorphe 2-Form über U gibt, die keine Nullstellen besitzt. (Denn dann ist $\Omega^2_U\simeq\mathcal{O}_U$ und damit $j_*\Omega^2_U\simeq j_*\mathcal{O}_U\simeq\mathcal{O}_X$ wegen der Normalität von X.)

(3) Der Divisor $-Z_0$ ist ein kanonischer Divisor von $\tilde{X}$.

(Begründung zu (3): Weil minimal-elliptische Singularitäten Gorensteinsch sind, gibt es eine holomorphe 2-Form auf $\tilde{X}-E$, die nirgends verschwindet. Eine meromorphe Ausdehnung dieser Form auf $\tilde{X}$ liefert einen kanonischen Divisor K mit Träger in E. K ist also eine Linearkombination der E_i und aus $Z_0\cdot E_i=-K\cdot E_i$ für $i=1,\dots,k$ folgt $Z_0=-K$ wegen der negativen Definitheit der Schnittmatrix.

Die minimal-elliptischen Singularitäten besitzen den pragmatischen Vorzug, daß sich ihre Eigenschaften oft durch einfache numerische Bedingungen, ähnlich wie bei den rationalen Singularitäten, charakterisieren lassen. Zu dieser Klasse gehören zum Beispiel die Singularitäten in den Spitzen Hilbertscher Modulflächen, alle exzeptionellen unimodularen Hyperflächensingularitäten der Dimension 2 und die sogenannten einfach-elliptischen Singularitäten, deren minimale Auflösungen als exzeptionelle Fasern jeweils nur eine einzige glatte elliptische Kurve aufweisen. (Wir werden auf die einfach-elliptischen Flächensingularitäten in den Kapiteln 5 und 6 zurückkommen.)

1.20. Im Gegensatz zu der Situation bei den rationalen Singularitäten ist die minimale Auflösung einer minimal-elliptischen Singularität nicht automatisch schon eine gute Auflösung, die nur aus rationalen Kurven besteht. Allerdings gibt es nur wenige Ausnahmen, die Laufer in [**La$_2$**, Proposition 3.5] angegeben hat, wobei die folgenden Typen von exzeptionellen Fasern E in der minimalen Auflösung auftreten können:

(1) E ist eine glatte elliptische Kurve (dies ist der einfach-elliptische Fall);

(2) E ist eine rationale Kurve mit einer transversalen Selbstüberkreuzung*;

(3) E ist eine rationale Kurve mit einer gewöhnlichen Spitze* ($x^2 = y^3$ in lokalen Koordinaten);

(4) E besteht aus zwei glatten rationalen Kurven, die sich in einem Punkt tangential von erster Ordnung berühren;

(5) E besteht aus drei glatten rationalen Kurven, die einen gemeinsamen transversalen Schnittpunkt besitzen.

Die übrigen zu 1.17 entsprechenden Daten sind:

Eigenschaften minimal-elliptischer Singularitäten 1.21: (X,x) sei eine minimal-elliptische Flächensingularität und $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ die minimale Auflösung mit Fundamentalzykel Z_0. Es gilt ([**La$_2$**, Theorem 3.13]):

(1) Es sei $m_{X,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Dann ist $\pi^* m_{X,x} \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0)$ und im Falle $Z_0^2 \leqq -2$ gilt Gleichheit; für $Z_0^2 = -1$ ist $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0)/\pi^* m_{X,x}$ eine in einem einzigen Punkt aus E konzentrierte Wolkenkratzergarbe mit Halm $\mathbb{C}$;

(2) Die Einbettungsdimension von (X,x) ist $\max(-Z_0^2,3)$ und die Multiplizität ist $\max(-Z_0^2,2)$.

---

*) Das heißt, daß die Normalisierung $\bar{E}$ von E eine rationale Kurve ist.

Man erhält also Hyperflächensingularitäten in den Fällen $Z_0^2 = -1$, -2 und -3; für $Z_0^2 = -4$ ist die zugehörige Singularität noch ein vollständiger Durchschnitt. Wenn $Z_0^2 \leq -5$ gilt, dann ist auch das nicht mehr der Fall ([**La$_2$**, Theorem 3.13].) Genauere Aufschlüsse gibt auch hier ein Satz von Wahl: [**Wa$_2$**, Theorem 2.8].

2. REFLEXIVE MODULN AUF FLÄCHEN-SINGULARITÄTEN.

Dieses Kapitel dient dazu, einen Überblick über die später benötigten Eigenschaften von reflexiven Modulgarben auf normalen komplexen Flächensingularitäten zu geben. In der ersten Hälfte des Kapitels werden die Definition und eine Reihe von elementaren Charakterisierungen sowohl in garbentheoretischer als auch in modultheoretischer Sprache vorgestellt. Der zweite Teil stellt einen kurzen Abriß der Auslander-Reiten-Theorie dar, hauptsächlich im Hinblick auf die später hier betrachtete Situation der reflexiven Moduln von Flächensingularitäten.

Reflexive Garben. (Geeignete Referenzen für diesen Abschnitt sind [Ha, §1], [VB, Chapter II, §1.1] und [GS, §1].)

X sei zunächst ein beliebiger reduzierter komplexer Raum. Für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X bezeichnen wir wieder mit $\mathcal{F}^{\vee}$ deren Dual $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$.

Definition 2.1: (1) $\mathcal{F}$ heißt torsionsfrei, wenn in jedem Punkt $x \in X$ aus $ga=0$ mit $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $0 \neq a \in \mathcal{F}_x$ folgt, daß g ein Nullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist (also $g=0$, wenn X in x irreduzibel ist.)

(2) $\mathcal{F}$ heißt Torsionsgarbe, wenn jedes Element $a \in \mathcal{F}_x$ ein Torsionselement ist, d.h. es gibt einen Nichtnullteiler $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $ga=0$.

(3) $\mathcal{F}$ heißt normal, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und jede mindestens 2-codimensionale analytische Untervarietät $Y \subset U$ die Restriktionsabbildung $\Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(U-Y,\mathcal{F})$ bijektiv ist.

(4) $\mathcal{F}$ heißt reflexiv, wenn die natürliche Abbildung $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ von $\mathcal{F}$ in das Bidual $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkungen 2.2: (1) Jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ ist außerhalb einer analytisch dünnen Teilmenge $A \subset X$ lokal frei. ([CAS, Chapter 4, §4.2])

(2) Ein (lokaler) Schnitt $a \in \mathcal{F}$ ist genau dann ein Torsionselement, wenn sein Träger supp(a) analytisch dünn ist. Ebenso ist eine Garbe $\mathcal{F}$ genau dann eine Torsionsgarbe, wenn ihr Träger supp($\mathcal{F}$) analytisch dünn ist. (Folgt aus (1).)

(3) Für jede kohärente Garbe F sind Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $\mu: F \to F^{\vee\vee}$ Torsionsgarben. (Dies ergibt sich aus (1) und (2).) Der Kern von μ stimmt mit der aus den Torsionselementen von F gebildeten Untergarbe von F überein. ([CAS, Chapter 3, §3.3] oder [AS, Anhang, §4.4])

(4) Lokal freie Garben sind trivialerweise reflexiv und torsionsfrei und nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz auch normal, wenn X ein normaler Raum ist. ([CAS, Chapter 7, §4.2])

Bekanntlich ist eine Garbe genau dann torsionsfrei, wenn sie lokal als Untergarbe einer freien Garbe dargestellt werden kann ([VB, Chapter II, Lemma 1.1.8].) Der folgende Satz gibt eine analoge lokale Charakterisierung von Reflexivität.

<u>Satz 2.3:</u> X sei ein reduzierter komplexer Raum. Eine kohärente Garbe F auf X ist genau dann reflexiv, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $V = V(x)$ und eine exakte Sequenz $0 \to F_V \to p\mathcal{O}_V \to q\mathcal{O}_V$ gibt.

<u>Beweis:</u> Sei F reflexiv. Wähle um $x \in X$ eine lokal endliche Präsentation von $F^\vee$: $q\mathcal{O}_V \to p\mathcal{O}_V \to F_V^\vee \to 0$. Durch Anwendung des linksexakten Funktors $(-)^\vee$ folgt wegen $F_V \cong F_V^{\vee\vee}$ die gesuchte Sequenz.

Sei umgekehrt $0 \to F_V \to p\mathcal{O}_V \to q\mathcal{O}_V$ gegeben. Dann ist F_V als Untergarbe von $p\mathcal{O}_V$ bereits torsionsfrei und damit $\mu: F_V \to F_V^{\vee\vee}$ injektiv. Außerdem folgt $F_V^{\vee\vee} \subset p\mathcal{O}_V$, so daß $\mathrm{coker}(\mu) = F_V^{\vee\vee}/F_V$ als Untergarbe von $q\mathcal{O}_V$ aufgefaßt werden kann. Anderseits ist $\mathrm{coker}(\mu)$ eine Torsionsgarbe, so daß $\mathrm{coker}(\mu) = 0$ und damit die Isomorphie von μ folgt. ∎

Aus diesem Satz folgt wie in [GS, Proposition 1.20] bzw. [VB, Chapter II, Theorem 11.6]:

<u>Satz 2.4:</u> Es sei X eine glatte Varietät, F eine kohärente Garbe und $A \subset X$ die Menge aller Punkte $x \in X$, in denen F_x nicht frei ist. Dann ist A analytisch und es gilt $A = \emptyset$ oder

$$\mathrm{codim}_X A \geq \begin{cases} 2, & \text{wenn } F \text{ torsionsfrei ist;} \\ 3, & \text{wenn } F \text{ reflexiv ist.} \end{cases}$$

Corollar 2.5: Jede reflexive Modulgarbe über einer isolierten Flächensingularität ist außerhalb des singulären Punktes lokal frei.

Satz 2.6: X sei ein normaler komplexer Raum. Dann sind für eine kohärente Garbe F auf X äquivalent:

(a) F ist reflexiv;

(b) F ist torsionsfrei und normal.

Beweis: Ist F reflexiv, so gilt $F \simeq Hom(F^{\vee}, \mathcal{O}_X)$ und der Riemannsche Fortsetzungssatz gibt die Normalität von F; die Torsionsfreiheit ist nach Bemerkung 2.2(3) klar.

Nun sei F umgekehrt torsionsfrei und normal. Es sei A die Menge der Punkte, über denen F nicht frei ist. Nach Satz 2.4 ist A mindestens 2-codimensional und man erhält für jede offene Menge $U \subset X$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U,F) & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(U-A,F) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Gamma(U,F^{\vee\vee}) & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(U-A,F^{\vee\vee}) \end{array}$$

Aus $\Gamma(U,F) \simeq \Gamma(U,F^{\vee\vee})$ für jede offene Menge U folgt $F \simeq F^{\vee\vee}$. ∎

Satz 2.7: Es seien X ein reduzierter komplexer Raum und F, G zwei kohärente Garben auf X. Wenn F reflexiv ist, dann ist auch $Hom_{\mathcal{O}_X}(G,F)$ eine reflexive Garbe.

Beweis: Man geht von einer lokal endlichen Präsentation $q\mathcal{O}_V \to p\mathcal{O}_V \to G_V \to 0$ aus und wendet darauf $Hom(-,F_V)$ an. Das ergibt $0 \to H_V := Hom(G_V, F_V) \to pF_V \to qF_V$. Folglich ist H_V torsionsfrei und es ist $H_V^{\vee\vee} \subset pF_V^{\vee\vee} = pF_V$. Es folgt daraus $H_V^{\vee\vee}/H_V \subset qF_V$, was aber wegen der Torsionsfreiheit von F_V nur mit $H_V = H_V^{\vee\vee}$ möglich ist. ∎

Folgerung: Insbesondere ist das Dual $F^{\vee}$ einer kohärenten Garbe F stets eine reflexive Garbe. Deswegen wird - vor allem bei torsionsfreien Garben - das Bidual $F^{\vee\vee}$ auch als reflexive Hülle von F bezeichnet.

Wir wenden uns jetzt wieder den normalen Flächensingularitäten zu und fassen zunächst die oben gegebenen Charakterisierungen reflexiver Moduln für diese Situation zusammen.

Satz 2.8: (X,x) sei eine normale Flächensingularität und F eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Mit $j: X-\{x\} \to X$ werde die offene Inklusion des regulären Ortes von X bezeichnet. Dann sind äquivalent:

(a) F ist reflexiv;

(b) Es gibt eine exakte Sequenz $0 \to F \to p\mathcal{O}_X \to q\mathcal{O}_X$;

(c) j^*F ist lokal frei und es gilt $F \simeq j_*j^*F$;

(d) F ist torsionsfrei und es gilt $H^1_{\{x\}}(X,F) = 0$;

(e) $H^0_{\{x\}}(X,F) = H^1_{\{x\}}(X,F) = 0$;

(f) $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(F_x) = 0$. (Vgl. [CRT, §16], [AS, Kapitel III, §1].)

Beweis: (a)⇔(b) ist Satz 2.3. (a)⇔(c) folgt aus Satz 2.6 unter Beachtung von Satz 2.4. Für (a)⇔(d,e) betrachtet man die lange exakte Sequenz der lokalen Cohomologie

$$0 \to H^0_{\{x\}}(X,F) \to H^0(X,F) \to H^0(X-\{x\},F) \to H^1_{\{x\}}(X,F) \to 0.$$

Also ist $H^0(X,F) \simeq H^0(X-\{x\},F)$ genau dann, wenn $H^0_{\{x\}}(X,F) = H^1_{\{x\}}(X,F) = 0$ gilt. Zu (f) siehe Satz 2.12 unten. ∎

Corollar 2.9: Ist (X,x) eine normale Flächensingularität und F eine kohärente Garbe auf X, die über $X-\{x\}$ lokal frei ist, so gilt: $F^{\vee\vee} \simeq j_*j^*F$ mit der offenen Inklusion $j: X-\{x\} \to X$.

(Denn es gilt $F^{\vee\vee} \simeq j_*j^*(F^{\vee\vee}) = j_*j^*F$.)

Bemerkung 2.10: Über einem analytischen Raumkeim (X,x) ist jede kohärente Modulgarbe F die zugeordnete Garbe $F = M^{\sim}$ eines endlich erzeugten Moduls M über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $M = F_x$ ist. Selbstverständlich kann die Eigenschaft der Reflexivität von F dann auch durch die Bedingung $M \xrightarrow{\simeq} M^{\vee\vee}$ an M zum Ausdruck gebracht werden, wobei $N^{\vee} := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(N, \mathcal{O}_{X,x})$ den dualen Modul zu N bezeichnet. Auch die äquivalenten Bedingungen (b) und (d)-(f) von Satz 2.8 lassen sich direkt in die Sprache der $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln übertragen: Wir werden deswegen ohne Umstände auch von reflexiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln reden, wenn die algebraische Sprache eher angebracht ist.

Wir geben im folgenden eine weitere algebraische Charakterisierung der Reflexivität eines endlich erzeugten $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls.

Definition 2.11: Es sei A eine lokale analytische Algebra der Dimension n mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Ein endlich erzeugter A-Modul M heißt maximaler Cohen-Macaulay-Modul, wenn es Elemente $g_1,\dots,g_n \in \mathfrak{m}$ gibt, so daß g_1 kein Nullteiler von M und für $j=2,\dots,n$ auch g_j kein Nullteiler von $M/(g_1,\dots,g_{j-1})M$ ist.*

(Ein Element $g \in \mathfrak{m}$ heißt Nullteiler von M, wenn es ein $a \in M$, $a \neq 0$, gibt, so daß $ga=0$ ist.)

Satz 2.12: A sei der lokale Ring einer normalen komplexen Flächensingularität (X,x). Dann sind für einen endlich erzeugten A-Modul M äquivalent:

(a) M ist maximaler Cohen-Macaulay-Modul;

(b) M ist reflexiver A-Modul.

Beweis: M ist genau dann ein maximaler Cohen-Macaulay-Modul, wenn gilt: $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} M = 2$. ($\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} M$ ist die Tiefe von M, d.h. die maximale Länge M-regulärer Sequenzen in $\mathfrak{m}$.) Weil immer $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} M \leq \dim A = 2$ gilt, ist dies nach [LC, Theorem 3.8] dazu äquivalent, daß $H^0_{\{x\}}(X,M^\sim) = H^1_{\{x\}}(X,M^\sim) = 0$ gilt, was nach Satz 2.8 wiederum gleichbedeutend zur Reflexivität von M ist. ∎

Bemerkungen 2.13: (1) In höheren Dimensionen ist im allgemeinen nicht mehr jeder reflexive Modul auch ein maximaler Cohen-Macaulay-Modul. Die maximalen Cohen-Macaulay-Moduln über den eindimensionalen lokalen Ringen sind genau die torsionsfreien Moduln.

(2) Wir bezeichnen die Kategorie der maximalen Cohen-Macaulay-Moduln über einem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, wie es üblich geworden ist, mit $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_{X,x})$. Falls $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring einer normalen Flächensingularität (X,x) ist, so schreiben wir auch $\mathcal{MCM}(X,x)$ und verstehen die Kategorie dann als die der reflexiven Modulgarben auf X. Die Morphismen in $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_{X,x})$ sind die gewöhnlichen $\mathcal{O}_{X,x}$-linearen Homomorphismen zwischen Moduln.

Als nächstes wird eine rein garbentheoretische Kennzeichnung von reflexiven Moduln angegeben, die für die Untersuchungen in den nachfolgenden Kapiteln von großer Bedeutung ist.

---

*) Ein maximaler Cohen-Macaulay-Modul ist ein Cohen-Macaulay-Modul, dessen Träger die maximal mögliche Dimension n besitzt. Eine Folge $g_1,\dots,g_n$ wie oben heißt M-reguläre Sequenz.

(X,x) sei jetzt eine normale komplexe Flächensingularität, $U := X - \{x\}$ sei das punktierte Spektrum von X und mit $j: U \to X$ werde die offene Inklusion bezeichnet. Wir haben in Satz 2.4 schon festgestellt, daß die Einschränkung einer reflexiven Garbe auf U dort lokal frei, also die Garbe der Keime von Schnitten in einem Vektorraumbündel ist.*

Satz 2.14: (X,x) sei eine normale Flächensingularität. Es besteht eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von folgenden Objekten:

(a) reflexive Modulgarben auf dem Raumkeim (X,x);

(b) lokal freie Garben auf dem punktierten Spektrum $U = X - \{x\}$.

Dabei wird einem reflexiven Modul $\mathcal{F}$ auf X durch Einschränkung eine lokal freie Garbe $j^*\mathcal{F} = \mathcal{F}|_U$ zugeordnet und umgekehrt einer lokal freien Garbe $\mathcal{F}'$ auf U ein reflexiver Modul durch Bildung von $j_*\mathcal{F}'$. (Mit $j: U \to X$.)

Beweis (Horrocks, [Ho, §4]): Es ist nur noch zu zeigen, daß durch $\mathcal{F}' \mapsto j_*\mathcal{F}'$ einer lokal freien Garbe $\mathcal{F}'$ auf U tatsächlich eine reflexive Garbe auf X zugeordnet wird. Die beiden Abbildungen sind dann trivialerweise zueinander invers und etablieren die behauptete Bijektion.

Es sei $\mathcal{F}'$ eine lokal freie Garbe von $\mathcal{O}_U$-Moduln. Dann ist $j_*\mathcal{F}'$ zunächst einmal quasi-kohärent ([AG, Proposition II.5.8(c)].) Um die lokal endliche Erzeugtheit - es ist nur der Halm über x zu betrachten - nachzuweisen, bemerken wir, daß $j_*\mathcal{F}'$ nach [EGA I, Corollaire 1.5.3] der direkte Limes seiner kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarben ist. Weil U durch endlich viele Steinsche Mengen überdeckt werden kann, folgt daraus die Existenz einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf X, die über U mit $\mathcal{F}'$ übereinstimmt. Außerdem darf man gleich annehmen, daß $\mathcal{F}$ torsionsfrei und damit Untergarbe einer freien Garbe $p\mathcal{O}_X$ ist (indem wir die höchstens im Punkt x existierende Torsion aus $\mathcal{F}$ herausdividieren.) Insbesondere ist dann $\mathcal{F}' \subset p\mathcal{O}_U$, woraus $j_*\mathcal{F}' \subset j_*(p\mathcal{O}_U) \simeq p\mathcal{O}_X$ folgt, weil X nach Voraussetzung normal ist. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ ein noetherscher Ring ist, ist $(j_*\mathcal{F}')_x$ dann endlich erzeugt.

Schließlich ist $j_*\mathcal{F}'$ trivialerweise torsionsfrei, weil $\mathcal{F}'$ lokal frei ist, und nach Konstruktion auch normal, so daß die Reflexivität folgt. ∎

---

*) Wir werden uns fortan die gebräuchliche Identifizierung von Vektorraumbündeln mit ihren Garben von Schnitten zu eigen machen.

<u>Unzerlegbare Moduln, Auslander-Reiten-Theorie.</u> Wir geben einen kurzen Abriß der für die Klassifikation der reflexiven Moduln über normalen Flächensingularitäten grundlegenden Sätze, sowie einiger Aussagen über die zusätzliche Struktur, die den Moduln durch die "irreduziblen" Homomorphismen zwischen ihnen verliehen wird. Wir referieren die von Auslander und Reiten gegebene Charakterisierung der irreduziblen Abbildungen. Sofern dabei Beweise zitiert werden, die in den betreffenden Arbeiten für Moduln über nicht notwendig kommutativen endlichdimensionalen Algebren geführt werden, handelt es sich um wörtlich übertragbare Argumente. Generell können die meisten der folgenden Aussagen in einem viel allgemeineren Kontext (etwa Krull-Schmidt-Kategorien, vgl. [TA, Chapter 2]) formuliert werden. Wir werden uns aber auf den für das Studium der reflexiven Moduln über normalen Flächensingularitäten erforderlichen Apparat beschränken. Für allgemeinere Aussagen sei auf [TA] und die Arbeiten [AuRei$_1$] - [AuRei$_3$] verwiesen.

Zunächst sei R eine beliebige lokale analytische Algebra. $\mathcal{MCM}(R)$ bezeichne wieder die Kategorie der maximalen Cohen-Macaulay-Moduln über R.

<u>Definition 2.15:</u> Ein endlich erzeugter R-Modul M heißt <u>unzerlegbar</u>, wenn aus $M \simeq M' \oplus M''$, wobei M' und M'' endlich erzeugte R-Moduln sind, $M'=0$ oder $M''=0$ folgt.

Allgemein kann man in jeder Kategorie, in der eine direkte Summe erklärt ist, in dieser Weise die Unzerlegbarkeit von Objekten definieren. Für Moduln $M \in \mathcal{MCM}(R)$ ist Unzerlegbarkeit <u>in $\mathcal{MCM}(R)$</u> allerdings das selbe wie die Unzerlegbarkeit nach Definition 2.15, denn eine direkte Summe $M' \oplus M''$ ist genau dann ein maximaler Cohen-Macaulay-Modul, wenn dies sowohl auf M' als auch auf M'' zutrifft.

<u>Satz 2.16</u> (<u>Krull-Schmidt</u>): R sei eine lokale analytische Algebra. Dann besitzt jeder endlich erzeugte R-Modul M eine Zerlegung $M \simeq M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$ in unzerlegbare endlich erzeugte R-Moduln $M_1, \ldots, M_t$. Sind

$$M \simeq M_1 \oplus \ldots \oplus M_t \quad \text{und} \quad M \simeq M'_1 \oplus \ldots \oplus M'_{t'},$$

zwei derartige Zerlegungen, so ist $t=t'$ und mit einer geeigneten Permutation σ von $\{1,\ldots,t\}$ gilt $M_i \simeq M'_{\sigma(i)}$ für $i=1,\ldots,t$.

Eine Zerlegung von M wie in Satz 2.16 wird auch als Krull-Schmidt-Zerlegung von M bezeichnet; die Krull-Schmidt-Zerlegung eines maximalen Cohen-Macaulay-Moduls besteht nur aus maximalen Cohen-Macaulay-Moduln.

(Einen Beweis von Satz 2.16 kann man in [AKT, Chapter II.2] für den Fall finden, daß R ein vollständiger lokaler Ring ist. Der einzige Schritt im Beweis, in dem von der Vollständigkeit Gebrauch gemacht wird, ist die Liftung eines idempotenten Modulendomorphismus ([AKT, Proposition 2.19]); diese Konstruktion kann aber mit Hilfe eines Artinschen Approximationssatzes ([Ar_2, Theorem 1.2]) auch analytisch geleistet werden.)

Das Krull-Schmidt-Theorem gestattet es, sich bei der Untersuchung von maximalen Cohen-Macaulay-Moduln auf die unzerlegbaren Moduln zu beschränken. Wir wollen der Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren Moduln in $\mathcal{MCM}(R)$ eine zusätzliche kombinatorische Struktur verleihen. (Von jetzt an betrachten wir nur noch Moduln in $\mathcal{MCM}(R)$.)

Definition 2.17: (1) Für $M,N \in \mathcal{MCM}(R)$ unzerlegbar sei das Radikal des Moduls $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ die Menge

$$\mathrm{rad}_R(M,N) := \{\, f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid f \text{ ist kein Isomorphismus} \,\}.$$

Sind M,N beliebige Moduln aus $\mathcal{MCM}(R)$ mit Krull-Schmidt-Zerlegungen $M \simeq M_1 \oplus \ldots \oplus M_m$ und $N \simeq N_1 \oplus \ldots \oplus N_n$, so besitzt jeder R-Homomorphismus $f\colon M \to N$ eine korrespondierende Zerlegung $f = (f_{ij})$ in Matrixkomponenten $f_{ij}\colon M_i \to N_j$. Damit definiert man das Radikal von $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ als

$$\mathrm{rad}_R(M,N) := \{\, f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid f_{ij} \in \mathrm{rad}_R(M_i,N_j) \text{ für alle } i \text{ und } j \,\}.$$

(2) Für unzerlegbare Moduln M,N aus $\mathcal{MCM}(R)$ sei

$$\mathrm{rad}^2_R(M,N) := \{\, g \circ f \mid f \in \mathrm{rad}_R(M,X),\ g \in \mathrm{rad}_R(X,N) \text{ für ein } X \in \mathcal{MCM}(R) \,\}.$$

(3) Ein Homomorphismus $f\colon M \to N$ zwischen unzerlegbaren Moduln M und N aus $\mathcal{MCM}(R)$ heißt irreduzibel, wenn $f \in \mathrm{rad}_R(M,N) - \mathrm{rad}^2_R(M,N)$ ist.

(4) Für unzerlegbare Moduln $M,N \in \mathcal{MCM}(R)$ wird

$$\mathrm{irr}_R(M,N) := \mathrm{rad}_R(M,N)/\mathrm{rad}^2_R(M,N)$$

als Vektorraum der irreduziblen Morphismen bezeichnet.

Irreduzible Morphismen können also als Nicht-Isomorphismen, die sich nur in trivialer Weise faktorisieren lassen, verstanden werden. Die Dimension des Vektorraumes $\mathrm{irr}_R(M,N)$ ist dann die Anzahl linear unabhängiger irreduzibler Abbildungen. Dies motiviert die folgende Definition eines Köchers, d.h. eines gerichteten Graphen, mit einer Bewertung der Pfeile.

Definition 2.18: Der Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}(R)$ von $\mathcal{MCM}(R)$ (kurz: von R) besteht aus einer Menge A_0 von Punkten, einer Menge A_1 von Pfeilen und einer Bewertung $a: A_1 \to \mathbb{N}$ der Pfeile:

(i) A_0 ist die Menge der Isomorphieklassen $[M]$ von unzerlegbaren maximalen Cohen-Macaulay-Moduln M;

(ii) A_1 enthält für $[M], [N] \in A_0$ genau dann einen Pfeil "$[M] \to [N]$", wenn $\mathrm{irr}_R(M,N) \neq (0)$ ist;

(iii) Für jeden Pfeil "$[M] \to [N]$" $\in A_1$ gibt die Bewertung a die Dimension von $\mathrm{irr}_R(M,N)$ über $\mathbb{C}$ an.

Es ist gebräuchlich, an Stelle bewerteter einfacher Pfeile im Auslander-Reiten-Köcher mehrfache Pfeile einzutragen, deren Anzahl durch die Bewertung a bestimmt wird.

Der Umstand, daß im Auslander-Reiten-Köcher genau diejenigen Homomorphismen durch Pfeile repräsentiert werden, die sich nur in trivialer Weise faktorisieren lassen, legt die Frage nahe, ob sich nun umgekehrt jeder Nicht-Isomorphismus durch eine Linearkombination von Hintereinanderausführungen irreduzibler Homomorphismen, die man gewinnt, indem man die möglichen Pfeile zwischen den beiden Moduln (sofern unzerlegbar) im Auslander-Reiten-Köcher durchläuft, ausdrücken läßt. Das ist allerdings in der hier betrachteten Kategorie $\mathcal{MCM}(R)$ im allgemeinen nicht der Fall! (Gegenbeispiele werden in 5.30 und - für die Kategorie der Vektorraumbündel auf einer elliptischen Kurve, für die ebenfalls ein Auslander-Reiten-Köcher definiert werden kann - in 5.37 gegeben.)

(Wir weisen noch darauf hin, daß wir in Definition 2.18 eine unserer Situation gemäße Vereinfachung eingeführt haben. In anderen Zusammenhängen ist es sinnvoll, den Pfeilen des Köchers zwei Bewertungen a und a' zu verleihen: $\mathrm{rad}_R(M,N)$ ist ein Bimodul mit einer Linksoperation von $\mathrm{End}_R(N)$ und einer Rechtsoperation von $\mathrm{End}_R(M)$, so daß $\mathrm{irr}_R(M,N)$ zum $f(N)$-$f(M)$-Bimodul wird, wobei $f(M) := \mathrm{End}_R(M)/\mathrm{rad}_R(M,M)$ und $f(N) := \mathrm{End}_R(N)/\mathrm{rad}_R(N,N)$ zwei Schiefkörper sind ([**MRT**, Proposition 5.21]), die zu zwei im allgemeinen voneinander verschiedenen Dimensionen von $\mathrm{irr}_R(M,N)$ und damit zu zwei Bewertungen Anlaß geben. In unserer Situation sind $f(M)$ und $f(N)$ allerdings als endliche Erweiterungen von $\mathbb{C}$ immer zu $\mathbb{C}$ isomorph.

Wir beschreiben jetzt die Anfangsgründe der von Auslander und Reiten entwickelten Methoden zur Beschreibung von irreduziblen Morphismen zwischen unzerlegbaren Moduln. Dies erfordert eine Reihe von Definitionen.

<u>Definition 2.19:</u> (1) Ein Modul P aus $\mathcal{MCM}(R)$ heißt <u>projektiv in $\mathcal{MCM}(R)$</u>, wenn jede in $\mathcal{MCM}(R)$ definierte exakte Sequenz $0 \to A \to B \to P \to 0$ spaltet.

(2) Ein Modul I aus $\mathcal{MCM}(R)$ heißt <u>injektiv in $\mathcal{MCM}(R)$</u>, wenn jede in $\mathcal{MCM}(R)$ definierte exakte Sequenz $0 \to I \to B \to C \to 0$ spaltet.

Die Beschränkung auf Sequenzen in $\mathcal{MCM}(R)$ bringt es mit sich, daß projektive (bzw. injektive) Objekte in $\mathcal{MCM}(R)$ nicht notwendig auch projektive (bzw. injektive) Moduln über R sind, wie man sie aus der homologischen Algebra kennt. Allerdings ist leicht einzusehen, daß bei den projektiven Objekten tatsächlich Übereinstimmung besteht. (Siehe auch Satz 2.29.)

<u>Definition 2.20:</u> Eine in $\mathcal{MCM}(R)$ definierte exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ heißt <u>Auslander-Reiten-Sequenz</u> ("almost split sequence"), wenn gilt

(i) A und C sind unzerlegbar;

(ii) die Sequenz spaltet nicht;

(iii) für jeden Homomorphismus $X \to C$ in $\mathcal{MCM}(R)$, der kein spaltender Epimorphismus ist (d.h. es gibt keinen Schnitt $X \leftarrow C$ in $\mathcal{MCM}(R)$) existiert eine Faktorisierung über B, wie unten links gezeigt wird;

(iv) für jeden Homomorphismus $A \to Y$ in $\mathcal{MCM}(R)$, der kein spaltenden Monomorphismus ist (d.h. es gibt keine Retraktion $A \leftarrow Y$ in $\mathcal{MCM}(R)$) existiert eine Faktorisierung über B, wie rechts gezeigt wird:

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & C \arrow[r] & 0 \\ & Y & & & \end{tikzcd}$$

Die folgenden Bemerkungen geben einige elementare Sätze über Auslander-Reiten-Sequenzen wieder.

Bemerkungen 2.21: (1) Die beiden Faktorisierungseigenschaften (iii) und (iv) sind zueinander äquivalent ([TA, Chapter 2.3, Lemma 2]). Es genügt also, eine der beiden Eigenschaften zu fordern bzw. zu verifizieren.

(2) Je zwei Auslander-Reiten-Sequenzen mit dem selben Anfangsterm A sind zueinander isomorph; ebenso sind je zwei Auslander-Reiten-Sequenzen mit dem selben Endterm C zueinander isomorph. ([Rei, Theorem 1.1.1(c)]). Man spricht daher auch von der in A beginnenden bzw. der in C endenden Auslander-Reiten-Sequenz.

(3) Offensichtlich kann es keine Auslander-Reiten-Sequenzen geben, die in projektiven Objekten von $\mathcal{MCM}(R)$ enden oder in injektiven Objekten beginnen.

Sofern man eine Auslander-Reiten-Sequenz kennt, verfügt man zugleich über eine vollständige Kenntnis der von dem Anfangsterm ausgehenden bzw. der in dem Endterm endenden irreduziblen Morphismen. Dies zeigt der nächste Satz.

Satz 2.22: Es sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine Auslander-Reiten-Sequenz in $\mathcal{MCM}(R)$ und $B \simeq b_1B_1 \oplus \ldots \oplus b_nB_n$ die Krull-Schmidt-Zerlegung von B mit $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{N}$, sowie unzerlegbaren und paarweise nicht isomorphen $B_1,\ldots,B_n$. Man zerlege f und g entsprechend in $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $f_i=(f_{i1},\ldots,f_{ib_i})$ mit $f_{ij}: A \to B_i$, und in $g = g_1+\ldots+g_n$, $g_i = g_{i1}+\ldots+g_{ib_i}$ mit $g_{ij}: B_i \to C$. Dann gilt:

(1) Sei $A \to X$ ein irreduzibler Homomorphismus. Dann ist $X \simeq B_i$ für ein i aus $\{1,\ldots,n\}$.

(2) Für jedes $i=1,\ldots,n$ sind die Homomorphismen $f_{i1},\ldots,f_{ib_i}$ irreduzibel und bilden eine Basis von $\mathrm{irr}_R(A,B_i)$.

(3) Sei $Y \to C$ ein irreduzibler Homomorphismus. Dann ist $Y \simeq B_i$ für ein i aus $\{1,\ldots,n\}$.

(4) Für jedes $i=1,\ldots,n$ sind die Homomorphismen $g_{i1},\ldots,g_{ib_i}$ irreduzibel und bilden eine Basis von $\mathrm{irr}_R(B_i,C)$.

(Zum Beweis siehe [Rei, Theorem 1.1.4].)

Ist demnach $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine Auslander-Reiten-Sequenz, so erhält man alle Pfeile $[A] \to [X]$ und $[X] \to [C]$ im Auslander-Reiten-Köcher aus den im Mittelterm auftretenden Summanden, wobei deren Vielfachheiten gerade die Bewertungen der Pfeile liefern. Hieraus folgt insbesondere, daß es in einem

Auslander-Reiten-Köcher nur endlich viele in [A] startende Pfeile geben kann, wenn eine in A beginnende Auslander-Reiten-Sequenz existiert; die entsprechende Aussage gilt für in [C] endende Pfeile bei Vorhandensein einer in C endenden Auslander-Reiten-Sequenz.

Man wird also in natürlicher Weise dahin geführt, sich für Situationen zu interessieren, in denen "möglichst viele" Auslander-Reiten-Sequenzen existieren. Auslander hat in [**Au**] gezeigt, daß die Verhältnisse, wenn R der lokale Ring einer normalen Flächensingularität ist, bestmöglich sind (was sie sogar schon dann sind, wenn R bloß der lokale Ring einer beliebigen isolierten Singularität ist: [**AuRei$_4$**]):

Satz 2.23 (Auslander): Es sei R der lokale Ring einer zweidimensionalen normalen Singularität (über $\mathbb{C}$). Dann existiert zu jedem unzerlegbaren nicht-projektiven Modul C in $\mathcal{MCM}$(R) eine Auslander-Reiten-Sequenz in $\mathcal{MCM}$(R), die in C endet.

(Wir werden sehen, daß damit dann auch jeder unzerlegbare nicht-injektive Modul A eine in A beginnende Auslander-Reiten-Sequenz aufweist.)

Für den Rest dieses Kapitels sei R stets der lokale Ring einer normalen komplexen Flächensingularität.

Die folgende Definition kann man stets aussprechen, wenn zu jedem nicht-projektiven (bzw. nicht-injektiven) unzerlegbaren Objekt einer geeigneten Kategorie $\mathcal{C}$ eine dort endende (bzw. beginnende) Auslander-Reiten-Sequenz existiert.

Definition 2.24: Es sei A_0' die Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer nicht-projektiver Objekte in $\mathcal{MCM}$(R) und A_0'' die Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer nicht-injektiver Objekte in $\mathcal{MCM}$(R). Dann definiert man eine als Auslander-Reiten-Translation von $\mathcal{MCM}$(R) bezeichnete Bijektion $\tau : A_0' \to A_0''$, indem jedem $[C] \in A_0'$ die Klasse $\tau([C]) := [A]$ zugeordnet wird, wobei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine in C endende Auslander-Reiten-Sequenz ist. (Die inverse Abbildung τ^{-1} ergibt sich entsprechend, indem man für $[A] \in A_0''$ die in A beginnende Auslander-Reiten-Sequenz betrachtet und als Bild deren Endterm einsetzt.)

Es ist üblich, die Auslander-Reiten-Translation τ in graphischen Darstellungen von Auslander-Reiten-Köchern durch unterbrochene Pfeile "$[C] \dashrightarrow \tau[C]$" für alle $[C] \in A_0'$ anzudeuten. Der um die Translation τ ergänzte Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}(R)$ ist ein sogenannter Translationsköcher (vgl. [**TA**, Chapter 2.1].)

Definition 2.25: Der stabile Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}_s(R)$ von $\mathcal{MCM}(R)$ ist der volle Unterköcher von $\mathcal{AR}(R)$, der aus allen Objekten $[A] \in A_0$ besteht, für die $\tau^n[A]$ und $\tau^{-n}[A]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind, die also nicht durch endlich viele (evtl. 0) Anwendungen von τ oder τ^{-1} in projektive oder injektive Objekte von $\mathcal{MCM}(R)$ überführt werden können.

Wir wollen die bis hierhin definierten Begriffe für den uns interessierenden Fall des lokalen Ringes R einer normalen komplexen Flächensingularität präzisieren. Dazu erinnern wir an die Definition des dualisierenden Moduls eines Cohen-Macaulay-Ringes. (Jeder lokale Ring einer normalen Flächensingularität besitzt die Cohen-Macaulay-Eigenschaft: [**AS**, Kapitel III, §1.7, Satz 11].)

Definition / Satz 2.26: Es sei $R = \mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring einer normalen Flächensingularität. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten endlich erzeugten R-Modul $\omega = \omega_{X,x}$, der die folgenden äquivalenten Charakterisierungen besitzt und dualisierender Modul von R genannt wird:

(a) $\omega \cong j_*\Omega^2_U$, wobei Ω^2_U die Garbe der Keime von holomorphen 2-Formen auf dem punktierten Spektrum $U = X - \{x\}$ und $j: U \to X$ die offene Inklusion bezeichnet;

(b) $\omega \cong \mathrm{Hom}_S(R,S)$, wobei $S \cong \mathbb{C}\{x,y\}$ ein regulärer 2-dimensionaler Unterring von R ist, so daß R ein endlich erzeugter Modul über S ist. (Noether-Normalisierung);

(c) $\omega \cong \mathrm{Ext}_S^{n-2}(R,S)$, wenn $R \cong S/I$ ein Quotient des n-dimensionalen regulären Ringes $S \cong \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ ist.

Zum Beweis siehe [**LC**, §6] oder [**KM**]. Insbesondere ersieht man aus (a), daß ω ein reflexiver R-Modul ist, d.h.: $\omega \in \mathcal{MCM}(R)$. Der Name "dualisierender Modul" rührt daher, daß für beliebige endlich erzeugte R-Moduln M und $i = 0, 1, 2$ die Gruppen $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ und $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M,\omega)$ als $\mathbb{C}$-Vektorräume dual zueinander sind. ([LC, Theorem 6.7])

<u>Folgerungen 2.27:</u> (1) $\mathrm{Ext}_R^2(R/\mathfrak{m},\omega) \simeq R/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R bezeichnet.

(2) $\mathrm{Ext}_R^1(M,\omega) = 0$ für jeden maximalen Cohen-Macaulay-Modul M.

Teil (2) folgt aus Satz 2.8(d). Als Konsequenz aus (2) und Satz 2.7 folgt:

<u>Satz 2.28:</u> $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ definiert einen exakten Funktor von $\mathcal{MCM}(R)$ in sich selbst. Die zweimalige Anwendung ist zur Identität äquivalent, d.h. für jeden Modul $M \in \mathcal{MCM}(R)$ gilt $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,\omega),\omega) \simeq M$.

(Der zweite Teil steht etwa in [**KM**, Satz 6.1], ist aber auch leicht durch Vergarbung einzusehen: Wegen Satz 2.14 muß die Aussage nur über dem punktierten Spektrum $X-\{x\}$ bestätigt werden; dort ist sie als Behauptung über lokal freie Garben aber trivial.)

<u>Satz 2.29:</u> R sei der lokale Ring einer normalen Flächensingularität, ω der dualisierende Modul von R. Dann gilt:

(a) R ist das (bis auf Isomorphie) einzige unzerlegbare projektive Objekt in $\mathcal{MCM}(R)$;

(b) ω ist das (bis auf Isomorphie) einzige unzerlegbare injektive Objekt in $\mathcal{MCM}(R)$.

<u>Beweis:</u> (a) Sei A unzerlegbar projektiv in $\mathcal{MCM}(R)$. Betrachte eine Präsentation $0 \to K \to nR \to A \to 0$ von A. Wegen $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} A = \mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} R = 2$ folgt $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}} K = 2$, also liegt die Sequenz in $\mathcal{MCM}(R)$ und spaltet wegen der Projektivität von A. Aus $nR \simeq A \oplus K$ folgt $A \simeq R$ wegen der Eindeutigkeit der Krull-Schmidt-Zerlegung.

(b) Weil $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ exakt ist und das Bild einer exakten Sequenz unter $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ genau dann spaltet, wenn dies auf die Sequenz selbst zutrifft, stellt $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ eine Bijektion zwischen den projektiven und den injektiven Objekten von $\mathcal{MCM}(R)$ her. ∎

Wir kommen jetzt zu der Beschreibung der irreduziblen Morphismen in $\mathcal{MCM}(R)$ durch Auslander. ([Au], [**AuRei**$_5$])

<u>Definition 2.30</u> (Auslander): R sei der lokale Ring einer normalen Flächensingularität, m das maximale Ideal und ω der dualisierende Modul von R. Dann heißt eine zu $0 \neq e \in \mathrm{Ext}_R^2(R/m,\omega) \simeq R/m$ gehörende Extension

$$0 \to \omega \to D \to R \to R/m \to 0$$

eine <u>Fundamentalsequenz</u> von R.

<u>Bemerkungen 2.31:</u> (1) Je zwei Fundamentalsequenzen sind isomorph*, da sie als Extensionen auseinander hervorgehen, indem man einen der nicht-trivialen Pfeile einer der beiden Sequenzen mit einem geeigneten Skalar $\neq 0$ multipliziert. Man spricht daher auch von <u>der</u> Fundamentalsequenz von R, wenn es auf Isomorphie nicht ankommt.

(2) Die Fundamentalsequenzen sind von der angegebenen Gestalt mit R als drittem Term, da sie sich als Verlängerungen von nicht spaltenden Extensionen $0 \to \omega \to D \to m \to 0$, die zu Elementen $\neq 0$ in $\mathrm{Ext}_R^1(m,\omega) \simeq H_m^1(m) \simeq H_m^0(R/m) \simeq R/m$ gehören, durch die ebenfalls nicht spaltende Extension $0 \to m \to R \to R/m \to 0$ realisieren lassen. Umgekehrt kann eine Extension $0 \to \omega \to D \to R \to R/m \to 0$ niemals spalten, weil R ein unzerlegbarer R-Modul ist.

(3) Der zweite Term in der Fundamentalsequenz von R ist reflexiv. (Aus $0 \to \omega \to D \to m \to 0$ folgt nämlich sofort $H_m^0(D) = 0$ und die Cohomologiesequenz $0 \to H_m^1(D) \to H_m^1(m) \to H_m^2(\omega)$; der letzte Pfeil ist aber injektiv, denn er ist dual zu $\mathrm{Hom}_R(\omega,\omega) \to \mathrm{Ext}_R^1(m,\omega) \simeq R/m$ und diese Abbildung ist $\neq 0$, weil die Sequenz nicht spaltet. Also folgt $H_m^1(D) = 0$ und $D \in \mathit{MCM}(R)$ nach 2.8.)

<u>Satz 2.32</u> (Auslander): Unter den Voraussetzungen wie in Definition 2.30 sei

$$0 \to \omega \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} R \to R/m \to 0$$

eine Fundamentalsequenz von R. Dann gilt:

(1) Ist M ein unzerlegbarer nicht-projektiver Modul aus $\mathit{MCM}(R)$, so gewinnt man eine in M endende Auslander-Reiten-Sequenz durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(M^\vee,-)$, wo $M^\vee := \mathrm{Hom}_R(M,R)$ sei, auf die Fundamentalsequenz:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M^\vee,\omega) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M^\vee,g)} \mathrm{Hom}_R(M^\vee,D) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M^\vee,f)} M \to 0.$$

---

*) als Sequenzen, d.h. durch Isomorphismen auch hinsichtlich der Endterme, im Gegensatz zum Isomorphiebegriff von Extensionen.

(2) Ist M ein unzerlegbarer nicht-injektiver Modul aus $\mathcal{MCM}(R)$, so ist der Modul $\mathrm{Hom}_R(M,\omega)$ unzerlegbar und nicht-projektiv und eine in M beginnende Auslander-Reiten-Sequenz entsteht durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ auf die in $\mathrm{Hom}_R(M,\omega)$ endende Auslander-Reiten-Sequenz aus (1).

(3) Jeder Nicht-Isomorphismus $X \to R$, $X \in \mathcal{MCM}(R)$ unzerlegbar, läßt sich über $g\colon D \to R$ faktorisieren.

(4) Jeder Nicht-Isomorphismus $\omega \to Y$, $Y \in \mathcal{MCM}(R)$ unzerlegbar, läßt sich über $f\colon \omega \to D$ faktorisieren.

Die Teile (1) und (3) werden in [**Au**, §6] explizit bewiesen; die Teile (2) und (4) ergeben sich daraus durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(-,\omega)$ unter Beachtung der Eigenschaft dieses Funktors, Auslander-Reiten-Sequenzen (bzw. Fundamentalsequenzen) in Auslander-Reiten-Sequenzen (bzw. Fundamentalsequenzen) zu überführen.

Die Kenntnis der Fundamentalsequenz gewährt also direkten Aufschluß über sämtliche irreduziblen Homomorphismen in $\mathcal{MCM}(R)$, sofern die unzerlegbaren Moduln $M \in \mathcal{MCM}(R)$ und die Krull-Schmidt-Zerlegungen von $\mathrm{Hom}_R(M^\vee,D)$ bekannt sind.

Was die nicht nach Satz 2.22 durch Auslander-Reiten-Sequenzen beschreibbaren Pfeile in $\mathcal{AR}(R)$, die von injektiven Punkten ausgehen oder zu projektiven Punkten weisen, angeht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) Ist D unzerlegbar, so gibt es genau die Pfeile $[\omega]\to[D]$ und $[D]\to[R]$;

(b) Ist $D \cong D_1 \oplus D_2$ (mehr Summanden kann D nicht haben, da D den Rang 2 besitzt), so gibt es $[\omega]\to[D_i]$ und $[D_i]\to[R]$, jeweils $i = 1,2$. (Dieser Fall tritt etwa ein, wenn R der lokale Ring einer zyklischen Quotientensingularität ist, denn dann gibt es nur unzerlegbare Moduln vom Rang 1; siehe [**He**, Folgerung 3.2].)

Wir bemerken noch, daß sich die in einem nicht-projektiven unzerlegbaren Modul M endende Auslander-Reiten-Sequenz auch in der Form

$$0 \to (M \otimes_R \omega)^{\vee\vee} \to (M \otimes_R D)^{\vee\vee} \to M \to 0$$

gewinnen läßt.*

*) Die Bildung des Biduals ist wesentlich, da ein Tensorprodukt reflexiver Moduln im allgemeinen sogar Torsionselemente enthalten wird.

(Die für beliebige $M,N \in \mathcal{MCM}(R)$ gültige Aussage $\mathrm{Hom}_R(M^{\vee},N) \simeq (M \otimes_R N)^{\vee\vee}$ muß nach Vergarbung wegen Satz 2.14 nur mehr über dem regulären Ort des zu R gehörigen Spektrums verifiziert werden und ist dort trivial, weil es sich um lokal freie Garben handelt.)

Der Satz 2.32 gibt selbstverständlich auch Aufschluß über die Auslander-Reiten-Translation τ:

Folgerungen 2.33: (1) Sei M ein nicht-projektiver unzerlegbarer Modul. Dann ist $\tau([M]) = [(M \otimes_R \omega)^{\vee\vee}]$. Ist M ein nicht-injektiver unzerlegbarer Modul, so ist entsprechend $\tau^{-1}([M]) = [(M \otimes_R \omega^{\vee})^{\vee\vee}] = [(M^{\vee} \otimes_R \omega)^{\vee}]$.

(2) Der stabile Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}_s(R)$ von $\mathcal{MCM}(R)$ besteht als voller Unterköcher von $\mathcal{AR}(R)$ aus genau den Punkten, die nicht für ein $n \geq 0$ von der Form $[(\omega^{\otimes n})^{\vee\vee}]$ oder $[(\omega^{\otimes n})^{\vee}]$ sind.

Für die uns hauptsächlich interessierenden Klassen von Flächensingularitäten bedeutet das:

Folgerungen 2.34: (1) Ist R der lokale Ring einer Gorenstein-Flächensingularität (d.h. $\omega \simeq R$), also etwa einer minimal-elliptischen Flächensingularität, so ist die Auslander-Reiten-Translation die Identität und der stabile Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}_s(R)$ unterscheidet sich vom vollen Köcher $\mathcal{AR}(R)$ durch das Fehlen des projektiv-injektiven Punktes $[R]$.

(2) Ist R der lokale Ring einer rationalen Flächensingularität, so unterscheiden sich $\mathcal{AR}_s(R)$ und $\mathcal{AR}(R)$ um endlich viele Punkte der Form $[(\omega^{\otimes k})^{\vee\vee}]$ für $k = 0,\dots,n-1$ und alle Punkte $[M]$ in $\mathcal{AR}_s(R)$ durchlaufen unter τ endliche Zykel von Längen, die die Ordnung n von ω in der Divisorenklassengruppe von R teilen.

Begründung zu (2): Nach Lipman ([**Li**, Theorem 17.4]) ist die Divisorenklassengruppe einer rationalen Flächensingularität endlich (und dies charakterisiert sogar Rationalität.) Daher gibt es ein kleinstes $n>0$, so daß $\omega^{\otimes n}$ über dem punktierten Spektrum mit R übereinstimmt, d.h. zugleich $(\omega^{\otimes n})^{\vee\vee} \simeq R$ ist. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Die Aufgabe, den für die Kenntnis der irreduziblen Homomorphismen in $\mathcal{MCM}(R)$ wesentlichen zweiten Term einer Fundamentalsequenz von R zu bestimmen, kann schwierig sein. Ist R jedoch der lokale Ring einer quasihomogenen Flächensingularität (X,x), d.h. einer Singularität mit einer analytischen $\mathbb{C}^*$-Operation, deren einziger Fixpunkt der singuläre Punkt x ist, so gilt das folgende Resultat.

Proposition 2.35: Es sei R der lokale Ring einer quasihomogenen normalen Flächensingularität (X,x). Dann stimmt der zweite Term D der zu R gehörenden Fundamentalsequenz

$$0 \to \omega \to D \to R \to R/\mathfrak{m} \to 0$$

mit dem Modul der Zariski-Differentiale auf X überein, es gilt also

$$D \cong (\Omega^1_R)^{\vee\vee} \cong (j_* \Omega^1_U)_x ,$$

wobei Ω^1_R den Modul der Kählerschen 1-Formen über R und Ω^1_U die Garbe der Keime von holomorphen 1-Formen über dem punktierten Spektrum $U = X-\{x\}$ bezeichnet und $j\colon U \to X$ die offene Inklusion ist.

Beweis: Wenn (X,x) quasihomogen ist, dann gibt es eine $\mathbb{C}^*$-äquivariante Einbettung von (X,x) in einen affinen Raum $(\mathbb{C}^e,0)$, der eine die Operation auf X fortsetzende $\mathbb{C}^*$-Aktion trägt, die bezüglich geeignet gewählter Koordinaten $z_1,\dots,z_e$ in der Form

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^e \ni (t;z_1,\dots,z_e) \mapsto (t^{w_1}z_1,\dots,t^{w_e}z_e)$$

mit positiven ganzzahligen Gewichten $w_1,\dots,w_e$ ausgedrückt werden kann. Der lokale Ring $R = \mathcal{O}_{X,x}$ ist dann ein Quotient des regulären Ringes $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_e\}$. (Vgl. hierzu etwa [OrWa].)

Definiert man die (gewichtet homogene) Euler-Derivation ξ als

$$\xi := \sum_{i=1}^{e} w_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} ,$$

so erhält man durch Kontraktion mit ξ R-lineare Homomorphismen $\Omega^p_R \xrightarrow{\xi} \Omega^{p-1}_R$ für alle $p>0$ ($\Omega^p_R := \Lambda^p \Omega^1_R$ und zu Ω^1_R siehe etwa [AG, Chapter II.8]), die einen exakten Komplex bilden. (Die Komplexeigenschaft ist klar; die Exaktheit folgt daraus, daß für homogene Elemente $\varphi \in \Omega^p_R$ gilt: $(d\circ\xi + \xi\circ d)(\varphi) = \deg(\varphi)\cdot\varphi$, wobei d die äußere Differentiation bezeichnet.* Siehe hierzu auch

*) Dies verallgemeinert die bekannte Euler-Formel für die partiellen Ableitungen von homogenen Polynomen.

[Na, Lemma 2.1.1].) Durch Vergarbung über X entsteht so eine exakte Sequenz

$$\Omega_X^2 \to \Omega_X^1 \to \mathcal{O}_X \to \mathbb{C}_x \to 0 \qquad (*)$$

worin $\mathbb{C}_x$ die in dem Punkt x konzentrierte Wolkenkratzergarbe mit Halm $\mathbb{C}$ bezeichnet. Der Kern von $\Omega_X^2 \to \Omega_X^1$ ist gleichfalls in x konzentriert. Wir wollen zeigen, daß sich aus (*) durch zweimaliges Dualisieren eine Fundamentalsequenz von R ergibt.

Weil alle beteiligten Garben über dem punktierten Spektrum $U = X - \{x\}$ lokal frei sind, stimmt zweimaliges Dualisieren mit der Anwendung des Funktors $j_*j^*(-)$ überein, wobei $j: U \to X$ für die offene Inklusion steht. Die Anwendung von j^* auf (*) liefert zunächst

$$0 \to \Omega_U^2 \to \Omega_U^1 \to \mathcal{O}_U \to 0 \qquad (**)$$

und mit j_* resultiert daraus die exakte Sequenz

$$0 \to \omega_X \to D_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X,$$

wobei $D_X = j_*j^*\Omega_X^1 \simeq (\Omega_X^1)^{\vee\vee}$ der Modul der Zariski-Differentiale ist. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \to & \Omega_X^1 & \to & \mathcal{O}_X & \to & \mathbb{C}_x & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow = & & & \\ \dots \to & D_X & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_X & & & \end{array}$$

folgt weiter, daß die Garbe m_x des maximalen Ideals von $x \in X$ im Bild von D_X unter f liegt. Also ist coker(f) höchstens gleich $\mathbb{C}_x$. Die Nichtsurjektivität von f in dem Punkt x ist wegen der aus (**) folgenden Cohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \to & H^0(U,\Omega_U^1) & \to & H^0(U,\mathcal{O}_U) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U,\Omega_U^2) & \to \dots \\ & \wr\wr & & \wr\wr & & & \\ & D_{X,x} & \xrightarrow{f_x} & \mathcal{O}_{X,x} & & & \end{array}$$

äquivalent zum Nichtverschwinden des Corandes δ. Diese Eigenschaft von δ ist nicht offensichtlich, wurde aber von I. Naruki in [Na, Vorbereitungen zu Lemma 2.1.3] bewiesen. (Die hier mit δ bezeichnet Abbildung heißt dort $\eta(ch(\xi)^{n-1})$ und es ist $n=2$.)

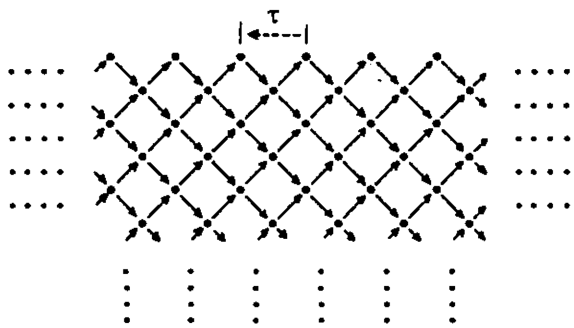
Wir haben also eine Sequenz der gewünschten Gestalt erhalten:

$$0 \to \omega_X \to D_X \to \mathcal{O}_X \to \mathbb{C}_x \to 0.$$

Nach Bemerkung 2.31(2) kann eine derartige Sequenz nicht spalten und ist folglich eine Fundamentalsequenz von $\mathcal{O}_X$. ∎

Wir geben noch eine Ergänzung zur Terminologie, die sich später als nützlich erweisen wird.

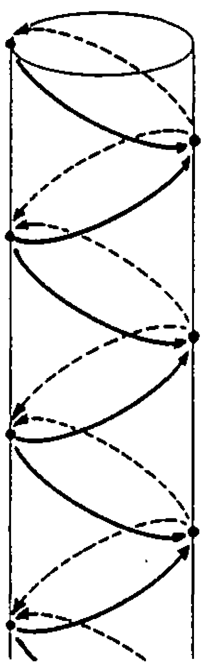
Definition 2.36: (1) Mit $\mathbb{Z}A_\infty$ werde der folgende unendliche Translationsköcher bezeichnet:



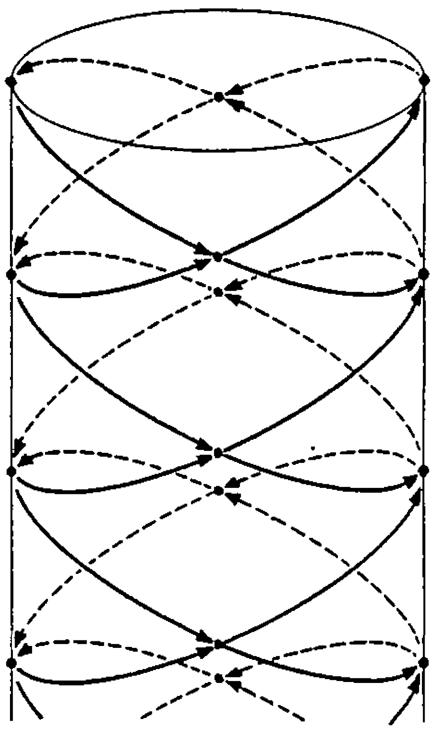
dessen Translation τ wie eingezeichnet jeden Punkt in seinen linken horizontalen Nachbarpunkt abbildet.

(2) Eine Röhre vom Rang $r \geq 1$, bezeichnet mit $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^r\rangle$, ist derjenige Translationsköcher, der aus $\mathbb{Z}A_\infty$ durch Herausdividieren der Orbiten der von τ^r erzeugten Gruppe von Translationen entsteht.

$\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$



$\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^2\rangle$



2.37. E. Dieterich hat in [$\mathbf{Di_2}$, Theorem 24] gezeigt, daß für eine isolierte Hyperflächensingularität - gleich welcher Dimension - der stabile Auslander-Reiten-Köcher der maximalen Cohen-Macaulay-Moduln, sofern er nicht endlich ist, eine disjunkte Vereinigung von Röhren der Ränge 1 und 2 ist. Wenn es sich um eine Hyperflächensingularität von gerader Dimension handelt, dann treten keine Röhren vom Rang 2 auf.

In der genannten Arbeit finden sich noch weitere Strukturaussagen über Auslander-Reiten-Köcher isolierter Singularitäten, die im Lichte der Aussagen von 2.34 insbesondere auf die Köcher von rationalen oder minimal-elliptischen Flächensingularitäten angewandt werden können.

3. VOLLE GARBEN AUF AUFLÖSUNGEN VON FLÄCHENSINGULARITÄTEN.

In diesem Kapitel bezeichne (X,x) eine normale komplexe Flächensingularität, $j: U \to X$ sei die offene Inklusion des punktierten Spektrums $U = X-\{x\}$ und es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine beliebige Auflösung von $x \in X$. Um stets mit globalen Schnitten arbeiten zu können, denken wir uns X in der Regel als durch einen Steinschen Repräsentanten vertreten.

Das Ziel dieses Kapitels besteht in der Kennzeichnung der reflexiven Modulgarben auf (X,x) in Termen geeigneter Objekte auf der Auflösung $\tilde{X}$, die den reflexiven Moduln zugeordnet werden. Dabei handelt es sich um Vektorraumbündel mit gewissen leicht nachprüfbaren Eigenschaften, die gleich anschließend eingeführt werden. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden diese Bündel dann ihrerseits durch Eigenschaften ihrer Einschränkungen auf geeignete Zykel im exzeptionellen Ort charakterisiert.

Volle Garben. Es sei M ein reflexiver Modul* auf (X,x). Um M ein Objekt auf der Auflösung $\tilde{X}$ zuzuordnen, liegt es nahe, das inverse Bild π^*M von M hinsichtlich π zu bilden, also die kohärente Modulgarbe auf $\tilde{X}$, deren Halm in $\tilde{y} \in \tilde{X}$ durch

$$(\pi^*M)_{\tilde{y}} = M_y \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{y}} \qquad \text{mit } y = \pi(\tilde{y})$$

definiert ist. Infolge des Tensorproduktes als Bestandteil der Bildung von π^*M werden in π^*M im allgemeinen Torsionselemente enthalten sein, die Träger im exzeptionellen Ort E haben. (Außerhalb von E kann keine Torsion entstehen, weil π^*M dort biholomorphes Urbild von $M|_U$ ist.) Beispiele für Torsionsuntergarben in Urbildgarben von reflexiven Moduln gibt Riemenschneider in [Ri].

Die Garbe π^*M ist daher ein möglicherweise sehr kompliziertes Objekt auf $\tilde{X}$, besitzt aber den Vorzug, den Modul M eindeutig zu charakterisieren, denn die Einschränkung von π^*M auf $\tilde{X}$-E entspricht wegen biholomorpher Äquivalenz der Räume der Einschränkung M_U von M auf U und diese bestimmt M nach Satz 2.8.

---

*) Modulgarben über Raumkeimen werden wir von jetzt an kurz Moduln nennen.

Offensichtlich bleibt dieses Argument richtig, wenn man aus π^*M die in E konzentrierte Torsion herausteilt und zu der Garbe $F' := \pi^*M/\mathrm{Torsion}$ übergeht. F' ist erheblich einfacher als π^*M zu beschreiben und ist in dem Fall, daß $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die Auflösung einer rationalen Singularität ist, sogar eine lokal freie Garbe ([ArVe, Lemma 1.1]). In den übrigen Fällen erhält man aus der Torsionsfreiheit von F' nach Satz 2.4 zumindest, daß F'_z nur in diskreten Punkten $z \in \tilde{X}$ nicht frei ist. Weil F' außerhalb von E als biholomorphes Urbild einer reflexiven Garbe sogar reflexiv ist, liegen diese Punkte alle in E und es gibt insbesondere nur endlich viele davon, weil E kompakt ist.

Bildet man jetzt die reflexive Hülle $F := (F')^{\vee\vee}$ von F', so unterscheidet sich F von F' nur in endlich vielen auf E liegenden Punkten und bestimmt daher noch immer den Modul M. Außerdem ist F eine lokal freie Garbe auf $\tilde{X}$ (Satz 2.4) und entspricht damit einem Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$.

Weil beim Dualisieren die Torsion einer Garbe ohnehin verloren geht, kann man von π^*M auch direkt zu F gelangen, ohne zuvor noch die Torsion herauszuteilen: $F \simeq (\pi^*M)^{\vee\vee}$. Wir nehmen dies zum Anlaß, die folgende Klasse von Garben auf $\tilde{X}$ einzuführen.

<u>Definition 3.1:</u> Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die Auflösung einer normalen Flächensingularität. Eine Modulgarbe F auf $\tilde{X}$ heißt eine <u>volle Garbe</u>, wenn es einen reflexiven Modul M auf (X,x) gibt, so daß F zu $(\pi^*M)^{\vee\vee}$ isomorph ist. Die Garbe $(\pi^*M)^{\vee\vee}$ heißt die M <u>zugeordnete volle Garbe</u>.

Dieser Begriff stellt eine Verallgemeinerung der von H. Esnault in [Es] für rationale Singularitäten definierten vollen Garben dar. Volle Garben sind stets lokal frei. Auch die folgende triviale Proposition haben wir mit den einleitenden Bemerkungen schon begründet.

<u>Proposition 3.2:</u> Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die Auflösung einer normalen Flächensingularität. Dann besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen den folgenden Objekten:

(a) Isomorphieklassen von reflexiven Modulgarben auf (X,x)

(b) Isomorphieklassen von vollen Garben auf $\tilde{X}$.

(Wir fassen die Begründung noch einmal kurz zusammen. Es seien $F_i \simeq (\pi^*M)^{\vee\vee}$ für $i=1,2$ zwei volle Garben. Aus $M_1 \simeq M_2$ folgt $F_1 \simeq F_2$. Ist umgekehrt $F_1 \simeq F_2$, so gilt insbesondere $F_1|_{\tilde{X}-E} \simeq F_2|_{\tilde{X}-E}$, also $M_1|_U \simeq M_2|_U$ und damit $M_1 \simeq M_2$ wegen der Reflexivität von M_1 und M_2.)

Als nächstes geben wir eine erste cohomologische Charakterisierung von vollen Garben auf Auflösungen. Zuvor führen wir noch zwei Sprechweisen ein und notieren einfache Konsequenzen, die sich daraus ergeben.

Definition 3.3: Es sei Y ein nicht notwendig reduzierter komplexer Raum.

(1) Eine Garbe G auf Y heißt generisch (von globalen Schnitten) erzeugt, wenn der Quotient von G nach der von globalen Schnitten erzeugten Untergarbe G' von G einen höchstens 0-dimensionalen Träger besitzt.

(2) Ein $\mathcal{O}_Y$-linearer Garbenhomomorphismus $f: G \to H$ heißt generisch surjektiv, wenn $H/f(G)$ einen höchstens 0-dimensionalen Träger besitzt.

Später wird Y immer entweder eine Auflösung $\tilde{X}$ einer normalen Flächensingularität oder ein darin durch einen Zykel $Z \geq 0$ definiertes abgeschlossenes Unterschema sein. Wir erinnern daran, daß wir eine Auflösung $\tilde{X}$ als einen Umgebungskeim der exzeptionellen Faser E ansehen wollen, so daß eine generisch von globalen Schnitten erzeugte Garbe auf $\tilde{X}$ in diesem Sinne höchstens in auf E liegenden (endlich vielen) Punkten nicht von ihren Schnitten erzeugt wird. (Eine entsprechende Aussage kann für generisch surjektive Homomorphismen auf $\tilde{X}$ formuliert werden.)

Bemerkungen 3.4: (1) Wenn G generisch von globalen Schnitten erzeugt und $G \to H$ generisch surjektiv ist, dann wird auch H generisch von globalen Schnitten erzeugt.

(2) Wenn $f: G \to H$ generisch surjektiv ist und F eine beliebige $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe ist, dann ist auch $f \otimes id_F: G \otimes F \to H \otimes F$ generisch surjektiv.

(3) Es sei Y entweder die Auflösung einer Flächensingularität oder ein darin enthaltener Zykel. Wenn $f: G \to H$ generisch surjektiv ist, dann ist $H^1(f): H^1(G) \to H^1(H)$ surjektiv.

Begründung zu (3): Mit $H' := \mathrm{im}(f) \subset H$, $K := \ker(f) \subset G$ und $C := \mathrm{coker}(f) = H/H'$ erhält man exakte Sequenzen $0 \to K \to G \to H' \to 0$ und $0 \to H' \to H \to C \to 0$ und daraus $H^1(G) \twoheadrightarrow H^1(H') \to H^2(K) = 0$ und $H^1(H') \twoheadrightarrow H^1(H) \to H^1(C) = 0$ wegen $\dim \mathrm{supp}(C) \leq 0$. Insgesamt folgt die Behauptung. ∎

<u>Proposition 3.5:</u> $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ sei die Auflösung einer normalen Flächensingularität. Eine lokal freie Garbe F auf $\tilde{X}$ ist genau dann eine volle Garbe, wenn gilt:

(i) F wird generisch von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) $H^1_E(\tilde{X},F)\to H^1(\tilde{X},F)$ ist injektiv.

<u>Bemerkung 3.6:</u> Die unter (ii) genannte Abbildung ist der natürliche Pfeil, der in der Cohomologiesequenz (1.7)

$$0\to H^0(\tilde{X},F)\to H^0(\tilde{X}-E,F)\to H^1_E(\tilde{X},F)\to H^1(\tilde{X},F)\to\ldots$$

auftritt. ($H^0_E(\tilde{X},F)$ verschwindet, weil F lokal frei ist.) Die Bedingung (ii) ist also äquivalent zu:

(ii') $H^0(\tilde{X},F)\to H^0(\tilde{X}-E,F)$ ist surjektiv.

Demgegenüber hat (ii) aber den unmittelbaren Vorzug, daß die beiden involvierten Cohomologiegruppen a priori von endlicher Dimension sind.

<u>Beweis von Proposition 3.5.</u> Notwendigkeit: Es sei F eine volle Garbe, also $F\simeq(\pi^*M)^{\vee\vee}$ mit einem reflexiven Modul M. Da π^*M von globalen Schnitten erzeugt wird, ist dies auch für $F':=\pi^*M/\text{Torsion}$ der Fall. $F\simeq(F')^{\vee\vee}$ weicht aber von der Untergarbe F' (vgl. 2.2(3)), wie oben bemerkt, nur über endlich vielen auf E gelegenen Punkten ab, so daß (i) folgt.

Um (ii') zu zeigen, geben wir einen Schnitt $s'\in H^0(\tilde{X}-E,F)$ vor, der zu einem Schnitt in F über $\tilde{X}$ fortzusetzen ist. Dem entspricht ein Schnitt $\bar{s}'\in H^0(U,M_U)$ über $U=X-\{x\}$. Nach Satz 2.8 gibt es eine Fortsetzung zu $\bar{s}\in H^0(X,M)$. Die Liftung $\bar{s}\circ\pi$ induziert einen Schnitt in π^*M, der s' fortsetzt. Dessen Bild unter der kanonischen Abbildung $\pi^*M\to(\pi^*M)^{\vee\vee}\simeq F$ liefert die gewünschte Fortsetzung $s\in H^0(\tilde{X},F)$ von s'. ⌋

Um zu zeigen, daß (i) und (ii) hinreichend sind, beweisen wir, daß unter diesen Annahmen bezüglich F durch $M:=\pi_*F$ ein reflexiver Modul definiert wird, für den $(\pi^*M)^{\vee\vee}\simeq F$ gilt.

F sei also eine lokal freie Garbe, die (i) und (ii') genügt, und $M:=\pi_*F$. Zunächst ist M torsionsfrei, weil F lokal frei ist. Für die Reflexivität von M ist nach 2.9 nur noch die Surjektivität von $M\to j_*j^*M$ im Punkt x zu verifizieren, wo $j:U=X-\{x\}\to X$ die offene Einbettung ist. Gebe also $s'\in H^0(U,M_U)\simeq H^0(\tilde{X}-E,F)$ vor. Wegen (ii') existiert eine Fortsetzung $\bar{s}\in H^0(\tilde{X},F)$ auf $\tilde{X}$ und diese definiert einen Schnitt in $H^0(X,\pi_*F)=H^0(X,M)$, der s' fortsetzt. Damit ist $M\to j_*j^*M$ surjektiv.

Wir zeigen jetzt $(\pi^*M)^{\vee\vee}\simeq F$. F' bezeichne die von den globalen Schnitten erzeugte Untergarbe von F. Es gibt eine kanonische Surjektion $\pi^*M=\pi^*\pi_*F\to F'$. Weil π außerhalb von E biholomorph ist, haben Elemente im Kern dieser Surjektion Träger in E, sind also Torsionselemente. Andererseits werden Torsionselemente notwendig auf Null in der torsionsfreien Garbe F' abgebildet, so daß $\pi^*M/\text{Torsion}\simeq F'$ ist. Durch zweimaliges Dualisieren folgt nun die Behauptung, denn wegen (i) ist $(F')^{\vee\vee}\simeq F$. Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Corollar 3.7 (zum Beweis von 3.5): Es sei $F=(\pi^*M)^{\vee\vee}$ die einem reflexiven Modul M zugeordnete volle Garbe. Dann ist die von den globalen Schnitten von F erzeugte Untergarbe F' von F isomorph zu $\pi^*M/\text{Torsion}$.

Bemerkung 3.8: Die Proposition 3.5 stellt eine direkte Verallgemeinerung der von H. Esnault in [Es] gegebenen Charakterisierung von vollen Garben dar, die besagt: Eine lokal freie Garbe F auf der Auflösung $\pi:\tilde{X}\to X$ einer rationalen Singularität ist genau dann voll, wenn gilt:

(i*) F wird von globalen Schnitten erzeugt;

(ii*) $R^1\pi_*(F^\vee\otimes\omega_{\tilde{X}})=0$.

Begründung: Mit (i) und (ii) seien die beiden Bedingungen aus 3.5 bezeichnet.

(i*)$\Leftrightarrow$(i): Folgt aus 3.7, weil $\pi^*M/\text{Torsion}$ nach [ArVe, Lemma 1.1] schon lokal frei ist.

Nehme jetzt die Gültigkeit von (i*) bzw. (i) an.

(ii*)$\Leftrightarrow$(ii): $R^1\pi_*(F^\vee\otimes\omega_{\tilde{X}})\simeq H^1(\tilde{X},F^\vee\otimes\omega_{\tilde{X}})$ ist wegen relativer Dualität (1.10) dual zu $H^1_E(X,F)$. Das Verschwinden von $H^1_E(\tilde{X},F)$ ist äquivalent zu (ii), denn es ist $H^1(\tilde{X},F)=0$, weil F von globalen Schnitten erzeugt wird und weil wegen Rationalität $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})=0$ gilt. ∎

Die Cohomologiegruppen* von Garben F auf der Auflösung $(\tilde{X},E)$ einer Flächensingularität werden für gewöhnlich dadurch berechnet, daß ein geeigneter Zykel Z mit Träger in E bestimmt wird, so daß die Cohomologie der

*) $H^1(\tilde{X},F)$ oder, mit der Interpretation durch Satz 1.8, auch $H^1_E(\tilde{X},F)$.

Einschränkung F_Z von F mit der Cohomologie von F übereinstimmt. Die Cohomologie von F_Z über der kompakten Kurve E ist im allgemeinen leichter zu beschreiben als die von F. (Für ein gegebenes F garantiert der Satz 1.3 die Existenz eines solchen Zykels Z.)

Wir wollen im folgenden einen Zykel $Z \geq 0$ angeben, der die Eigenschaft besitzt, daß sich beide Bedingungen der Proposition 3.5 für jede lokal freie Garbe F auf $\tilde{X}$ in Termen von F_{2Z} ausdrücken lassen. Anschließend werden wir uns der Frage widmen, inwieweit eine lokal freie Garbe F_{2Z}, die beiden Bedingungen genügt, bereits eine volle Garbe F auf $\tilde{X}$ und damit den zugehörigen reflexiven Modul $M = \pi_* F$ zu bestimmen vermag.

Es sei nun $Z \geq E$ ein beliebiger Zykel auf der Auflösung $(\tilde{X}, E)$ einer Flächensingularität. Wenn man eine lokal freie Garbe F auf $\tilde{X}$ durch Eigenschaften ihrer Einschränkungen F_Z bzw. F_{2Z} auf Z bzw. 2Z beschreiben will, dann ist es zweckmäßig, F selbst als eine Ausdehnung von F_Z (oder F_{2Z}) zu verstehen.

Dafür schreiben wir abkürzend $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ und bemerken, daß für jedes $\mu \geq 1$ die folgende exakte Sequenz die Einschränkung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{(\mu+1)Z}$ zu $\mathcal{O}_{\mu Z}$ beschreibt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}(-\mu Z)/\mathcal{O}(-(\mu+1)Z) & \to & \mathcal{O}/\mathcal{O}(-(\mu+1)Z) & \to & \mathcal{O}/\mathcal{O}(-\mu Z) & \to & 0 \\ & & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \\ & & \mathcal{O}_Z(-\mu Z) & & \mathcal{O}_{(\mu+1)Z} & & \mathcal{O}_{\mu Z} & & \end{array}$$

($\mathcal{O}_Z(-\mu Z)$ ist die μ-te Tensorpotenz des über $\mathcal{O}_Z$ gebildeten Duals der Normalengarbe $N_Z = \mathcal{O}_Z(Z)$.) Durch Tensorieren mit einer gegebenen lokal freien Garbe F über $\mathcal{O}$ erhält man daraus die exakte Sequenz

$$0 \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_Z(-\mu Z) \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{(\mu+1)Z} \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{\mu Z} \to 0$$

bzw. in den Bezeichnungen aus 1.1:

(3.9) $\quad 0 \to F_Z(-\mu Z) \to F_{(\mu+1)Z} \to F_{\mu Z} \to 0 \qquad$ für alle $\mu \geq 1$.

Insbesondere folgt für $\mu = 1$ aus 3.9 durch Twist mit $\mathcal{O}(Z)$ eine allein durch die lokal freie Garbe F_{2Z} über 2Z festgelegte exakte Sequenz

$$0 \to F_Z \to F_{2Z}(Z) \to F_Z(Z) \to 0. \qquad (*)$$

<u>Proposition 3.10</u>: Es sei $Z \geq E$ ein Zykel auf der Auflösung $(\tilde{X},E)$ einer normalen Flächensingularität, für den $\mathcal{O}_Z(-Z)$ generisch von globalen Schnitten über E erzeugt wird und $H^1(E,\mathcal{O}_Z(-Z))=0$ gilt. Eine lokal freie Garbe F auf $\tilde{X}$ ist genau dann eine volle Garbe, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

(i) F_Z wird generisch von globalen Schnitten über E erzeugt;

(ii) Die von der Einschränkung von $F_{2Z}(Z)$ auf Z (vgl. (*) oben) induzierte Corandabbildung $H^0(E,F_Z(Z)) \to H^1(E,F_Z)$ ist injektiv.

<u>Bemerkung 3.11</u>: Die Existenz eines Zykels $Z \geq E$ mit den beiden geforderten Eigenschaften ist durch Satz 1.3 immer gesichert, denn es kann sogar erreicht werden, daß $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ von globalen Schnitten erzeugt wird und $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z))$ verschwindet. (Siehe hierzu auch 3.13.)

<u>Beweis von Proposition 3.10</u>: Wir werden die Äquivalenz von (i) und (ii) zu den beiden korrespondierenden Bedingungen von Proposition 3.5 aufzeigen. Es sei F eine beliebige lokal freie Garbe über $\tilde{X}$; zur Abkürzung wird $F := F_Z$ geschrieben.

<u>1.Schritt.</u> Wir zeigen, daß F genau dann generisch von den globalen Schnitten über $\tilde{X}$ erzeugt wird, wenn das selbe für $F = F_Z$ (über E) gilt, wenn also (i) erfüllt ist. Die Notwendigkeit von (i) ist trivial; für die Umkehrung zeigen wir zunächst:

<u>Hilfssatz 3.12</u>: Es sei Z ein Zykel wie in Proposition 3.10. Wenn für eine lokal freie Garbe F auf $\tilde{X}$ die Einschränkung F_Z generisch von ihren globalen Schnitten erzeugt wird, dann gilt $H^1(\tilde{X},F(-Z))=0$.

<u>Beweis</u>: Die gegebene Auflösung heiße $\pi:(\tilde{X},E)\to(X,x)$ und mit $(R^1\pi_*F(-Z))^\wedge$ werde die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung der kohärenten Garbe $R^1\pi_*F(-Z)$ auf X bezüglich des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnet. Nach Grothendieck ([**EGA** III, Théorème 4.2.1]) gilt:

$$(R^1\pi_*F(-Z))^\wedge_x \simeq \varprojlim_{\mu} H^1(E, F_{\mu Z}(-Z)).$$

Damit genügt es, für alle $\mu \geq 1$ das Verschwinden von $H^1(E, F_{\mu Z}(-Z))$ zu zeigen, denn daraus folgt $R^1\pi_*F(-Z)_x \simeq H^1(\tilde{X},F(-Z))=0$.

Aus den mit $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ getwisteten Sequenzen 3.9 ergeben sich für jedes $\mu \geq 1$ Cohomologiesequenzen

$$\ldots \to H^1(E,F(-(\mu+1)Z)) \to H^1(E,\mathcal{F}_{(\mu+1)Z}(-Z)) \to H^1(E,\mathcal{F}_{\mu Z}(-Z)) \to 0$$

woraus die Behauptung durch Induktion über μ folgt, sofern alle Gruppen $H^1(E,F(-\mu Z))$ für $\mu \geq 1$ verschwinden. Weil F und $\mathcal{O}_Z(-Z)$ nach Voraussetzung generisch von ihren globalen Schnitten erzeugt werden, gilt dies auch für alle $F(-(\mu-1)Z)$ und man erhält generisch surjektive Homomorphismen $s\mathcal{O}_Z(-Z) \to F(-\mu Z)$. Aus 3.4(3) und $H^1(E,\mathcal{O}_Z(-Z)) = 0$ folgt $H^1(E,F(-\mu Z)) = 0$. ∎

Wir zeigen jetzt, daß $\mathcal{F}$ generisch erzeugt wird, wenn dies für F der Fall ist. Nach Satz 1.3 gibt es einen in E konzentrierten effektiven Divisor $Z' \geq 0$, so daß $\mathcal{F}(-Z')$ von globalen Schnitten erzeugt wird. Wegen $\mathcal{F}(-Z') \subset \mathcal{F}$ wird $\mathcal{F}$ dann zumindest über $\tilde{X}-E$ von globalen Schnitten erzeugt. Für die generische Erzeugtheit von $\mathcal{F}$ über Punkten aus E genügt der Nachweis, daß die F generisch erzeugenden Schnitte alle zu Schnitten von $\mathcal{F}$ über $\tilde{X}$ ausgedehnt werden können. Aus der Sequenz $0 \to \mathcal{F}(-Z) \to \mathcal{F} \to F \to 0$ erhält man $H^0(\tilde{X},\mathcal{F}) \to H^0(E,F) \to H^1(\tilde{X},\mathcal{F}(-Z)) = 0$ unter Verwendung von 3.12. Daraus folgt die Ausdehnbarkeit der globalen Schnitte von F zu Schnitten von $\mathcal{F}$. ⌋

Von nun an werde $\mathcal{F}$ als generisch von globalen Schnitten erzeugt vorausgesetzt. Es muß nachgewiesen werden, daß dann (ii) zur Injektivität der natürlichen Abbildung $H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F}) \to H^1(\tilde{X},\mathcal{F})$ gleichbedeutend ist.

<u>2. Schritt:</u> (ii) ist notwendig für die Injektivität von $H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F}) \to H^1(\tilde{X},\mathcal{F})$.

Aus der Sequenz $0 \to \mathcal{F}(-Z) \to \mathcal{F} \to F \to 0$ folgt unter Ausnutzung von $H^1(\tilde{X},\mathcal{F}(-Z)) = 0$ (3.12), daß $H^1(\tilde{X},\mathcal{F}) \simeq H^1(E,F)$ gilt, wobei es sich um durch die Restriktion auf Z induzierte natürliche Isomorphie handelt. Andererseits ist $H^0(E,F(Z)) \subset H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F})$ nach dem Satz 1.8 von Wahl, so daß man die Behauptung sogleich dem folgenden kommutativen Diagramm entnehmen kann:

$$\begin{tikzcd}
H^0(E,F(Z)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^1(E,F) \\
H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(\tilde{X},\mathcal{F}) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$ ⌋

<u>3. Schritt.</u> Wir zeigen, daß $H^0(E,F(Z)) \simeq H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F})$ durch die Annahmen (i) und (ii) impliziert wird. (Das obige Diagramm liefert dann die Injektivität von $H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F}) \to H^1(\tilde{X},\mathcal{F})$, was den Beweis von 3.10 vollendet.)

Nach Satz 1.8 (Wahl) ist $H^1_E(\tilde{X},\mathcal{F}) \simeq \varinjlim_\mu H^0(E, \mathcal{F}\bullet N_{\mu Z})$, wobei kanonische Inklusionen von $H^0(E,\mathcal{F}\bullet N_{\mu Z})$ in $H^0(E,\mathcal{F}\bullet N_{(\mu+1)Z})$ für alle $\mu \geq 1$ bestehen, die aus den exakten Sequenzen (1.9(1))

$$0 \to \mathcal{F}\bullet N_{\mu Z} \to \mathcal{F}\bullet N_{(\mu+1)Z} \to \mathcal{F}((\mu+1)Z) \to 0$$

resultieren. Wir haben die Surjektivität aller dieser Inklusionen oder, äquivalent dazu, die Injektivität aller Corandabbildungen

$$H^0(E,\mathcal{F}((\mu+1)Z)) \to H^1(E, \mathcal{F}\bullet N_{\mu Z}) \qquad \text{für } \mu \geq 1$$

zu zeigen. Hierfür ist es ausreichend, die Injektivität der folgenden komponierten Abbildungen δ_μ für alle $\mu \geq 1$ nachzuweisen:

$$\begin{tikzcd}
H^0(E,\mathcal{F}((\mu+1)Z)) \arrow[r] \arrow[dr, "\delta_\mu"'] & H^1(E,\mathcal{F}\bullet N_{\mu Z}) \arrow[d, "\text{Restriktion auf } Z"] \\
& H^1(E,\mathcal{F}(\mu Z))
\end{tikzcd}$$

Jede der Abbildungen δ_μ ist selbst Corand einer exakten Sequenz* von der Form

$$0 \to \mathcal{F}(\mu Z) \to \mathcal{F}_{2Z}((\mu+1)Z) \to \mathcal{F}((\mu+1)Z) \to 0,$$

die aus $0 \to \mathcal{F}(-Z) \to \mathcal{F}_{2Z} \to \mathcal{F} \to 0$ (3.9) durch Twist mit $\mathcal{O}((\mu+1)Z)$ hervorgeht.

Es sei jetzt ein festes $\mu \geq 1$ vorgegeben. Wir werden eine injektive $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-lineare Abbildung $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\mu Z) \hookrightarrow s\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ für ein geeignetes s (abhängig von μ) konstruieren, die die Eigenschaft besitzt, daß auch ihre Einschränkung $\mathcal{O}_Z(\mu Z) \to s\mathcal{O}_Z$ noch injektiv ist. Mit einer solchen Abbildung erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\mu Z) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}_{2Z}((\mu+1)Z) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}((\mu+1)Z) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & s\mathcal{F} \arrow[r] & s\mathcal{F}_{2Z}(Z) \arrow[r] & s\mathcal{F}(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und daraus sofort einen Vergleich der Corandabbildungen durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^0(E,\mathcal{F}((\mu+1)Z)) \arrow[r, "\delta_\mu"] \arrow[d, hook] & H^1(E,\mathcal{F}(\mu Z)) \arrow[d] \\
s\cdot H^0(E,\mathcal{F}(Z)) \arrow[r, hook, "s\cdot\delta_o"] & s\cdot H^1(E,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

Dies beweist die Injektivität von δ_μ, denn δ_o ist nach (ii) injektiv.

*) Diese Sequenz ist nämlich das Push-out der das induktive System definierenden Sequenz $0 \to \mathcal{F}\bullet N_{\mu Z} \to \mathcal{F}\bullet N_{(\mu+1)Z} \to \mathcal{F}((\mu+1)Z) \to 0$ bezüglich $\mathcal{F}\bullet N_{\mu Z} \to \mathcal{F}(\mu Z)$.

Wir konstruieren jetzt die gewünschte injektive Abbildung $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\mu Z) \to s\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ mit injektiver Restriktion auf Z.

Nach Voraussetzung über Z existiert eine generisch surjektive Abbildung $\varphi': s\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z(-\mu Z)$, wobei etwa $s = h^0(E, \mathcal{O}_Z(-\mu Z))$ gewählt werden kann. Die zu φ' über $\mathcal{O}_Z$ duale Abbildung $\varphi: \mathcal{O}_Z(\mu Z) \to s\mathcal{O}_Z$ ist zunächst nur außerhalb diskreter Punkte (aus E) injektiv. Daraus folgt aber bereits, daß φ überall injektiv ist. (Sei nämlich $\bar{g}$ ein Keim aus $\mathcal{O}_Z(\mu Z)$ im Punkt $z_0 \in E$, der im Kern von φ liegt. Es gilt, weil der Kern diskreten Träger hat, $\bar{g}_z = 0$ für alle $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0. Ist nun $g \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\mu Z)$ ein Repräsentant von $\bar{g}$, so bedeutet dies $g_z \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}((\mu-1)Z)_z$ für $z \neq z_0$ lokal um z_0. $\mathcal{O}_{\tilde{X}}((\mu-1)Z)$ ist aber lokal frei, so daß auch $g_{z_0} \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}((\mu-1)Z)_{z_0}$ und so $\bar{g}_{z_0} = 0$ folgt, was zu zeigen war.)
Wir wollen jetzt $\varphi: \mathcal{O}_Z(\mu Z) \to s\mathcal{O}_Z$ zu einem Homomorphismus $\Phi: \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\mu Z) \to s\,\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ausdehnen. (Φ ist dann automatisch injektiv, weil φ es ist.) Wir fassen φ zu diesem Zweck als ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z(\mu Z), s\mathcal{O}_Z) \simeq H^0(E, s\mathcal{O}_Z(-\mu Z))$ auf; Φ suchen wir entsprechend in $H^0(\tilde{X}, s\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\mu Z))$. Mit der exakten Sequenz

$$0 \to s\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(\mu+1)Z) \to s\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\mu Z) \to s\mathcal{O}_Z(-\mu Z) \to 0$$

und dem Verschwinden von $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(\mu+1)Z))$ in der zugehörigen Cohomologiesequenz, das sich aus der Anwendung von Hilfssatz 3.12 auf $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\mu Z)$ ergibt, folgt die Liftbarkeit von φ zu Φ. $\lrcorner$

Damit ist die Proposition 3.10 bewiesen. ∎

Der Beweis der Proposition 3.10 gibt zugleich eine Erläuterung der beiden an den Zykel Z in 3.10 gestellten Bedingungen:

<u>Corollar 3.13:</u> Für einen Zykel $Z \geq E$ sind äquivalent:
(a) $\mathcal{O}_Z(-Z)$ wird generisch von globalen Schnitten erzeugt und es gilt $H^1(E, \mathcal{O}_Z(-Z)) = 0$;
(b) $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ wird generisch von globalen Schnitten erzeugt und es gilt $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)) = 0$.

((b)⇒(a) ist trivial; die andere Richtung ist im ersten Beweisschritt von 3.10 einschließlich des Hilfssatzes 3.12 enthalten.)

Wir heben für die spätere Verwendung die für den Beweis von Proposition 3.10 wesentliche Tatsache noch einmal hervor:

Corollar 3.14: Es sei $Z \geq E$ ein Zykel, der den in 3.13 genannten Bedingungen genügt. F sei eine volle Garbe auf $\tilde{X}$ und $F := F \otimes \mathcal{O}_Z$ ihre Einschränkung auf Z. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm mit vertikalen Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H^1_E(\tilde{X},F) & \hookrightarrow & H^1(\tilde{X},F) \\ \uparrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ H^0(E,F(Z)) & \hookrightarrow & H^1(E,F) \end{array}$$

Bevor wir mit der Charakterisierung von vollen Garben durch ihre Einschränkungen auf geeignete Zykel fortfahren können, müssen wir die Beziehungen, die zwischen einer lokal freien Garbe F auf der Auflösung einer Flächensingularität und ihren Einschränkungen $F_{\mu Z}$ auf Vielfache eines vorgegebenen Zykels $Z \geq 0$ bestehen, genauer herausarbeiten.

Ausdehnungen lokal freier Garben. (Die im folgenden angegebenen Resultate gehen für den Fall, daß Z eine glatte reduzierte Kurve ist, auf Griffiths zurück: [Gri, Chapter I]. Für eine andere Darstellung sei außerdem auf die Arbeiten [$\mathbf{Pe_1}$] und [$\mathbf{Pe_2}$] von T. Peternell verwiesen.)

Es bezeichne $(\tilde{X},E)$ eine zweidimensionale Auflösung und $Z \geq 0$ einen Zykel auf $\tilde{X}$ mit Träger in E. Wir geben ein $\mu \geq 1$ vor und haben das Ziel, die Ausdehnungen einer gegebenen lokal freien Garbe über μZ zu lokal freien Garben über $(\mu+1)Z$ zu beschreiben.

Um den Schreibaufwand so klein wie möglich zu halten, bezeichnen wir die Strukturgarben $\mathcal{O}_{(\mu+1)Z}$ und $\mathcal{O}_{\mu Z}$ in diesem Abschnitt kurz mit $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_\mu$. Weiter sei F_μ eine vorgegebene lokal freie Garbe über $\mathcal{O}_\mu$ und die Einschränkung von F_μ auf Z werde $F := F_\mu \otimes_{\mathcal{O}_\mu} \mathcal{O}_Z$ genannt. Unter einer <u>Ausdehnung</u> F von F_μ werden wir eine lokal freie $\mathcal{O}$-Modulgarbe F mit $F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_\mu = F_\mu$ verstehen, also nach 3.9 eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}$-Moduln:

(e) $\quad 0 \to F(-\mu Z) \to F \to F_\mu \to 0.$

Zwei Ausdehnungen F und F' von F_μ werden als isomorph angesehen, wenn die zugehörigen Sequenzen (e) und (e') als Extensionen isomorph sind, wenn also ein Isomorphismus der Mittelterme existiert, der auf den Endtermen die Identitäten induziert.

In diesem Sinne können Isomorphieklassen von Ausdehnungen von F_μ als Elemente (e) von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$ verstanden werden, wobei allerdings nur diejenigen Extensionen vorkommen, deren Mittelterme lokal frei über $\mathcal{O}$ sind. Die Gruppe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$ kann darüber hinaus auch nicht in einfacher Weise als die Cohomologiegruppe einer Garbe interpretiert werden, weil F_μ nicht lokal frei über $\mathcal{O}$ ist. Hingegen gilt

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z)) \simeq H^1(E, F_\mu^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_\mu} F(-\mu Z)) \simeq H^1(E, F^{\vee} \otimes F(-\mu Z))$$

und $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z))$ ist in natürlicher Weise eine Untergruppe von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$, denn jede $\mathcal{O}_\mu$-Extension von F_μ durch $F(-\mu Z)$ ist zugleich auch eine Extension über $\mathcal{O}$, die über $\mathcal{O}$ genau dann spaltet (also dem Nullelement von Ext^1 entspricht), wenn sie über $\mathcal{O}_\mu$ spaltet.

Es wird sich erweisen, daß die zu Ausdehnungen von F_μ gehörenden Extensionen genau eine Nebenklasse von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z))$ in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$ bilden.

Dazu rufen wir kurz die Realisierung der additiven Struktur von $\mathrm{Ext}^1(C,A)$ (wir betrachten vorübergehend Moduln über einem festen Ring) auf den korrespondierenden Extensionssequenzen durch die sogenannte "Baer-Multiplikation" ([HA, Chapter XIV.1]) in Erinnerung. Zwei Elemente $e, e' \in \mathrm{Ext}^1(C,A)$ seien repräsentiert durch Sequenzen

$$(e) \quad 0 \to A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0 \qquad \text{und} \qquad (e') \quad 0 \to A \xrightarrow{p'} B' \xrightarrow{q'} C \to 0.$$

Dann wird $e+e'$ durch die folgende Sequenz repräsentiert:

$$(e+e') \quad 0 \to A \xrightarrow{\tilde p} \tilde B \xrightarrow{\tilde q} C \to 0, \qquad \text{wobei definiert wird:}$$

$$\tilde B := B \times_C B'/(p,-p')(A) = \frac{\{(b,b') \in B \times B' \mid q(b) = q'(b')\}}{\{(p(a),-p'(a)) \mid a \in A\}},$$

$$\tilde p(a) := \overline{(p(a),0)} = \overline{(0,p'(a))},$$

$$\tilde q(\overline{(b,b')}) := q(b) = q'(b').$$

(Das zu (e) additive Inverse (-e) nimmt dann gerade die Form $0 \to A \xrightarrow{-p} B \xrightarrow{q} C \to 0$ oder - äquivalent - $0 \to A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{-q} C \to 0$ an.)

Wir fixieren jetzt eine gegebene Ausdehnung von F_μ zu einer lokal freien Garbe F über $\mathcal{O}$, also ein $e_0 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$, repräsentiert durch

$$(e_0) \quad 0 \to F(-\mu Z) \xrightarrow{p} F \xrightarrow{q} F_\mu \to 0.$$

(Natürlich stellt sich die Frage, ob zu gegebenem F_μ überhaupt Ausdehnungen existieren. Diese Frage ist im allgemeinen nicht trivial zu beantworten, man kann aber zeigen, daß die Obstruktionen für die Existenz von Ausdehnungen in der Gruppe $H^2(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z))$ liegen; siehe [Pe_1, Satz 1]. In unserer Situation verschwindet diese Gruppe schon aus Dimensionsgründen, so daß lokal freie Garben über $\mathcal{O}_\mu$ immer Ausdehnungen zu lokal freien Garben über $\mathcal{O}$ besitzen.)

Ist jetzt eine zweite Ausdehnung von F_μ gegeben,

$$\text{(e)} \qquad 0 \to F(-\mu Z) \xrightarrow{p'} F \xrightarrow{q'} F_\mu \to 0,$$

so liegt (e)-(e_o) bereits in der Untergruppe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z))$ von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$. (Dazu ist zu zeigen, daß der Mittelterm der Sequenz (e-e_o) durch $\mathcal{O}(-\mu Z)$ annulliert wird. Sei also (f,f') ein Keim aus $F \times_{F_\mu} F'$ und g ein Keim aus $\mathcal{O}(-\mu Z)$ im selben Punkt. Weil F und F' lokal frei sind, wird (f,f') durch Multiplikation mit g in ein Element der Form $(p(g\bar{f}), p'(g\bar{f}'))$ abgebildet, wobei $\bar{f}$ und $\bar{f}'$ die Reduktionen von f und f' modulo $\mathcal{O}(-Z)$ sind. Aus $q(f) = q'(f')$ folgt $\bar{f} = \bar{f}'$, so daß $g\cdot(f,f') \in (p,p')(F(-\mu Z))$ und deshalb $g\cdot\overline{(f,f')} = 0$ ist.)

Wenn umgekehrt ε ein beliebiges Element aus $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z))$ ist, dann definiert $(e_o)+(\varepsilon)$ wiederum eine Ausdehnung von F_μ. (Man verifiziert leicht in lokalen Karten, daß die lokale Freiheit von F über $\mathcal{O}$ durch die "Addition" einer $\mathcal{O}_\mu$-linearen Extension nicht verloren geht.) Man erhält so:

<u>Satz 3.15:</u> Die Isomorphieklassen von Ausdehnungen einer lokal freien Garbe F_μ über μZ zu lokal freien Garben über $(\mu+1)Z$ entsprechen den Punkten des affinen Teilraumes $(e_o) + \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z))$ in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$, wobei (e_o) eine beliebige lokal freie Ausdehnung von F_μ repräsentiert, und stehen damit in (unkanonischer) Bijektion zu den Elementen von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu, F(-\mu Z)) \simeq H^1(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z))$.

(Der in 3.15 genannte affine Teilraum enthält die 0 nicht, weil die spaltende Extension $F_\mu \oplus F(-\mu Z)$ keine lokal freie Garbe über $\mathcal{O}$ ist.)

Die folgenden einfachen Bemerkungen folgen direkt aus der etwa in [LC, §6] gegebenen Beschreibung des Yoneda-Produktes, man kann sie auch in [CS, Chapters I.8, XI.4] finden. (Dort wird das Yoneda-Produkt als "composition product" bezeichnet.)

Bemerkungen 3.16: (1) Ist $0 \to F(-\mu Z) \to F \to F_\mu \to 0$ eine zu $(e) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$ gehörende Extensionssequenz, so kann die entsprechende Corandabbildung $\delta_e\colon H^0(E,F_\mu) \to H^1(E,F(-\mu Z))$ durch die Anwendung der Klasse e vermittels des Yoneda-Produktes

$$H^0(E,F_\mu) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu,F(-\mu Z)) \to H^1(E,F(-\mu Z))$$

realisiert werden. ([CS, 1.8.8])

(2) Sind $e, e' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu,F(-\mu Z))$, so folgt $\delta_{e+e'} = \delta_e + \delta_{e'}$ für die entsprechenden Corandabbildungen. (Wegen Linearität des Yoneda-Produktes.)

(3) Ist speziell $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu,F(-\mu Z)) \simeq H^1(E,F^\vee \otimes F(-\mu Z))$, so kann der assoziierte Corand $\delta_\varepsilon\colon H^0(E,F_\mu) \to H^1(E,F(-\mu Z))$ auch als Cup-Produkt mit der Klasse ε, gefolgt von der Kontraktionsabbildung $H^1(E,(F \otimes F^\vee) \otimes F(-\mu Z)) \to H^1(E,F(-\mu Z))$, verstanden werden. (Vgl. 1.6)

Wir betrachten als nächstes die natürliche Aktion der Automorphismen von F_μ auf den Ausdehnungen von F_μ. Dazu sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu)$ eine invertierbare Abbildung und

$$(e) \qquad 0 \to F(-\mu Z) \xrightarrow{p} F \xrightarrow{q} F_\mu \to 0$$

eine lokal freie Ausdehnung von F_μ. Durch Komposition von $q\colon F \to F_\mu$ mit $\varphi^{-1}\colon F_\mu \to F_\mu$ erhält man eine zu (e) im allgemeinen nicht isomorphe Ausdehnung von F_μ, die als Extension gerade das Pull-back $\varphi^*(e)$ von (e) bezüglich φ ist:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \varphi^*(e) & 0 \arrow[r] & F(-\mu Z) \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\varphi^{-1}q"] \arrow[d, equal] & F_\mu \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ (e) & 0 \arrow[r] & F(-\mu Z) \arrow[r, "p"] & F \arrow[r, "q"] & F_\mu \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Deshalb kann die Bildung von $\varphi^*(e)$ mit Hilfe des folgenden Yoneda-Produktes ausgedrückt werden, das der $\mathrm{End}(F_\mu)$-Modulstruktur von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu,F(-\mu Z))$ entspricht:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_\mu,F_\mu) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu,F(-\mu Z)) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu,F(-\mu Z)) \\ (\varphi\ ,\ e) & \longmapsto & \varphi^*(e) \end{array}$$

Schreibt man $\varphi = \mathrm{id} + h$, so folgt mit der Linearität des Yoneda-Produktes, daß $\varphi^*(e) = \mathrm{id}^*(e) + h^*(e) = (e) + h^*(e)$ gilt, was man so verstehen kann, daß die Extension (e) durch die Operation von φ gerade um $h^*(e)$ abgeändert wird. Als Differenz zweier Ausdehnungen von F_μ zu lokal freien Garben über $\mathcal{O}$ ist $h^*(e)$ ein Element der Untergruppe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mu}(F_\mu,F(-\mu Z)) \simeq H^1(E,F^\vee \otimes F(-\mu Z))$, das als Cohomologieklasse durch das Yoneda-Produkt

$$H^0(E, F_\mu^\vee \otimes F_\mu) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z)) \to H^1(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z))$$
$$(h\ ,\ e) \longmapsto h^*(e)$$

gegeben wird. Weil dieses Produkt gleichzeitig einen Corand beschreibt, folgt:

<u>Satz 3.17:</u> Es sei (e) $0 \to F(-\mu Z) \to F \to F_\mu \to 0$ eine lokal freie Ausdehnung von F_μ und $\varphi = \mathrm{id} + h$ ein Automorphismus von F_μ. Dann geht die Extension $\varphi^*(e)$ aus (e) durch Addition (in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(F_\mu, F(-\mu Z))$) von $h^*(e) \in H^1(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z))$ hervor, wobei $h^*(e)$ das Bild von h unter dem Corand

$$H^0(E, F_\mu^\vee \otimes F_\mu) \to H^1(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z))$$

ist, der zu der über $\mathcal{O}$ mit $F^\vee$ tensorierten Sequenz (e) gehört.

Wir schließen mit einer kurzen Erörterung des globalen Ausdehnungsproblems, nachdem wir bis hierhin nur infinitesimale Ausdehnungen auf Vielfache von Zykeln betrachtet haben. Ist F eine fest vorgegebene lokal freie Garbe auf $\tilde{X}$ mit Einschränkung $F = F \otimes \mathcal{O}_Z$ auf einen Zykel Z, so kann nach Satz 3.15 jede andere lokal freie Garbe F' mit $F' \otimes \mathcal{O}_Z = F$ als sukzessive Ausdehnung von F zu F'_{2Z}, F'_{3Z}, ... durch eine unendliche Folge von Extensionsklassen

$$\varepsilon_\mu \in H^1(E, F^\vee \otimes F(-\mu Z)), \qquad \mu \geq 1,$$

in bezug auf F charakterisiert werden.

Ist umgekehrt F und eine derartige Folge von Extensionsklassen gegeben, so erhält man durch die dadurch definierten sukzessiven Ausdehnungen $F'_{\mu Z}$ zunächst nur eine Garbe $F' := \varprojlim_\mu F'_{\mu Z}$ über der Garbe $\hat{\mathcal{O}} := \varprojlim_\mu \mathcal{O}_{\mu Z}$ von Ringen auf E. (E mit $\hat{\mathcal{O}}$ als Strukturgarbe wird naheliegenderweise als <u>formale Umgebung</u> $\hat{E}$ von E bezeichnet und hängt von der Wahl einer Idealgarbe von E - hier $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ - nicht ab.) Nach [Ar_1, Theorem 3.5] existiert aber zu jedem $\mu \geq 1$ eine lokal freie Garbe F'' auf $\tilde{X}$ mit $F'' \otimes \mathcal{O}_{\mu Z} \simeq F' \otimes \mathcal{O}_{\mu Z}$. Wählt man μ (abhängig von F) hinreichend groß, so ist der Isomorphietyp als Garbe (!) sowohl einer formalen wie auch einer analytischen Ausdehnung von F schon durch deren Einschränkung auf μZ bestimmt, so daß jede Ausdehnung von F auf $\hat{E}$ die Komplettierung einer Ausdehnung von F auf $\tilde{X}$ bezüglich einer $\hat{E}$ definierenden Idealgarbe ist.

(Die behauptete endliche Bestimmtheit von Ausdehnungen als Garben kann leicht mit Hilfe eines Zykels $Z' > 0$, für den $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z')$ ample ist, eingesehen werden: In diesem Fall verschwinden alle zu Z' gehörigen Extensionsgruppen $H^1(E, F_{Z'}^{\vee} \otimes F_{Z'}(-\nu Z'))$ für $\nu \geq \nu_0$, so daß Ausdehnungen über $\nu_0 Z'$ hinaus eindeutig sind. Man wähle also μ mit $\mu Z \geq \nu_0 Z'$.)

Schließlich zeigt der eben zitierte Satz von Artin, daß zu jeder lokal freien Garbe F auf Z eine lokal freie Ausdehnung $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$ existiert, denn wie wir weiter oben festgestellt hatten ist das formale Ausdehnungsproblem stets lösbar.

<u>Charakterisierung voller Garben über Zykeln.</u> Mit Proposition 3.10 haben wir die Eigenschaft lokal freier Garben über $\tilde{X}$, volle Garben zu sein, in Termen von deren Einschränkungen auf einen passenden Zykel ausgedrückt. Die folgende Proposition zeigt, daß diese Einschränkungen bei günstiger Wahl des Zykels die vollen Garben, von denen sie herrühren, schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen.

<u>Proposition 3.18:</u> Es sei $Z \geq E$ ein Zykel auf der Auflösung $(\tilde{X}, E)$ einer normalen Flächensingularität, für den $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ und $\omega_{\tilde{X}}^{\vee}(-Z)$ generisch von globalen Schnitten erzeugt werden und $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)) = 0$ gilt. F sei eine lokal freie Garbe über $\mathcal{O}_Z$, die generisch von globalen Schnitten erzeugt wird und eine Ausdehnung zu einer lokal freien Garbe über $\mathcal{O}_{2Z}$ besitzt, für die der Corand $H^0(E, F(Z)) \to H^1(E, F)$ injektiv ist (vgl. 3.10). Dann gibt es bis auf Isomorphie von Garben genau eine Ausdehnung von F zu einer vollen Garbe $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$.

<u>Bemerkung 3.19:</u> Die Existenz eines Zykels mit den in 3.18 geforderten Eigenschaften folgt wieder direkt aus Satz 1.3. Analog zu 3.13 stellen wir fest, daß die drei Bedingungen an Z dazu äquivalent sind, daß $\mathcal{O}_Z(-Z)$ und $\omega_Z^{\vee}$ generisch von globalen Schnitten über E erzeugt werden und $H^1(E, \mathcal{O}_Z(-Z)) = 0$ gilt. (Die Einschränkung von $\omega_{\tilde{X}}^{\vee}(-Z)$ auf Z ist wegen der Adjunktionsformel 1.1(f) gerade $\omega_Z^{\vee}$.)

<u>Beweis von Proposition 3.18:</u> Es seien F und Z wie in 3.18 vorausgesetzt. Wir bezeichnen diejenigen Ausdehnungen $\mathcal{F}$ (bzw. $F_{\mu Z}$) von F zu lokal freien Garben auf $\tilde{X}$ (bzw. μZ) als <u>zulässig</u>, für die sich ein (schon durch F_{2Z} festgelegter) injektiver Corand $H^0(E, F(Z)) \to H^1(E, F)$ ergibt. Wegen 3.10 sind dies

genau die Ausdehnungen von F zu vollen Garben bzw. Einschränkungen davon auf μZ.)

Um zu zeigen, daß die Isomorphieklasse einer zulässigen Ausdehnung $\mathcal{F}$ (als Garbe betrachtet) bereits durch F eindeutig bestimmt ist, ist es nach den Ausführungen am Ende des vorangegangenen Abschnittes hinreichend, das selbe über alle zulässigen infinitesimalen Ausdehnungen $\mathcal{F}_{\mu Z}$, $\mu \geq 2$, auszusagen. Wir werden dies durch Induktion über μ leisten. Dazu wählt man eine zulässige Ausdehnung $\mathcal{F}_{(\mu+1)Z}$ von $\mathcal{F}_{\mu Z}$ und betrachtet die Operation der Automorphismen von $\mathcal{F}_{\mu Z}$ auf der Ausdehnungssequenz,

$$0 \to F(-\mu Z) \to \mathcal{F}_{(\mu+1)Z} \to \mathcal{F}_{\mu Z} \to 0,$$

wie sie oben vor 3.17 eingeführt wurde. Wenn die gewählte Ausdehnung durch geeignete Automorphismen in jede andere zulässige Ausdehnung überführt werden kann, dann haben alle zulässigen Extensionen als Mittelterm die Garbe $\mathcal{F}_{(\mu+1)Z}$ und der Beweis der Induktionsbehauptung ist vollbracht.

Wir werden diesen Induktionsbeweis in zwei Teilen führen und beginnen mit dem einfacheren Teil: der weiteren Ausdehnung einer zulässigen Ausdehnung $\mathcal{F}_{2Z}$ von F über $2Z$ hinaus. Hier ist jede Ausdehnung von $\mathcal{F}_{2Z}$ zu einer lokal freien Garbe auf μZ, $\mu > 2$, zulässig, denn die Injektivität von $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ hängt nur von der Einschränkung auf $2Z$ ab.

<u>Behauptung 1:</u> $\mathcal{F}_{\mu Z}$ sei eine zulässige Ausdehnung von F, $\mu \geq 2$. Dann sind alle Ausdehnungen von $\mathcal{F}_{\mu Z}$ zu lokal freien Garben über $(\mu+1)Z$ als Garben zueinander isomorph.

<u>Begründung:</u> Fixiere eine Ausdehnung $\mathcal{F}_{(\mu+1)Z}$ von $\mathcal{F}_{\mu Z}$. Ist $\varphi = \mathrm{id} + h$ ein Automorphismus von $\mathcal{F}_{\mu Z}$, so wird die durch den Endomorphismus h verursachte Störung der Extension

$$0 \to F(-\mu Z) \to \mathcal{F}_{(\mu+1)Z} \to \mathcal{F}_{\mu Z} \to 0 \qquad (*)$$

bei der Wirkung von φ durch das Bild von h unter der Corandabbildung

$$\delta\colon H^0(E,\mathcal{F}^{\vee}_{\mu Z} \otimes \mathcal{F}_{\mu Z}) \to H^1(E,F^{\vee} \otimes F(-\mu Z))$$

angegeben, wobei diese Abbildung von der mit $\mathcal{F}^{\vee}_{(\mu+1)Z}$ tensorierten Sequenz (*) induziert wird. (3.17)

Wir beschränken uns jetzt auf Automorphismen der Form id+h von $F_{\mu Z}$, die mit von $\mathcal{O}_{\mu Z}(-Z)$ annullierten Endomorphismen h gebildet werden. (D.h.: alle Bilder unter h verschwinden längs E zumindest von der Ordnung $(\mu-1)Z$.) Es ist also h ein Homomorphismus von $F_{\mu Z}$ nach $F_{\mu Z}(-(\mu-1)Z)/F_{\mu Z}(-\mu Z)$, was zu $F(-(\mu-1)Z)$ isomorph ist, so daß h als ein Element von $H^0(F_{\mu Z}^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z)) \simeq H^0(E,F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z))$ verstanden werden kann.

Wir werden zeigen, daß die Einschränkung der oben angegebenen Corandabbildung δ auf $H^0(E,F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z))$ eine Surjektion auf $H^1(E,F^{\vee}\otimes F(-\mu Z))$ ist, woraus unter Verwendung von 3.15 die Behauptung 1 folgt, weil dann alle Ausdehnungen von $F_{\mu Z}$ aus (*) durch Anwendung von id+h, h wie oben, hervorgehen. (Man beachte, daß id+h für einen solchen Endomorphismus h, der wegen $\mu \geq 2$ Nullstellen längs E aufweist, stets ein Automorphismus von $F_{\mu Z}$ ist.)

Wir bezeichnen mit δ' die zu betrachtende Einschränkung von δ, also

$$\delta': H^0(E,F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z)) \to H^1(E,F^{\vee}\otimes F(-\mu Z)).$$

Aus dem natürlichen Pull-back-Diagramm, das von der Inklusion der von $\mathcal{O}_{\mu Z}(-Z)$ annullierten Endomorphismen in den vollen Endomorphismenmodul von $F_{\mu Z}$ induziert wird,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & F^{\vee}\otimes F(-\mu Z) & \to & F_{2Z}^{\vee}\otimes F_{2Z}(-(\mu-1)Z) & \to & F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z) & \to 0 & & (**)\\
 & \| & & \downarrow & & \cap & & & \\
0 \to & F^{\vee}\otimes F(-\mu Z) & \to & F_{(\mu+1)Z}^{\vee}\otimes F_{(\mu+1)Z} & \to & F_{\mu Z}^{\vee}\otimes F_{\mu Z} & \to 0 & &
\end{array}$$

entnimmt man, daß δ' gerade die Corandabbildung der exakten Sequenz (**) ist und insbesondere allein von F_{2Z} abhängt.

Es sei nun F eine beliebige lokal freie Ausdehnung von $F_{(\mu+1)Z}$ auf $\tilde{X}$. Dann ist F automatisch eine zulässige Ausdehnung von F, also eine volle Garbe, und nach 3.14 verfügt man über ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H_E^1(\tilde{X},F) & \hookrightarrow & H^1(\tilde{X},F)\\
\uparrow \simeq & & \downarrow \simeq\\
H^0(E,F(Z)) & \hookrightarrow & H^1(E,F)
\end{array}$$

Durch Dualisieren folgt daraus (mit 1.5, 1.10, 1.11 und $\omega_Z \simeq \omega_{\tilde{X}}\otimes\mathcal{O}_Z(Z)$):

$$\begin{array}{ccc}
H_E^1(\tilde{X},F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}}) & \longrightarrow & H^1(\tilde{X},F^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}})\\
\uparrow \simeq & & \downarrow \simeq\\
H^0(E,F^{\vee}\otimes\omega_Z) & \xrightarrow{\delta''} & H^1(E,F^{\vee}(-Z)\otimes\omega_Z)
\end{array}$$

(Man beachte, daß man die Surjektivität der unteren Corandabbildung δ'' nur durch Vergleich mit der oberen surjektiven Abbildung erhält, weil man die durch eine Sequenz über $\mathcal{O}_{2Z}$ definierte Abbildung $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ nicht ohne weiteres über Z dualisieren darf.)

Nach Voraussetzung werden F, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(\mu-1)Z)$ und $\omega_{\tilde{X}}^{\vee}(-Z)$ generisch von globalen Schnitten erzeugt, so daß eine generische Surjektion $s\,\mathcal{O}_{\tilde{X}} \to F(-\mu Z) \otimes \omega_{\tilde{X}}^{\vee}$ existiert. Aus dieser Abbildung und der Sequenz (**) erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und generisch surjektiven Spalten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & sF^{\vee}(-Z)\otimes\omega_Z & \to & sF_{2Z}^{\vee}\otimes\omega_{\tilde{X}}(Z) & \to & sF^{\vee}\otimes\omega_Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F^{\vee}\otimes F(-\mu Z) & \to & F_{2Z}^{\vee}\otimes F_{2Z}(-(\mu-1)Z) & \to & F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z) & \to & 0
\end{array}$$

und daraus einen Vergleich von Corandabbildungen

$$\begin{array}{ccc}
s\cdot H^0(E,F^{\vee}\otimes\omega_Z) & \xrightarrow{s\cdot\delta''} & s\cdot H^1(E,F^{\vee}(-Z)\otimes\omega_Z) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^0(E,F^{\vee}\otimes F(-(\mu-1)Z)) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(E,F^{\vee}\otimes F(-\mu Z))
\end{array}$$

(Die rechte vertikale Abbildung ist surjektiv, weil sie von einer generisch surjektiven Abbildung induziert wird, vgl. 3.4(3).)

Aus diesem Diagramm folgt die Surjektivität von δ', womit die Behauptung 1 bewiesen ist. $\lrcorner$

<u>Behauptung 2:</u> Alle zulässigen Ausdehnungen von F zu lokal freien Garben über 2Z sind als Garben zueinander isomorph.

<u>Begründung:</u> Diese Behauptung wird bis auf eine geringfügige Verfeinerung genau wie die erste Behauptung bewiesen. Es wird wieder eine Ausdehnung

(e) $\quad 0 \to F(-Z) \to F_{2Z} \to F \to 0$

fixiert, die die Eigenschaft besitzt, daß die durch einen Twist mit $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(Z)$ induzierte Corandabbildung $\delta: H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ injektiv ist. Die Operation eines Automorphismus φ von F überführt (e) in eine neue Ausdehnung von F, die aber wieder zulässig ist, denn δ wird durch φ in $\delta\circ\tilde{\varphi}$ überführt, wobei $\tilde{\varphi}$ den durch φ gestifteten Isomorphismus von $H^0(E,F(Z))$ bezeichnet. Folglich besteht der Aut(F)-Orbit von (e) ausschließlich aus zulässigen Ausdehnungen.

Genau wie zuvor erhält man für die durch $id+h$, wobei $h \in H^0(E, F^\vee \otimes F)$ ein Endomorphismus von F ist, verursachte Störung der Extensionsklasse (e) eine Beschreibung durch eine surjektive Corandabbildung (tatsächlich wurde dafür oben nur $\mu \geq 1$ benötigt!)

$$\delta': H^0(E, F^\vee \otimes F) \twoheadrightarrow H^1(E, F^\vee \otimes F(-Z)).$$

Es ist lediglich zu beachten, daß nicht jeder Endomorphismus h von F durch $id+h$ einen Automorphismus von F definiert. Diejenigen Endomorphismen h, für die $id+h$ invertierbar ist, bilden allerdings eine offene und dichte Teilmenge H von $H^0(E, F^\vee \otimes F)$. (Dazu bemerkt man, daß auf der kompakten Kurve E die Eigenwerte eines Endomorphismus von F konstant sind, weil das charakteristische Polynom als holomorphe Abbildung von E in einen affinen Raum konstant ist. Aus dieser Beobachtung folgt sofort die Offenheit von H. Auch die Dichtheit ist leicht einzusehen, denn ein jeder Nicht-Automorphismus f von F kann durch Addition von $t \cdot id_F$, $t \in \mathbb{C}$ beliebig klein, invertierbar gemacht werden.)

Weil H offen und dicht in $H^0(E, F^\vee \otimes F)$ ist, ist auch $\delta'(H)$ eine offene und dichte Teilmenge von $H^1(E, F^\vee \otimes F(-Z))$, denn δ' ist als surjektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen stetig und offen. Wir erfahren also, daß der Aut(F)-Orbit $(e) + \delta'(H)$ offen und dicht in der Nebenklasse $(e) + H^1(E, F^\vee \otimes F(-Z))$ in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2Z}}(F, F(-Z))$ liegt, die alle Ausdehnungen von F zu lokal freien Garben über 2Z parametrisiert. Weil es in einem affinen Raum wie $(e) + H^1(E, F^\vee \otimes F(-Z))$ nur einen einzigen offenen und dichten Orbit der Aut(F)-Operation geben kann und jede zulässige Ausdehnung nach dem eben Bewiesenen einen offenen und dichten Aut(F)-Orbit definiert, liegen alle (Isomorphieklassen von) zulässigen Ausdehnungen in ein und dem selben Aut(F)-Orbit. Daraus folgt die Behauptung wie zuvor. ⌋

Mit der Behauptung 2 ist auch die Proposition 3.18 bewiesen. ∎

Wir fassen die Ergebnisse dieses Kapitels noch einmal zusammen. Wie stets sei (X,x) eine normale Flächensingularität und $\pi: (\tilde{X}, E) \to (X,x)$ eine Auflösung.

<u>Definition 3.20</u>: Ein Zykel $Z \geq E$ auf $\tilde{X}$ wird <u>Reduktionszykel</u> genannt, wenn er die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ wird generisch von globalen Schnitten erzeugt;

(ii) $\omega^\vee_{\tilde{X}}(-Z)$ wird generisch von globalen Schnitten erzeugt;

(iii) Es gilt: $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)) = 0$.

Wegen Satz 1.3 gibt es immer Reduktionszykel. (Vergleiche auch 3.13 und 3.19 für eine gleichwertige Kennzeichnung von Reduktionszykeln durch Eigenschaften von $\mathcal{O}_Z(-Z)$ und $\omega_Z^{\vee}$.)

Jeder Zykel $Z \geq 0$ auf $\tilde{X}$ definiert durch die Zuordnung

$$M \mapsto R_Z(M) := (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z \qquad \text{für } M \in \mathcal{MCM}(\mathcal{O}_{X,x})$$

einen Funktor $R_Z(-)$ von der Kategorie $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_{X,x})$ der reflexiven Moduln auf (X,x) in die Kategorie der lokal freien $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben.

(Die Funktorialität von R_Z ist klar, weil es sich um die Hintereinanderausführung der Funktoren π^*, zweimal $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(-,\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ und $-\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\mathcal{O}_Z$ handelt.)

Hinsichtlich der Fragen, wann ein Modul M aus $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_{X,x})$ durch sein Bild $R_Z(M)$ bestimmt ist, und welche lokal freien Garben auf Z als Bilder unter R_Z auftreten können, haben wir bewiesen:

Theorem 3.21: Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine Auflösung der normalen Flächensingularität (X,x). Ferner sei $Z \geq E$ ein Reduktionszykel auf $\tilde{X}$. Dann besteht eine durch den Funktor $R_Z(-) := (\pi^*(-))^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z$ induzierte Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der folgenden Objekte:

(a) reflexive Moduln M auf (X,x);

(b) lokal freie Garben F über $\mathcal{O}_Z$, die generisch von globalen Schnitten erzeugt werden und Ausdehnungen zu lokal freien Garben $\mathcal{F}_{2Z}$ über $\mathcal{O}_{2Z}$ von der Art besitzen, daß die durch $0 \to F \to \mathcal{F}_{2Z}(Z) \to F(Z) \to 0$ definierte Corandabbildung $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ injektiv ist.

(Die Aussage des Theorems ergibt sich direkt als Zusammenfassung der Propositionen 3.2, 3.10 und 3.18.)

Das Theorem 3.21 sollte als eine Übertragung der Aufgabe, die reflexiven Moduln auf einer gegebenen Flächensingularität (X,x) zu bestimmen, in ein äquivalentes Klassifikationsproblem angesehen werden. Natürlich wirft dies die Frage danach auf, inwieweit sich die Eigenschaft der Existenz von Ausdehnungen, die zu injektiven Corandabbildungen Anlaß geben, in konkreten Situationen als zugänglich erweist. Obwohl vermutlich im allgemeinen sehr wenig hierzu gesagt werden kann, stellt sich in den beiden wichtigen Fällen der rationalen und der minimal-elliptischen Flächensingularitäten doch heraus, daß die genannte Bedingung in jeweils sehr einfacher Weise - ohne jeden Bezug auf Ausdehnungen - zum Ausdruck gebracht werden kann. Dies wird Gegenstand des nachfolgenden Kapitels 4 sein.

Es sei außerdem schon hier darauf hin gewiesen, daß bei den nicht rationalen Singularitäten (im Gegensatz zu 3.8) die vollen Garben auf Auflösungen im allgemeinen tatsächlich nur über generischen Punkten von ihren globalen Schnitten erzeugt werden. Das sieht man etwa am Beispiel der einfach-elliptischen Singularitäten. (Siehe 5.16 unter Beachtung des Zusatzes zu 5.15.)

Zum Beschluß dieses Kapitels gehen wir noch auf das Problem der Bestimmung eines Reduktionszykels auf einer gegebenen Auflösung einer normalen Flächensingularität ein. Um mit Theorem 3.21 ein praktikables Instrument zur Bestimmung der Isomorphieklassen von reflexiven Moduln zu erhalten, ist man natürlich an möglichst kleinen Reduktionszykeln interessiert.

Reduktionszykel. $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ sei eine beliebige fest vorgegebene Auflösung einer normalen Flächensingularität (X,x). Mit $E_1,\dots,E_k$ seien die irreduziblen Kurven in der exzeptionellen Faser $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ bezeichnet. Außerdem sei K ein kanonischer Divisor von $\tilde{X}$, also $\omega_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K)$.

Wir betrachten Zykel $Z = \sum_{i=1}^k r_i E_i$ auf $\tilde{X}$ mit $r_i \geq 1$ für alle $i = 1,\dots,k$.

Für einen Reduktionszykel Z werden die beiden Garben $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ und $\omega_{\tilde{X}}(-Z)$ generisch von globalen Schnitten erzeugt. Eine notwendige Bedingung dafür ist das Vorhandensein nichtverschwindender holomorpher Schnitte in jeder der Einschränkungen $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)|_{E_i}$ und $\omega_{\tilde{X}}(-Z)|_{E_i}$ für $i = 1,\dots,k$. Dies führt auf die für einen Reduktionszykel Z notwendigen numerischen Bedingungen

$$0 \leq \deg(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)|_{E_i}) = -Z\cdot E_i, \qquad i = 1,\dots,k, \quad \text{und}$$
$$0 \leq \deg(\omega_{\tilde{X}}(-Z)|_{E_i}) = -(K+Z)\cdot E_i, \qquad i = 1,\dots,k.$$

Bemerkung 3.22: Ist $(\tilde{X},E)$ eine minimale Auflösung von (X,x), so werden die Bedingungen $Z\cdot E_i \leq 0$ für $i=1,\dots,k$ bereits von den Bedingungen $Z\cdot E_i \leq -K\cdot E_i$ für $i=1,\dots,k$ impliziert.

Begründung: Tatsächlich ist eine Auflösung $(\tilde{X},E)$ genau dann minimal, wenn $K\cdot E_i \geq 0$ für alle $i=1,\dots,k$ gilt, woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Dies folgt aus der Formel $K\cdot E_i = -E_i^2 + 2g(E_i) - 2 + 2\delta_i$, wobei $g(E_i)$ das Geschlecht der Normalisierung von E_i und $\delta_i \geqq 0$ einen von den Singularitäten von E_i stammenden Beitrag* bezeichnet (1.14 und [AG, Corollary V.3.7]). Eine Auflösung ist genau dann minimal, wenn sie keine glatte rationale Kurve mit Selbstschnittzahl -1 enthält. Dies ist zu $K\cdot E_i \geqq 0$ für alle E_i äquivalent. ∎

Proposition 3.23: Unter allen Zykeln $Z \geqq 0$ auf $\tilde{X}$, die den Bedingungen $Z\cdot E_i \leqq 0$ und $Z\cdot E_i \leqq -K\cdot E_i$ für alle $i = 1,\dots,k$ genügen, existiert ein bezüglich der gewöhnlichen partiellen Ordnung wohlbestimmter kleinster Zykel Z_r.

Beweis: (analog zu der entsprechenden Aussage über Fundamentalzykel in [Ar_1, p.131].) Es genügt zu zeigen, daß mit zwei Zykeln $Z' = \sum r_i' E_i$ und $Z'' = \sum r_i'' E_i$, die den genannten Bedingungen genügen, auch $Z := \sum r_i E_i$ diese Eigenschaft besitzt, wobei $r_i := \min(r_i', r_i'')$ für $i = 1,\dots,k$ gesetzt werde. Betrachte hierzu den Schnitt von Z mit einer beliebigen Kurve E_j, wobei etwa $r_j' \leqq r_j''$ gelte:

$$Z\cdot E_j = r_j' E_j^2 + \sum_{i\neq j} r_i \underbrace{(E_i\cdot E_j)}_{\geq 0} \leqq r_j' E_j^2 + \sum_{i\neq j} r_i' (E_i\cdot E_j) = Z'\cdot E_j$$

Daraus folgt die Behauptung, denn nach Voraussetzung ist $Z'\cdot E_j \leqq 0$ und auch $Z'\cdot E_j \leqq -K\cdot E_j$. ∎

Folgerung 3.24: Ist Z ein Reduktionszykel, Z_r der in Proposition 3.23 definierte Zykel und Z_0 der Fundamentalzykel einer Auflösung $(\tilde{X}, E)$, so bestehen die Relationen $Z \geqq Z_r \geqq Z_0 \geqq E$.

Begründung: Z hat die Eigenschaft, daß $Z\cdot E_i \leqq 0$ und $Z\cdot E_i \leqq -K\cdot E_i$ für jedes $i = 1,\dots,k$ gilt (Bemerkung vor 3.22), so daß aus 3.23 schon $Z \geqq Z_r$ folgt. Andererseits ist Z_0 der eindeutig bestimmte kleinste Zykel $\geqq 0$, für den $Z_0\cdot E_i \leqq 0$ für $i = 1,\dots,k$ gilt (1.13), so daß $Z_0 \leqq Z_r$ folgt. $Z_0 \geqq E$ ist eine wohlbekannte Konsequenz aus der negativen Definitheit der Schnittmatrix $(E_i\cdot E_j)$. ∎

Mit dem Zykel Z_r aus Proposition 3.23 haben wir eine untere Abschätzung für die möglichen Reduktionszykel erhalten. Als nächstes zeigen wir, daß sich

*) δ_i ist etwa gleich der Anzahl der gewöhnlichen Doppelpunkte und der gewöhnlichen Spitzen, wenn E_i keine komplizierteren Singularitäten aufweist.

Z_r analog zum Fundamentalzykel Z_0 durch eine Berechnungssequenz wie in 1.16 gewinnen läßt.

Proposition 3.25: Man definiere eine Folge von Zykeln $Z^{(\mu)} \geq 0$ rekursiv wie folgt: Beginne mit $Z^{(0)} := E_{i_0}$, wobei E_{i_0} eine beliebige Komponente von E ist. (Alternativ kann auch mit $Z^{(0)} := E$ oder $Z^{(0)} := Z_0$ begonnen werden, wobei Z_0 den Fundamentalzykel bezeichnet.) Wenn im letzten Schritt $Z^{(\mu)}$ bestimmt wurde und ein E_i existiert, für das $Z^{(\mu)} \cdot E_i > 0$ oder $Z^{(\mu)} \cdot E_i > -K \cdot E_i$ gilt, dann bilde man den neuen Zykel $Z^{(\mu+1)} := Z^{(\mu)} + E_i$ und fahre rekursiv fort. Der letzte Schritt kann nur endlich oft wiederholt werden. Das Verfahren endet mit dem Zykel Z_r als zuletzt bestimmtem $Z^{(\mu)}$.

Beweis: (analog zu [La_1, Proposition 4.1].) Weil die Konstruktion eine strikt ansteigende Folge von Zykeln $Z^{(\mu)}$ definiert, ist bloß zu zeigen, daß $Z^{(\mu)} \leq Z_r$ für alle μ gilt. Der Abbruch des Verfahrens mit $Z^{(\mu)}$ bedeutet, daß $Z^{(\mu)} \cdot E_i \leq 0$ und $Z^{(\mu)} \cdot E_i \leq -K \cdot E_i$ für alle $i = 1,\dots,k$ gilt, d.h.: $Z^{(\mu)} = Z_r$.
Zunächst ist $Z^{(0)} \leq Z_r$ klar (siehe auch 3.24). Nehme jetzt $Z^{(\mu)} \leq Z_r$, aber $Z^{(\mu)} \neq Z_r$, an und schreibe $Z^{(\mu)} = \sum r_i' E_i$ sowie $Z_r = \sum r_i E_i$. Wenn E_j eine Kurve ist, für die $Z^{(\mu)} \cdot E_j > 0$ oder $Z^{(\mu)} \cdot E_j > -K \cdot E_j$ gilt, dann haben wir nur $r_j' < r_j$ nachzuweisen, damit auch $Z^{(\mu+1)} = Z^{(\mu)} + E_j \leq Z_r$ folgt. Wegen $Z^{(\mu)} \leq Z_r$ ist schon $r_j' \leq r_j$; im Falle von Gleichheit würde gelten:

$$Z^{(\mu)} \cdot E_j = r_j' E_j^2 + \sum_{i \neq j} r_i' (E_i \cdot E_j) \leq r_j E_j^2 + \sum_{i \neq j} r_i (E_i \cdot E_j) = Z_r \cdot E_j,$$

also $Z^{(\mu)} \cdot E_j \leq 0$ und auch $Z^{(\mu)} \cdot E_j \leq -K \cdot E_j$ im Widerspruch zur Annahme über die Kurve E_j. ∎

In den Fällen von rationalen und minimal-elliptischen Singularitäten kann man über die bloße Abschätzung von 3.24 hinausgehen und einen kleinstmöglichen Reduktionszykel direkt angeben.

Proposition 3.26: $(\tilde{X}, E)$ sei die Auflösung einer rationalen Singularität. Dann ist der in Proposition 3.23 definierte Zykel Z_r ein Reduktionszykel.

(Wegen 3.24 ist Z_r in der Tat kleinstmöglich in der Menge der Reduktionszykel. Das bedeutet allerdings nicht, daß es nicht trotzdem kleinere Zykel $Z \geq E$ gibt, für die der in Theorem 3.21 definierte Funktor R_Z ebenfalls eine Bijektion von Isomorphieklassen liefert. Siehe aber Beispiel 3.28.)

Beweis: Für den Zykel Z_r gilt $-Z_r \cdot E_i \geq 0$ und $(-K-Z_r) \cdot E_i \geq 0$ für alle irreduziblen Komponenten $E_1, \dots, E_k$ von E. Nach [Li, Proposition 11.1] werden deshalb die beiden Garben $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_r)$ und $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K-Z_r) \simeq \omega_{\tilde{X}}(-Z_r)$ von globalen Schnitten erzeugt. Wählt man eine Surjektion $s\mathcal{O}_{\tilde{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_r)$, so impliziert $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ mit deren Hilfe auch das Verschwinden von $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_r))$. ∎

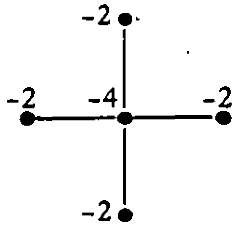
Proposition 3.27: $(\tilde{X}, E)$ sei die minimale Auflösung einer minimal-elliptischen Singularität. Dann stimmt der in Proposition 3.23 definierte Zykel Z_r mit dem Fundamentalzykel Z_0 überein und ist ein Reduktionszykel.

Beweis: Wir müssen nur begründen, daß Z_0 ein Reduktionszykel ist, denn dann ist nach 3.24 $Z_0 \geq Z_r$ und zugleich $Z_r \geq Z_0$, also $Z_0 = Z_r$.

Nach 1.19(3) gilt $Z_0 = -K$ für einen kanonischen Divisor K von $\tilde{X}$. Die Garbe $\omega_{\tilde{X}}(-Z_0) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ wird also trivialerweise von globalen Schnitten erzeugt. Nach [La_2, Theorem 3.13], siehe auch 1.21(1), stimmt $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0)$ in generischen Punkten mit der Urbildgarbe des maximalen Ideals des singulären Punktes überein und wird daher zumindest generisch von globalen Schnitten erzeugt. Schließlich verschwindet $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0))$ wegen $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z_0) \simeq \omega_{\tilde{X}}$ nach dem Satz von Grauert-Riemenschneider. Damit erfüllt Z_0 alle Anforderungen an einen Reduktionszykel. ∎

Wir geben schließlich noch ein Beispiel einer rationalen Singularität, das aufzeigt, daß erstens der Fundamentalzykel der minimalen Auflösung einer rationalen Singularität im allgemeinen kein Reduktionszykel ist - solche Beispiele sind leicht schon unter den Quotientensingularitäten auszumachen -, zweitens aber die vollen Garben auf der Auflösung auch tatsächlich durch ihre Einschränkungen auf den Fundamentalzykel im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt werden. D.h.: Bei rationalen Singularitäten gilt kein Analogon zu Theorem 3.21 mit dem Fundamentalzykel Z_0 an Stelle eines Reduktionszykels. Dieser Sachverhalt ist um so bemerkenswerter als der Fundamentalzykel der Auflösung einer rationalen Singularität durchaus dazu geeignet ist, die Eigenschaft einer lokal freien Garbe auf der Auflösung, eine volle Garbe zu sein, zu charakterisieren. Er erfüllt nämlich die Voraussetzungen von Proposition 3.10. (Vgl. 1.17(2))

Beispiel 3.28: Wir betrachten eine normale Flächensingularität, deren minimale Auflösung $(\tilde{X},E)$ einen dualen Graphen von der folgenden Gestalt definiert*:



$(\bullet \cong \mathbb{P}_1)$

Die fünf irreduziblen rationalen Kurven seien mit $E_0,\dots,E_4$ bezeichnet, wobei E_0 für die zentrale Kurve stehe. Der Fundamentalzykel ist in diesem Fall reduziert: $Z_0 = E_0 + \dots + E_4$, und wegen $Z_0 \cdot (Z_0 + K) = -2$ handelt es sich bei diesem Beispiel um eine rationale Singularität (1.15).

Mit 3.25 und 3.26 stellt man nun leicht fest, daß der kleinste Reduktionszykel Z_r nicht mit Z_0 übereinstimmt, sondern $Z_r = Z_0 + E_0 = 2E_0 + E_1 + \dots + E_4$ ist.

Um zu zeigen, daß Z_0 nicht die Rolle des Reduktionszykels in 3.21 übernehmen kann, werden wir zwei invertierbare Garben L_1 und L_2 auf $Z_0 = E$ angeben, für die $L_1 \oplus L_2$ zwei zueinander nicht isomorphe Ausdehnungen zu vollen Garben auf $\tilde{X}$ besitzt. Wir begründen zunächst, daß dafür die folgenden Eigenschaften hinreichend sind:

(i) L_i wird von globalen Schnitten erzeugt für $i = 1,2$;

(ii) $H^0(E, L_i(E)) = 0$ für $i = 1,2$;

(iii) $H^1(E, L_1^\vee \otimes L_2(-E)) \neq 0$.

Mit (i) und (ii) folgt aus Proposition 3.10, daß L_1 und L_2 die Einschränkungen von vollen Garben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ von $\tilde{X}$ auf E sind, daß aber auch umgekehrt jede Ausdehnung von $L_1 \oplus L_2$ zu einer lokal freien Garbe $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$ schon eine volle Garbe ist. Eine solche Ausdehnung definiert eine exakte Sequenz von Endomorphismengarben

$$0 \to \mathcal{E}nd(L_1 \oplus L_2)(-E) \to \mathcal{E}nd(\mathcal{F}|_{2E}) \to \mathcal{E}nd(L_1 \oplus L_2) \to 0,$$

woraus man durch Übergang zu den globalen Schnitten

*) Da die vier Schnittpunkte der äußeren Kurven mit der zentralen Kurve ein Doppelverhältnis besitzen, existieren unendlich viele nicht-isomorphe Singularitäten dieses Typs. Wir wählen eine davon aus.

$$\mathrm{End}(F|_{2E}) \xrightarrow{r} \mathrm{End}(L_1 \oplus L_2) \xrightarrow{\delta} H^1(E, \mathcal{E}nd(L_1 \oplus L_2)(-E)) \qquad (*)$$
$$\cup$$
$$H^1(E, L_1^{\vee} \otimes L_2(-E))$$

erhält. Für den Fall der "trivialen" Ausdehnung $F \simeq L_1 \oplus L_2$ (L_1, L_2 wie oben) entsteht so eine Corandabbildung δ, in deren Kern die beiden idempotenten Endomorphismen $\mathrm{id}_{L_1} \oplus 0_{L_2}$ und $0_{L_1} \oplus \mathrm{id}_{L_2}$ von $L_1 \oplus L_2$ liegen, denn beide sind Bilder unter der Abbildung r.

Wähle jetzt ein $\varepsilon \neq 0$ aus $H^1(E, L_1^{\vee} \otimes L_2(-E))$ und fasse es in natürlicher Weise als Element von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_E}(L_1 \oplus L_2, (L_1 \oplus L_2)(-E))$ auf. Nach 3.15 definiert das Translat der Ausdehnung von $L_1 \oplus L_2$ zu $(L_1 \oplus L_2)|_{2E}$ um ε eine neue Ausdehnung von $L_1 \oplus L_2$ zu einer lokal freien Garbe F_{2E} auf 2E. Wir werden zeigen, daß F_{2E} unzerlegbar ist und deswegen nicht zu $(L_1 \oplus L_2)|_{2E}$ isomorph sein kann. Der im Sinne der Sequenz (*) zu F_{2E} gehörende Corand δ: $\mathrm{End}(L_1 \oplus L_2) \to H^1(E, \mathcal{E}nd(L_1 \oplus L_2)(-E))$ besitzt die Eigenschaft, daß die Komponente des Bildes von $\mathrm{id}_{L_1} \oplus 0_{L_2}$ in $H^1(E, L_1^{\vee} \otimes L_2(-E))$ gerade das Element $\varepsilon \neq 0$ ist (vgl. 3.16). Damit ist $\mathrm{id}_{L_1} \oplus 0_{L_2}$ nicht mehr im Bild des Restriktionshomomorphismus r: $\mathrm{End}(F_{2E}) \to \mathrm{End}(L_1 \oplus L_2)$ enthalten und das selbe gilt für $0_{L_1} \oplus \mathrm{id}_{L_2}$, denn man hat $0_{L_1} \oplus \mathrm{id}_{L_2} + \mathrm{id}_{L_1} \oplus 0_{L_2} = \mathrm{id}_{L_1 \oplus L_2} \in \mathrm{im}(r)$. Nach [**MRT**, Corollary 6.4] haben wir für die Unzerlegbarkeit von F_{2E} nur zu zeigen, daß 0 und id die einzigen idempotenten Endomorphismen von F_{2E} sind. Ist nun φ ein Idempotent von $\mathrm{End}(F_{2E})$, so ist auch $r(\varphi)$ ein Idempotent in $\mathrm{End}(L_1 \oplus L_2)$, also nach dem oben Gezeigten entweder 0 oder $\mathrm{id}_{L_1 \oplus L_2}$, weil die beiden anderen Idempotenten nicht im Bild von r liegen. Daraus folgt bereits, daß φ selbst 0 oder id ist.

Wir geben jetzt zwei invertierbare Garben L_1 und L_2 auf E an, die den Anforderungen (i)-(iii) genügen. Dazu bemerken wir, daß die invertierbaren Garben L auf E nach Lipman ([Li, Propositions 10.4, 11.1]) bis auf Isomorphie bijektiv ihren Chernklassen $c_1(L) = (d_0, d_1, \ldots, d_4) \in \mathbb{Z}^5$ entsprechen, wobei d_i den Grad der Einschränkung $L \otimes \mathcal{O}_{E_i}$ von L auf E_i angibt, $i = 0, \ldots, 4$. Wir wählen jetzt L_1 mit $c_1(L_1) = (2,0,0,0,0)$ und $L_2 = \mathcal{O}_E$, d.h. $c_1(L_2) = (0, \ldots, 0)$. Dann gilt wegen [Li, Proposition 11.1] bereits (i). Das Nichtvorhandensein von Schnitten mit Polen der Ordnung 1 längs E entnimmt man leicht aus $c_1(L_1(E)) = (2,-1,-1,-1,-1)$ und $c_1(L_2(E)) = (0,-1,-1,-1,-1)$, so daß auch (ii) gilt. Für (iii) betrachtet man $c_1(L_1^{\vee} \otimes L_2(-E)) = (-2,1,1,1,1)$. Dies zeigt, daß man durch Restriktion auf E_0 eine Surjektion

$$H^1(E,L_1^{\check{}}\otimes L_2(-E)) \to H^1(E_0,L_1^{\check{}}\otimes L_2(-E)\otimes \mathcal{O}_{E_o}) \simeq H^1(E_0,\mathcal{O}_{E_o}(-2)) \simeq \mathbb{C}$$

erhält, was schließlich (iii) bestätigt. ∎

Bemerkung 3.29: Die im Beispiel 3.28 studierten rationalen Singularitäten haben die Multiplizität 4 und die Einbettungsdimension 5, wie man $-Z_o\cdot Z_o = 4$ mit 1.17 entnimmt. Wahl hat in [**Wa₂**, Example 5.5] außerdem gezeigt, daß diese Singularitäten determinantiell sind, wobei das definierende Ideal einer solchen Singularität in $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_5\}$ etwa durch die Minoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1+x_5^2 \end{bmatrix}$$

beschrieben werden kann.

Des weiteren können alle diese Singularitäten als Quotienten von einfach-elliptischen Singularitäten des Typs El(4), deren minimale Auflösungen die Totalräume von Geradenbündeln vom Grad -4 über glatten elliptischen Kurven sind (siehe auch Kapitel 5), nach zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ realisiert werden. (Das nichttriviale Element von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ operiert, wenn man die Aktion auf die minimale Auflösung liftet, auf der exzeptionellen elliptischen Kurve durch deren kanonische Involution, die durch die Spiegelung an einem Punkt des definierenden Periodengitters beschrieben werden kann, und zugleich auf den Fasern des (-4)-Bündels durch Multiplikation mit -1.)

4. DIE STRUKTUR DER UNZERLEGBAREN VOLLEN GARBEN.

Auch in diesem Kapitel bezeichne (X,x) eine normale Flächensingularität; $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ sei eine beliebige Auflösung von (X,x) mit exzeptioneller Faser $E = \pi^{-1}(x)$.

Im vorigen Kapitel waren wir zu dem Ergebnis gelangt, daß reflexive Moduln M über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ in - bis auf Isomorphie - eineindeutiger Weise durch diejenigen lokal freien Garben auf dem zu einem Reduktionszykel Z mit Träger E gehörenden Unterschema in $\tilde{X}$ repräsentiert werden, die man erhält, indem man die reflexive Hülle des Urbildes von M (als Garbe auf X aufgefaßt) bezüglich π bildet und diese lokal freie Garbe auf Z einschränkt. Den so definierten Funktor werden wir auch im folgenden wieder mit R_Z bezeichnen (Z sei stets ein Reduktionszykel):

$$R_Z(M) := (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z.$$

Eine lokal freie Garbe F auf Z, die als Bild eines reflexiven Moduls unter R_Z entsteht, ist die Einschränkung einer vollen Garbe von $\tilde{X}$ auf Z und ist als solche dadurch charakterisiert, daß (i) F generisch von globalen Schnitten erzeugt wird, und (ii) es eine Ausdehnung von F zu einer lokal freien Garbe F_{2Z} über $2Z$ gibt, so daß die durch die natürliche exakte Sequenz $0 \to F \to F_{2Z}(Z) \to F(Z) \to 0$ induzierte Corandabbildung von $H^0(E,F(Z))$ nach $H^1(E,F)$ injektiv ist. Wir werden die Tatsache, daß eine lokal freie Garbe F auf Z die beiden Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir sagen, F besitze eine Ausdehnung zu einer vollen Garbe.

Bis hierhin war es nicht erforderlich, die Unzerlegbarkeit der betrachteten reflexiven Moduln anzunehmen. Tut man dies zusätzlich, so kann man sich einen genaueren Aufschluß über die Struktur der als Bilder unter R_Z gewonnenen lokal freien Garben versprechen. Natürlich liegt es nahe, danach zu fragen, ob das Bild eines unzerlegbaren Moduls M unter R_Z wiederum unzerlegbar* ist. Dies wäre allerdings bemerkenswert, weil die Unzerlegbarkeit eines Vektorraumbündels bei der Einschränkung auf eine niederdimensionale Untervarietät (wie Z in $\tilde{X}$) gewöhnlich nicht erhalten bleibt. Wir werden

*) in der Kategorie der lokal freien $\mathcal{O}_Z$-Moduln; siehe auch den folgenden Abschnitt.

sehen, daß diese Aussage für rationale Singularitäten dennoch richtig ist, sonst aber im allgemeinen nicht gilt. Bei den minimal-elliptischen Singularitäten kann allerdings noch genau ausgesagt werden, in welcher Weise die Bilder von unzerlegbaren reflexiven Moduln unter R_Z als lokal freie Garben über Z zerfallen.

Unzerlegbare Objekte, Krull-Schmidt-Theoreme. Bevor wir die oben aufgeworfene Frage behandeln, gehen wir noch kurz auf die uns im folgenden interessierenden lokal freien Garben und die dafür gültigen Sätze vom Krull-Schmidt-Typ ein.

Definition 4.1: $(\tilde{X},E)$ sei die Auflösung einer normalen Flächensingularität und $Z \geq 0$ ein Zykel auf $\tilde{X}$ mit Träger in E. Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

(a) F ist eine lokal freie Garbe über $\tilde{X}$-E;

(b) F ist eine volle Garbe auf $\tilde{X}$;

(c) F ist eine lokal freie Garbe über Z.

Dann heißt F unzerlegbar, wenn aus $F \simeq F' \oplus F''$, wobei F' und F'' Garben vom gleichen Typ wie F sind, folgt, daß $F' = 0$ oder $F'' = 0$ gilt.

Bemerkung 4.2: Die Voraussetzung, daß die beiden Summanden von F vom gleichen Typ sind, ist entbehrlich, weil in jedem der drei Fälle (a)-(c) die genannte Eigenschaft auf direkte Summanden vererbt wird.

(Zunächst ist nach [**HA**, Theorem VIII.6.1'] jeder direkte Summand einer lokal freien Garbe wieder lokal frei, was für die Fälle (a) und (c) ausreicht. Im Fall (b) ergibt sich die Behauptung dann aus der in Proposition 3.5 gegebenen Charakterisierung, die mit direkten Summen verträglich ist.)

Für die beiden ersten Fälle (a) und (b) von Definition 4.1 folgt ein Krull-Schmidt-Theorem wegen Satz 2.14 und Proposition 3.2 sofort aus dem Krull-Schmidt-Theorem (2.16) für reflexive Moduln. Der entsprechende Satz für den Fall (c), also für lokal freie Garben über einem Zykel $Z \geq 0$, wurde von Atiyah in [At_1, Theorem 2, Lemma 9] bewiesen. Wir fassen diese Ergebnisse in dem folgenden Satz noch einmal zusammen.

Proposition 4.3: $(\tilde{X},E)$ sei die Auflösung einer normalen Flächensingularität und $Z \geq 0$ ein Zykel auf $\tilde{X}$ mit Träger in E. Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

(a) F ist eine lokal freie Garbe über $\tilde{X}-E$;

(b) F ist eine volle Garbe auf $\tilde{X}$;

(c) F ist eine lokal freie Garbe über Z.

Dann gibt es eine Zerlegung $F \simeq F_1 \oplus \ldots \oplus F_t$ von F in unzerlegbare Garben $F_1, \ldots, F_t$ von dem entsprechenden Typ. Sind $F \simeq F_1 \oplus \ldots \oplus F_t$ und $F \simeq F_1' \oplus \ldots \oplus F_{t'}'$ zwei derartige Zerlegungen, so gilt $t = t'$ und es gibt eine Permutation σ der Menge $\{1,\ldots,t\}$ mit $F_i \simeq F'_{\sigma(i)}$ für $i = 1,\ldots,t$.

Wir nehmen jetzt an, daß $Z \geq E$ ein Reduktionszykel auf der Auflösung $(\tilde{X},E)$ von (X,x) ist. Das folgende Kriterium dafür, daß eine lokal freie Garbe auf Z einen unzerlegbaren reflexiven Modul auf (X,x) repräsentiert, ist eine rein formale Konsequenz aus Theorem 3.21.

Proposition 4.4: $(\tilde{X},E)$ sei die Auflösung einer normalen Flächensingularität (X,x) und $Z \geq E$ sei ein Reduktionszykel auf $\tilde{X}$. Für einen Modul $M \in \mathcal{MCM}(X,x)$ sei $F = R_Z(M)$ die zugehörige lokal freie Garbe auf Z. Der Modul M ist genau dann unzerlegbar, wenn es keine nichttriviale Zerlegung $F \simeq F' \oplus F''$ derart gibt, daß sowohl F' als auch F'' Ausdehnungen zu lokal freien Garben auf 2Z besitzen, die injektive Corandabbildungen $H^0(E,F^{(i)}(Z)) \to H^1(E,F^{(i)})$ für $i = 1,2$ induzieren.

Beweis: Es sei zunächst M unzerlegbar und $F \simeq F' \oplus F''$ eine Zerlegung wie in der Proposition. Als Summanden einer generisch von globalen Schnitten erzeugten Garbe werden auch F' und F'' generisch von globalen Schnitten erzeugt, so daß insgesamt beide Garben Ausdehnungen zu vollen Garben haben. Es gibt also Moduln $M',M'' \in \mathcal{MCM}(X,x)$ mit $F' \simeq R_Z(M')$ und $F'' \simeq R_Z(M'')$ und aus $R_Z(M) \simeq F \simeq R_Z(M') \oplus R_Z(M'') \simeq R_Z(M' \oplus M'')$ folgt $M \simeq M' \oplus M''$ wegen der Injektivität von R_Z auf den Isomorphieklassen. Nach Annahme folgt $M' = 0$ oder $M'' = 0$, also auch $F' = 0$ oder $F'' = 0$. ⌋

Für den Beweis der Umkehrung nehmen wir an, daß F die Unzerlegbarkeitseigenschaft der Proposition 4.4 besitzt. Aus $M \simeq M' \oplus M''$ folgt $F \simeq F' \oplus F''$, wo $F' := R_Z(M')$ und $F'' := R_Z(M'')$ seien. Nach Annahme muß $F' = 0$ oder $F'' = 0$ sein. Es folgt $M' = 0$ oder $M'' = 0$ und damit die Unzerlegbarkeit von M. ∎

Für die praktische Verwendung des Unzerlegbarkeitskriteriums der Proposition 4.4 ist es wesentlich, das Zustandekommen der Injektivität der einer Ausdehnung einer generisch von globalen Schnitten erzeugten lokal freien Garbe F auf Z zugeordneten Corandabbildung $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ zu verstehen.

Im Falle einer rationalen Singularität ist dies besonders einfach, weil hier aus der generischen Erzeugtheit von F schon $H^1(E,F)=0$ folgt. Hat man eine minimal-elliptische Singularität, so kann unter gewissen Voraussetzungen die Corandabbildung mit Hilfe der Dualität auf Z interpretiert werden, was wiederum die Kennzeichnung der zu unzerlegbaren reflexiven Moduln gehörigen lokal freien Garben auf Z ermöglicht.

Rationale Singularitäten. In diesem Abschnitt wird die folgende Aussage bewiesen.

Theorem 4.5: Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die Auflösung einer rationalen Singularität; $Z \geq E$ sei ein Reduktionszykel auf $\tilde{X}$. Dann stehen die Isomorphieklassen der unzerlegbaren reflexiven Moduln auf (X,x) in (durch $M \mapsto (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z$ vermittelter) Bijektion zu den Isomorphieklassen derjenigen lokal freien Garben F auf Z, für die gilt:

(i) F ist unzerlegbar;

(ii) F wird von globalen Schnitten erzeugt;

(iii) $H^0(E,F(Z))=0$.

Beweis: (1) Wir zeigen zunächst, daß eine lokal freie Garbe F mit den Eigenschaften (i)-(iii) einen unzerlegbaren reflexiven Modul bestimmt.

Wegen (iii) besitzt jede Ausdehnung von F die Eigenschaft, daß die zugehörige Corandabbildung $H^0(E,F(Z)) \to H^1(E,F)$ injektiv ist. Also folgt zusammen mit (ii) nach 3.10, daß es einen Modul $M \in \mathcal{MCM}(X,x)$ mit $F \simeq R_Z(M)$ gibt. Weil jede Zerlegung von M in eine direkte Summe unzerlegbarer Moduln eine entsprechende Zerlegung von F mit sich bringt, liefert (i) die Unzerlegbarkeit von M. ⌋

(2) Sei nun umgekehrt $M \in \mathcal{MCM}(X,x)$ unzerlegbar und $F \simeq R_Z(M)$. Nach 3.8 ist im Falle einer rationalen Singularität $(\pi^*M)^{\vee\vee}$ und damit auch F überall von globalen Schnitten erzeugt, es gilt also (ii). Andererseits gewinnt man damit

aus $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$, daß $H^1(E,F) = 0$ gilt. Die Ausdehnung von F zu $(\pi^*M)^{\vee\vee}$ stiftet nach 3.10 eine Inklusion $H^0(E,F(Z)) \hookrightarrow H^1(E,F) = 0$. Damit folgt auch (iii). Für (i) betrachten wir die Krull-Schmidt-Zerlegung $F \simeq F_1 \oplus \ldots \oplus F_t$ von F in eine direkte Summe von unzerlegbaren Garben und bemerken, daß $F_1, \ldots, F_t$ die Eigenschaften (ii)' und (iii) von F erben. Nach Teil (1) existieren dann reflexive Moduln M_i mit $F_i \simeq R_Z(M_i)$ für $i = 1, \ldots, t$ und aus $R_Z(M) \simeq R_Z(M_1) \oplus \ldots \oplus R_Z(M_t) \simeq R_Z(M_1 \oplus \ldots \oplus M_t)$ folgt $M \simeq M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$. Auf Grund der Unzerlegbarkeit von M muß $t = 1$ gelten, also auch F unzerlegbar sein. ∎

Bemerkung 4.6: Die Bedingungen (ii) und (iii) aus 4.5 an eine lokal freie Garbe F vom Rang r auf dem Reduktionszykel einer rationalen Singularität beschränken den Grad der Garbe F von unten und von oben. Um diese Aussage zu präzisieren sei $E = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ wieder die Zerlegung von E in die irreduziblen Komponenten $E_i \simeq \mathbb{P}_1$; mit $F_i := F \otimes \mathcal{O}_{E_i}$ werde die Einschränkung von F auf die (reduzierte) Kurve E_i bezeichnet. Dem Grothendieckschen Spaltungssatz ([Gro, Théorème 2.1]) zufolge gibt es ganze Zahlen $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, k$ und $j = 1, \ldots, r$, so daß gilt

$$F_i \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}_{E_i}(d_{ij}), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Die Bedingung (ii) impliziert, daß jedes F_i als Einschränkung von F von globalen Schnitten erzeugt wird. Wir erhalten so:

$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad d_{ij} \geq 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, k \text{ und } j = 1, \ldots, r.$$

Die Bedingung (iii) ist per Dualität (1.5) äquivalent zu $H^1(E, F^{\vee} \otimes \omega_Z) = 0$, was wiederum $H^1(E_i, F^{\vee} \otimes \omega_Z \otimes \mathcal{O}_{E_i}) = 0$ für die Einschränkung auf die Komponente E_i nach sich zieht. Wegen $F^{\vee}(-Z) \otimes \omega_Z \otimes \mathcal{O}_{E_i} \simeq F_i^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{E_i}(K \cdot E_i)$ mit einem kanonischen Divisor K von $\tilde{X}$ folgen aus dem Verschwinden der ersten Cohomologie über $E_i \simeq \mathbb{P}_1$ die notwendigen Bedingungen $-d_{ij} + K \cdot E_i > -2$ oder (mit $K \cdot E_i = -E_i^2 - 2$):

$$\text{(iii)} \quad \Rightarrow \quad d_{ij} < -E_i^2 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, k \text{ und } j = 1, \ldots, r.$$

<u>**Minimal-elliptische Singularitäten.**</u> Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Theorems.

<u>Theorem 4.7:</u> Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die minimale Auflösung einer minimal-elliptischen Singularität; $Z = Z_0$ sei der Fundamentalzykel von $\tilde{X}$, der zugleich ein Reduktionszykel ist (3.27). Dann stehen die Isomorphieklassen der nicht-trivialen unzerlegbaren reflexiven Moduln in (durch $M \mapsto R_Z(M) = (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z$ vermittelter) Bijektion zu den Isomorphieklassen derjenigen Garben F auf Z, für die gilt:

(i) $F \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$, G ist lokal frei und unzerlegbar;

(ii) G wird generisch von globalen Schnitten erzeugt;

(iii) $H^1(E,G) = 0$;

(iv) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(E,G(Z)) = n$.

(Wegen (iii) ist notwendig $G \not\simeq \mathcal{O}_Z$, denn es gilt $H^1(E,\mathcal{O}_Z) \simeq H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq \mathbb{C}$ als Konsequenz aus 3.12. Im übrigen läßt sich der triviale Modul $M \simeq \mathcal{O}_X$ dieser Beschreibung nicht unterordnen, weil sich $R_Z(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Z$ zwar gemäß (i) mit $n=1$ und $G=0$ darstellen ließe, dann aber (iv) nicht erfüllt würde.)

Weitere Bemerkungen zur Aussage des Theorems 4.7 werden wir im Anschluß an den Beweis machen. Einen ersten Schritt zum Beweis des Theorems stellt die folgende Proposition dar.

<u>Proposition 4.8:</u> $\mathcal{F}$ sei eine volle Garbe auf der minimalen Auflösung einer minimal-elliptischen Singularität. Dann besitzt $\mathcal{F}$ ein triviales Untervektorraumbündel* $n\mathcal{O}_{\tilde{X}} \subset \mathcal{F}$ vom Rang $n = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{X},\mathcal{F})$, dessen Einschränkung auf den Fundamentalzykel Z ein direkter Summand von $F := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z$ ist: $F \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$. Für den komplementären Summanden G gilt $H^1(E,G) = 0$.

<u>Beweis:</u> Zunächst gilt nach 3.14 und wegen $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z$ nach 1.19(3):

$$n = h^1(\tilde{X},\mathcal{F}) = h^1(E,F) = h^0(E,F^\vee).$$

Wir werden zeigen, daß je n erzeugende Schnitte aus $H^0(E,F^\vee)$ ein basispunktfreies System bilden, also ein triviales Unterbündel vom Rang n in $F^\vee$

*) Das heißt, daß $n\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ nicht nur Untergarbe ist, sondern das zugehörige triviale Bündel auch überall ein Unterbündel vom Rang n in dem zu $\mathcal{F}$ gehörenden Vektorraumbündel ist.

(über Z) aufspannen. Hierfür ist nur zu zeigen, daß jeder globale Schnitt $s \in H^0(E,F^\vee)$, $s \neq 0$, längs E keine Nullstellen aufweist.

Dazu nehmen wir zunächst vereinfachend an, daß die exzeptionelle Faser E nur aus glatten rationalen Kurven $E_1,\dots,E_k$ besteht, die sich allerdings nicht transversal schneiden müssen. (Wir schließen also die Fälle (1)-(3) von 1.20 vorerst von der Betrachtung aus!) Als Konsequenz aus dem Grothendieckschen Spaltungssatz über $E_i \simeq \mathbb{P}_1$ erhält man

$$F_i := F \otimes \mathcal{O}_{E_i} \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}_{E_i}(d_{ij}) \qquad \text{für } i = 1,\dots,k,$$

mit geeigneten $d_{ij} \in \mathbb{Z}$. Weil F und damit auch F_i generisch von globalen Schnitten erzeugt wird, gilt $d_{ij} \geq 0$ für alle i und j.

Es genügt zu zeigen, daß die Einschränkungen des gegebenen Schnittes s auf alle E_i nichtverschwindende Schnitte in den $F_i^\vee \simeq \bigoplus \mathcal{O}_{E_i}(-d_{ij})$ induzieren. Dann existiert nämlich zu jedem $i = 1,\dots,k$ ein $j = j(i)$, so daß die Komponente von $s|_{E_i}$ in $\mathcal{O}_{E_i}(-d_{ij})$ nicht verschwindet und deswegen $-d_{ij} \geq 0$ gilt. Daraus folgt aber $d_{ij} = 0$ für diesen Index j, so daß $s|_{E_i}$ in $\mathcal{O}_{E_i}(-d_{ij}) = \mathcal{O}_{E_i}$ tatsächlich nirgends verschwindet, woraus die Nullstellenfreiheit von s folgt.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß s von einem Schnitt $s' \in H^0(E,F^\vee(-Y))$ induziert wird, wobei $Y = \sum a_i E_i > 0$ ein Zykel ist, von dem man gleich $Y \leq Z$ annehmen darf (weil s von $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)$ annulliert wird.) Wir führen diese Annahme zu einem Widerspruch, indem wir zeigen, daß s in diesem Fall sogar von einem Schnitt $s'' \in H^0(E,F^\vee(-Z))$ induziert wird, also $s = 0$ im Gegensatz zur Voraussetzung gilt.

Ist $Y \leq Z$ und $Y \neq Z$, so gibt es, weil Z der Fundamentalzykel ist, ein E_i mit $Y \cdot E_i > 0$. Damit folgt für die Restriktion von s' auf die Kurve E_i:

$$\begin{aligned} s'|_{E_i} \in H^0(E,F^\vee(-Y) \otimes \mathcal{O}_{E_i}) &= H^0(E,F_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{E_i}(-Y \cdot E_i)) \\ &= H^0(E_i, \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}_{E_i}\underbrace{(-d_{ij} - Y \cdot E_i)}_{<0 \text{ wegen } d_{ij} \geq 0}) = 0 \end{aligned}$$

Folglich verschwindet s' identisch längs E_i, so daß s sogar schon von einem Schnitt aus $H^0(E,F^\vee(-Y-E_i))$ induziert wird. Dieses Argument kann nun so oft wiederholt werden, bis nach endlich vielen Schritten der Fundamentalzykel Z erreicht wird. (Vgl. 1.16)

Wir gehen jetzt kurz auf die drei zuvor ausgeschlossenen Fälle (1)-(3) aus 1.20 ein, wobei E in jedem dieser Fälle aus nur einer irreduziblen Kurve besteht und der Fundamentalzykel Z deswegen reduziert ist. (1) E ist eine glatte elliptische Kurve - Wir greifen hier auf die im folgenden Kapitel erläuterte Klassifikation der unzerlegbaren holomorphen Vektorraumbündel auf glatten elliptischen Kurven nach Atiyah vor und bemerken (vgl. 5.6(iv) und 5.15), daß das einzige unzerlegbare Bündel, das sowohl generisch von seinen globalen Schnitten erzeugt wird als auch einen Schnitt in seinem Dual zuläßt, das triviale Bündel ist, so daß man hier sofort ein triviales Unterbündel des gewünschten Ranges erhält. (2),(3) E ist eine singuläre rationale Kurve - Hier zieht man die Normalisierung $\nu: \mathbb{P}_1 \to E$ heran und betrachtet ν^*F an Stelle von F, wobei ν^*F wiederum generisch von globalen Schnitten erzeugt wird. Es kann also hinsichtlich ν^*F genau wie zuvor argumentiert werden.* Man erhält so, daß $s \circ \nu$ für jeden Schnitt $0 \neq s \in H^0(E,F^\vee)$ auf $\mathbb{P}_1$ nirgends verschwindet. Dann ist auch s selbst nullstellenfrei auf E und erzeugt ein triviales Unterbündel in $F^\vee$.

Wir haben also in allen Fällen eine kurze exakte Sequenz von lokal freien $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben konstruiert

$$0 \to n\mathcal{O}_Z \to F^\vee \to G^\vee \to 0,$$

wobei $G^\vee$ den Cokern von $n\mathcal{O}_Z$ in $F^\vee$ bezeichnet.** Die dazu duale Sequenz ist

$$0 \to G \to F \to n\mathcal{O}_Z \to 0 \qquad (*)$$

Daraus wiederum erhält man eine lange exakte Cohomologiesequenz

$$0 \to H^0(E,G) \to H^0(E,F) \to H^0(E,n\mathcal{O}_Z) \to H^1(E,G) \to H^1(E,F) \to H^1(E,n\mathcal{O}_Z) \to 0,$$

in der nach Konstruktion $H^1(E,F) \simeq H^1(E,n\mathcal{O}_Z)$ gilt.*** Außerdem wird $n\mathcal{O}_Z$ als Quotient von F generisch von den Bildern der globalen Schnitte von F erzeugt, was wegen $h^0(E,n\mathcal{O}_Z) = n = \mathrm{rk}(n\mathcal{O}_Z)$ die Surjektivität der Abbildung von $H^0(E,F)$ nach $H^0(E,n\mathcal{O}_Z)$ bedingt. Aus der Cohomologiesequenz folgt damit $H^1(E,G) = 0$.

---

*) Man benötigt dazu $(\nu^*F)^\vee \simeq \nu^*(F^\vee)$, was wegen der lokalen Freiheit von F richtig ist. ([ALG, Chapitre II, §5.4, Proposition 8])

**) Wir benutzen, daß es sich um eine Sequenz von Vektorraumbündeln handelt.

***) Es gilt $H^1(E,\mathcal{O}_Z) \simeq H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq \mathbb{C}$ wegen $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)) = 0$ nach 3.12.

Die Sequenz (*) entspricht einem Element von $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Z}(n\mathcal{O}_Z, G) \simeq H^1(E, nG) = 0$. Sie spaltet also: $F \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$.

Es ist lediglich noch zu zeigen, daß $n\mathcal{O}_Z$ die Einschränkung eines trivialen Unterbündels $n\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ von $\mathcal{F}$ ist. Dazu muß man nur einsehen, daß sich je n (überall) linear unabhängige erzeugende Schnitte von $n\mathcal{O}_Z \subset F$ zu Schnitten in $\mathcal{F}$ ausdehnen lassen, die dann automatisch lokal um E linear unabhängig sind und deswegen ein triviales Bündel $n\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ aufspannen. Die Ausdehnbarkeit von Schnitten ergibt sich aus der Sequenz $0 \to \mathcal{F}(-Z) \to \mathcal{F} \to F \to 0$ zusammen mit dem Hilfssatz 3.12, der $H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}(-Z)) = 0$ liefert.

Damit ist der Beweis von Proposition 4.8 beendet. ∎

<u>Beweis von Theorem 4.7:</u> Wir erbringen den Beweis ähnlich dem des Theorems 4.5 in drei Schritten.

(1) F sei eine lokal freie Garbe auf Z, die den Bedingungen (i)-(iv) genügt. Wir zeigen, daß F eine Ausdehnung zu einer vollen Garbe auf $\tilde{X}$ besitzt, also das Bild eines Moduls $M \in \mathcal{MCM}(X,x)$ unter R_Z ist.

Zunächst wird F wegen (i) und (ii) generisch von globalen Schnitten erzeugt. Nach 3.10 bleibt zu zeigen, daß es eine Ausdehnung $\mathcal{F}_{2Z}$ von F zu einer lokal freien Garbe auf 2Z gibt, die einen injektiven Corand $H^0(E, F(Z)) \to H^1(E, F)$ definiert.

Dazu sei $\mathcal{F}_{2Z}$ zunächst eine beliebige Ausdehnung und $\delta\colon H^0(E, F(Z)) \to H^1(E, F)$ der zugehörige Corand. Bei einer Abänderung dieser Ausdehnung um eine Extensionsklasse $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Z}(F(Z), F) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Z}(F, F(-Z))$ geht die Corandabbildung δ in $\delta + \delta_\varepsilon$ über, wobei δ_ε durch das Yoneda-Produkt mit der Klasse ε definiert ist. (Siehe 3.15, 3.16.) Wir werden zeigen, daß jede lineare Abbildung von $H^0(E, F(Z))$ nach $H^1(E, F)$ in der Form $\delta + \delta_\varepsilon$ ausgedrückt werden kann. Natürlich reicht es zu zeigen, daß jede solche lineare Abbildung als δ_ε realisiert werden kann.

Mit dieser Aussage ist dann der erste Schritt tatsächlich bewiesen, denn $H^0(E, F(Z))$ und $H^1(E, F)$ besitzen aufgrund der Voraussetzungen die gleichen Dimensionen. Genauer bemerken wir, daß die folgenden durch die Zerlegung $F \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$ induzierten Isomorphien bestehen:

- $H^0(E,F(Z)) \simeq H^0(E,G(Z)) \simeq \mathbb{C}^n$; nach (i) und (iv), denn $H^0(E,\mathcal{O}_Z(Z))$ verschwindet nach dem Satz von Grauert-Riemenschneider, weil diese Gruppe zu $H^1(E,\omega_Z(-Z)) \simeq H^1(E,\omega_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_Z)$ dual ist.
- $H^1(E,F) \simeq H^1(E,n\mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}^n$; nach (i) und (iii), weil $H^1(E,\mathcal{O}_Z) \simeq H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq \mathbb{C}$ gilt.*

Wir wollen δ_ε als Yoneda-Produkt mit der Klasse ε genauer beschreiben. Die Aufspaltung $F \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$ führt auch zu einer entsprechenden Zerlegung der Ext^1-Gruppen (alle über $\mathcal{O}_Z$ gebildet):

- $\mathrm{Ext}^1(F(Z),Z) \simeq$

$$\mathrm{Ext}^1(n\mathcal{O}_Z(Z),n\mathcal{O}_Z) \oplus \mathrm{Ext}^1(n\mathcal{O}_Z(Z),G) \oplus \mathrm{Ext}^1(G(Z),n\,\mathcal{O}_Z) \oplus \mathrm{Ext}^1(G(Z),G).$$

Die ersten beiden Terme in dieser Zerlegung verschwinden wegen $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Z(Z),\mathcal{O}_Z) \simeq H^1(E,\mathcal{O}_Z(-Z)) = 0$ und $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Z(Z),G) \simeq H^1(E,G(-Z)) = 0$, da Z ein Reduktionszykel ist und (ii) gilt. Also haben wir in Wirklichkeit nur

- $\mathrm{Ext}^1(F(Z),F) \simeq \mathrm{Ext}^1(G(Z),n\mathcal{O}_Z) \oplus \mathrm{Ext}^1(G(Z),G)$.

Dementsprechend zerfällt die Klasse ε in $\varepsilon = \varepsilon^\circ + \varepsilon'$ mit $\varepsilon^\circ \in \mathrm{Ext}^1(G(Z),n\mathcal{O}_Z)$ und $\varepsilon' \in \mathrm{Ext}^1(G(Z),G)$. Das Yoneda-Produkt von Schnitten in $H^0(E,F(Z)) \simeq H^0(E,G(Z))$ mit ε, also die Abbildung δ_ε, ist dann die Summe der Yoneda-Produkte mit ε° und mit ε'. Letzteres führt aber in die Gruppe $H^1(E,G)$, die nach (iii) verschwindet. Folglich wird der Corand δ_ε allein durch die Komponente ε° von ε bestimmt.

Es bleibt also zu begründen, daß jede lineare Abbildung von $H^0(E,G(Z))$ nach $H^1(E,n\mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}^n$ als Yoneda-Produkt mit einem $\varepsilon^\circ \in \mathrm{Ext}^1(G(Z),n\mathcal{O}_Z)$ dargestellt werden kann. Das ist aber ein trivialer Sachverhalt, denn nach 1.19(3) gilt $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z$ und deswegen ist $\mathrm{Ext}^1(G(Z),\mathcal{O}_Z) \simeq \mathrm{Ext}^1(G(Z),\omega_Z)$ gerade das Dual von $H^0(E,G(Z))$ bezüglich der durch das Yoneda-Produkt definierten nicht-ausgearteten Paarung (1.5). ε° ist damit ein n-Vektor aus beliebigen Linearformen auf $H^0(E,G(Z))$; offensichtlich kann jede lineare Abbildung von $H^0(E,G(Z))$ in den $\mathbb{C}^n$ so beschrieben werden. ⌋

(2) F sei eine lokal freie Garbe auf Z mit den Eigenschaften (i)-(iv) und es sei $\mathcal{F}$ eine Ausdehnung von F zu einer vollen Garbe auf $\tilde{X}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ (und damit auch der zu $\mathcal{F}$ gehörige reflexive Modul auf (X,x)) unzerlegbar ist.

---

*) Die erste Isomorphie folgt aus $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-Z)) = 0$ nach 3.12; die zweite Isomorphie ist Elliptizität: $p_g = 1$.

Es sei $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ mit vollen Garben $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}''$. Wegen der Unzerlegbarkeit von G nach (i) ist dann etwa $F' := \mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_Z \simeq n'\mathcal{O}_Z \oplus G$ und $F'' := \mathcal{F}'' \otimes \mathcal{O}_Z \simeq n''\mathcal{O}_Z$ mit $n' + n'' = n$ unter Verwendung der Eindeutigkeit der Krull-Schmidt-Zerlegung. Weil $\mathcal{F}'$ als Summand von $\mathcal{F}$ eine volle Garbe ist, wird dadurch eine injektive Corandabbildung $\mathbb{C}^n \simeq H^0(E,G(Z)) \simeq H^0(E,F'(Z)) \hookrightarrow H^1(E,F') \simeq H^1(E,n'\mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}^{n'}$ induziert, so daß $n' \geq n$, also $n' = n$ folgt. Demnach ist $n'' = 0$ und so $\mathcal{F}'' = 0$, was die Unzerlegbarkeit von $\mathcal{F}$ beweist. ⌋

Mit (1) und (2) haben wir gezeigt, daß die Bedingungen (i)-(iv) hinreichend dafür sind, daß eine lokal freie Garbe F auf Z das Bild eines nichttrivialen unzerlegbaren reflexiven Moduls unter R_Z ist. Im letzten Schritt wird nun die Notwendigkeit nachgewiesen.

(3) $\mathcal{F}$ sei eine unzerlegbare volle Garbe auf $\tilde{X}$, die nicht zu $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ isomorph ist. Nach 4.8 ist $F := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z \simeq n\mathcal{O}_Z \oplus G$, wobei $n = h^1(\tilde{X},\mathcal{F})$ und $H^1(E,G) = 0$ ist. Dies ergibt schon (ii) und (iii). Weiterhin definiert die Ausdehnung von F zu $\mathcal{F}$ eine injektive Corandabbildung

$$H^0(E,G(Z)) \simeq H^0(E,F(Z)) \hookrightarrow H^1(E,F) \simeq H^1(E,n\mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}^n,$$

so daß zumindest $h^0(E,G(Z)) \leq n$ gilt. Wir zeigen jetzt die Gleichheit zusammen mit der Unzerlegbarkeit von G, also die noch ausstehenden Bedingungen (i) und (iv).

Dazu sei $G \simeq G_1 \oplus \dots \oplus G_t$ die Krull-Schmidt-Zerlegung von G und es seien $n_i := h^0(E,G_i(Z))$ für $i = 1,\dots,t$ und $n_0 := n - (n_1 + \dots + n_t) \geq 0$. Wenn man mit diesen Zahlen Bündel $F_0 := n_0\mathcal{O}_Z$ und $F_i := n_i\mathcal{O}_Z \oplus G_i$ für $i = 1,\dots,t$ definiert, dann besitzen alle diese Bündel $F_0,\dots,F_t$ nach Teil (1) Ausdehnungen zu vollen Garben $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_t$ auf $\tilde{X}$. (Die Ausdehnbarkeit von F_0 zu $n_0\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ist dabei natürlich trivial.) Weil aber $F \simeq F_0 \oplus F_1 \oplus \dots \oplus F_t$ gilt und Z ein Reduktionszykel ist, folgt aus Theorem 3.21: $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_t$. Wenn $\mathcal{F}$, wie vorausgesetzt, unzerlegbar und nichttrivial ist, dann muß $t = 1$ und $\mathcal{F}_0 = 0$, also $n_0 = 0$, gelten. Das war zu zeigen. ⌋

Damit ist Theorem 4.7 bewiesen. ∎

Als eine leichte Folgerung aus dem Krull-Schmidt-Theorem für volle Garben (4.3(b)) und dem Theorem 4.7 gewinnt man das folgende Corollar.

Corollar 4.9: Ist F eine beliebige volle Garbe auf der minimalen Auflösung $\tilde{X}$ einer minimal-elliptischen Flächensingularität, so gibt die Zahl

$$d := h^1(\tilde{X},F) - h^1_E(\tilde{X},F)$$

den Rang des trivialen Summanden in der Krull-Schmidt-Zerlegung von F an: $F \simeq d\mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_t$, $F_i \not\simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ unzerlegbar für $i = 1,\ldots,t$.

Insbesondere ist für eine nichttriviale unzerlegbare volle Garbe F die natürliche Inklusion $H^1_E(\tilde{X},F) \hookrightarrow H^1(\tilde{X},F)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Weil für eine volle Garbe F auf $\tilde{X}$ mit Einschränkung $F = F \otimes \mathcal{O}_Z$ nach 3.14 stets $H^1(\tilde{X},F) \simeq H^1(E,F)$ und $H^1_E(\tilde{X},F) \simeq H^0(E,F(Z))$ gilt, folgt aus 4.7 (siehe auch den Beweis), daß $h^1(\tilde{X},F) - h^1_E(\tilde{X},F) = 0$ ist, wenn F unzerlegbar und nichttrivial ist. Andererseits gilt für den trivialen Modul $h^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - h^1_E(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 1$, denn es ist $p_g = h^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 1$ wegen Elliptizität und $H^1_E(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ (als Dual zu $H^1(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}})$) nach dem Satz von Grauert-Riemenschneider.

Das Corollar resultiert nun aus Existenz und Eindeutigkeit der Krull-Schmidt-Zerlegungen von vollen Garben (4.3). ∎

5. REFLEXIVE MODULN AUF EINFACH-ELLIPTISCHEN SINGULARITÄTEN.

In diesem Kapitel werden die Resultate der beiden vorhergehenden Kapitel auf die Bestimmung der Auslander-Reiten-Köcher der einfach-elliptischen Singularitäten, die in mancher Hinsicht die einfachsten Vertreter der minimal-elliptischen Flächensingularitäten sind, angewandt. Es wird in Verbindung damit auch eine übersichtliche Beschreibung der - zu den reflexiven Moduln äquivalenten - Vektorraumbündel auf den punktierten Spektren von einfach-elliptischen Singularitäten gegeben, aus der sich eine Reihe von elementaren Eigenschaften der reflexiven Moduln ablesen lassen.

Einfach-elliptische Singularitäten. Die Bezeichnung der im folgenden definierten Klasse von Singularitäten als "einfach-elliptisch" geht auf Saito ([**Sa**]) zurück; die Hyperflächensingularitäten darunter findet man häufig auch als parabolisch bezeichnet.

Definition 5.1: Der Keim (X,x) einer normalen komplexen Flächensingularität heißt einfach-elliptische Singularität vom Typ $El(b)$, wenn die exzeptionelle Faser der minimalen Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ von (X,x) eine glatte elliptische Kurve E mit Selbstschnittzahl $E^2 = -b$ ist, $b \geq 1$.

Die Bezeichnung $El(b)$ für die einfach-elliptischen Singularitäten wurde von Laufer ([**La$_2$**]) eingeführt. Saito bezeichnet die Singularitäten der Typen $El(1)$, $El(2)$ und $El(3)$ mit $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$ und $\tilde{E}_6$, was sich durch deren Deformationsverhalten motivieren läßt ([**Sa**]).

Bemerkung 5.2: Wenn (X,x) eine einfach-elliptische Flächensingularität vom Typ $El(b)$ ist, so kann die minimale Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ nach einem Satz von Grauert (vgl. [**Gra**, §4, Satz 7, und §4.8c]) als der Totalraum $\tilde{X} = |L|$ eines Geradenbündels L mit $\deg L = -b$ über der elliptischen Kurve E angesehen werden, wobei die Abbildung π als die Kontraktion der als Nullschnitt von L aufgefassten Kurve E erscheint.

Ein Geradenbündel L vom Grad $-b$ $(b \geq 1)$ kann stets in der Form $\mathcal{O}_E(-bP)$ geschrieben werden, wobei P ein Punkt der Kurve E ist ([AG, Remark IV.4.

10.9]). Weil sich je zwei derartige Geradenbündel $\mathcal{O}_E(-bP)$ und $\mathcal{O}_E(-bQ)$ mit $P,Q \in E$ durch eine geeignete Translation auf der elliptischen Kurve E ineinander überführen lassen, hängt der analytische Isomorphietyp der minimalen Auflösung einer einfach-elliptischen Singularität vom Typ El(b) nicht vom Isomorphietyp des Normalenbündels $\mathcal{L}$ von E in $\tilde{X}$ ab, sondern nur von dem analytischen (bzw. algebraischen) Typ der elliptischen Kurve E, der sich bekanntlich durch deren j-Invariante $j(E) \in \mathbb{C}$ beschreiben läßt. (Siehe [AG, Chapter IV.4].)

Demnach verbirgt sich hinter den Singularitäten vom Typ El(b) für jedes $b \geq 1$ eine 1-Parameter-Familie von paarweise zueinander nicht biholomorph äquivalenten normalen Flächensingularitäten. Andererseits sind offensichtlich Homöomorphie- und Homotopietyp sowohl der minimalen Auflösung als auch des Umgebungsrandes einer einfach-elliptischen Singularität vom Typ El(b) allein aus der Zahl $b \geq 1$ schon eindeutig bestimmt.

5.3. Wir betrachten eine einfach-elliptische Singularität (X,x) vom Typ El(b) und fixieren eine minimale Auflösung $(\tilde{X},E)$ von (X,x), die wie in 5.2 von der Form $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ sei, wobei P ein Punkt der glatten elliptischen Kurve E sei. Dann ist $E \subset \tilde{X}$ als Nullschnitt des Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$. Wir geben jetzt einige leicht zu beweisende Eigenschaften von (X,x) an, die wir zum größten Teil schon allgemeiner in 1.18-1.21 festgestellt hatten.

(1) $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) \otimes \mathcal{O}_E \simeq \mathcal{O}_E(bP)$. (Denn die Einschränkung von $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ auf E ist nach Definition das Conormalenbündel von E in $\tilde{X}$, das in der Tat zum Normalenbündel $\mathcal{O}_E(-bP)$ dual ist.)

(2) E ist sowohl der Fundamentalzykel als auch ein Reduktionszykel der Auflösung $(\tilde{X},E)$. (Siehe 1.13 und 3.27.)

(3) $\omega_{\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$, d.h. $K = -E$ ist ein kanonischer Divisor von $\tilde{X}$. (Siehe 1.19(3). Dies kann aber auch direkt eingesehen werden: Es sei z eine Koordinate der Basis und t eine Faserkoordinate in dem trivialen Bündel $\mathcal{O}_E(-bP)|_{E-\{P\}}$. Dann definiert $dz \wedge \frac{dt}{t}$ eine meromorphe 2-Form auf dem entsprechenden offenen Teil von $\tilde{X}$. In einer Umgebung der Faser von $\mathcal{O}_E(-bP)$ über $P \in E$ kann man Koordinaten (ζ,τ) von Basis und Faser so wählen, daß $(\zeta,\tau) = (z, z^{-b}t)$ gilt. Die 2-Form $dz \wedge \frac{dt}{t}$ transformiert sich dann in $d\zeta \wedge \frac{d\tau}{\tau}$, so daß man eine globale meromorphe 2-Form mit zugeordnetem Divisor -E auf $\tilde{X}$ erhält.)

Als Konsequenz aus (3) erhält man, daß die einfach-elliptischen Singularitäten minimal-elliptisch sind. (1.18(b))

(4) $H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq H^1(E,\mathcal{O}_E) \simeq \mathbb{C}$, also ist das geometrische Geschlecht von (X,x) $p_g = 1$. (Dies folgt schon daraus, daß (X,x) minimal-elliptisch ist (1.18). Die Behauptung ist aber ohnedies klar, weil wie in 3.12 oder nach dem Satz von Grauert-Riemenschneider $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)) = 0$ gilt, was die erste Isomorphie liefert. Die Isomorphie zu $\mathbb{C}$ ergibt sich dann aus der Serre-Dualität auf E.)

(5) (X,x) ist eine Gorenstein-Singularität. (Das folgt sofort aus (3), weil es damit auf $\tilde{X}-E \simeq X-\{x\}$ eine nicht verschwindende holomorphe 2-Form gibt.)

(6) Die Einbettungsdimension von (X,x) ist max(b,3) und die Multiplizität von (X,x) ist max(b,2). (1.21)

(7) Die Singularität (X,x) wird in $(\mathbb{C}^e,0)$ durch $\frac{1}{2}e(e-3)$ Gleichungen definiert, sofern die Einbettungsdimension $e = \max(b,3)$ von (X,x) mindestens vier beträgt. ([Wa₂, Theorem 2.8], siehe auch [Sa, §1].)

(8) Die Singularität (X,x) ist quasihomogen, d.h. es gibt eine holomorphe Operation von $\mathbb{C}^*$ auf X, die x als einzigen Fixpunkt besitzt. (Eine solche $\mathbb{C}^*$-Aktion kann man auf der Auflösung $(\tilde{X},E)$ von (X,x) dadurch beschreiben, daß man in den Fasern des Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$, dessen Totalraum $\tilde{X}$ ist, mit den Skalaren aus $\mathbb{C}^*$ multipliziert. Dabei wird der Nullschnitt E identisch in sich abgebildet.)

Der zum lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ assoziierte graduierte Ring ist dann, wie immer bei Kegeln,

$$\mathrm{Gr}\, \mathcal{O}_{X,x} = \bigoplus_{\mu=0}^{\infty} H^0(E,\mathcal{O}_E(\mu bP)),$$

wobei die Elemente in dem homogenen Anteil $H^0(E,\mathcal{O}_E(\mu bP))$ vom Grad μ als holomorphe Funktionen auf der Auflösung $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ interpretiert werden können, die längs E von der Ordnung μ verschwinden und homogen sind.

<u>5.4.</u> Zur Illustration von 5.3(7) listen wir im folgenden die definierenden Gleichungen der Singularitäten vom Typ El(b) für $b \leq 6$ auf, wobei wir uns auf Ergebnisse von Saito und Behnke beziehen. (Diese Resultate sind für die folgenden Erörterungen allerdings nicht erforderlich, weswegen wir hier auf eingehende Erläuterungen verzichten.) Die Singularitäten des Typs El(b) mit $b = 1,2,3$ sind Hyperflächensingularitäten, die durch eine einzige Relation in

$\mathbb{C}\{x,y,z\}$ beschrieben werden können:

El(1): $z^2 = y(y-x^2)(y-ax^2)$;

El(2): $z^2 = xy(y-x)(y-ax)$;

El(3): $xz^2 = y(y-x)(y-ax)$.

Dabei ist a jeweils ein Parameter aus $\mathbb{C}-\{0,1\}$, der mit der j-Invarianten der exzeptionellen elliptischen Kurve E durch die folgende Formel verbunden ist:

$$j(E) = \frac{4}{27}\cdot\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

Die Singularitäten vom Typ El(4) werden als vollständige Durchschnitte durch zwei Relationen in $\mathbb{C}\{x,y,z,w\}$ definiert:

El(4): $z^2 = y(w-(a+1)y+ax)$ und $y^2 = xw$.

(Hier ist wieder $a \in \mathbb{C}-\{0,1\}$ und auch zu j(E) besteht dieselbe Beziehung.)

Die vorstehenden Ergebnisse wurden aus [Sa, Satz 1.9] entnommen. Für die Singularitäten der Typen El(5) und El(6) geben wir nach [Be, 6.9(i) und 6.10(i)] nur exemplarische Gleichungen an, die jeweils eine Singularität dieser Typen definieren.

El(5): Die folgenden fünf Gleichungen in $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_5\}$ definieren eine Singularität vom Typ El(5):

$$z_3^2 = z_1z_5, \quad z_4^2 = z_3z_5 - z_1z_3, \quad z_5^2 = z_2z_4 - z_1z_3, \quad z_3z_4 = z_1z_2, \quad z_4z_5 = z_2z_3.$$

El(6): Die folgenden neun Gleichungen in $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_6\}$ definieren eine Singularität vom Typ El(6):

$$z_3^2 = z_1z_5, \quad z_4^2 = z_1z_2 - z_1z_3, \quad z_5^2 = z_2z_3, \quad z_6^2 = z_2z_5 - z_1z_2, \quad z_3z_4 = z_1z_6,$$
$$z_3z_5 = z_1z_2, \quad z_3z_6 = z_4z_5, \quad z_4z_6 = z_2z_3 - z_1z_5, \quad z_5z_6 = z_2z_4.$$

(In den beiden letzten Fällen erzeugen z_1 und z_2 jeweils einen regulären zweidimensionalen Unterring, beschreiben also eine Noether-Normalisierung.)

In den Kapiteln 3 und 4 haben wir unter allgemeinen Voraussetzungen die reflexiven Moduln einer normalen Flächensingularität in Termen von lokal freien Garben auf einem Reduktionszykel der Auflösung der Singularität beschrieben. In dem uns hier interessierenden Fall der einfach-elliptischen Singularitäten kann man sich der reduzierten exzeptionellen Kurven in den minimalen Auflösungen als Reduktionszykel bedienen und gelangt so zu der Frage nach der Klassifikation von lokal freien Garben (i.e. Vektorraumbündeln) auf glatten elliptischen Kurven. Diese Klassifikation wurde bereits 1957 von Atiyah in der Arbeit [$\mathbf{At_2}$] vollständig angegeben und hat seither eine Reihe von Verfeinerungen erfahren. In dem folgenden Abschnitt stellen wir die Ergebnisse von Atiyah, insoweit sie hier benötigt werden, vor. In einem Anhang zu diesem Kapitel geben wir einige Erläuterungen zum Beweis dieser Sätze, stellen eine von Oda gegebene geometrische Beschreibung der von Atiyah gefundenen Vektorraumbündel vor, und geben den durch die unzerlegbaren Vektorraumbündel über einer elliptischen Kurve definierten Auslander-Reiten-Köcher an.

Vektorraumbündel auf elliptischen Kurven. Wir fixieren für diesen Abschnitt einige Bezeichnungen: E sei eine fest vorgegebene glatte elliptische Kurve über dem Körper der komplexen Zahlen. Da E als Quotient $\mathbb{C}/\Omega$ nach einem Gitter Ω vom Rang 2 in $\mathbb{C}$ geschrieben werden kann, trägt E in natürlicher Weise eine von $\mathbb{C}$ ererbte additive Gruppenstruktur. Weiter sei P ein fest gewählter Punkt aus E, den wir bisweilen als Basispunkt bezeichnen werden, denn mit seiner Hilfe läßt sich eine Isomorphie von E mit der Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}^\circ E$ der Geradenbündel vom Grad 0 auf E herstellen, indem man einem Punkt $Q \in E$ das Geradenbündel $\mathcal{O}_E(Q-P) \in \mathrm{Pic}^\circ E$ zuordnet. (Die multiplikative Gruppenstruktur von $\mathrm{Pic}^\circ E$ mit $\mathcal{O}_E$ als Einselement entspricht in dieser Weise der additiven Gruppenstruktur von E mit P als Nullpunkt.)

Definition 5.5: Für $r \geq 1$ und $d \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{E}(r,d)$ die Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren holomorphen Vektorraumbündeln vom Rang r und Grad d auf der elliptischen Kurve E.

Insbesondere ist also $\mathcal{E}(1,0) = \mathrm{Pic}^\circ E$. Tatsächlich sind alle $\mathcal{E}(r,d)$ nichtleer und es gilt:

Satz 5.6 (Atiyah, [$\mathbf{At_2}$]): Es sei E eine elliptische Kurve und $P \in E$ ein Punkt. Dann gibt es (von der Wahl von P abhängende) bijektive Abbildungen

$$F_{r,d}\colon \mathrm{Pic}^\circ E \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(r,d)$$

für jedes $r \geq 1$ und jedes $d \in \mathbb{Z}$, so daß gilt:

(i) $F_{r,d}(\lambda_1) \otimes \lambda_2 = F_{r,d}(\lambda_1 \otimes \lambda_2^k)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Pic}^\circ E$, wobei $k := r/(r,d)$ den zu d teilerfremden Anteil von r bezeichnet;

(ii) $F_{r,d+r}(\lambda) = F_{r,d}(\lambda) \otimes \mathcal{O}_E(P)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$;

(iii) $F_{r,d}(\lambda)^{\vee} = F_{r,-d}(\lambda^{\vee})$ für alle $\lambda \in \mathrm{Pic}^{\circ} E$;

(iv) $h^0(E,F_{r,d}(\lambda)) = \begin{cases} d, & \text{wenn } d>0 \\ 1, & \text{wenn } d=0 \text{ und } \lambda=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$h^1(E,F_{r,d}(\lambda)) = \begin{cases} -d, & \text{wenn } d<0 \\ 1, & \text{wenn } d=0 \text{ und } \lambda=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(Mit $\lambda=1$ ist selbstverständlich das triviale Geradenbündel $\mathcal{O}_E \in \mathrm{Pic}^{\circ} E$ gemeint.)

(Der Satz 5.6 stellt eine Zusammenfassung zahlreicher Aussagen aus [**At₂**] dar. Die Existenz der Abbildungen $F_{r,d}$ wird durch eine explizite Konstruktion begründet, in die nur die Wahl des Basispunktes P eingeht, und steht zusammen mit (ii) in [Theorems 5,6]; die Aussage (i) ist Gegenstand von [Theorem 10] und (iii) folgt aus [Corollary 2 to Lemma 24] zusammen mit (i). Der erste Teil von (iv) gilt nach [Lemma 6'], [Lemma 15] und [Theorem 5]; den zweiten Teil gewinnt man aus der Serre-Dualität auf E wegen $\omega_E \simeq \mathcal{O}_E$ unter Verwendung von (iii).)

Mit Hilfe der Abbildungen $F_{r,d}$ aus Satz 5.6 kann man allen Mengen $\mathcal{E}(r,d)$ die Struktur von zu $\mathrm{Pic}^{\circ} E$ und damit zu E isomorphen algebraischen bzw. analytischen Varietäten verleihen. Anhand der expliziten Konstruktionen in [**At₂**], die zu den Abbildungen $F_{r,d}$ führen, überzeugt man sich leicht davon, daß die so definierten Strukturen von Varietäten auf $\mathcal{E}(r,d)$ nicht von der Auswahl des Punktes P abhängen.

Bemerkung 5.7: Aus 5.6(iv) folgt, daß es für jedes $r \geq 1$ ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes unzerlegbares Vektorraumbündel F_r vom Rang r und Grad 0 gibt, das dadurch ausgezeichnet ist, daß $H^0(E,F_r) \neq 0$ gilt. (Auch $H^1(E,F_r) \neq 0$ kann zur Kennzeichnung dienen.) Aus 5.6(iii) folgt, daß F_r ein selbstduales Bündel ist: $F_r^{\vee} \simeq F_r$.

(Diesen speziellen Bündeln $F_r \in \mathcal{E}(r,0)$ wird sowohl bei der Untersuchung der reflexiven Moduln auf den einfach-elliptischen Singularitäten in diesem Kapitel als auch beim Studium der Darstellungen der lokalen Fundamentalgruppen dieser Singularitäten in dem folgenden Kapitel 6 besondere Bedeutung zukommen.)

Atiyah hat in [At₂] nicht nur die unzerlegbaren Vektorraumbündel auf einer elliptischen Kurve vollständig klassifiziert und ihre Betti-Zahlen bestimmt, sondern auch die Krull-Schmidt-Zerlegungen aller Tensorprodukte von unzerlegbaren Bündeln explizit berechnet. Von diesem Ergebnis werden wir nur einen sehr kleinen Teil benötigen, der die Tensorprodukte mit den speziellen Bündeln F_r vom Grad 0 (vgl. 5.7) betrifft.

Satz 5.8 (Atiyah, [At_2, Lemma 24]): Es seien $r \geq 1$ und $d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Für $h \geq 1$ sei $F_h \in \mathcal{E}(h,0)$ das durch $H^0(E,F_h) \neq 0$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Bündel. Dann gilt $F_{r,d}(\lambda) \otimes F_h \simeq F_{hr,hd}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \operatorname{Pic}^\circ E$.

Mit diesem Satz ist es häufig möglich, sich auf die Betrachtung von Bündeln mit zueinander teilerfremden Graden und Rängen zurückzuziehen. Ein Beispiel für echten Zerfall von Tensorprodukten unzerlegbarer Bündel gibt hingegen die folgende "Clebsch-Gordan-Formel."

Satz 5.9 (Atiyah, [At_2, Theorem 8]): Für $r \geq s \geq 1$ seien F_r und F_s die in 5.7 definierten Bündel vom Grad 0. Dann gilt:

$$F_r \otimes F_s \simeq F_{r+s-1} \oplus F_{r+s-3} \oplus \dots \oplus F_{r-s+3} \oplus F_{r-s+1}.$$

(Diese Formel gleicht nicht nur von ihrer äußeren Gestalt her der bekannten Clebsch-Gordan-Formel für die Tensorprodukte von symmetrischen Potenzen der natürlichen zweidimensionalen Darstellung von $SL_2(\mathbb{C})$. In der Tat kann nämlich F_r als die $(r-1)$-te symmetrische Potenz von F_2 beschrieben werden, [At_2, Theorem 9], so daß 5.9 mit der Clebsch-Gordan-Formel bewiesen werden kann.)

Mit den Sätzen 5.8 und 5.9 kann der Zerfall von beliebigen Tensorprodukten $F \otimes F_r$ in unzerlegbare Summanden beschrieben werden. Mehr werden wir nicht benötigen. Der folgende Satz, dem wir noch eine Definition voranstellen, ist ein leichtes Corollar zu der vollständigen Kenntnis der Krull-Schmidt-Zerlegungen von Tensorprodukten. Dieser Satz ist zwar für die weiteren Ausführungen entbehrlich, besitzt aber eine instruktive Konsequenz für die Ausdehnungen von Vektorraumbündeln im Falle von Auflösungen einfach-elliptischer Singularitäten, weswegen wir ihn trotzdem erwähnen.

Definition 5.10: Für ein beliebiges Vektorraumbündel F wird dessen Anstieg $\mu(F)$ definiert als die rationale Zahl $\mu(F) := \frac{\deg F}{\operatorname{rk} F}$.

Der Anstieg bietet gegenüber dem Grad eines Vektorraumbündels den Vorzug der leichten Handhabbarkeit sowohl bei Tensorprodukten als auch bei direkten Summen: Sind $F_1,\dots,F_t$ Bündel von den Rängen $r_1,\dots,r_t$ und setzt man $r := r_1 + \dots + r_t$, so gilt:

$$\mu(F_1 \otimes \dots \otimes F_t) = \mu(F_1) + \dots + \mu(F_t)$$
$$\mu(F_1 \oplus \dots \oplus F_t) = \frac{r_1}{r}\mu(F_1) + \dots + \frac{r_t}{r}\mu(F_t).$$

Satz 5.11: Es seien F' und F'' zwei unzerlegbare Vektorraumbündel auf einer elliptischen Kurve E und es sei $F' \otimes F'' \simeq G_1 \oplus \dots \oplus G_t$ die Krull-Schmidt-Zerlegung von $F' \otimes F''$ mit unzerlegbaren Bündeln $G_1,\dots,G_t$. Dann gilt:

$$\mu(G_1) = \dots = \mu(G_t) = \mu(F' \otimes F'') = \mu(F') + \mu(F'')$$

Begründung: (Alle Zitate beziehen sich auf [At_2].) Mit [Lemma 24] und [Lemma 29] kann die Berechnung von $F' \otimes F''$ auf [Theorem 8] sowie [Theorems 13,14] zurückgeführt werden. In allen drei Fällen besitzen die dort auftretenden direkten Summanden eines Tensorproduktes alle den selben Anstieg. ∎

Corollar 5.12: Wenn F ein unzerlegbares Vektorraumbündel über einer elliptischen Kurve E ist, dann zerfällt das Endomorphismenbündel $F^{\vee} \otimes F$ von F in eine direkte Summe von unzerlegbaren Bündeln vom Grad 0.

Daraus folgt nun ganz leicht:

Corollar 5.13: Es sei $(\tilde{X},E)$ die minimale Auflösung einer einfach-elliptischen Flächensingularität: E ist also eine glatte elliptische Kurve und $\tilde{X}$ der Totalraum eines Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$, $P \in E$. Die zugehörige Bündelprojektion sei mit $p: \tilde{X} \to E$ bezeichnet. Ist nun F ein unzerlegbares Vektorraumbündel über E, so ist jede Ausdehnung von F zu einer lokal freien Garbe $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$ zu der trivialen Ausdehnung p^*F von F entlang der Fasern von p isomorph.

Beweis: Wegen 3.15 genügt es zu zeigen, daß alle Gruppen $H^1(E,F^\vee \otimes F(-\mu E))$ für $\mu \geq 1$ verschwinden, weil dann nach 3.15 alle sukzessiven infinitesimalen Ausdehnungen eindeutig sind. Wegen 5.3(1) ist $F^\vee \otimes F(-\mu E) \simeq F^\vee \otimes F(\mu bP)$ und zerfällt daher nach Satz 5.12 in eine direkte Summe von unzerlegbaren Bündeln echt positiven Grades (und mit Anstieg μb), so daß aus 5.6(iv) die Behauptung $H^1(E,F^\vee \otimes F(-\mu E)) = 0$ folgt. ∎

5.14. Für Geradenbündel folgt die Tatsache, daß die Projektion $p: \tilde{X} \to E$ einen Isomorphismus $p^*: \mathrm{Pic}\, E \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}\, \tilde{X}$ induziert, viel einfacher durch einen Vergleich der Exponentialsequenzen von E und von $\tilde{X}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(E,\mathbb{Z}) & \to & H^1(E,\mathcal{O}) & \to & \mathrm{Pic}\, E & \to & H^2(E,\mathbb{Z}) & \to & H^2(E,\mathcal{O}) = 0 \\ \downarrow p^* & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* & & \| \\ H^1(\tilde{X},\mathbb{Z}) & \to & H^1(\tilde{X},\mathcal{O}) & \to & \mathrm{Pic}\, \tilde{X} & \to & H^2(\tilde{X},\mathbb{Z}) & \to & H^2(\tilde{X},\mathcal{O}) = 0 \end{array}$$

Die vier äußeren vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen, weil E ein Deformationsretrakt von $\tilde{X}$ ist und weil $H^1(E,\mathcal{O}) \simeq \mathbb{C} \simeq H^1(\tilde{X},\mathcal{O})$ gilt. Das Fünferlemma liefert die behauptete Isomorphie $\mathrm{Pic}\, E \simeq \mathrm{Pic}\, \tilde{X}$.

Reflexive Moduln. Für diesen Abschnitt sei (X,x) eine einfach-elliptische Singularität vom Typ El(b) und $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine minimale Auflösung, die wie in 5.2 die Form $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ besitze, wobei P ein Punkt der glatten elliptischen Kurve E sei. Wir fixieren diesen Punkt und verwenden ihn zugleich als einen Basispunkt für die Beschreibung der unzerlegbaren Vektorraumbündel auf E nach Satz 5.6, dessen Bezeichnungen wir beibehalten.

Als Reduktionszykel zur Beschreibung der reflexiven Moduln können und werden wir auf $\tilde{X}$ die reduzierte exzeptionelle Kurve E verwenden. Nach Theorem 4.7 haben wir auf E diejenigen unzerlegbaren Vektorraumbündel G zu betrachten, die (i) generisch von ihren globalen Schnitten erzeugt werden, und für die (ii) $H^1(E,G) = 0$ gilt. Die Bedingung (ii) kann sofort mit Satz 5.6(iv) interpretiert werden. Zu (i) stellen wir fest (siehe auch [**Bru**, Lemma A1]):

Lemma 5.15: Ein unzerlegbares Vektorraumbündel G über einer elliptischen Kurve E wird genau dann generisch von seinen globalen Schnitten erzeugt, wenn entweder $G \simeq \mathcal{O}_E$ oder $\mu(G) \geq 1$ (d.h.: $\deg G \geq \mathrm{rk}\, G$) gilt.

Beweis: Wir nehmen gleich $G \neq \mathcal{O}_E$ an. Allein für die Existenz einer hinreichenden Anzahl linear unabhängiger Schnitte ist nach 5.6(iv) schon $\deg G \geq \operatorname{rk} G$ notwendig.
Nun sei G mit $\deg G \geq \operatorname{rk} G$ gegeben. Ist $Q \in E$ ein beliebiger Punkt, so hat man eine exakte Sequenz $0 \to G(-Q) \to G \to G_Q \to 0$, wobei G_Q die Faser von G über dem Punkt Q ist, und daraus erhält man $H^0(E,G) \to G_Q \to H^1(E,G(-Q))$. Wegen $\deg G(-Q) \geq 0$ ist nach 5.6(iv) $H^1(E,G(-Q)) = 0$ für zumindest fast alle $Q \in E$. Also wird G generisch von globalen Schnitten erzeugt. ∎

Zusatz: Ein unzerlegbares Bündel G auf einer elliptischen Kurve E wird genau dann überall von globalen Schnitten erzeugt, wenn $G \simeq \mathcal{O}_E$ oder $\mu(G) > 1$ gilt. Ein unzerlegbares Bündel G vom Rang r mit $\mu(G) = 1$ wird in genau einem Punkt $Q \in E$ nicht von seinen globalen Schnitten erzeugt, der durch $G(-Q) \simeq F_r$ (vgl. 5.7) bestimmt ist.

Begründung: Der Beweis von 5.15 zeigt, daß $\mu(G) > 1$ hinreichend für die Erzeugung durch globale Schnitte ist, und daß im Falle $\mu(G) = 1$ höchstens ein Halm nicht von globalen Schnitten erzeugt wird. Andererseits besitzt ein unzerlegbares Bündel G mit $\mu(G) = 1$ aber genau $r = \operatorname{rk} G$ linear unabhängige Schnitte. Würden diese G erzeugen, also in allen Punkten linear unabhängig sein, so müßte G ein triviales Bündel vom Rang r sein - im Widerspruch zur Annahme $\mu(G) = 1$. ∎

Man kann jetzt direkt das Theorem 4.7 zur Angabe der unzerlegbaren reflexiven Moduln auf (X,x) einsetzen. Das Ergebnis lautet:

Theorem 5.16: Es sei $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ die minimale Auflösung einer einfach-elliptischen Singularität (X,x) vom Typ El(b). Dann ist E eine glatte elliptische Kurve und $\tilde{X} \simeq |\mathcal{O}_E(-bP)|$. Jedem reflexiven Modul M auf (X,x) wird durch $R(M) := (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_E$ ein Vektorraumbündel auf E zugeordnet, durch das umgekehrt M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt wird. Als Bilder von unzerlegbaren reflexiven Moduln unter R treten bis auf Isomorphie genau die im folgenden definierten Vektorraumbündel $F'_{r,d}(\lambda)$ vom Rang $r \geq 1$ mit $\lambda \in \operatorname{Pic}^\circ E$ und $r \leq d < (b+1)r$ auf:

$$F'_{r,d}(\lambda) := \begin{cases} F_{r,d}(\lambda) , & \text{wenn } d < br \text{ oder } d = br \text{ und } \lambda \neq 1; \\ \mathcal{O}_E \oplus F_{r-1,b(r-1)}(1) , & \text{wenn } d = br \text{ und } \lambda = 1; \\ n\mathcal{O}_E \oplus F_{r-n,b(r-n)+n}(\lambda) , & \text{wenn } d = br+n,\ 0 < n < r. \end{cases}$$

<u>Bemerkungen 5.17:</u> (1) Nach Theorem 5.16 steht die Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln über (X,x) in Bijektion zu

$$\{ (r,d,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathrm{Pic}^\circ E \mid r \leq d < (b+1)r \}.$$

Im Anschluß an den Beweis von Theorem 5.16 werden wir verdeutlichen, daß es sich dabei um eine über (r,d) indizierte abzählbare Vereinigung von über $\mathrm{Pic}^\circ E \simeq E$ parametrisierten analytischen Familien von reflexierten Moduln handelt.

(2) Das dem trivialen Modul $\mathcal{O}_X$ über X entsprechende Vektorraumbündel $R(\mathcal{O}_X)$ über E ist $F'_{1,b}(1) \simeq \mathcal{O}_E$.

(3) Im Falle einer einfach-elliptischen Singularität vom Typ El(1) besitzen alle Bündel $F'_{r,d}(\lambda)$ eines festen Ranges $r \geq 1$ mit der einzigen Ausnahme des Bündels $F'_{r,r}(1)$ den selben Grad r. Weil der Grad von $R(M)$ zugleich die Chernklasse $c_1(\mathcal{F})$ der vollen Garbe $\mathcal{F} \simeq (\pi^*M)^{\vee\vee}$ ist,* eignet sich der sogenannte "Cherncharakter" $(\mathrm{rk}(\mathcal{F}),c_1(\mathcal{F}))$ nicht zur Unterscheidung der Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln.

<u>Beweis von Theorem 5.16:</u> Es sei M ein unzerlegbarer reflexiver $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang r. Wir setzen gleich $M \not\simeq \mathcal{O}_X$ voraus. Dann ist $F := R(M)$ nach Theorem 4.7 von der Form $F \simeq n\mathcal{O}_E \oplus G$, wobei $0 \leq n < r$ gilt und G ein unzerlegbares Bündel ist, für das (unter Verwendung von 5.15) gilt:

(i) $\deg G \geq \mathrm{rk}\, G = r - n$;

(ii) $H^1(E,G) = 0$;

(iii) $h^0(E,G(E)) = n$.

Nach (i) ist G eines der Bündel $F_{r-n,d}(\lambda)$ mit $d \geq r-n$. Wegen 5.6(iv) ist dann automatisch schon (ii) erfüllt. Außerdem gilt nach 5.6(iii):

$$F_{r-n,d}(\lambda)\otimes\mathcal{O}_E(E) \simeq F_{r-n,d}(\lambda)\otimes\mathcal{O}_E(-bP) \simeq F_{r-n,d-b(r-n)}(\lambda),$$

so daß die Eigenschaft (iii) bei abermaliger Verwendung von 5.6(iv) dazu äquivalent ist, daß einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

1) $n = 0$: $d-b(r-n) < 0$ oder $d-b(r-n) = 0$ und $\lambda \neq 1$;

2) $n = 1$ und $d-b(r-n) = 0$ und $\lambda = 1$;

3) $n \geq 1$ und $d-b(r-n) = n$.

Dies sind genau die drei Fälle, die bei der Definition von $F'_{r,d}(\lambda)$ unterschieden wurden. ∎

---

*) Nach 5.14 ist $\mathrm{Pic}\,\tilde{X}$ kanonisch zu $\mathrm{Pic}\,E$ isomorph, wobei die Chernklassen einander entsprechen.

Das Theorem 5.16 stellt nur eine abstrakte bijektive Beziehung her zwischen der Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren reflexiven Moduln über einer Singularität (X,x) vom Typ El(b) und der über Paare (r,d) mit $r \geq 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ indizierten disjunkten Vereinigung von abzählbar vielen Kopien von $\mathrm{Pic}^\circ E \simeq E$.

Natürlich wünscht man sich für jedes Paar (r,d) eine - in zu präzisierender Weise - kontinuierlich von $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ abhängende Familie unzerlegbarer Moduln $M_{r,d}(\lambda)$, für die $R(M_{r,d}(\lambda)) = F'_{r,d}(\lambda)$ gilt. Wenn $d \neq br$ ist, dann ist die Existenz einer solchen Familie ziemlich plausibel: Man hätte dazu nur die Ausdehnung der Bündel $F'_{r,d}(\lambda)$ zu vollen Garben $\mathcal{F}_{r,d}(\lambda)$ auf $\tilde{X}$ so durchzuführen, daß die kontinuierliche Abhängigkeit von λ erhalten bleibt, und anschließend $M_{r,d}(\lambda) := \pi_* \mathcal{F}_{r,d}(\lambda)$ zu bilden, wobei $\pi : \tilde{X} \to X$ die minimale Auflösung sei. (Vgl. den Beweis zu 3.5.) Im Falle $d = br$ ist jedoch $F'_{r,br}(\lambda) = F_{r,br}(\lambda)$ für $\lambda \neq 1$ und $F'_{r,br}(1) = \mathcal{O}_E \oplus F_{r-1,b(r-1)}(1)$, so daß diese einfache Idee hier gewiß nicht zum Ziel führt.

Wir beschreiten daher einen anderen Weg, wobei wir uns die Äquivalenz der Kategorien von reflexiven Moduln auf (X,x) und von Vektorraumbündeln auf dem punktierten Spektrum $X-\{x\}$ oder, was das selbe ist, von Vektorraumbündeln auf $\tilde{X}-E$, zu eigen machen. (2.14)

Unser Ziel ist die Konstruktion von Vektorraumbündeln $\mathcal{G}_{r,d}(\lambda)$ auf $\tilde{X}-E$ für jedes Paar (r,d) mit $1 \leq r \leq d < (b+1)r$, die analytisch von $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ abhängen und die Eigenschaft haben, daß für den zugehörigen reflexiven Modul $M_{r,d}(\lambda) := j_* \pi'_* \mathcal{G}_{r,d}(\lambda)$ gilt: $R(M_{r,d}(\lambda)) = F'_{r,d}(\lambda)$. (Dabei sei $\pi' : \tilde{X}-E \to X-\{x\}$ die Einschränkung der Auflösung π auf $\tilde{X}-E$ und j sei die offene Inklusion von $X-\{x\}$ in X.)

Für die minimale Auflösung $\pi : (\tilde{X},E) \to (X,x)$ setzen wir wieder $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ mit der Einbettung von E als Nullschnitt voraus und sehen $\tilde{X}-E$ als ein $\mathbb{C}^*$-Faserbündel über der Kurve E an, wobei $s : \tilde{X}-E \to E$ die Bündelprojektion bezeichne.

<u>Proposition 5.18:</u> Es sei M ein unzerlegbarer reflexiver Modul auf (X,x) und $\mathcal{F} := (\pi^* M)^{\vee\vee}$ die zugehörige volle Garbe auf $\tilde{X}$. Wenn $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_E \simeq F'_{r,d}(\lambda)$ gilt, dann ist $\mathcal{F}|_{\tilde{X}-E} \simeq s^* F_{r,d}(\lambda)$.

(Mit den Bezeichnungen aus 5.6 und 5.16.)

Corollar 5.19: Die unzerlegbaren Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$-E sind (bis auf Isomorphie) genau die Bündel der Form $s^*F_{r,d}(\lambda)$ mit $r \geq 1$, $r \leq d < (b+1)r$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$.

Corollar 5.20: Für $r \geq 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ ist $G_{r,d}(\lambda) := s^*F_{r,d}(\lambda)$ eine analytisch von $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ abhängende Familie von Vektorraumbündeln auf $\tilde{X}$-E, für die $R(j_* \pi'_* G_{r,d}(\lambda)) = F'_{r,d}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gilt, wobei $j: X-\{x\} \to X$ die offene Inklusion und $\pi': \tilde{X}-E \to X-\{x\}$ die Restriktion der Auflösung π bezeichnen.

Beweis von Proposition 5.18: Es sei F wie in 5.18. Dann ist F die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Ausdehnung von $F' := F'_{r,d}(\lambda)$ zu einer vollen Garbe auf $\tilde{X}$.

Ist $d < br$ oder $d = br$ und nicht $\lambda = 1$, so gilt $H^0(E,F'(E)) = H^0(E,F'(-bP)) = 0$ nach 5.6(iv), so daß wegen 3.10 jede Ausdehnung von F' eine volle Garbe ist. Also besitzt F' bis auf Isomorphie nur eine einzige Ausdehnung auf $\tilde{X}$, nämlich etwa p^*F', wobei $p: \tilde{X} \to E$ die Bündelprojektion von $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ sei. (Da F' in diesem Fall unzerlegbar ist, folgt das natürlich auch aus 5.13.) Aus $F \simeq p^*F'$ folgt $F|_{\tilde{X}-E} \simeq s^*F'$, wobei $F' = F_{r,d}(\lambda)$ gilt. $\lrcorner$

Auch im Falle $r = 1$, $d = b$ und $\lambda = 1$, dem trivialen Modul $\mathcal{O}_X$ entsprechend, ist nichts zu zeigen, weil die Ausdehnung von $F_{1,b}(1) \simeq \mathcal{O}_E(bP)$ durch p^* (wie oben) auf $\tilde{X}$ nach 5.3(1) zu $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ isomorph ist, also über $\tilde{X}$-E das triviale Bündel $\mathcal{O}_{\tilde{X}-E}$ beschreibt. $\lrcorner$

Jetzt sei $F' = n\mathcal{O}_E \oplus G$ mit $h^0(E,G(-bP)) = n > 0$ und G unzerlegbar. Wählt man n linear unabhängige Schnitte in F', die $n\mathcal{O}_E$ erzeugen, so können diese wegen $H^1(\tilde{X},F(-E)) = 0$ (3.12) zu Schnitten in F fortgesetzt werden, die dort ein triviales Unterbündel $n\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ aufspannen, weil sie lokal um E immer noch punktweise linear unabhängig sind. Mit G als dem Cokern von $n\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ in F erhält man die obere Zeile in dem Diagramm

$$\begin{array}{lccccccccc}
(e) & 0 & \to & n\mathcal{O}_{\tilde{X}} & \to & F & \to & G & \to & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(e'') & 0 & \to & n\mathcal{O}_{\tilde{X}} & \to & F'' & \to & G(E) & \to & 0
\end{array}$$

Die Sequenz (e) definiert eine Klasse $e \in H^1(\tilde{X},nG^*) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(G,n\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, deren Einschränkung auf E zu einer Klasse in $H^1(E,nG^*) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_E}(G,n\mathcal{O}_E)$ verschwindet, weil die Einschränkung von (e) auf E spaltet. Folglich wird e von einem

Element $e'' \in H^1(\tilde{X}, nG^*(-E)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(G(E), n\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ induziert, so daß sich (e) als das Pull-back bezüglich $G \hookrightarrow G(E)$ der zu e'' gehörenden Extension (e'') schreiben läßt, wie es oben in dem Diagramm angedeutet wird.

Die Restriktion von (e'') auf die Kurve E ist eine Extension der Gestalt

$$0 \to n\mathcal{O}_E \to F'' \to G(-bP) \to 0, \tag{*}$$

deren Corand $\delta: H^0(E, G(-bP)) \to H^1(E, n\mathcal{O}_E)$ gerade mit dem Corand übereinstimmt, der durch die Ausdehnung von F' zu F_{2E} in der in 3.10 genannten Weise bestimmt wird: $H^0(E, F'(-bP)) \to H^1(E, F')$. (Siehe dazu die Identifizierungen der Cohomologiegruppen im Beweis von Theorem 4.7 und das Diagramm in 3.14 zur Übereinstimmung der Corandabbildungen.)

Da wir nach Voraussetzung in der Situation $F' \not\simeq \mathcal{O}_E$ sind, ist δ nach 4.9 (und 3.14) ein Isomorphismus. Nun ist weiter nach Voraussetzung entweder $n = 1$ und G(-bP) das spezielle Grad-0-Bündel vom Rang $r-1$, das einen holomorphen Schnitt enthält (5.7), oder es ist $0 < n < r$ und es gilt $\deg G(-bP) = n$. In beiden Situationen wird nach Atiyah durch (*) ein unzerlegbares Bündel F'' definiert, sofern nur der Corand δ ein Isomorphismus ist ([At₂, Lemma 16 & proof]). Im ersten Fall ergibt sich $F'' = F_{r,0}(1)$, im zweiten Fall $F'' = F_{r,n}(\lambda)$, wenn $G = F_{r-n, b(r-n)+n}(\lambda)$, also $G(-bP) = F_{r-n,n}(\lambda)$, war. (Siehe hierzu auch den Abschnitt 5.34 im Anhang zu diesem Kapitel.)

$\mathcal{F}''$ ist als Ausdehnung eines unzerlegbaren Bündels F'' nach Proposition 5.13* automatisch eine triviale Ausdehnung $\mathcal{F}'' \simeq p^*F''$. Weil $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}(E)$ über $\tilde{X}$-E isomorph sind, stimmen eingeschränkt darauf auch die oben definierten Extensionen (e) und (e'') überein, so daß insbesondere gilt:

$$\mathcal{F}|_{\tilde{X}-E} \simeq \mathcal{F}''|_{\tilde{X}-E} \simeq \mathcal{F}''(-E)|_{\tilde{X}-E} \simeq p^*F''(bP)|_{\tilde{X}-E} \simeq s^*F''(bP).$$

Schließlich ist F''(bP) in dem hier untersuchten Fall das Bündel $F_{r,d}(\lambda)$, wie man aus 5.6(ii) ersieht. Damit ist die Proposition 5.18 bewiesen. ∎

<u>Begründungen für die Corollare:</u> Das Corollar 5.19 erhält man trivialerweise als eine Kombination der Aussagen von 2.14, 3.2, 5.16 und 5.18. ⌋

---

*) 5.13 wird nicht unbedingt benötigt! Für $\mathcal{F}$ kann nämlich jede Ausdehnung von $\mathcal{F}_{2Z}$ zu einem Bündel auf $\tilde{X}$ eingesetzt werden und es ist leicht zu sehen, daß durch geeignete Wahl von $\mathcal{F}$ jede Ausdehnung $\mathcal{F}''$ von F'' produziert werden kann, insbesondere die triviale Ausdehnung durch p^*.

Auch Corollar 5.20 ist leicht zu begründen. Zunächst hängt $G_{r,d}(\lambda)$ in analytischer Weise von λ ab, weil es sich um die Hintereinanderausführung der Abbildungen $F_{r,d}$ (aus 5.6) und s^* handelt. Weiter ist $\pi^!_*G$ einfach die Interpretation von $G = G_{r,d}(\lambda)$ als ein Vektorraumbündel auf dem punktierten Spektrum und die Ausdehnung $j_*\pi^!_*G$ ist der zugehörige reflexive Modul, dessen zugeordnete volle Garbe F auf $\tilde{X}$ via π' über $\tilde{X}$-E mit G übereinstimmt. Aus $G \simeq s^*F_{r,d}(\lambda)$ folgt schließlich $R(j_*\pi^!_*G) \simeq F'_{r,d}(\lambda)$ nach 5.18. ∎

<u>Bemerkung 5.21:</u> Die Aussage von Corollar 5.19 über die Klassifikation von unzerlegbaren Vektorraumbündeln auf dem Komplement des Nullschnittes eines negativen Geradenbündels $\tilde{X}$ über einer glatten elliptischen Kurve E gilt wörtlich ebenso für den Fall, daß $\tilde{X}$ der Totalraum eines positiven Geradenbündels über E ist.

(Der Grund hierfür ist, daß $\tilde{X}$-E gleichermaßen das Komplement des Nullschnittes wie auch das Komplement des unendlich fernen Schnittes ist, wenn man hilfsweise die zu $\tilde{X} = |L|$ gehörige Kompaktifizierung durch das projektive Bündel $\mathbb{P}(L \oplus \mathcal{O}_E)$ betrachtet. Der unendlich ferne Schnitt kann dabei als der Nullschnitt des inversen Bündels $L^\vee$ aufgefaßt werden.)

<u>Bemerkung 5.22:</u>* Die in Corollar 5.20 definierten Familien $j_*\pi^!_*s^*F_{r,d}(\lambda)$ von reflexiven Moduln sind im allgemeinen keine flachen Familien von Moduln.

(Bei einer flachen Familie von Moduln ist die Minimalzahl von Erzeugenden, also der Corang, der Moduln lokal konstant in Abhängigkeit von dem Parameter λ. Dies ist offensichtlich für die durch $r = 1$ und $d = b$ bestimmte Familie nicht der Fall, weil diese für $\lambda = 1$ den trivialen Modul $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ enthält, für $\lambda \neq 1$ aber nichttriviale Moduln mit Corang > 1.)

Eine weitere Folgerung aus der Proposition 5.18 ist

<u>Proposition 5.23:</u> Ist M ein reflexiver Modul auf einer einfach-elliptischen Flächensingularität (X,x), so operiert die Gruppe $\mathbb{C}^*$ in einer von der Operation auf (X,x) induzierten natürlichen Weise auch auf M. (M besitzt also eine zu der Graduierung von $\mathcal{O}_{X,x}$ kompatible Graduierung durch homogene Komponenten.) (Zur $\mathbb{C}^*$-Aktion auf (X,x) siehe 5.3(8).)

*) Für den Hinweis auf diesen Sachverhalt bin ich G.-M. Greuel dankbar.

Beweis: Es sei $U := X - \{x\}$ das punktierte Spektrum von (X,x); zusätzlich behalten wir die vor 5.18 eingeführten Bezeichnungen bei. Nun sei M ein reflexiver $\mathcal{O}_X$-Modul und M_U die Einschränkung von M auf U. Dann wird der Halm M_x von M im singulären Punkt x durch $M_x \simeq H^0(U, M_U)$ gegeben und die Operation von Skalaren $t \in \mathbb{C}^*$ auf U induziert Abbildungen $t^*: H^0(U,M_U) \to H^0(U, t^*M_U)$. Um zu zeigen, daß dadurch eine $\mathbb{C}^*$-Aktion auf M_x bestimmt wird, müssen Isomorphismen $\varphi(t): M_U \xrightarrow{\simeq} t^*M_U$ für alle $t \in \mathbb{C}^*$ gefunden werden, die für alle $t', t'' \in \mathbb{C}^*$ den Bedingungen $\varphi(t't'') = \varphi(t') \circ \varphi(t'')$ genügen.

Man kann M_U als eine lokal freie Garbe auf dem Komplement $\tilde{X} - E$ der exzeptionellen elliptischen Kurve E in der minimalen Auflösung $(\tilde{X}, E)$ auffassen, wobei $\mathbb{C}^*$ auf den zu $\mathbb{C}^*$ isomorphen Fasern von $s: \tilde{X} - E \to E$ durch Multiplikation operiert (5.3(8)). Nach 5.18 ist die Liftung $\mathcal{G}$ von M_U auf $\tilde{X} - E$ isomorph zu der trivialen Ausdehnung s^*F eines Vektorraumbündels F über E längs der Fasern von s. Für $t \in \mathbb{C}^*$ gilt dann $t^*s^*F \simeq s^*F$, weil t fasertreu bezüglich s operiert, und daraus ergeben sich die gewünschten Isomorphismen $\mathcal{G} \xrightarrow{\simeq} t^*\mathcal{G}$ und $M_U \xrightarrow{\simeq} t^*M_U$. ∎

Wir kehren noch einmal kurz zu den Familien von reflexiven Moduln auf den einfach-elliptischen Singularitäten zurück und geben eine algebraische Charakterisierung derjenigen Moduln, die in Theorem 5.16 durch die Ausnahmebündel $F'_{r,br}(1)$ gekennzeichnet wurden und deren Einfügung in kontinuierliche Familien von Moduln eine nichttriviale Aussage des Corollars 5.20 war.

Proposition 5.24: Die in 5.16 durch $R(D_r) \simeq F'_{r,br}(1) = \mathcal{O}_E \oplus F_{r-1,b(r-1)}(1)$ bestimmten Moduln D_r vom Rang $r \geq 1$ auf einer Singularität (X,x) vom Typ El(b) sind die reflexiven Hüllen von den symmetrischen Potenzen der Kähler-Differentiale auf X: $D_r \simeq (S^{r-1}\Omega^1_X)^{\vee\vee}$.

(Insbesondere ergeben sich für $r = 1,2$ der triviale Modul $\mathcal{O}_X$ und der Modul der Zariski-Differentiale $D_X = (\Omega^1_X)^{\vee\vee}$.)

Beweis: Für $r = 1$ ist nichts zu beweisen. Für $r = 2$ zeigen wir geringfügig mehr als behauptet wurde, nämlich die Übereinstimmung der zu $F'_{2,2b}(1)$ gehörenden vollen Garbe $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$ mit der Garbe $\Omega^1_{\tilde{X}}$. (Damit entspricht der zugehörige Modul D_2 der Garbe Ω^1_U auf dem punktierten Spektrum $U := X - \{x\}$, ist also der Modul der Zariski-Differentiale.)

Es sei $F := F'_{2,2b}(1) = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(bP)$. Wegen $H^1(E, F^\vee \otimes F(bP)) \simeq \mathbb{C}$ und dem Verschwinden aller höheren Extensionsgruppen $H^1(E, F^\vee \otimes F(\mu bP)) = 0$ für $\mu \geq 2$ besitzt F bis auf Isomorphie (von Garben) nach 3.15 nur zwei Ausdehnungen auf $\tilde{X}$: Die triviale Ausdehnung $p^*F \simeq p^*\mathcal{O}_E \oplus p^*\mathcal{O}_E(bP) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ (mit der Projektion $p: \tilde{X} \to E$) und eine nichttriviale Ausdehnung, die durch $\mathcal{F}$ repräsentiert wird, denn $\mathcal{F}$ ist unzerlegbar. (Alle nichttrivialen Extensionen können durch die Operation von Automorphismen von F - hier einfach die Multiplikation mit Skalaren in einem der Summanden - ineinander überführt werden.)

Wir zeigen, daß auch $\Omega^1_{\tilde{X}}$ eine nichttriviale Ausdehnung von F ist. Zunächst ist $\Omega^1_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_E \simeq F$, denn es gibt eine natürliche exakte Sequenz $0 \to N_E^\vee \to \Omega^1_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_E \to \Omega^1_E \to 0$ mit dem Conormalenbündel $N_E^\vee \simeq \mathcal{O}_E(bP)$ und $\Omega^1_E \simeq \mathcal{O}_E$. Diese Sequenz spaltet wegen $H^1(E, N_E^\vee) = 0$. (Vgl. [AG, Proposition II.8.4A].)

Es bleibt die Unzerlegbarkeit von $\Omega^1_{\tilde{X}}$ nachzuweisen. Würde $\Omega^1_{\tilde{X}}$ in $\mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ zerfallen, so gäbe es eine meromorphe 1-Form α mit Polen der Ordnung 1 genau längs E und ohne Nullstellen auf $\tilde{X}$. Wir betrachten wieder die Koordinatenüberdeckung aus 5.3(3): Außerhalb der Faser von $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ über P kann α hinsichtlich der trivialisierenden (z,t)-Koordinaten in der Form $\alpha = f(z,t)dz + g(z,t)dt$ geschrieben werden, wobei f holomorph ist und g in der Form $g(z,t) = g_0(z,t)\frac{1}{t} + (\text{holomorph})$ geschrieben werden kann, wobei die holomorphe Funktion g_0 längs $t = 0$ nicht verschwindet. Die Umrechnung der Form α in die (ζ,τ)-Koordinaten lokal um die Faser von $\tilde{X}$ über P, die durch $\zeta = 0$ gegeben wird, führt zu

$$\alpha = (f(\zeta,\zeta^b\tau) + b\zeta^{b-1}\tau g(\zeta,\zeta^b\tau)) d\zeta + \zeta^b g(\zeta,\zeta^b\tau) d\tau.$$

Darin weist der Summand $b\zeta^{b-1}\tau g(\zeta,\zeta^b\tau) = bg_0(\zeta,\zeta^b\tau)\frac{1}{\zeta} + \dots$ des Koeffizienten von $d\zeta$ einen Pol längs der Faser $\zeta = 0$ auf,* was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist $\Omega^1_{\tilde{X}}$ unzerlegbar und es folgt $\Omega^1_{\tilde{X}} \simeq \mathcal{F}$. ⌋

Die Aussage über die Fälle $r > 2$ gewinnt man mit Hilfe von 5.18 nun leicht aus der Aussage über $r = 2$. Der Modul $(S^{r-1}\Omega^1_X)^{\vee\vee}$ wird nämlich durch das Bündel $S^{r-1}\Omega^1_U$ über $U = X - \{x\}$ eindeutig bestimmt und das zu $S^{r-1}\Omega^1_U$ entsprechende Bündel auf $\tilde{X}$-E ist nach dem eben Gezeigten gerade $S^{r-1}\Omega^1_{\tilde{X}-E} \simeq S^{r-1}(s^*F_{2,2b}(1))$. Es ist also $S^{r-1}(s^*F_{2,2b}(1)) \simeq s^*F_{r,br}(1)$ nachzuweisen.

---

*) Dieser Pol könnte durch den anderen Summanden $f(\zeta,\zeta^b\tau)$ nur dann weggehoben werden, wenn f(z,0) eine meromorphe Funktion auf E mit einem Pol erster Ordnung in $P \in E$ wäre. Solche Funktionen existieren nicht auf elliptischen Kurven.

Für jedes $r \geq 1$ gilt:

$$s^*F_{r,br}(1) \simeq s^*(F_{r,0}(1) \otimes \mathcal{O}_E(bP)) \simeq s^*F_{r,0}(1) \otimes s^*\mathcal{O}_E(bP)$$
$$\simeq s^*F_{r,0}(1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)|_{\tilde{X}-E} \simeq s^*F_{r,0}(1).$$

Daraus folgt:

$$S^{r-1}(s^*F_{2,2b}(1)) \simeq S^{r-1}(s^*F_{2,0}(1)) \simeq s^*(S^{r-1}F_{2,0}(1))$$

und nach [At₂, Theorem 9] ist $S^{r-1}F_{2,0}(1) \simeq F_{r,0}(1)$, woraus schließlich $S^{r-1}(s^*F_{2,2b}(1)) \simeq s^*F_{r,0}(1) \simeq s^*F_{r,br}(1)$ folgt, was zu zeigen war. ■

Wir werden im Anschluß an die Bestimmung der aus den reflexiven Moduln gebildeten Auslander-Reiten-Köcher noch eine weitere Eigenschaft der speziellen reflexiven Moduln D_r aus Proposition 5.24 angeben.

Auslander-Reiten-Köcher. Wir halten weiter daran fest, daß (X,x) eine einfach-elliptische Flächensingularität des Typs El(b) bezeichnet und $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,x)$ eine minimale Auflösung von (X,x) mit $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ ist, $P \in E$. Außerdem sei wieder $s: \tilde{X}-E \to E$ die Bündelprojektion von $\tilde{X}-E$ als $\mathbb{C}^*$-Bündel über der elliptischen Kurve E. Wir werden gelegentlich auch von den in 5.6 und 5.16 eingeführten Vektorraumbündeln $F_{r,d}(\lambda)$ und $F'_{r,d}(\lambda)$ auf E Gebrauch machen. Zusätzlich definieren wir:

Bezeichnung 5.25: Mit $M_{r,d}(\lambda)$ wird die Isomorphieklasse der im Sinne von Theorem 5.16 durch $R(M_{r,d}(\lambda)) = F'_{r,d}(\lambda)$ mit $r \geq 1$, $r \leq d < (b+1)r$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gekennzeichneten Moduln auf (X,x) bezeichnet.

(Um den Schreibaufwand gering zu halten, werden wir die Moduln aus der Klasse $M_{r,d}(\lambda)$ einfach wieder mit $M_{r,d}(\lambda)$ bezeichnen. Dies birgt keine Risiken, da wir uns stets nur für Isomorphietypen interessieren.)

Die Bestimmung der Auslander-Reiten-Sequenzen in der Kategorie $\mathcal{MCM}(X,x)$ der reflexiven $\mathcal{O}_X$-Moduln und damit auch des zugehörigen Auslander-Reiten-Köchers $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X)$ kann jetzt mit Hilfe der von Auslander definierten Fundamentalsequenzen (2.30) durchgeführt werden, wobei ein zum Beweis von 5.24 analoges Argument die Zurückführung auf die von Atiyah in [At₂] getroffenen Aussagen über die multiplikative $\otimes$-Struktur der unzerlegbaren Vektorraumbündel über elliptischen Kurven ermöglicht.

Theorem 5.26: Es sei (X,x) eine einfach-elliptische Singularität vom Typ El(b). Weiter sei (in den Bezeichnungen von 5.25) $M_{r',d'}(\lambda) \neq \mathcal{O}_X$ ein nicht-projektiver unzerlegbarer Modul aus $\mathcal{MCM}(X,x)$, d.h. es ist nicht $r'=1$, $d'=b$ und $\lambda=1$. Schreibt man $r'=hr$ und $d'=hd$ mit zueinander teilerfremden r und d und mit $h \geq 1$, so ist die in $M_{r',d'}(\lambda)$ endende Auslander-Reiten-Sequenz von $\mathcal{MCM}(X,x)$:

$$0 \to M_{hr,hd}(\lambda) \to M_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda) \oplus M_{(h-1)r,(h-1)d}(\lambda) \to M_{hr,hd}(\lambda) \to 0.$$

(Wenn $h=1$ ist, dann entfällt selbstverständlich der zweite Summand des Mittelterms.)

Insbesondere ist also die Auslander-Reiten-Translation in $\mathcal{MCM}(X,x)$ die Identität auf den Isomorphieklassen von unzerlegbaren nicht-projektiven Moduln. Dies hatten wir allerdings schon in 2.34(1) als eine Konsequenz aus der Gorenstein-Eigenschaft (5.3(5)) festgestellt.

Corollar 5.27: Der Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X)$ der reflexiven Moduln auf einer einfach-elliptischen Singularität (X,x) vom Typ El(b) zerfällt in abzählbar unendlich viele über $\mathrm{Pic}^\circ E$ parametrisierte Familien von Röhren vom Rang 1:

$$\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X) = \coprod_{r,d,\lambda} R_{r,d}(\lambda): \quad M_{r,d}(\lambda) \rightleftarrows M_{2r,2d}(\lambda) \rightleftarrows M_{3r,3d}(\lambda) \rightleftarrows \dots$$

wobei die Vereinigung über Tripel (r,d,λ) mit $r \geq 1$, $r \leq d < (b+1)r$, $(r,d)=1$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gebildet wird.

Bemerkung 5.28: Es gibt für jedes $r \geq 1$ genau $b \cdot \varphi(r)$ $\mathrm{Pic}^\circ E$-Familien von Rang-1-Röhren im Auslander-Reiten-Köcher einer Singularität vom Typ El(b), die mit einem Modul vom Rang r beginnen. (Dabei steht $\varphi(r)$ für die Eulersche φ-Funktion, die die Anzahl der zu r teilerfremden Zahlen in $1,2,\dots,r$ angibt.)

Beweis von Theorem 5.26: Nach 2.32 erhält man die in $M = M_{r',d'}(\lambda)$ endende Auslander-Reiten-Sequenz aus der Fundamentalsequenz (2.30)

$$0 \to \omega_X \to D \to \mathcal{O}_X \to \mathbb{C}_x \to 0$$

durch Tensorieren mit M und Bildung der reflexiven Hüllen:

$$0 \to (M \otimes \omega_X)^{\vee\vee} \to (M \otimes D)^{\vee\vee} \to M \to 0.$$

Hier ist (X,x) Gorensteinsch und quasihomogen (5.3), so daß $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ und $D \simeq (\Omega^1_X)^{\vee\vee}$ gilt (2.35), und die in M endende Auslander-Reiten-Sequenz die Form $0 \to M \to (M \otimes \Omega^1_X)^{\vee\vee} \to M \to 0$ annimmt.

Der Mittelterm $(M \otimes \Omega^1_X)^{\vee\vee}$ ist durch seine Einschränkung auf das punktierte Spektrum $U := X - \{x\}$ bestimmt, also durch das Bündel $M_U \otimes \Omega^1_U$, wobei M_U die Einschränkung von M auf U bezeichnet. Die zu M_U und Ω^1_U entsprechenden Bündel auf $\tilde{X}-E$ sind $s^*F_{r',d'}(\lambda)$ und $s^*F_{2,2b}(1) \simeq s^*F_{2,0}(1)$ (siehe 5.18, 5.24 und auch den Beweis von 5.24.) Damit kann das Tensorprodukt $M_U \otimes \Omega^1_U$ leicht auf $\tilde{X}-E$ wie folgt ausgerechnet werden (mit 5.8 und 5.9):

$$\begin{aligned} s^*F_{r',d'}(\lambda) \otimes s^*F_{2,0}(1) &\simeq s^*(F_{r',d'}(\lambda) \otimes F_{2,0}(1)) \\ &\simeq s^*(F_{r,d}(\lambda) \otimes F_{h,0}(1) \otimes F_{2,0}(1)) \\ &\simeq s^*(F_{r,d}(\lambda) \otimes (F_{h+1,0}(1) \oplus F_{h-1,0}(1))) \\ &\simeq s^*(F_{r,d}(\lambda) \otimes F_{h+1,0}(1)) \oplus s^*(F_{r,d}(\lambda) \otimes F_{h-1,0}(1)) \\ &\simeq s^*F_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda) \oplus s^*F_{(h-1)r,(h-1)d}(\lambda) \end{aligned}$$

Aus der Proposition 5.18 folgt jetzt

$$(M \otimes \Omega^1_X)^{\vee\vee} \simeq M_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda) \oplus M_{(h-1)r,(h-1)d}(\lambda).$$

Damit ist das Theorem 5.26 bewiesen. ∎

<u>Begründungen zu 5.27 und 5.28:</u> Das Corollar 5.27 ist eine triviale Konsequenz aus dem Theorem 5.26, das mit Hilfe von Satz 2.22 alle irreduziblen Morphismen liefert. (Die Anfangspfeile der Röhre $\mathcal{R}_{1,b}(1)$: $\mathcal{O}_X \rightleftarrows D \rightleftarrows \ldots$ erhält man aus 2.32 und den darauf folgenden Anmerkungen.) ⌋

Auch 5.28 folgt dann sofort aus 5.27, denn in dem Bereich $r \leq d < (b+1)r$ gibt es genau $b \cdot \varphi(r)$ zu r teilerfremde ganze Zahlen d. ∎

<u>5.29.</u> Wir geben noch zusätzlich eine heuristische Interpretation des Auslander-Reiten-Köchers $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X)$, die sich noch enger an die Proposition 5.18 anlehnt.

In der Kategorie der lokal freien Modulgarben auf einer elliptischen Kurve E kann analog zu Kapitel 2 ein Auslander-Reiten-Köcher definiert werden, der ebenso wie $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X)$ durch Auslander-Reiten-Sequenzen beschrieben werden kann. Nach [**AuRei₅**, Chapter II.3] (siehe auch 5.37 im Anhang zu diesem Kapitel) hat dieser Köcher das folgende Aussehen:

$$\coprod_{r,d,\lambda} F_{r,d}(\lambda) \rightleftarrows F_{2r,2d}(\lambda) \rightleftarrows F_{3r,3d}(\lambda) \rightleftarrows F_{4r,4d}(\lambda) \rightleftarrows \dots \qquad (*)$$

wobei die Vereinigung über alle Tripel (r,d,λ) mit $r \geqq 1$, $d \in \mathbb{Z}$ zu r teilerfremd und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gebildet wird.

Nun werde wieder $\tilde{X}$-E via $s: \tilde{X}\text{-}E \to E$ als ein $\mathbb{C}^*$-Bündel über E aufgefaßt. Die Anwendung von s^* auf den Köcher $(*)$, wobei die Bilder von zwei Punkten $F_{r,d}(\lambda)$ und $F_{r',d'}(\lambda')$ genau dann identifiziert werden, wenn $s^*F_{r,d}(\lambda) \simeq s^*F_{r',d'}(\lambda')$ gilt, ergibt den Köcher $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_X)$, der in dieser Weise als ein Quotient aus dem Auslander-Reiten-Köcher $(*)$ der Vektorraumbündel auf E entsteht.

(Tatsächlich gilt genau dann $s^*F_{r,d}(\lambda) \simeq s^*F_{r',d'}(\lambda')$, wenn für ein $\mu \in \mathbb{Z}$ gilt: $F_{r',d'}(\lambda') \simeq F_{r,d}(\lambda) \otimes \mathcal{O}_E(\mu bP)$, denn dann unterscheiden sich die trivialen Ausdehnungen dieser Bündel auf $\tilde{X}$ um einen Twist mit $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\mu E)$, der auf $\tilde{X}$-E trivial ist. Die Bilder der $F_{r,d}(\lambda)$ unter s^* können also etwa durch $r \leqq d < (b+1)r$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ indiziert werden.)

<u>5.30.</u> An den Auslander-Reiten-Köchern der reflexiven Moduln von El(b)-Singularitäten kann man leicht erkennen, daß es in den Kategorien von maximalen Cohen-Macaulay-Moduln im allgemeinen nicht möglich ist, beliebige Nichtisomorphismen zwischen unzerlegbaren Moduln als Linearkombinationen von Kompositionen irreduzibler Homomorphismen darzustellen: Es gibt zu jedem unzerlegbaren reflexiven $\mathcal{O}_X$-Modul M nichttriviale Homomorphismen von dem trivialen Modul $\mathcal{O}_X$ ausgehend in M hinein. Eine Faktorisierung über irreduzible Homomorphismen kann aber höchstens dann existieren, wenn M und $\mathcal{O}_X$ in ein und derselben Zusammenhangskomponente des Auslander-Reiten-Köchers liegen, was hier im graphentheoretischen Sinne zu verstehen ist. Für einen Homomorphismus $\mathcal{O}_X \to M$ von reflexiven Moduln über einer El(b)-Singularität bedeutet dies, daß M in der Röhre $\mathcal{R}_{1,b}(1)$ liegen muß, die genau aus den Isomorphieklassen der reflexiven Hüllen von allen symmetrischen Potenzen des Moduls Ω^1_X der Kähler-Differentiale besteht. (5.24, 5.27)

<u>**Orientierbare Moduln.**</u> In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf die Rolle ein, die die von Herzog und Kühl eingeführten orientierbaren Moduln bei den einfach-elliptischen Flächensingularitäten spielen.

Nach wie vor bezeichne (X,x) eine einfach-elliptische Singularität der Klasse $El(b)$; auch die übrigen Bezeichnungen aus den vorhergehenden Abschnitten werden beibehalten.

<u>Definition 5.31</u> (Herzog-Kühl, [**HeKü**]): Ein reflexiver $\mathcal{O}_X$-Modul M vom Rang r wird <u>orientierbar</u> genannt, wenn seine <u>Determinante</u> $\det M := (\Lambda^r M)^{\vee\vee}$ der triviale Modul $\mathcal{O}_X$ ist.

Wir beweisen zuerst eine einfache Formel für die Berechnung der Determinante und geben dann die unzerlegbaren orientierbaren Moduln auf den Singularitäten $El(b)$ an.

<u>Proposition 5.32:</u> Es sei (X,x) eine Singularität vom Typ $El(b)$. Dann gilt in den Bezeichnungen aus 5.25 für einen beliebigen unzerlegbaren reflexiven Modul $M_{r,d}(\lambda)$:

$$\det M_{r,d}(\lambda) \cong M_{1,d'}(\lambda^h),$$

mit $h:=(r,d)$ und $d' \equiv d \pmod b$ mit $1 \leq d' \leq b$.

<u>Beweis:</u> Die Einschränkung von $M_{r,d}(\lambda)$ auf das punktierte Spektrum ist, aufgefaßt als als Garbe auf $\tilde{X}-E \cong X-\{x\}$, nach 5.18 das Bündel $s^*F_{r,d}(\lambda)$. Auf $\tilde{X}-E$ kann die Determinante wieder leicht bestimmt werden, denn es gilt:

$$\Lambda^r(s^*F_{r,d}(\lambda)) \cong s^*(\Lambda^r F_{r,d}(\lambda)) \cong s^*F_{1,d}(\lambda^h)$$

nach [$\mathbf{At_2}$, Theorem 7] mit $h=(r,d)$. Damit ist dann auch für ein beliebiges $d' \equiv d \pmod b$: $\Lambda^r(s^*F_{r,d}(\lambda)) \cong s^*F_{1,d'}(\lambda^h)$. Wählt man etwa d' mit $1 \leq d' \leq b$, so entspricht das rechts stehende Bündel nach 5.18 der Einschränkung des Moduls $M_{1,d'}(\lambda^h)$ auf das punktierte Spektrum der Singularität. ∎

<u>Proposition 5.33:</u> Es sei (X,x) eine einfach-elliptische Singularität vom Typ $El(b)$. Dann sind die unzerlegbaren orientierbaren Moduln von (X,x) genau die Moduln $M_{r,d}(\lambda)$, für die $r \leq d < (b+1)r$ gilt, d ein Vielfaches von b ist, und $\lambda^h = 1$ für $h=(r,d)$ ist.

Insbesondere gibt es in jedem Rang $r \geq 1$ nur eine endliche Anzahl N_r von unzerlegbaren orientierbaren Moduln. Für die Zahl N_r gilt:

$$N_r = \sum_{k=0}^{r-1} (r,bk)^2, \qquad r^2 + r - 1 \leq N_r \leq r^3.$$

Beweis: Wegen 5.32 handelt es sich bei den unzerlegbaren orientierbaren Moduln $M_{r,d}(\lambda)$ genau um diejenigen, für die $\lambda^h = 1$ mit $h = (r,d)$ gilt und $d' = b$ ist, wobei d' wie in 5.32 definiert sei. Wegen $d' \equiv d \pmod b$ folgt, daß d ein Vielfaches von b sein muß, was zu zeigen war. $\lrcorner$

Die Anzahlformel ergibt sich daraus, daß es für einen gegebenen Rang $r \geq 1$ genau r verschiedene Grade im Bereich $r \leq d < (b+1)r$ gibt, die Vielfache von b sind, nämlich die Grade $d = b(n+1),\dots,b(n+r)$, wobei $n := [\frac{r-1}{b}]$ gesetzt wird. Für den Grad $d = b(n+k)$ gibt es nun für $h := (r,d) = (r,b(n+k))$ genau h^2 Punkte $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ mit $\lambda^h = 1$. An Stelle der Summation der $(r,b(n+k))$ über $k = 1,\dots,r$ kann man ebenso gut den Bereich $k = -n,\dots,-n+r-1$ durchlaufen, woraus die angegebene Formel für N_r folgt. $\lrcorner$

Die beiden Abschätzungen für N_r sind trivial: Für $k=0$ ist $(r,bk)^2 = r^2$ und alle Summanden für $k = 1,\dots,r-1$ haben zumindest den Betrag 1. Daraus erhält man die untere Schranke. Andererseits handelt es sich um r Summanden, für die jeweils $(r,bk)^2 \leq r^2$ gilt, so daß $N_r \leq r^3$ trivial ist. ∎

Wir bemerken abschließend, daß alle in 5.24 eingeführten speziellen Moduln $D_r = (S^{r-1}\Omega^1_X)^{\vee\vee}$, $r \geq 1$, orientierbar sind, weil $D_r = M_{r,br}(1)$ gilt. Es gehören also alle in der Röhre $\mathcal{R}_{1,b}(1)$ versammelten Isomorphietypen von Moduln zu den orientierbaren Moduln. Umgekehrt ist es allerdings nicht so, daß die unzerlegbaren orientierbaren Moduln stets volle Zusammenhangskomponenten (i.e. Röhren vom Rang 1) im Auslander-Reiten-Köcher ausmachen: Die Proposition 5.32 zeigt, daß etwa im Fall $b=2$ aus der Röhre $\mathcal{R}_{1,1}(1)$ gerade jeder zweite Punkt (mit geradem Rang) einen orientierbaren Modul repräsentiert.

Anhang über Vektorraumbündel auf elliptischen Kurven.

In diesem Anhang wird die von Atiyah angegebene Konstruktion von bijektiven Abbildungen $F_{r,d}$ von Pic° E in die Mengen $\mathcal{E}(r,d)$ von Isomorphieklassen unzerlegbarer holomorpher Vektorraumbündel vom Rang r und Grad d über einer elliptischen Kurve E erläutert. Daran anschließend werden eine von Bruguières vorgeschlagene alternative Konstruktion der Abbildungen $F_{r,d}$ und eine auf Oda zurückgehende geometrisch-konstruktive Realisierung aller unzerlegbaren Vektorraumbündel beschrieben. Der Anhang schließt mit Bemerkungen zu dem aus der Kategorie der Vektorraumbündel auf E hervorgehenden Auslander-Reiten-Köcher.

5.34. Die Atiyahsche Konstruktion der unzerlegbaren Vektorraumbündel auf einer elliptischen Kurve. (Nach [At_2, Part II].)

Diese Konstruktion wird von Atiyah in zwei Schritten geleistet. Zunächst werden zwei Reduktionen definiert, die die Ausführung eines Euklidischen Algorithmus auf dem Paar (r,d) aus Rang und Grad ermöglichen, wodurch für beliebige $r \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$ Isomorphien von $\mathcal{E}(r,d)$ und $\mathcal{E}(h,0)$ bestimmt werden, wobei $h := (r,d)$ der größte gemeinsame Teiler von r und d ist. Im zweiten Teil der Konstruktion werden die Mengen $\mathcal{E}(h,0)$ mit Pic° E identifiziert.

Die erste der Reduktionen für den Euklidischen Algorithmus besteht in den für jedes $r \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$ vorhandenen trivialen Isomorphismen

$$\mathcal{E}(r,d) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(r,d+r), \qquad F \mapsto F(P) = F \otimes \mathcal{O}_E(P).$$

(An dieser Stelle, und nur hier, geht also die vorherige Festlegung eines Basispunktes P von E in die Konstruktion ein.)

Als zweiter Teil der Definition eines Euklidischen Algorithmus werden die folgenden Isomorphismen definiert, wann immer $0 < d < r$ gilt:

$$\mathcal{E}(r,d) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(r-d,d).$$

Dazu sei ein beliebiges $F \in \mathcal{E}(r,d)$ vorgegeben, wobei $0 < d < r$ gelte. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt $s := h^0(E,F) \geq d$ und ein einfaches Argument in [At_2] zeigt, daß die globalen Schnitte ein triviales Unterbündel $s\mathcal{O}_E$ vom Rang s in F aufspannen. Dann ist der Cokern $F' := F/s\mathcal{O}_E$ ein Bündel vom Rang r-s und Grad d. Um $F' \in \mathcal{E}(r-d,d)$ zu zeigen, beachtet man, daß die Extension $0 \to s\mathcal{O}_E \to F \to F' \to 0$ bis auf Isomorphie eindeutig durch den Corand

$\delta: H^0(E, s\mathcal{O}_E) \to H^1(E, F'^{\vee})$ der dualen Sequenz bestimmt wird. Aus der Unzerlegbarkeit von F kann nun die Injektivität von δ geschlossen werden und daraus aus Dimensionsgründen, daß δ ein Isomorphismus ist, insbesondere also $s = d$ gilt. Man erhält aber auch die Unzerlegbarkeit von F', weil eine nichttriviale Zerlegung von F' eine entsprechende Zerlegung von δ in eine direkte Summe von Corandabbildungen und damit auch eine Zerlegung der Sequenz $0 \to F'^{\vee} \to F^{\vee} \to s\mathcal{O}_E \to 0$ in eine direkte Summe von Extensionen nach sich zöge.

Damit ist eine Abbildung $\mathcal{E}(r,d) \to \mathcal{E}(r-d,d)$ gefunden. Für deren Bijektivität ist eine Umkehrabbildung anzugeben, was aber leicht gelingt, indem man zu einem Bündel $F' \in \mathcal{E}(r-d,d)$ diejenigen Extensionen von F' durch ein triviales Bündel $d\mathcal{O}_E$ betrachtet, deren duale Corandabbildungen $\delta: H^0(E, d\mathcal{O}_E) \to H^1(E, F'^{\vee})$ Isomorphismen sind. Dann ist der Mittelterm einer solchen Extension ein Bündel vom Rang r und Grad d, dessen Unzerlegbarkeit wiederum aus der Bijektivität von δ geschlossen werden kann, und dessen Isomorphietyp überdies nicht von der Wahl des Isomorphismus δ abhängt.

Im zweiten Schritt der Konstruktion von Atiyah werden die Isomorphismen $\mathrm{Pic}^\circ E \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(h,0)$ für alle $h \in \mathbb{N}$ definiert. Dazu werden zunächst - analog zur oben beschriebenen Methode - unzerlegbare Bündel F_h vom Rang h und Grad 0 für alle $h \geq 1$ als sukzessive nichtspaltende Extensionen $0 \to \mathcal{O}_E \to F_{h+1} \to F_h \to 0$, beginnend mit $F_1 := \mathcal{O}_E$, konstruiert. (Dies sind genau die in 5.7 angesprochenen speziellen Bündel vom Grad 0.) Es ist dann eine einfache Bemerkung, daß durch $\lambda \mapsto F_h \otimes \lambda$ eine Bijektion von $\mathrm{Pic}^\circ E$ nach $\mathcal{E}(h,0)$ definiert wird. (Dazu werden für beliebige $F \in \mathcal{E}(h,0)$ deren Kompositionsreihen aus sukzessiven Untergeradenbündeln von jeweils maximal möglichem Grad betrachtet: Man erhält h-mal das selbe Geradenbündel L vom Grad 0, womit $F \cong F_h \otimes L$ folgt.)

Insgesamt ergeben sich so wohldefinierte Isomorphismen $F_{r,d}: \mathrm{Pic}^\circ E \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(r,d)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$, in deren Konstruktion nur die Vorgabe eines Basispunktes $P \in E$ eingegangen ist. (Die Abbildungen $F_{r,0}$ sind sogar unabhängig davon.) Die diversen Eigenschaften dieser Isomorphismen, die unter 5.6 aufgezählt worden sind, beweist man ohne Mühe parallel zu der Konstruktion der $F_{r,d}$, weil alle Bündel $F_{r,d}(\lambda)$ durch natürliche exakte Sequenzen mit λ verbunden sind.

Der Beweis der Tensorproduktformeln 5.8 und 5.9 und erst recht der weitergehenden Aussagen, die für 5.11 erforderlich sind, ist deutlich aufwendiger, weswegen hierzu auf [At_2, Part III] verwiesen sei.

5.35. Die Konstruktion von Bruguières. (Nach [**Bru**, Appendix A].)

Bei der von A. Bruguières angegebenen Beweismethode werden beide Schritte der Konstruktion modifiziert, was einerseits die Beweise vereinfacht und andererseits die Konstruktion sogar zu einer Klassifikation aller unzerlegbaren kohärenten Modulgarben auf E erweitert.

Dazu werden, ergänzend zu den bei Atiyah definierten $\mathcal{E}(r,d)$, die Mengen $\mathcal{E}(0,d)$ für alle $d \in \mathbb{N}$ als die aus den Isomorphieklassen der Torsionsgarben $\mathcal{O}_E/\mathcal{O}_E(-dQ)$, $Q \in E$, bestehenden Mengen definiert. Offenbar bestehen bijektive Beziehungen $\mathcal{E}(0,d) \simeq E \simeq \mathrm{Pic}^\circ E$. Weil E glatt und eindimensional ist, ist jede unzerlegbare Torsionsgarbe auf E von der Form $\mathcal{O}_E/\mathcal{O}_E(-dQ)$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und ein $Q \in E$. Außerdem ist jede unzerlegbare kohärente Garbe S auf E entweder eine Torsionsgarbe oder eine lokal freie Garbe, weil die durch die Torsionsuntergarbe T von S definierte Sequenz $0 \to T \to S \to S/T \to 0$ wegen $\mathrm{Ext}^1(S/T,T) = 0$ spaltet.

Bruguières definiert nun neben den trivialen Identifizierungen

$$\mathcal{E}(r,d) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(r,d+r), \quad F \mapsto F(P), \quad \text{für } r \geq 1 \text{ und } d \in \mathbb{Z},$$

neue Isomorphismen

$$P\colon \mathcal{E}(r,d) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}(d-r,d) \quad \text{für } d > r,$$

die die Abbildungen $\mathcal{E}(r,d) \to \mathcal{E}(r-d,d)$ von Atiyah ersetzen. (Dabei soll der Fall $r = 0$ eingeschlossen sein!) Es sei also $F \in \mathcal{E}(r,d)$ mit $d > r$ vorgegeben. Wegen $d > r$ wird F von globalen Schnitten erzeugt (vgl. 5.15). Dann wird P(F) als das Dual des (lokal freien) Kernes der natürlichen Auswertungsabbildung ev: $H^0(E,F) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_E \to F$ definiert, so daß man eine exakte Sequenz

$$0 \to P(F)^{\vee} \to H^0(E,F) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_E \to F \to 0$$

erhält. Weil $h^0(E,F) = d$ gilt, hat P(F) den Rang $d-r$ und den Grad d. Nach Bruguières ist P(F) wieder unzerlegbar. Auch die inverse Abbildung zu P ist leicht anzugeben: Ist nämlich $F' \in \mathcal{E}(d-r,d)$ mit $d > r$, so ist wieder die Auswertungsabbildung ev: $H^0(E,F') \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_E \to F'$ surjektiv und durch Dualisieren folgt

$$0 \to F'^{\vee} \to H^0(E,F') \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_E \to F \to 0.$$

Man verifiziert ohne Mühe, daß $P(F) \simeq F'$ gilt.

Mit den beiden oben eingeführten Reduktionen kann man jetzt wieder einen Euklidischen Algorithmus auf dem Paar (r,d) durchlaufen, wodurch für jedes $r \geq 1$ zunächst $\mathcal{E}(r,d)$ bijektiv zu $\mathcal{E}(h,h)$ in Beziehung gebracht wird, wobei h der größte gemeinsame Teiler von r und d sei. Dies entspricht dem ersten Teil der Konstruktion von Atiyah.

Für die Identifikation von $\mathcal{E}(h,h)$ mit $\mathrm{Pic}^\circ E$ ist nach Bruguières aber kein zusätzlicher Aufwand mehr erforderlich, denn man verfügt auch über Bijektionen $\mathcal{E}(0,h) \xrightarrow{\approx} \mathcal{E}(h,h)$ vom Typ der oben definierten Abbildung P und $\mathcal{E}(0,h) \simeq \mathrm{Pic}^\circ E$ ist klar.

(Bruguières erweitert diese Konstruktion noch zur Herstellung universeller Bündel für $\mathcal{E}(r,d)$ über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E$, was dann möglich ist, wenn r und d teilerfremd sind. Dies wurde aber schon früher von Oda geleistet; siehe unten.)

5.36. Die geometrische Konstruktion von Oda. (Nach [Od].)

Der von T. Oda beschriebene Zugang zur Realisierung der unzerlegbaren Vektorraumbündel auf einer elliptischen Kurve E ist weniger gut dazu geeignet, den Klassifikationssatz 5.6 zu beweisen, gewährt dafür aber einen tieferen Einblick in die Geometrie der unzerlegbaren Bündel auf E.

Dazu sei E' eine zweite elliptische Kurve und $\varphi: E' \to E$ eine Isogenie vom Grad r (d.h.: φ ist étale vom Grad r), sowie L ein Geradenbündel über E' vom Grad $d \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\varphi_* L$ ein Vektorraumbündel vom Rang r und Grad d über E. Natürlich wird $\varphi_* L$ im allgemeinen nicht unzerlegbar sein. Sind aber d und r teilerfremd, so zeigt eine einfache Berechnung, daß $\mathrm{End}_E(\varphi_* L) \simeq \mathbb{C}$ gilt, also $\varphi_* L$ unzerlegbar ist. ([**Od**, Theorem 1.2(i)]) Läßt man den Punkt $Q \in E'$ in $L \simeq \mathcal{O}_{E'}(dQ)$ variieren, so erhält man in dieser Weise bei einer fest gewählten Isogenie φ alle Elemente von $\mathcal{E}(r,d)$ für r,d teilerfremd, wobei allerdings jedes Bündel genau r-mal auftritt.

Diese Bemerkung verwendet Oda zur Konstruktion von universellen Vektorraumbündeln für $\mathcal{E}(r,d)$ über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E$, wenn $(r,d) = 1$ gilt. Man bildet hierzu $E' \times \mathrm{Pic}^\circ E'$, bezeichnet die Projektion auf den ersten Faktor mit p und betrachtet das Poincaré-Geradenbündel $\mathcal{P}$ über $E' \times \mathrm{Pic}^\circ E'$, also die universelle Familie der Geradenbündel vom Grad 0 über E' (vgl. [**PAG**, p. 328]). Dann ist mit L wie oben $\mathcal{L} := p^* L \otimes \mathcal{P}$ ein Geradenbündel über $E' \times \mathrm{Pic}^\circ E'$ und durch

$\mathcal{F}' := (\varphi \times \mathrm{id})_* \mathcal{L}$ wird ein Vektorraumbündel über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E'$ definiert, das die Eigenschaft besitzt, daß jedes Bündel $F \in \mathcal{E}(r,d)$ für genau r Werte $\lambda' \in \mathrm{Pic}^\circ E'$ in der Form $\mathcal{F}'|_{E \times \{\lambda'\}}$ geschrieben werden kann. Dividiert man aus $\mathrm{Pic}^\circ E'$ eine geeignete Untergruppe vom Grad r heraus - dies entspricht gerade der Anwendung der Isogenie φ unter den basispunktabhängigen Identifizierungen $E' \simeq \mathrm{Pic}^\circ E'$ und $E \simeq \mathrm{Pic}^\circ E$ -, so erhält man schließlich ein universelles Bündel $\mathcal{F}$ über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E$ für $\mathcal{E}(r,d)$ unter der Voraussetzung der Teilerfremdheit von r und d.

Mit Hilfe des eben konstruierten universellen Bündels $\mathcal{F}$ über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E$ für $\mathcal{E}(r,d)$ mit $(r,d)=1$ können auch die unzerlegbaren Vektorraumbündel F aus $\mathcal{E}(hr,hd)$ für alle $h \geq 1$ leicht beschrieben werden. Für diesen Zweck sei $Y \simeq \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[y]/(y^h)$ ein einpunktiges abgeschlossenes Unterschema von $\mathrm{Pic}^\circ E$, also $Y \subset \mathrm{Pic}^\circ E$ mit $Y_{\mathrm{red}} = \{\lambda\}$, $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$. Dann ist $\mathcal{F}|_{E \times Y}$ eine lokal freie Garbe vom Rang r über $E \times Y$, die via $\mathcal{O}_E \simeq \mathcal{O}_{E \times \{\lambda\}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{E \times Y}$ auch als Vektorraumbündel vom Rang hr (und Grad hd) über E angesehen werden kann. Dieses Bündel ist unzerlegbar, wie wiederum die Berechnung der Endomorphismenalgebra zeigt, und jedes Element aus $\mathcal{E}(hr,hd)$ kann in dieser Weise realisiert werden, weil $\mathcal{F}|_{E \times Y} \simeq \mathcal{F}|_{E \times \{\lambda\}} \otimes_{\mathcal{O}_E} F_h$ gilt (vgl. 5.8).

Es ist ein bemerkenswertes Corollar zu dieser Konstruktion, daß die in 5.7 betrachteten speziellen Bündel vom Rang r und Grad 0 als die infinitesimalen Umgebungen des trivialen Bündels $\mathcal{O}_E \simeq \mathcal{P}|_{E \times \{1\}}$ im Poincaré-Bündel $\mathcal{P}$ über $E \times \mathrm{Pic}^\circ E$ interpretiert werden können.

5.37. Auslander-Reiten-Köcher.

Nach Atiyah ([**At₁**]) gilt für die Vektorraumbündel über einer glatten projektiven Kurve E ein Krull-Schmidt-Theorem, wie es in 4.3 zitiert wurde. Weil zu je zwei Vektorraumbündeln F und G über E die Mengen $\mathrm{rad}^2(F,G) \subset \mathrm{rad}(F,G) \subset \mathrm{Hom}(F,G)$ wie in 2.17 definiert werden können, verfügt man über einen wörtlich wie in 2.18 gebildeten Auslander-Reiten-Köcher $\mathcal{AR}(E)$ der Vektorraumbündel über E. Mit wie in 2.20 erklärten Auslander-Reiten-Sequenzen gelten auch die Sätze 2.21 und 2.22 entsprechend in dieser Kategorie. Nach einem nicht publizierten Ergebnis von A. Schofield, für das Auslander und Reiten in [**AuRei₃**, Chapter II] einen unter allgemeineren Annahmen gültigen Beweis gegeben haben, gilt auch ein Äquivalent von Satz

2.23 in der Kategorie der Vektorraumbündel über E, so daß der Köcher $\mathcal{AR}(E)$ vollständig aus den Auslander-Reiten-Sequenzen abgeleitet werden kann.

Ist nun E speziell wieder eine glatte elliptische Kurve, so können die Auslander-Reiten-Sequenzen etwa nach [**AuRei₅**, Corollary II.3.7] leicht bestimmt werden, wobei wieder die Tensorproduktformeln 5.8 und 5.9 von Atiyah Eingang finden. Man erhält $\mathcal{AR}(E)$ so als eine disjunkte Vereinigung von Röhren vom Rang 1:

$$\mathcal{AR}(E) = \coprod_{r,d,\lambda} F_{r,d}(\lambda) \rightleftarrows F_{2r,2d}(\lambda) \rightleftarrows F_{3r,3d}(\lambda) \rightleftarrows F_{4r,4d}(\lambda) \rightleftarrows \ldots$$

wobei die Vereinigung über alle Tripel $(r,d,\lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathrm{Pic}^{\circ} E$ mit zueinander teilerfremden r und d gebildet wird.

Dieses Beispiel illustriert auf sehr einfache Weise, daß sich nichttriviale Homomorphismen zwischen unzerlegbaren Objekten gewöhnlich nicht als Linearkombinationen von Kompositionen irreduzibler Homomorphismen (i.e. Pfeilen im Auslander-Reiten-Köcher) repräsentieren lassen. Wegen

$$\mathrm{Hom}_E(F_{r,d}(\lambda), F_{r',d'}(\lambda')) \simeq H^0(E, F_{r,-d}(\lambda^{\vee}) \otimes F_{r',d'}(\lambda'))$$

existieren nämlich nach 5.11 und 5.6(iv) nichttriviale Homomorphismen von $F_{r,d}(\lambda)$ nach $F_{r',d'}(\lambda')$ immer dann, wenn $\frac{d'}{r'} > \frac{d}{r}$ gilt. Alle irreduziblen Homomorphismen haben hingegen die Eigenschaft, daß $\frac{d'}{r'} = \frac{d}{r}$ gilt, was dann auch für beliebige Hintereinanderausführungen richtig ist.

6. ASSOZIIERTE VEKTORRAUMBÜNDEL AUF DEN UMGEBUNGEN VON EINFACH-ELLIPTISCHEN SINGULARITÄTEN.

Auch in diesem Kapitel sei $\tilde{X}$ wieder die minimale Auflösung einer einfach-elliptischen Flächensingularität (X,x) vom Typ $El(b)$, $b \geq 1$. Dann ist $\tilde{X}$ isomorph zum Totalraum eines negativen Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$, $P \in E$, über einer glatten elliptischen Kurve E.

In diesem Kapitel sollen die Beziehungen, die zwischen den Vektorraumbündeln auf dem punktierten Spektrum $\tilde{X}-E \simeq X-\{x\}$, die ja nach 2.14 bijektiv bis auf Isomorphie den reflexiven Moduln auf (X,x) entsprechen, und den endlichdimensionalen Darstellungen der Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}-E)$ bestehen, herausgearbeitet werden. Zu jeder Darstellung $\rho: \pi_1(\tilde{X}-E) \to GL_r(\mathbb{C})$ ist ein Vektorraumbündel F_ρ auf $\tilde{X}-E$ assoziiert (s.u.), das durch ρ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Es ist bekannt, daß ein Vektorraumbündel F auf $\tilde{X}-E$ genau dann zu einer Darstellung von $\pi_1(\tilde{X}-E)$ assoziiert ist, wenn es in F einen integrablen holomorphen Zusammenhang $\nabla: F \to F \otimes \Omega^1_{\tilde{X}-E}$ gibt ([**At$_3$**, Proposition 14]). Die Isomorphieklassen von endlichdimensionalen Darstellungen ρ von $\pi_1(\tilde{X}-E)$ bezüglich Konjugation stehen in bijektiver Korrespondenz zu den Isomorphieklassen der Paare (F,∇) aus holomorphen Vektorraumbündeln F auf $\tilde{X}-E$ und integrablen holomorphen Zusammenhängen ∇ (in F), wobei $(F,\nabla) \simeq (F',\nabla')$ genau dann gilt, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: F \xrightarrow{\simeq} F'$ mit $\varphi^*(\nabla') = \nabla$ gibt. (Dies ist die sogenannte Riemann-Hilbert-Korrespondenz.)

Bei einer zweidimensionalen Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/G,0)$ nach einer endlichen Untergruppe $G \subset GL_2(\mathbb{C})$ ist, wie Herzog in [**He**] gezeigt hat, die Einschränkung jedes reflexiven Moduls auf $\mathbb{C}^2/G-\{0\}$ das assoziierte Vektorraumbündel einer Darstellung von $\pi_1(\mathbb{C}^2/G-\{0\}) \simeq G$. Tatsächlich stehen die Isomorphieklassen der unzerlegbaren reflexiven Moduln dadurch sogar in Bijektion zu den Konjugationsklassen der irreduziblen (i.e. unzerlegbaren) Darstellungen von G.

Es liegt daher sehr nahe, im Falle der einfach-elliptischen Singularitäten nach Antworten auf die folgenden beiden Fragen zu suchen: Ist die Einschränkung einer reflexiven Modulgarbe M auf $X-\{x\} \simeq \tilde{X}-E$ stets als Vektorraumbündel zu einer Darstellung von $\pi_1(\tilde{X}-E)$ assoziiert, gibt es also einen integrablen holomorphen Zusammenhang in $M|_{X-\{x\}}$? Und falls dies der Fall ist: Gibt es wiederum eine bijektive Korrespondenz zwischen den unzerlegbaren endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\pi_1(\tilde{X}-E)$ bis auf Konjugation und den Isomorphieklassen der unzerlegbaren Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$?

Die erste Frage wird in der ersten Hälfte dieses Kapitels ohne Einschränkung positiv beantwortet werden, indem zu jedem wie in 5.19 beschriebenen unzerlegbaren Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ eine Darstellung von $\pi_1(\tilde{X}-E)$ angegeben wird, zu der dieses Bündel assoziiert ist.

Die Beantwortung der zweiten Frage ist erheblich delikater und wird den zweiten Teil dieses Kapitels einnehmen. Zunächst einmal stellt die Aufgabe der Klassifikation aller unzerlegbaren endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe $\pi_1(\tilde{X}-E)$, wie noch ausgeführt wird, ein sogenanntes "wildes" Problem dar, dessen Lösung die notorisch unerreichbare Klassifikation von Paaren quadratischer Matrizen bis auf simultane Konjugation einschlösse. Als eine einfache Konsequenz daraus erhält man die Existenz von Familien paarweise nicht isomorpher unzerlegbarer Darstellungen, die von beliebig vielen Parametern kontinuierlich abhängen, weil diese Erscheinung bei Paaren von Matrizen unter simultaner Konjugation auftritt. Weil es jedoch nach 5.19 nur 1-Parameter-Familien von unzerlegbaren holomorphen Vektorraumbündeln auf $\tilde{X}-E$ gibt, ist schon von daher eine Bejahung der zweiten oben aufgeworfenen Frage ausgeschlossen.

Überraschenderweise ergibt sich jedoch, daß, wenn man nach denjenigen Darstellungen von $\pi_1(\tilde{X}-E)$ fragt, zu denen ein fest vorgegebenes unzerlegbares Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ assoziiert ist, in jedem Fall eine komplette Klassifikation der Darstellungen bis auf Konjugation einschließlich der Beschreibung der Topologien der zugehörigen Modulräume erreichbar ist. Dies zeigt, daß die Bedingung der Unzerlegbarkeit des assoziierten Vektorraumbündels auf $\tilde{X}-E$ eine äußerst starke Einschränkung darstellt, die zumindest einen Teil der mit wilden Problemen einhergehenden Pathologien ausschließt.

(Am Ende des Kapitels befindet sich ein Anhang, in dem einige dazu erforderliche Ergebnisse von N. McCoy aus dem Jahre 1934 über die Struktur von Matrizenpaaren, die mit ihrem Kommutator kommutieren, mit Beweisen in modernerer Sprache zusammengestellt werden.)

Lokale Fundamentalgruppen. Für eine beliebige normale Flächensingularität (X,x) ist deren lokale Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x)$ definiert als die Fundamentalgruppe des Durchschnittes von $X-\{x\} \subset \mathbb{C}^N-\{0\}$ mit einer Kugel B_ε um 0 vom Radius $\varepsilon>0$ für ε hinreichend klein. Wegen der lokalen Kegelförmigkeit komplexer Räume hängt die so definierte Gruppe nicht von der Wahl eines hinreichend kleinen $\varepsilon>0$ ab. Auf Grund der Normalität von X ist außerdem $X-\{x\}$ zusammenhängend, so daß zu der Definition von $\pi_1(X,x)$ als abstrakter Gruppe die Angabe eines Basispunktes nicht erforderlich ist. (Vgl. [**Pr**, Chapter II.B].)

Ist zusätzlich $(\tilde{X},E)$ eine gute Auflösung von (X,x), so kann $\pi_1(X,x)$ nach Mumford ([**Mu**], siehe auch [**Hi**]) mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(U-E)$ des Komplementes von E in einer Tubenumgebung U von E in $\tilde{X}$ identifiziert werden.

Das zeigt, daß für die minimale Auflösung $(\tilde{X},E)$ einer einfach-elliptischen Flächensingularität die schon eingangs dieses Kapitels betrachtete Gruppe $\pi_1(\tilde{X}-E)$ gerade die lokale Fundamentalgruppe der Singularität ist. Bevor wir diese Gruppe bestimmen, fixieren wir die folgende Situation, die für den ganzen Rest des Kapitels gültig bleiben soll.

Voraussetzung **6.1:** $\tilde{X}$ sei der Totalraum eines Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$ über einer glatten elliptischen Kurve E, $P\in E$ und $b\geq 1$. Die als Nullschnitt in $\tilde{X}$ eingebettete elliptische Kurve E sei in der Form $E \simeq \mathbb{C}/\Omega$ gegeben, wobei $\Omega = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\omega$ ein normalisiertes Gitter vom Rang 2 in $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\omega>0$ sei, das auf $\mathbb{C}$ durch Parallelverschiebung operiert. Wir werden $\pi_1(E)$ mit Ω identifizieren.

Proposition / Definition **6.2:** Die lokale Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}-E)$ einer einfach-elliptischen Flächensingularität vom Typ El(b) wird von drei Elementen α, β und γ erzeugt, die den folgenden definierenden Relationen* genügen:

$$[\alpha,\gamma] = 1, \quad [\beta,\gamma] = 1 \quad \text{und} \quad [\alpha,\beta] = \gamma^b.$$

Eine in dieser Form präsentierte Gruppe wird als eine diskrete Heisenberg-Gruppe H_b $(b\geq 1)$ bezeichnet.

---

*) Mit den Kommutatoren $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

Beweis: $\tilde{X}-E$ ist ein $\mathbb{C}^*$-Faserbündel über E. Es gibt also eine exakte Sequenz

$$1 \to \pi_1(\mathbb{C}^*) \to \pi_1(\tilde{X}-E) \to \pi_1(E) \to 1,$$

die $\pi_1(\tilde{X}-E)$ als Erweiterung von $\pi_1(E)=\Omega$ durch $\pi_1(\mathbb{C}^*)\simeq\mathbb{Z}$ beschreibt. α und β seien Liftungen der Erzeugenden 1 und ω von Ω nach $\pi_1(\tilde{X}-E)$ und γ sei das Bild eines Generators von $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ in $\pi_1(\tilde{X}-E)$. Damit wird $\pi_1(\tilde{X}-E)$ von α, β und γ erzeugt und es bestehen triviale Kommutatorrelationen $[\alpha,\gamma]=1$ und $[\beta,\gamma]=1$. Die im wesentlichen einzige weitere Relation in $\pi_1(\tilde{X}-E)$ muß dann von der Form $[\alpha,\beta]=\gamma^n$ sein, weil alle Relationen in $\pi_1(E)$ aus $[1,\omega]=0$ hervorgehen. Den Exponenten n kann man in der Homologie von $\tilde{X}-E$ bestimmen: Aus $[\alpha,\beta]=\gamma^n$ in $\pi_1(\tilde{X}-E)$ folgt $n\cdot\bar{\gamma}=0$ in $H_1(\tilde{X}-E;\mathbb{Z})$, wobei $\bar{\gamma}$ das Bild von $\gamma\in\pi_1(\mathbb{C}^*)\simeq H_1(\mathbb{C}^*;\mathbb{Z})$ bezeichne. Nach Mumford ([Mu]) ist $H_1(\tilde{X}-E;\mathbb{Z})\simeq H_1(E;\mathbb{Z})\oplus K$, wobei K eine von $\bar{\gamma}$ erzeugte endliche zyklische Gruppe der Ordnung b ist. Bei geeignet gewählter Orientierung von γ kann also $n=b$ angenommen werden. ∎

Bemerkung 6.3: Weil die definierenden Relationen von H_b es gestatten, jedes Element von H_b eindeutig in der Form $\alpha^x\beta^y\gamma^z$ zu schreiben, ist H_b als Menge bijektiv zu $\mathbb{Z}^3$ äquivalent, wobei die Gruppenstruktur auf $\mathbb{Z}^3$ durch die Verknüpfung

$$(x,y,z)*(x',y',z') = (x+x',\ y+y',\ z+z'+bxy')$$

realisiert wird.

H_b kann auch in den ganzzahligen 3×3-Matrizen mit deren Multiplikation realisiert werden, indem das Element $\alpha^x\beta^y\gamma^z$ für $x,y,z\in\mathbb{Z}$ mit der folgenden Matrix identifiziert wird:

$$\begin{bmatrix} 1 & bx & bz \\ & 1 & by \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Universelle Überlagerungen. In diesem Abschnitt wird die universelle Überlagerung von $\tilde{X}-E$ unter expliziter Angabe einer holomorphen Galoisoperation der Fundamentalgruppe $H_b\simeq\pi_1(\tilde{X}-E)$ bestimmt.

Es sei $p:\mathbb{C}\to E$ die Projektion modulo Ω, also zugleich eine universelle Überlagerung von E, und $L:=\mathcal{O}_E(-bP)$ dasjenige Geradenbündel, für das $\tilde{X}=|L|$ ist, wobei man zweckmäßigerweise (s.u.) die Projektion p so wählt, daß der Punkt $P\in E$ der Nebenklasse $\frac{1}{2}+\Omega$ entspricht. Dann ist p^*L wegen $\operatorname{Pic}\mathbb{C}=1$

ein triviales Geradenbündel über $\mathbb{C}$. Nach der Festlegung einer expliziten Trivialisierung kann dessen Totalraum mit $\mathbb{C}_{\text{Basis}} \times \mathbb{C}_{\text{Faser}}$ identifiziert werden, worauf Ω in einer mit der Operation auf $\mathbb{C}_{\text{Basis}}$ verträglichen Weise operiert.

Lemma 6.4: Es gibt eine Trivialisierung von p^*L derart, daß Ω auf $|p^*L| \simeq \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ folgendermaßen für $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ operiert:

$$\begin{aligned} 1:&\quad (z,\tau) \mapsto (z+1,\tau) \\ \omega:&\quad (z,\tau) \mapsto (z+\omega, e^{2\pi i b z}\tau) \end{aligned}$$

Beweis: Weil eine derartige Ω-Aktion auf $\mathbb{C}^2$ durch Quotientenbildung ein Geradenbündel auf E bestimmt, ist nur die Existenz eines meromorphen Schnittes mit Divisor -bP darin nachzuweisen, also eines Schnittes mit P als b-facher Polstelle und ohne Nullstellen.

Aus der klassischen Theorie der Thetafunktionen ist bekannt, daß der Vektorraum der ganzen holomorphen Funktionen $f(z)$, die für alle $z\in\mathbb{C}$ den Beziehungen

$$f(z+1) = -f(z) \qquad \text{und} \qquad f(z+\omega) = e^{-(\pi i\omega + 2\pi i z)} f(z)$$

genügen, eindimensional ist und von der Riemannschen Thetafunktion erster Ordnung

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n-\frac{1}{2})^2\omega} e^{2\pi i (n-\frac{1}{2})z}$$

erzeugt wird, die einfache Nullstellen genau in den Punkten $\frac{1}{2}+m+n\omega$, $m,n\in\mathbb{Z}$ aufweist. (Siehe hierzu etwa [**FT**, II, Kapitel 2, §§2-8]: ϑ wird dort als ϑ_2 bezeichnet. Häufig findet man auch die Bezeichnung $\vartheta[{}^1_0]$.) Dann genügt die durch

$$h(z) := e^{-\pi i b z}\vartheta(z)^{-b} \qquad \text{für } z\in\mathbb{C}$$

definierte meromorphe Funktion den Transformationsbeziehungen $h(z+1) = h(z)$ und $h(z+\omega) = e^{2\pi i b z} h(z)$ und definiert folglich einen meromorphen Schnitt in dem Geradenbündel $\mathbb{C}^2/\Omega$ über E, dessen Divisor -bP ist. ∎

Mit Lemma 6.4 erhalten wir ein Ω-äquivariantes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{p} & E \end{array}$$

Mit $\tilde{X}$-E als in $\tilde{X}$ eingebettetem $\mathbb{C}^*$-Faserbündel erhält man daraus durch Einschränkung das Ω-äquivariante Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d] & \tilde{X}\text{-}E \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "p"] & E \end{tikzcd}$$

Dabei übernimmt $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ die in Lemma 6.4 angegebene Ω-Aktion, nun jedoch für $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

Selbstverständlich ist $\hat{p}\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* \to \tilde{X}$-E eine Überlagerung. Von hier aus gelangt man zu einer universellen Überlagerung von $\tilde{X}$-E durch Davorschalten der Exponentialabbildung

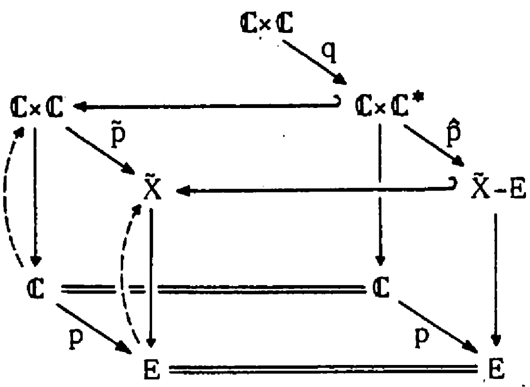
$$q\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, \qquad q(z,t) := (z,e^{2\pi it}).$$

Die Galoisgruppe der Überlagerung q ist zu $\mathbb{Z}$ isomorph und man kann ein Erzeugendes γ dieser Gruppe und Liftungen α und β der Operationen von 1 und ω auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ so wählen, daß sich aus Lemma 6.4 die folgende Aussage ergibt.

<u>Proposition 6.5:</u> $\tilde{X}$-E besitzt eine universelle Überlagerung durch den Raum $\mathbb{C}^2$, worauf $H_b \simeq \pi_1(\tilde{X}\text{-}E)$ als Decktransformationsgruppe durch ihre Erzeugenden α,β,γ (wie in 6.2) in der folgenden Weise wirkt $((z,t)\in\mathbb{C}^2)$:

$$\alpha\colon\ (z,t) \mapsto (z+1,t)$$
$$\beta\colon\ (z,t) \mapsto (z+\omega,t+bz)$$
$$\gamma\colon\ (z,t) \mapsto (z,t-1)$$

<u>6.6.</u> Wir haben alles in allem das folgende große kommutative Diagramm konstruiert, das die universellen Überlagerungen von E, $\tilde{X}$ und $\tilde{X}$-E zueinander in Beziehung bringt:



<u>Legende:</u>

- Einbettungen von $\mathbb{C}^*$-Bündeln in Geradenbündel;
- Bündel-Projektionen;
- Einbettungen als Nullschnitte;
- Überlagerungen.

Thetafaktoren. Wir betrachten in diesem Abschnitt vorübergehend die allgemeinere Situation einer glatten Varietät M, die Quotient einer komplexen Mannigfaltigkeit V nach einer Gruppe G von holomorphen Transformationen von V, die eigentlich diskontinuierlich operiert ([Ca]), ist. Dann kann man versuchen, die Vektorraumbündel auf M durch deren inverse Bilder hinsichtlich der kanonischen Projektion $\varphi: V \to M$ modulo G zu beschreiben. Das ist dann besonders erfolgversprechend, wenn V selbst (bis auf Isomorphie) nur triviale Vektorraumbündel zuläßt, wie es etwa für $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^*$ und auch $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ der Fall ist. (Für $\mathbb{C}^*$ steht dies etwa in [**GraRe**], für $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ folgt es daraus.)

V besitze jetzt diese Eigenschaft und F sei ein beliebiges Vektorraumbündel vom Rang r über M. Dann ist φ^*F ein triviales Bündel auf V und nach der Wahl einer globalen Trivialisierung $r\mathcal{O}_V \xrightarrow{\cong} \varphi^*F$ kann der Totalraum von φ^*F mit $V\times\mathbb{C}^r$ identifiziert werden. Die natürliche G-Operation auf φ^*V wirkt nun auf $V\times\mathbb{C}^r$ derart, daß sie in der ersten Komponente die Operation von G auf V reproduziert und zugleich in der zweiten Komponente linear, aber abhängig von der Basiskoordinate, wirkt. Sie kann also für jedes $g\in G$ in der Form

$$g: \quad (v,\xi) \mapsto (g(v), J(g,v)\cdot\xi) \qquad \text{für } v\in V,\ \xi\in\mathbb{C}^r$$

ausgedrückt werden, wobei $J: G\times V \to GL_r(\mathbb{C})$ eine Abbildung ist, für die gilt:

(i) $J(g,\cdot)$ ist holomorph auf V für jedes $g\in G$;

(ii) $J(gg',v) = J(g,g'(v))\cdot J(g',v)$ für alle $g,g'\in G$ und $v\in V$.

Definition 6.7: Es sei V eine G-Varietät. Eine Abbildung $J: G\times V \to GL_r(\mathbb{C})$ wird als Thetafaktor* bezeichnet, wenn sie den beiden vorstehenden Bedingungen (i) und (ii) genügt.

Thetafaktoren wurden von Morimoto, Matsushima und anderen (siehe [**Mo**], [**Ma**] und die dort zitierten Arbeiten) zur Beschreibung von Vektorraumbündeln auf komplexen Tori herangezogen. Für den Fall einer Riemannschen Fläche M und ihrer Uniformisierung V ist diese Idee aber schon bei Weil in [**We**] angelegt.

Ein Thetafaktor vom Rang r über V beschreibt eine G-Aktion auf $V\times\mathbb{C}^r$. Ist der Thetafaktor durch Pull-back bezüglich $\varphi: V\to M$ aus einem Vektorraumbündel F auf M hervorgegangen, so erhält man durch Herausdividieren der

*) Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind (verallg.) Automorphiefaktor oder 'matrix multiplier.'

dadurch definierten Operation das Bündel F zurück. Umgekehrt definiert aber auch jeder Thetafaktor in dieser Weise ein Vektorraumbündel vom selben Rang über M.

<u>Bemerkung 6.8:</u> Alle natürlichen Operationen mit Vektorraumbündeln (direkte Summen, Tensorprodukte, äußere Potenzen, Determinantenbündel, Homomorphismenbündel, duale Bündel) übertragen sich wörtlich in die entsprechenden Operationen auf den zugehörigen Thetafaktoren. Insbesondere entspricht der Bildung des Endomorphismenbündels eines Vektorraumbündels vom Rang r die adjungierte Operation des zugehörigen Thetafaktors auf den $r\times r$-Matrizen.

Assoziierte Vektorraumbündel.

<u>Definition 6.9:</u> Es sei V eine G-Varietät und $M = V/G$ glatt. Ist $\rho: G \to GL_r(\mathbb{C})$ eine endlichdimensionale Darstellung von G, so wird durch $J_\rho(g,v) := \rho(g)$ für $g \in G$ und $v \in V$ ein Thetafaktor vom Rang r auf V definiert. Das durch J_ρ bestimmte Vektorraumbündel F_ρ vom Rang r auf M wird das zu ρ <u>assoziierte Vektorraumbündel</u> genannt.

(Offensichtlich geben zwei zueinander konjugierte Darstellungen zu isomorphen assoziierten Bündeln Anlaß, so daß die Isomorphieklasse von F_ρ schon durch die Konjugationsklasse von ρ bestimmt wird.)

Wir kehren jetzt zu der Situation von 6.5 zurück, d.h. wir werden die Vektorraumbündel auf dem Raum $\tilde{X}-E$, der in die Rolle von M eintritt, mit Hilfe der Thetafaktoren der Operation von H_b als Galoisgruppe der universellen Überlagerung $\hat{p}\circ q: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \tilde{X}-E$ beschreiben. Die Rollen von V und G übernehmen also $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ und H_b.

Es sei jetzt $\rho: H_b \to GL_r(\mathbb{C})$ eine endlichdimensionale Darstellung von H_b. Mit F_ρ werde das zu ρ assoziierte Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ bezeichnet. Dann ist $\hat{p}^* F_\rho$ als Bündel über $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ trivial, weil auch $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ nur triviale Vektorraumbündel besitzt, und muß daher durch einen Thetafaktor der Ω-Aktion auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ (vgl. 6.4) beschrieben werden können. Wir suchen also eine Trivialisierung von $\hat{p}^* F_\rho$ und den Thetafaktor

$$\tilde{J}_\rho: \Omega \times (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*) \to GL_r(\mathbb{C}),$$

für die Ω-Operation auf $|\hat{p}^*F_\rho| \simeq (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*)\times\mathbb{C}^r$ bezüglich dieser Trivialisierung.

Das Bündel $\hat{p}^*F_\rho$ entsteht aus $(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\times\mathbb{C}^r \cong |q^*\hat{p}^*F_\rho|$ durch Quotientenbildung nach der von $\gamma\in H_b$ erzeugten Decktransformationsgruppe von $q\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. Verfügt man schon über eine Trivialisierung von $\hat{p}^*F_\rho$ durch r (überall) linear unabhängige Schnitte $\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_r$, so besitzen die gelifteten Schnitte $s_i := \tilde{s}_i\circ q$, $i=1,\dots,r$, die Eigenschaft der γ-Invarianz, d.h. es gilt

$$s_i(\gamma(z,t)) = \rho(\gamma)\cdot s_i(z,t) \qquad \text{für } (z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\ i=1,\dots,r.$$

Umgekehrt bestimmen je r (überall) linear unabhängige Schnitte $s_1,\dots,s_r$ in $(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\times\mathbb{C}^r$ mit dieser Invarianzeigenschaft eine Trivialisierung von $\hat{p}^*F_\rho$.

Wir geben nun ein solches System von Schnitten an und bestimmen den Thetafaktor für die so definierte Identifizierung $|\hat{p}^*F_\rho| \cong (\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})\times\mathbb{C}^r$. Hierfür wählen wir eine 1-Parameter-Untergruppe $\mu\colon (\mathbb{C},+)\to GL_r(\mathbb{C})$, so daß gilt:

(i) $\mu(1) = \rho(\gamma)^{-1}$

(ii) $\mu(t)$ kommutiert mit $\rho(h)$ für alle $t\in\mathbb{C}$ und $h\in H_b$.

(Solche 1-Parameter-Untergruppen können immer gefunden werden. Wir holen die Begründung dafür in Lemma 6.11 nach.) Wir definieren nun mit Hilfe der Standardbasis $e_1,\dots,e_r$ des $\mathbb{C}^r$ die Schnitte

$$s_i(z,t) := \mu(t)\cdot e_i \qquad \text{für } (z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\ i=1,\dots,r,$$

in dem Bündel $(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\times\mathbb{C}^r$. Dann gilt:

$$s_i(\gamma(z,t)) = s_i(z,t-1) = \mu(t-1)e_i = \rho(\gamma)\mu(t)e_i = \rho(\gamma)s_i(z,t)$$

für alle $(z,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ und $i=1,\dots,r$.

Folglich können die Schnitte $s_1,\dots,s_r$ zu Schnitten $\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_r$ in $\hat{p}^*F_\rho$ hinuntergedrückt werden. Die Erzeugenden 1 und ω von Ω operieren bezüglich der Basis $(\tilde{s}_i)$ genau so, wie es ihre Liftungen α und β in H_b in bezug auf die Basis (s_i) tun. Hierfür findet man:

$$\alpha\colon\ (z,t;s_i(z,t)) \mapsto (z+1,t;\rho(\alpha)s_i(z,t)) = (z+1,t;\rho(\alpha)s_i(z+1,t)),$$

$$\begin{aligned}\beta\colon\ (z,t;s_i(z,t)) \mapsto (z+\omega,t+bz;\rho(\beta)s_i(z,t)) &= (z+\omega,t+bz;\rho(\beta)\mu(-bz)\mu(t+bz)e_i)\\ &= (z+\omega,t+bz;\rho(\beta)\mu(-bz)s_i(z+\omega,t+bz))\end{aligned}$$

Daraus erhält man den gesuchten Thetafaktor zunächst für die beiden Erzeugenden $1,\omega$ des Gitters Ω:

$$\tilde{J}_\rho(1,(z,\tau)) = \rho(\alpha) \quad \text{und} \quad \tilde{J}_\rho(\omega,(z,\tau)) = \rho(\beta)\mu(-bz) \qquad \text{für } (z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*.$$

Hierdurch ist $\tilde{J}_\rho$ bestimmt, denn durch iterierte Anwendung der Bedingung

(ii) von 6.7 gewinnt man $\tilde{J}_\rho$ für beliebige Elemente $m+n\omega\in\Omega$ und $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$:

$$\tilde{J}_\rho(m+n\omega,(z,\tau)) = \rho(\alpha^m\beta^n)\mu(-nbz-\frac{n(n-1)}{2}b\omega) \qquad (*)$$

Wir ziehen eine wichtige Folgerung aus diesem Ergebnis.

Proposition 6.10: Es sei $\rho: H_b \to GL_r(\mathbb{C})$ eine endlichdimensionale Darstellung der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b und $\mu: (\mathbb{C},+)\to GL_r(\mathbb{C})$ eine 1-Parameter-Untergruppe, die $\rho(\gamma)^{-1}$ fortsetzt und mit der Darstellung ρ kommutiert (siehe oben). Dann ist das zu ρ assoziierte Vektorraumbündel F_ρ über $\tilde{X}-E$ isomorph zu der trivialen Ausdehnung (via $s: \tilde{X}-E\to E$ als $\mathbb{C}^*$-Bündel) des Vektorraumbündels $F_{\rho,\mu}$ über E, das bezüglich der Projektion $p:\mathbb{C}\to E$ modulo Ω durch den Thetafaktor $J_{\rho,\mu}: \Omega\times\mathbb{C}\to GL_r(\mathbb{C})$ mit

$$J_{\rho,\mu}(m+n\omega,z) := \rho(\alpha^m\beta^n)\mu(-nbz-\frac{n(n-1)}{2}b\omega)$$

definiert wird.

Beweis: F wird durch den oben in (*) angegebenen Thetafaktor $\tilde{J}_\rho$ der Ω-Aktion auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ bestimmt. Weil $\tilde{J}_\rho(g,(z,\tau))$ von der Faserkoordinate $\tau\in\mathbb{C}^*$ unabhängig ist, kann $\tilde{J}_\rho$ in trivialer Weise zu einem Thetafaktor der in 6.4 definierten Ω-Aktion auf der universellen Überlagerung $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ von $\tilde{X}$ ausgedehnt werden, der mit $\tilde{J}$ bezeichnet werde.

Durch $\tilde{J}$ wird dann ein Vektorraumbündel F auf $\tilde{X}$ definiert, das das Bündel F_ρ fortsetzt. Die Unabhängigkeit des Thetafaktors $\tilde{J}$ von der Faserkoordinate τ zeigt außerdem, daß F die triviale Ausdehnung des Bündels $F_{\rho,\mu} := F|_E$ längs der durch τ parametrisierten Fasern von $\tilde{X}\to E$ ist. Damit gilt auch $F_\rho \simeq s^*F_{\rho,\mu}$.

Weiterhin wird $F_{\rho,\mu}$ als Einschränkung von F auf E durch die Einschränkung des Thetafaktors $\tilde{J}$ auf den Nullschnitt in $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, also auf $\Omega\times(\mathbb{C}\times\{0\})$, gegeben. Dies ist nach den zuvor gemachten Feststellungen aber genau der in der Proposition 6.10 angegebene Thetafaktor $J_{\rho,\mu}$. ∎

Es bleibt noch die Existenz der in der Konstruktion verwendeten 1-Parameter-Untergruppe μ zu begründen. Dieser Sachverhalt ergibt sich aus dem folgenden Lemma, das mit einer aus der Theorie der nilpotenten Liegruppen wohlvertrauten Methode bewiesen wird.

Lemma 6.11: Zu jeder Matrix $A \in GL_r(\mathbb{C})$ gibt es eine 1-Parameter-Untergruppe $\mu: (\mathbb{C},+) \to GL_r(\mathbb{C})$ mit $\mu(1) = A$ und der Eigenschaft, daß $\mu(t)$ für jedes $t \in \mathbb{C}$ mit jeder mit A kommutierenden Matrix kommutiert.

Beweis: (Siehe auch [Mo, Lemma 3.1] und [DGLG, Chapter VI, §4].) Bezüglich ihrer Gewichtsräume kann die Matrix A in der Form $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ zerlegt werden, wobei jeder der Diagonalenblöcke A_i nur einen einzigen Eigenwert λ_i besitzt und die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise voneinander verschieden sind. Weil eine mit A kommutierende Matrix M die Gewichtszerlegung von A respektiert, zerfällt eine solche Matrix simultan mit A in $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Man kann daher gleich annehmen, daß A nur einen einzigen Eigenwert λ aufweist und sich folglich in der Form $A = \lambda \cdot (\mathbb{1} + N)$ schreiben läßt, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix und N eine nilpotente $r \times r$-Matrix ist. Mit der Logarithmus-Reihe

$$\log(1+X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} X^i$$

kann man den Logarithmus $a := \log(\mathbb{1}+N)$ bilden, der wegen der Nilpotenz von N ein Polynom in N ist, so daß keine Konvergenzprobleme auftreten. Ist außerdem ℓ ein Logarithmus von $\lambda \in \mathbb{C}^*$, so kann man

$$\mu(t) := e^{t\ell} \cdot \exp(ta) \qquad \text{für } t \in \mathbb{C}$$

definieren. Es folgt $\mu(1) = A$.

Wenn M eine mit A kommutierende Matrix ist, so kommutiert M auch mit N und folglich auch mit a, weil a ein Polynom in N ist, und daher schließlich auch mit $\mu(t) = e^{t\ell}\exp(ta)$. ∎

Darstellungen der diskreten Heisenberg-Gruppen. In diesem Paragraphen wird eine partielle Klassifikation der endlich-dimensionalen Darstellungen der diskreten Heisenberg-Gruppen H_b gegeben, die gerade dazu hinreichend ist, die jeweiligen assoziierten Bündel zu den Darstellungen angeben zu können. Ein wesentlicher Bestandteil sind die folgenden speziellen unitären Darstellungen.

Definition 6.12: Für je zwei teilerfremde ganze Zahlen r und d mit $r \geq 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ wird eine unitäre Darstellung $\tau_{r,d}: H_b \to GL_r(\mathbb{C})$ durch die folgenden Bilder der Erzeugenden α, β, γ von H_b (6.2) definiert:

$$\tau_{r,d}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \zeta^b & & & \\ & & \zeta^{2b} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta^{(r-1)b} \end{bmatrix}, \quad \tau_{r,d}(\beta) := \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_{r,d}(\gamma) := \zeta \cdot \mathbf{1},$$

wobei $\zeta := e^{-2\pi id/br}$ sei. Für gegebenes r durchläuft ζ also für die zulässigen Werte von d genau alle b-ten Wurzeln aus den primitiven r-ten Einheitswurzeln.

Für $r=1$ sei die Definition von $\tau_{r,d}$ im Sinne von $\tau_{r,d}(\alpha) = \tau_{r,d}(\beta) = 1$ zu verstehen.

Zwei Darstellungen $\tau_{r,d}$ und $\tau_{r',d'}$ sind konjugiert genau dann, wenn $r=r'$ und $d=d'$ gilt. (Denn der Wert von d wird durch die Spur von $\tau_{r,d}(\gamma)$ festgelegt.)

Theorem 6.13: (1) Zu jeder unzerlegbaren Darstellung $\rho: H_b \to GL_n(\mathbb{C})$ der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b existieren ein Charakter $\chi: H_b \to \mathbb{C}^*$ mit $\chi(\gamma) = 1$, eine Darstellung $\tau_{r,d}$ wie oben, wobei r ein Teiler von n ist, und eine Darstellung $\sigma: H_b \to \mathrm{Unip}_h(\mathbb{C})$ von H_b in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen vom Rang $h = n/r$, so daß ρ zu $\chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ konjugiert ist.

(2) Je zwei unzerlegbare Darstellungen $\chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ und $\chi' \otimes \tau_{r',d'} \otimes \sigma'$ von der in (1) betrachteten Struktur sind genau dann zueinander konjugiert, wenn $r=r'$ und $d=d'$ gilt, χ und χ' modulo den r-ten Einheitswurzeln übereinstimmen (d.h. $\chi^r = \chi'^r$) und die unipotenten Darstellungen σ und σ' konjugiert sind.

(3) Eine Darstellung $\chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ von der in (1) betrachteten Art ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn die unipotente Darstellung σ unzerlegbar ist.

Bemerkungen 6.14: (1) Die Charaktere $\chi: H_b \to \mathbb{C}^*$ mit $\chi(\gamma) = 1$ entsprechen den Charakteren des Gitters Ω (als Quotient von H_b) und damit den Zahlenpaaren $(\chi(\alpha), \chi(\beta)) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

(2) Das Theorem 6.13 stellt eine Verallgemeinerung verwandter Resultate von Williamson und Gerstenhaber über semi-kommutierende Matrizen dar (vgl. [Wi], [Ger]).

(3) Corollar: Die unzerlegbaren unitären Darstellungen von H_b sind konjugiert zu Darstellungen der Form $\chi \otimes \tau_{r,d}$, wobei χ ein Charakter von H_b mit $\chi(\gamma) = 1$ ist, der nur Werte vom Betrag 1 annimmt.

(Diese Aussage findet man auch bei Burger, [**Bu**], wo sie in einem erheblich allgemeineren Rahmen mit Methoden der Harmonischen Analysis bewiesen wird.* Sie folgt hier einfach daraus, daß eine unipotente Darstellung genau dann unitär ist, wenn sie trivial ist.)

(4) Betrachtet man zu $\rho = \chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ die Untergruppe H' von H_b, die von α, β^r und γ erzeugt wird, und auf dieser die durch

$$\rho'(\alpha) := \chi(\alpha)\sigma(\alpha), \qquad \rho'(\beta^r) := \chi(\beta^r)\sigma(\beta^r) \quad \text{und} \quad \rho'(\gamma) := e^{2\pi i d/br}\sigma(\gamma)$$

definierte Darstellung ρ', so ist ρ die von ρ' auf H_b induzierte Darstellung.

(5) Eine Darstellung ρ von H_b in $GL_n(\mathbb{C})$ ist genau dann treu, bildet also H_b injektiv ab, wenn $\rho(\gamma)$ unendliche Ordnung besitzt. Für $\rho = \chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ heißt dies, daß ρ genau dann treu ist, wenn $\sigma(\gamma)$ unendliche Ordnung besitzt, was bei einer unipotenten Darstellung nur $\sigma(\gamma) \neq \mathbf{1}$ bedeutet.

(Begründung für den ersten Teil von (5): Nehme an, daß $\sigma(\gamma)$ unendliche Ordnung besitzt, und betrachte $h = \alpha^x \beta^y \gamma^z$ mit $\rho(h) = \mathbf{1}$. Aus $\mathbf{1} = [\rho(h), \rho(\beta)] = \rho([h,\beta]) = \rho(\gamma)^{bx}$ folgt $x = 0$; analog erhält man $y = 0$ aus $\mathbf{1} = [\rho(h), \rho(\alpha)] = \rho(\gamma)^{-by}$. Schließlich ist wegen $\mathbf{1} = \rho(h) = \rho(\gamma)^z$ auch $z = 0$, also $h = 1$. Damit ist die Injektivität von ρ bewiesen. Die Umkehrung ist trivial.)

Beweis von Theorem 6.13: Es sei ρ eine unzerlegbare Darstellung von H_b in $GL_n(\mathbb{C})$. Zur Abkürzung schreiben wir $A := \rho(\alpha)$, $B := \rho(\beta)$ und $Z := \rho(\gamma)$.

Für eine beliebige $n \times n$-Matrix M verstehen wir unter der Gewichtszerlegung des $\mathbb{C}^n$ bezüglich M die Aufspaltung

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda V_\lambda(M) \qquad \text{mit} \quad V_\lambda(M) := \ker((M - \lambda\mathbf{1})^n)$$

Weil A und B mit Z kommutieren, respektieren beide Matrizen die Gewichtszerlegung bezüglich Z. Also folgt aus der Unzerlegbarkeit von ρ, daß Z nur einen einzigen Eigenwert ζ besitzt. Wegen $\zeta^{bn} = \det(Z^b) = \det([A,B]) = 1$ ist ζ^b eine primitive r-te Einheitswurzel für einen geeigneten Teiler r von n und man kann $\zeta = e^{2\pi i d/br}$ mit $(r,d) = 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ schreiben.

*) Ich bin J. Scherk für den Hinweis auf diese Arbeit dankbar.

(Also sind die Zahlen r und d durch ρ bereits eindeutig festgelegt.)

Betrachtet man nun die Gewichtszerlegung des $\mathbb{C}^n$ hinsichtlich der Matrix A, so wird $V_\lambda(A)$ durch B in $V_{\zeta^b\lambda}(A)$ abgebildet. (Für $v \in V_\lambda(A)$ ist $(A - \zeta^b \lambda \mathbf{1})^n Bv = B(AZ^b - \zeta^b \lambda \mathbf{1})^n v = 0$, weil Z mit A kommutiert und ζ als einziges Gewicht hat. Also ist Bv ein Gewichtsvektor zu A vom Gewicht $\zeta^b\lambda$.) Damit stabilisiert B - und trivialerweise auch Z - jeden der zusammengesetzten Gewichtsräume

$$W_\lambda(A) := V_\lambda(A) \oplus V_{\zeta^b\lambda}(A) \oplus V_{\zeta^{2b}\lambda}(A) \oplus \dots \oplus V_{\zeta^{(r-1)b}\lambda}(A).$$

Die Unzerlegbarkeit von ρ impliziert also, daß die Eigenwerte von A eine einzige Nebenklasse $\{\lambda_A, \dots, \zeta^{(r-1)b}\lambda_A\}$ der r-ten Einheitswurzeln bilden. Entsprechend bilden die Eigenwerte von B eine Nebenklasse $\{\lambda_B, \dots, \zeta^{(r-1)b}\lambda_B\}$.

Nach der Abspaltung eines geeigneten Charakters $\chi(\alpha^x\beta^y\gamma^z) := \lambda_A^x \lambda_B^y$ von ρ, der durch ρ modulo den r-ten Einheitswurzeln eindeutig bestimmt ist, kann man sich also auf den Fall beschränken, daß die Eigenwerte sowohl von A als auch von B genau die r-ten Einheitswurzeln sind. Jeder der Gewichtsräume $V_{\zeta^{bk}}(A)$ und $V_{\zeta^{bk}}(B)$ hat für $k = 0, \dots, r-1$ die Dimension $h := n/r$. (Das ist der Fall, weil B die Gewichtsräume von A zyklisch permutiert und A umgekehrt das selbe für B tut.)

Wir wählen jetzt in $V_1(A)$ eine beliebige Basis aus und statten $V_{\zeta^{bk}}(A)$ für $k = 1, \dots, r-1$ mit dem Bild dieser Basis unter B^k aus. Bezüglich der so definierten Basis des $\mathbb{C}^n$ beschreiben wir A, B und Z als $r \times r$-Blockmatrizen, bestehend aus $h \times h$-Blöcken als Einträgen. Unter Heranziehung der Kommutatorrelationen, die in H_b gelten, und nach Definition der Basis erhält man so:

$$A = \begin{pmatrix} A_o & & & & \\ & Z_o^b A_o & & & \\ & & Z_o^{2b} A_o & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Z_o^{(r-1)b} A_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & B_o^* \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_o & & & \\ & Z_o & & \\ & & Z_o & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Z_o \end{pmatrix}.$$

Darin repräsentieren A_o, B_o^* und Z_o die Einschränkungen von A, B^r und Z auf $V_1(A)$ in bezug auf die gewählte Basis. Folglich haben diese Matrizen als jeweils einzige Eigenwerte 1, 1 und ζ und es bestehen die Kommutator-Relationen:

$$[A_o,B_o^*] = Z_o^{br}, \quad [A_o,Z_o] = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad [B_o^*,Z_o] = \mathbf{1}.$$

Mit $B_o := \exp(\frac{1}{r}\log B_o^*)$ wird eine r-te Wurzel aus B_o^* definiert. (Siehe auch den Beweis von 6.11.) Es folgen die Kommutator-Relationen:

$$[B_o,Z_o] = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad [A_o,B_o] = (\tfrac{1}{\zeta}Z_o)^b.$$

(Begründung: Für eine unipotente Matrix X wird deren unipotente r-te Wurzel durch $f(X) := \exp(\frac{1}{r}\log X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(X-\mathbf{1})^i$ gegeben und aus $[X,Y] = \mathbf{1}$ folgt $f(XY) = f(X)f(Y)$. Dann gilt aufgrund der Kommutator-Relationen, denen B_o^* genügt, für $B_o := f(B_o^*)$:

$$\begin{aligned} A_oB_o &= A_of(B_o^*) = \sum c_iA_o(B_o^*-\mathbf{1})^i = \sum c_i(B_o^*Z_o^{br}-\mathbf{1})^iA_o = f(B_o^*Z_o^{br})A_o \\ &= f(B_o^*)f(Z_o^{br})A_o = B_of(Z_o^{br})A_o = f(Z_o^{br})B_oA_o; \end{aligned}$$

also ist $[A_o,B_o] = f(Z_o^{br})$ eine unipotente r-te Wurzel von Z_o^{br} und stimmt daher mit $(\frac{1}{\zeta}Z_o)^b$ überein, weil die unipotenten Wurzeln aus unipotenten Matrizen eindeutig sind.)

Durch Konjugation mit der Diagonalen-Blockmatrix $\operatorname{diag}(\mathbf{1},B_o,\dots,B_o^{r-1})$ gehen die Matrizen A, B und Z in die neuen Matrizen

$$A' = \begin{bmatrix} A_o & & & & \\ & \zeta^bA_o & & & \\ & & \zeta^{2b}A_o & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta^{(r-1)b}A_o \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & B_o \\ B_o & \mathbf{0} & & & \\ & B_o & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & B_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$Z' = Z$$

über. (Das ist leicht mit den oben hergeleiteten Kommutatoren auszurechnen.) Offensichtlich ist damit die Gestalt einer Darstellung $\tau_{r,d} \otimes \sigma$ erreicht worden, wobei die Darstellung $\sigma: H_b \to GL_h(\mathbb{C})$ durch

$$\sigma(\alpha) := A_o, \quad \sigma(\beta) := B_o \quad \text{und} \quad \sigma(\gamma) := \tfrac{1}{\zeta}Z_o$$

definiert wird.

Es bleibt zu begründen, daß nach geeigneter Konjugation σ nur Werte in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen annimmt. (Es ist schon bekannt, daß alle $\sigma(h)$, $h \in H_b$, 1 als einzigen Eigenwert aufweisen.) Dazu reicht es aus, einen simultanen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^h$ von A_o, B_o und $\frac{1}{\zeta}Z_o$ - jeweils zum Eigenwert 1 - zu finden, denn nach Abdividieren des von diesem Vektor aufgespannten Unterraumes $\mathbb{C}v \subset \mathbb{C}^h$ kann man induktiv so fortfahren. Nun ist der Eigenraum $E_1 \neq 0$ von $\frac{1}{\zeta}Z_o$ zum Eigenwert 1 sowohl unter A_o als auch unter B_o stabil und die Beschränkungen von A_o und B_o auf E_1 kommutieren wegen $[A_o,B_o] = (\frac{1}{\zeta}Z_o)^b$. Unter diesen Umständen kann man einen gemeinsamen Eigenvektor $v \in E_1$ von A_o und B_o finden. ([**ALG**, Chap. VII, §5.7, Lemme 3])

Damit ist der Teil (1) des Theorems bewiesen. Auch Teil (2) ergibt sich daraus, weil die Gewichtsstruktur einer unzerlegbaren Darstellung, wie gezeigt, zuerst r und d, dann χ (modulo den r-ten Einheitswurzeln) und schließlich σ bis auf Konjugation festlegt. Auch ist leicht einzusehen, daß zwei Charaktere χ und χ', die modulo den r-ten Einheitswurzeln übereinstimmen, zueinander konjugierte Darstellungen $\chi \otimes \tau_{r,d}$ und $\chi' \otimes \tau_{r,d}$ definieren: Man konjugiert dazu mit Matrizen der Form $\tau_{r,d}(\alpha)$ oder $\tau_{r,d}(\beta)$ oder Produkten solcher Matrizen.

Für Teil (3) muß begründet werden, daß $\rho = \chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ schon dann unzerlegbar ist, wenn σ eine unzerlegbare Darstellung von H_b in den unipotenten $h \times h$-Matrizen ist. Wir nehmen gleich $\chi = 1$ an. Eine Zerlegung von ρ zieht eine entsprechende Zerlegung des Gewichtsraumes $V_1(A)$ nach sich, die von den Matrizen A_o, B_o^* und Z_o (wie oben) als Einschränkungen von A, B^r und Z respektiert wird. Dies gilt dann auch für die Wurzel B_o, woraus die Zerlegbarkeit von σ folgt. ∎

<u>**Anwendung auf assoziierte Bündel.**</u> Durch die Kombination von Theorem 6.13 mit Proposition 6.10 können diejenigen Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$-E, die zu Darstellungen von H_b assoziiert sind, genau charakterisiert werden.

<u>Theorem 6.15:</u> (1) Jedes auf $\tilde{X}$-E zu einer Darstellung ρ der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b assoziierte Vektorraumbündel F_ρ ist isomorph zu der trivialen Ausdehnung eines über E definierten Bündels F_ρ entlang der Fasern der Projektion $\tilde{X}\text{-E} \to E$.

....

(2) Für eine gegebene Darstellung $\rho = \chi \otimes \tau \otimes \sigma$ von H_b, worin χ ein Charakter mit $\chi(\gamma) = 1$, $\tau = \tau_{r,d}$ eine der in 6.12 definierten unitären Darstellungen und σ eine unipotente Darstellung ist, gilt $F_\rho \simeq F_\chi \otimes F_\tau \otimes F_\sigma$ und die gemäß (1) zu den Faktoren durch triviale Ausdehnung Anlaß gebenden Bündel über E können (eindeutig) so bestimmt werden, daß gilt:

(i) $F_\chi \in \mathrm{Pic}^\circ E$ und jedes Element aus $\mathrm{Pic}^\circ E$ kann so dargestellt werden;

(ii) F_τ ist unzerlegbar vom Rang r und Grad d;

(iii) F_σ ist eine direkte Summe von unzerlegbaren Vektorraumbündeln vom Grad 0, die holomorphe Schnitte besitzen (5.7), und jedes solche Bündel ergibt sich in dieser Weise aus einer geeigneten unipotenten Darstellung σ von H_b.

Das Bündel F_ρ ist genau dann unzerlegbar, wenn F_σ (bzw. F_σ) unzerlegbar ist.

Corollar 6.16: Jedes Vektorraumbündel F auf $\tilde{X}$-E ist bis auf Isomorphie das assoziierte Bündel F_ρ einer Darstellung ρ von $H_b \simeq \pi_1(\tilde{X}\text{-E})$.

Corollar 6.17: Ein unzerlegbares Vektorraumbündel F auf $\tilde{X}$-E ist (bis auf Isomorphie) genau dann assoziiertes Bündel einer unitären Darstellung von H_b, wenn es die triviale Ausdehnung eines einfachen (bzw. stabilen) Bündels F auf E entlang der Fasern der Projektion $\tilde{X}\text{-E} \to E$ ist.

Bemerkungen 6.18: (1) Die in Teil (2i) von 6.15 behauptete Surjektion

$$\{ \text{ Charaktere } \chi \text{ von } H_b \text{ mit } \chi(\gamma) = 1 \} \to \mathrm{Pic}^\circ E, \qquad \chi \mapsto F_\chi,$$

kann explizit angegeben werden: Ein Charakter χ der genannten Art ist durch $(\chi(\alpha), \chi(\beta)) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ eindeutig bestimmt. Wählt man $u, v \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ mit $\chi(\alpha) = e^{2\pi i u}$ und $\chi(\beta) = e^{2\pi i v}$, so handelt es sich bei F_χ um das zu

$$v - u\omega \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega) \simeq \mathbb{C}/\Omega = E \simeq \mathrm{Pic}^\circ E$$

korrespondierende Geradenbündel, wobei der Nebenklasse $0 + \Omega$ das triviale Bündel in $\mathrm{Pic}^\circ E$ entspricht.

(2) Durch eine unzerlegbare Darstellung ρ ist der in der Faktorisierung $\rho = \chi \otimes \tau_{r,d} \otimes \sigma$ von Theorem 6.13 auftretende Charakter χ nur modulo den r-ten Einheitswurzeln wohlbestimmt, so daß man r^2 gleichwertige Bündel F_χ auf E als Tensorfaktoren von F_ρ wie in 6.15(2) erhält. Dies ist nach 5.6(i) auch nicht anders zu erwarten, weil mit $\tau = \tau_{r,d}$ für $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gilt:

$$\lambda \otimes F_\tau \simeq F_\tau \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^r = 1 \text{ in } \mathrm{Pic}^\circ E.$$

Beweis von Theorem 6.15: (1) Diese Aussage wurde abstrakt mit 5.19 und in der hier betrachteten Situation nochmals mit 6.10 bewiesen, so daß hier nichts mehr zu tun ist. Zur Vorbereitung der folgenden Schritte erinnern wir daran, daß F_ρ nach 6.10 durch einen Thetafaktor der Ω-Aktion auf $\mathbb{C}$ von der Form

$$J_{\rho,\mu}(m+n\omega,z) = \rho(\alpha^m\beta^n)\mu(-nbz-\frac{n(n-1)}{2}b\omega) \qquad (*)$$

beschrieben wird, wobei μ eine zu wählende 1-Parameter-Untergruppe ist, die $\rho(\gamma)^{-1}$ fortsetzt und mit ρ kommutiert.

(2) Wir müssen zeigen, daß die $\mathcal{F}_\chi$, $\mathcal{F}_\tau$ und $\mathcal{F}_\sigma$ repräsentierenden Bündel F_χ, F_τ und F_σ auf E in der behaupteten Weise gewählt werden können.

(i) Ein Charakter χ von H_b mit $\chi(\gamma)=1$ kann als Charakter des Gitters Ω aufgefaßt werden. Mit der Wahl von $\mu=1$ erweist sich F_χ als das zu der Darstellung χ von Ω bezüglich $\mathbb{C}\to E$ assoziierte Vektorraumbündel vom Rang 1. Es ist bekannt, daß man so alle Bündel in $\mathrm{Pic}^\circ E$ erhält ([**PAG**, pp. 307-317]). Wir begründen im folgenden zusätzlich die Richtigkeit der oben gemachten Bemerkung 6.18(1).

Weil $\mathcal{O}_E(P)$ als Quotient von $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ nach der durch $1\colon (z,\tau)\mapsto(z+1,\tau)$ und $\omega\colon (z,\tau)\mapsto(z+\omega,e^{-2\pi iz}\tau)$ definierten Ω-Aktion realisiert werden kann (Beweis von 6.4), erhält man den $\mathcal{O}_E(Q-P)$ bestimmenden Thetafaktor daraus durch Parallelverschiebung und Division zu $1\colon (z,\tau)\mapsto(z+1,\tau)$ und $\omega\colon (z,\tau)\mapsto(z+\omega,e^{2\pi iz_o}\tau)$, wobei P und Q den Nebenklassen $\frac{1}{2}+\Omega$ und $(\frac{1}{2}+z_o)+\Omega$ in $\mathbb{C}/\Omega=E$ entsprechen. Andererseits bestimmt $1\colon (z,\tau)\mapsto(z+1,\chi(\alpha)\tau)$ und $\omega\colon (z,\tau)\mapsto(z+\omega,\chi(\beta)\tau)$ das zu χ assoziierte Geradenbündel. Mit $\chi(\alpha)=e^{2\pi iu}$ und $\chi(\beta)=e^{2\pi iv}$ nimmt diese Ω-Aktion innerhalb der neuen Koordinaten $(z',\tau'):=(z,e^{2\pi iuz}\tau)$ die Form $1\colon (z',\tau')\mapsto(z'+1,\tau')$ und $\omega\colon (z',\tau')\mapsto(z'+\omega,e^{2\pi i(v-u\omega)}\tau')$ an, was zu zeigen war. ⌋

(ii) Wir untersuchen jetzt das zu $\tau=\tau_{r,d}$ mit r,d teilerfremd und $r\leq d<(b+1)r$ assoziierte Vektorraumbündel.

Als 1-Parameter-Gruppe μ mit $\mu(1)=\tau(\gamma)^{-1}=\frac{1}{\zeta}\mathbf{1}$, wo $\zeta=e^{-2\pi id/br}$ ist, wählen wir $\mu(t):=e^{2\pi idt/br}\cdot\mathbf{1}$ für $t\in\mathbb{C}$. Als entsprechenden Thetafaktor $J_{\tau,\mu}$ erhält man dann auf $\Omega\times\mathbb{C}$ für die beiden Erzeugenden 1 und ω des Gitters Ω:

$$J_{\tau,\mu}(1,z) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \zeta^b & & & \\ & & \zeta^{2b} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta^{(r-1)b} \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$J_{\tau,\mu}(\omega,z) = e^{-2\pi i dz/r} \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt schon, daß F_τ ein Vektorraumbündel vom Rang r und Grad d ist, denn das Determinantenbündel erhält man aus dem Thetafaktor

$$(\det J_{\tau,\mu})(1,z) = (-1)^{r-1} \quad \text{und} \quad (\det J_{\tau,\mu})(\omega,z) = (-1)^{r-1} e^{-2\pi i dz},$$

der ein Geradenbündel vom Grad d definiert (Vergleiche Teil (i) bzw. den Beweis von 6.4.)

Zum Nachweis der Unzerlegbarkeit von F_τ betrachten wir die Endomorphismenalgebra von F_τ. Die Schnitte im Endomorphismenbündel von F_τ werden durch bezüglich der adjungierten Operation von $J_{\tau,\mu}$ invariante holomorphe Abbildungen $h: \mathbb{C} \to M_r(\mathbb{C})$ repräsentiert.* Wegen $J_{\tau,\mu}(r,z) = \mathbf{1}$ und $J_{\tau,\mu}(r\omega,z) = e^{-2\pi i dz} e^{-\pi i d(r-1)\omega} \mathbf{1}$ ist die adjungierte Operation des Untergitters $r\Omega \subset \Omega$ durch $J_{\tau,\mu}$ auf $M_r(\mathbb{C})$ trivial, so daß jede einen Endomorphismus von F_τ repräsentierende holomorphe Abbildung $h: \mathbb{C} \to M_r(\mathbb{C})$ doppelt-periodisch und mithin konstant ist.

Wir haben also $h \in M_r(\mathbb{C})$. Die Ω-Invarianz als Endomorphismus bedeutet nun, daß die Matrix h sowohl mit $\tau(\alpha)$ als auch mit $\tau(\beta)$ vertauscht. Aus $h\tau(\alpha) = \tau(\alpha)h$ folgt, daß h die Zerlegung des $\mathbb{C}^r$ in die (eindimensionalen) Gewichtsräume von $\tau(\alpha)$ respektiert. Wir erhalten also, daß h simultan mit $\tau(\alpha)$ eine Diagonalmatrix ist. Weil bei Konjugation mit $\tau(\beta)$ die Diagonaleneinträge zyklisch permutiert werden, folgt aus $h = \tau(\beta) h \tau(\beta)^{-1}$ schließlich, daß alle Diagonaleneinträge von h übereinstimmen, die Matrix h also einen Skalar repräsentiert.

Damit haben wir $\operatorname{End}_E(F_\tau) \simeq \mathbb{C}$ erhalten, was für die Unzerlegbarkeit von F_τ hinreichend ist. $\lrcorner$

---

*) D.h.: $h(g(z)) = J_{\tau,\mu}(g,z) \cdot h(z) \cdot J_{\tau,\mu}(g,z)^{-1}$ für $g \in \Omega$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Zu der gegebenen Darstellung $\sigma: H_b \to \mathrm{Unip}_h(\mathbb{C})$ wählen wir die 1-Parameter-Gruppe μ als Untergruppe der Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen $\mathrm{Unip}_h(\mathbb{C})$. (Dafür, daß dies geschehen kann, siehe den Beweis von Lemma 6.11.) Es wird gezeigt, daß F_σ als sukzessive Extension (jeweils spaltend oder auch nicht) eines trivialen Bündels $\mathcal{O}_E$ durch weitere triviale Bündel $\mathcal{O}_E$ beschrieben werden kann. Solche Vektorraumbündel sind nach Atiyah ([At_2]; siehe auch 5.34) stets direkte Summen von Grad-0-Bündeln, die nichtverschwindende holomorphe Schnitte enthalten.

Weil $J_{\sigma,\mu}(g,z)$ für alle $g \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ eine unipotente obere Dreicksmatrix ist, beschreibt $s(z) := (1,0,\ldots,0)^t \in \mathbb{C}^h$ einen nirgends verschwindenden holomorphen Schnitt in F_σ, der ein triviales Unterbündel $\mathcal{O}_E$ in F_σ aufspannt. Zur Kennzeichnung des zugehörigen Faktorbündels bezeichnen wir den rechten unteren $(h-1)\times(h-1)$-Block einer unipotenten $h\times h$-Matrix U mit U'. In dieser Weise stiftet σ eine Darstellung $\sigma': H_b \to \mathrm{Unip}_{h-1}(\mathbb{C})$, μ eine 1-Parameter-Gruppe $\mu': (\mathbb{C},+) \to \mathrm{Unip}_{h-1}(\mathbb{C})$ und $J_{\sigma,\mu}$ einen Thetafaktor vom Rang $h-1$, für den offensichtlich $(J_{\sigma,\mu})' = J_{\sigma',\mu'}$ gilt. Folglich wird das Faktorbündel $F_\sigma/\mathcal{O}_E$ durch den Thetafaktor $J_{\sigma',\mu'}$ beschrieben und man erhält $F_\sigma/\mathcal{O}_E \simeq F_{\sigma'}$, so daß man induktiv mit dem Herausteilen von trivialen Untergeradenbündeln fortfahren kann und so eine Kompositionsreihe von F_σ erhält, die ausschließlich aus trivialen Geradenbündeln $\mathcal{O}_E$ besteht.

Umgekehrt wird eine unipotente Darstellung σ von H_b, die ein unzerlegbares Grad-0-Bündel F_σ vom Rang h auf E definiert, beispielsweise durch

$$\sigma(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma(\beta) := \sigma(\gamma) := \mathbf{1}_h$$

gegeben. (Wir begründen dies weiter unten ausführlich: σ entspricht einer der in Theorem 6.26 genannten Darstellungen, nämlich $S(1,0,\ldots,0)$.) Damit ist auch jede direkte Summe von Grad-0-Bündeln mit holomorphen Schnitten zu einer unipotenten Darstellung von H_b assoziiert.

(Diese Aussage kann man auch dem klassischen Theorem von A. Weil ([We, Chapitre II.7], [At_1, Theorem 10]) entnehmen, demzufolge die assoziierten Vektorraumbündel auf einer Riemannschen Fläche genau die direkten Summen von Bündeln vom Grad 0 sind. Die Reduktion von einer beliebigen Darstellung auf den unipotenten Typ ist dann etwa mit Hilfe von Theorem 6.13 möglich.) ┘

Schließlich folgt aus Satz 5.8, daß für die Unzerlegbarkeit von F_ρ bzw. $F_\rho = F_\chi \circledast F_\tau \circledast F_\sigma$ tatsächlich die Unzerlegbarkeit von F_σ notwendig und hinreichend ist. ∎

Beweis von Corollar 6.16: Um zu zeigen, daß jedes Vektorraumbündel $\mathcal{F}$ auf $\tilde{X}$-E zu einer Darstellung von H_b assoziiert ist, müssen wir wegen 5.19 nur einsehen, daß jedes unzerlegbare Bündel $F = F_{r',d'}(\lambda)$ mit $r' \leq d' < (b+1)r'$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ wie in 6.15(2) in der Form $F_\chi \circledast F_\tau \circledast F_\sigma$ gewonnen werden kann.

Mit $h := (r',d')$ kann $r' = hr$ und $d' = hd$ geschrieben werden. Wähle nun eine unipotente Darstellung σ von H_b so, daß F_σ unzerlegbar vom Rang h und Grad 0 ist. Mit der unitären Darstellung $\tau = \tau_{r,d}$ ist dann F_τ unzerlegbar vom Rang r und Grad d. Damit ist $F_\tau \circledast F_\sigma$ wegen 5.8 bereits ein unzerlegbares Bündel vom Rang r' und Grad d' und durch die Wahl eines geeigneten Charakters χ kann wegen 6.15(2i) und 5.6(i) schließlich $F_{r',d'}(\lambda) \simeq F_\chi \circledast F_\tau \circledast F_\sigma$ erzielt werden. ∎

Beweis von Corollar 6.17: Unzerlegbare unitäre Darstellungen von H_b sind nach 6.14(3) von der Form $\rho = \chi \circledast \tau_{r,d}$, wobei χ ein unitärer Charakter von Ω ist und r,d teilerfremd sind. Also ist $\mathcal{F}_\rho$ das Pull-back eines unzerlegbaren Bündels F_ρ auf E, dessen Rang und Grad teilerfremd sind, bezüglich $\tilde{X}$-E → E. Solche Bündel auf E sind nach [At_2, Lemma 22] einfach, d.h.: $\mathrm{End}_E(F_\rho) \simeq \mathbb{C}$. Zum Nachweis der Stabilität von F_ρ betrachten wir ein (ohne Einschränkung unzerlegbares) Unterbündel F' von F_ρ mit $\mu(F') \geq \mu(F_\rho)$. Wegen der Sätze 5.11 und 5.6(iv) folgt aus $\mathrm{Hom}_E(F',F_\rho) \neq 0$ schon $\mu(F') = \mu(F_\rho)$, was aber wegen der Teilerfremdheit von Rang und Grad von F_ρ für ein echtes Unterbündel F' nicht eintreten kann.

Weiter tritt auch jedes derartige Bündel als assoziiertes Bündel einer unitären Darstellung von H_b auf, denn selbst für unitäre Charaktere χ durchläuft das assoziierte Geradenbündel F_χ ganz $\mathrm{Pic}^\circ E$, wie man 6.18(1) entnimmt: Auch mit reellen u und v kann jede komplexe Zahl durch $v - u\omega$ dargestellt werden.

Schließlich sind unzerlegbare Vektorraumbündel auf E, deren Rang und Grad nicht teilerfremd sind, auch weder einfach noch stabil, wie man aus dem

Vorhandensein eines Tensorfaktors F_h mit $h \geqq 2$ nach 5.8 ersehen kann: 5.9 liefert die Nicht-Einfachheit; die Instabilität folgt aus der Existenz eines trivialen Unterbündels $\mathcal{O}_E \subset F_h$ (vgl. 5.34). ∎

Wir werden nun für ein beliebig vorgegebenes unzerlegbares Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E \simeq X-\{x\}$ die Menge aller derjenigen Darstellungen von $\pi_1(\tilde{X}-E) \simeq \pi_1(X,x) \simeq H_b$ bestimmen, zu denen das gegebene Bündel assoziiert ist. Aus den Theoremen 6.13 und 6.15 zusammen mit den Formeln 5.6(i) und 5.8 sowie der Bemerkung 6.18(1) ergibt sich, daß hierfür nur mehr diejenigen unipotenten Darstellungen von H_b zu charakterisieren sind, zu denen die triviale Ausdehnung (längs der Fasern von $\tilde{X}-E \to E$) eines vorgegebenen unzerlegbaren Bündels vom Grad 0 mit einem nichtverschwindenden holomorphen Schnitt assoziiert ist.

Bevor wir damit beginnen, begründen wir noch die schon in der Einleitung zu diesem Kapitel bemerkte Tatsache, daß die Frage nach einer vollständigen Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b $(b \geqq 1)$ auf ein "hoffnungsloses" Problem führt.

Wildheit des Klassifikationsproblems. Wenn k ein Körper und Λ eine (nicht notwendig kommutative) k-Algebra ist, dann versteht man unter $\mathrm{mod}_k \Lambda$ die Kategorie der über k endlich erzeugten (i.e. endlichdimensionalen) Λ-Linksmoduln und unter $\mathrm{ind}_k \Lambda$ die Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren Elementen in $\mathrm{mod}_k \Lambda$. Wenn insbesondere $\Lambda = k[G]$ ein Gruppenring ist, dann entsprechen die Elemente von $\mathrm{mod}_k \Lambda$ bekanntlich genau den endlichdimensionalen Darstellungen von G über k.

Mit $k\langle X,Y\rangle$ werde die von zwei freien Elementen X und Y erzeugte nichtkommutative k-Algebra bezeichnet. Die Objekte von $\mathrm{mod}_k k\langle X,Y\rangle$ können dann als Matrizenpaare $(A,B) \in (M_r(k))^2$ in der Weise aufgefaßt werden, daß A und B die Wirkungen von X und Y auf einen zu k^r isomorphen Modul beschreiben. Die Klassifikation der Objekte von $\mathrm{mod}_k k\langle X,Y\rangle$ bis auf Isomorphie ist in diesem Sinne gleichbedeutend zu der Klassifikation von Matrizenpaaren $(A,B) \in (M_r(k))^2$ bis auf simultane Konjugation. (Zwei Paare $(A,B),(A',B') \in (M_r(k))^2$ sind simultan zueinander konjugiert, wenn es eine Matrix $S \in GL_r(k)$ mit $A' = SAS^{-1}$ und $B' = SBS^{-1}$ gibt.) Von der Aufgabe, Paare von Matrizen bis auf simultane Konjugation zu klassifizieren, ist bekannt, daß sie ein aussichtsloses Problem darstellt, das allenfalls für sehr kleine Dimensionen r erfolgreich behandelt werden kann. (Siehe dazu etwa [Kr, Chapter I.2].)

Für gewöhnlich bezeichnet man deswegen ein Darstellungsproblem $\mathrm{mod}_k \Lambda$ dann als "wild", wenn es einen voll-treuen* Funktor $F\colon \mathrm{mod}_k\, k\langle X,Y\rangle \to \mathrm{mod}_k \Lambda$ gibt, denn durch einen solchen Funktor wird eine Inklusion von $\mathrm{ind}_k\, k\langle X,Y\rangle$ in $\mathrm{ind}_k \Lambda$ induziert, die zeigt, daß die Bestimmung von $\mathrm{ind}_k \Lambda$ die Lösung des als hoffnungslos angesehenen Problems der Bestimmung von $\mathrm{ind}_k\, k\langle X,Y\rangle$ beinhalten würde.

Wir werden hier ein Darstellungsproblem $\mathrm{mod}_k \Lambda$ schon dann als wild bezeichnen, wenn es nur einen irgendwie gearteten Funktor $F\colon \mathrm{mod}_k\, k\langle X,Y\rangle \to \mathrm{mod}_k \Lambda$ gibt, der eine Inklusion $\mathrm{ind}_k\, k\langle X,Y\rangle \hookrightarrow \mathrm{ind}_k \Lambda$ induziert. Dies ist zwar eine echte Abschwächung der oben formulierten Bedingung, gestattet aber mit der gleichen Berechtigung, ein wildes Problem als hinsichtlich der vollständigen Klassifikation der unzerlegbaren Objekte aussichtslos anzusehen, und ist überdies genau die in der Einleitung zu diesem Kapitel verwendete Eigenschaft.

Proposition 6.19: Die Modulkategorien $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ und $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[H_b]$ sind vom wilden Darstellungstyp.

Beweis: Der Quotient $H_b \twoheadrightarrow \Omega$ induziert einen Funktor $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega] \to \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[H_b]$, der einer Darstellung ρ von Ω eine Darstellung $\tilde\rho$ von H_b vermöge $\tilde\rho(\alpha) := \rho(1)$, $\tilde\rho(\beta) := \rho(\omega)$ und $\tilde\rho(\gamma) := \mathbf{1}$ zuordnet. Offenbar wird dadurch eine Inklusion von $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ in $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[H_b]$ definiert, so daß nur die Wildheit von $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ nachzuweisen ist.

Das tun wir in zwei Schritten. Zunächst bezeichne R die Artinsche Algebra $R := \mathbb{C}[X,Y]/(X^2, Y^3)$. Für R hat S. Brenner in [Bre, Theorem 5] eine Konstruktion für einen Funktor $F\colon \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \to \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} R$ angegeben, der eine Inklusion $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \hookrightarrow \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} R$ stiftet. (Siehe auch 6.20 unten.)

Wir geben einen zweiten Funktor $G\colon \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} R \to \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ an: Die Objekte von $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} R$ entsprechen Paaren von Matrizen $(A,B) \in (M_r(\mathbb{C}))^2$ mit $AB = BA$ und $A^2 = B^3 = \mathbf{0}$. Einem derartig repräsentierten Modul aus $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} R$ wird durch G eine Darstellung ρ von Ω durch $\rho(1) := \mathbf{1} + A$ und $\rho(\omega) := \mathbf{1} + B$ zugeordnet. Hat man $\rho = G(A,B)$ und $\rho' = G(A',B')$, so sind ρ und ρ' genau dann als Darstel-

*) Ein Funktor $F\colon C \to C'$ heißt voll-treu, wenn er eine Äquivalenz von C mit einer vollen Unterkategorie C'' von C' herstellt.

lungen konjugiert, wenn (A,B) und (A',B') als Matrizenpaare simultan konjugiert sind. Daraus folgt, daß G eine Inklusion $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} R \hookrightarrow \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ bestimmt. Durch Hintereinanderschaltung erhält man einen Funktor $G \circ F$: $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \to \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$, der die gewünschte Einbettung $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \hookrightarrow \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\Omega]$ gibt. ∎

6.20. Wir geben als Ergänzung zu dem vorangegangenen Beweis noch die Brennersche Definition eines Funktors $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \to \mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X,Y]/(X^2,Y^3)$ an, der eine Inklusion von Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte induziert. ([**Bre**]; eine ähnliche Konstruktion geben Gel'fand und Ponomarev in [**GePo**].)

Wir denken uns dazu beide Modulkategorien durch Paare von Matrizen repräsentiert. Die Aufgabe besteht also darin, einem Paar (S,T) beliebiger $r \times r$-Matrizen ein Paar (A,B) kommutierender $s \times s$-Matrizen mit $A^2 = B^3 = \mathbf{0}$ in geeigneter Weise funktoriell zuzuordnen. Dies gelingt für $s = 8r$, indem man A und B als 8×8-Blockmatrizen mit $r \times r$-Matrizen als Einträgen durch

$$A := \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&S\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&T\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

definiert. Homomorphismen aus $\mathrm{mod}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle$ gehen entsprechend dieser Blockstruktur in achtfache direkte Summen ihrer selbst (also in Diagonalenblockform) über. Man verifiziert sofort $AB = BA$ und $A^2 = B^3 = \mathbf{0}$.

Man zeigt dann, daß zwei Paare (A,B) und (A',B'), die wie oben aus (S,T) und (S',T') hervorgehen, genau dann simultan konjugiert sind, wenn dies für (S,T) und (S',T') der Fall ist. (Mit einer längeren Rechnung folgt aus $MA' = AM$ und $MB' = BM$ mit einer $8r \times 8r$-Matrix M, daß M bezüglich der 8×8-Blockstruktur eine obere Dreiecksmatrix mit acht gleichen $r \times r$-Diagonalenblöcken M_0 ist und $M_0 S' = SM_0$ sowie $M_0 T' = TM_0$ gilt.) Dieselbe Rechnung zeigt durch die Betrachtung von Endomorphismenringen, daß (A,B) unzerlegbar ist, wenn (S,T) unzerlegbar ist. Also erhält man die gewünschte Einbettung

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \hookrightarrow \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X,Y]/(X^2,Y^3) .$$

Wir kehren jetzt zu den Darstellungen der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b und ihren assoziierten Vektorraumbündeln auf dem Komplement $\tilde{X}-E$ der exzeptionellen Kurve in der minimalen Auflösung $\tilde{X}$ einer Singularität vom Typ El(b) zurück. Unser Interesse gilt den unipotenten Darstellungen von H_b, deren assoziierte Bündel Pull-backs von direkten Summen unzerlegbarer Grad-0-Bündel (mit holomorphen Schnitten) auf E bezüglich $\tilde{X}-E \to E$ sind (Theorem 6.15). Wegen 5.7 gibt es bei den unipotenten Darstellungen also nur abzählbar unendlich viele Isomorphietypen von assoziierten Bündeln.

Unser Ziel ist, für ein fest vorgegebenes unzerlegbares Bündel solcher Gestalt alle unipotenten Darstellungen von H_b zu bestimmen, die dazu Anlaß geben. Das ist nach 5.7 und 6.15(2iii) gleichbedeutend zur Klassifikation aller unipotenten Darstellungen eines festen Ranges $r \geq 1$, deren assoziierte Bündel unzerlegbar sind.

<u>Unipotente Darstellungen.</u> In diesem Abschnitt werden ausschließlich unipotente Darstellungen der Heisenberg-Gruppe H_b und ihre assoziierten Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ betrachtet. In einem ersten Schritt werden die unipotenten Darstellungen von H_b zu den nilpotenten Darstellungen der dreidimensionalen komplexen Heisenberg-Liealgebra in Beziehung gesetzt.

<u>Definition 6.21:</u> Die dreidimensionale komplexe <u>Heisenberg-Liealgebra</u> h wird durch $h := \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}c$ mit den definierenden Relationen

$$[a,b] = c, \quad [a,c] = 0 \quad \text{und} \quad [b,c] = 0$$

erklärt. (h ist also eine nilpotente Liealgebra über $\mathbb{C}$.)

<u>Proposition 6.22:</u> Für jedes $b \geq 1$ entsprechen die Isomorphieklassen der Darstellungen der Heisenberg-Liealgebra h in den nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen bijektiv den Isomorphieklassen von Darstellungen der Heisenberg-Gruppe H_b in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen. Dazu wird einer nilpotenten Darstellung $R: h \to \mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$ eine unipotente Darstellung $\sigma_R: H_b \to \mathrm{Unip}_r(\mathbb{C})$ zugeordnet, indem man definiert:

$$\sigma_R(\alpha) := \exp R(a), \quad \sigma_R(\beta) := \exp R(b) \quad \text{und} \quad \sigma_R(\gamma) := \exp R(\tfrac{1}{b}c).$$

(Die Beschränkung auf unipotente Darstellungen ist wesentlich, weil eine nicht unipotente Matrix $\rho(\gamma)$ nicht als Bild $\exp R(\frac{1}{b}[a,b])$ eines zwangsläufig nilpotenten Kommutators, vgl. 6.36, dargestellt werden kann.)

Beweis: Die Hausdorff-Formel ([GAL, Chapitre II.§6]),

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + (\text{höhere Kommutatoren})),$$

zeigt, daß die einer nilpotenten Darstellung R von h zugeordnete unipotente Darstellung σ_R die erforderlichen (mult.) Kommutatorrelationen erfüllt:

$$[\sigma_R(\alpha), \sigma_R(\beta)] = \sigma_R(\gamma)^b \quad \text{und} \quad [\sigma_R(\alpha), \sigma_R(\gamma)] = [\sigma_R(\beta), \sigma_R(\gamma)] = \mathbf{1}.$$

Die Umkehrung zu $R \mapsto \sigma_R$ definiert man, indem einer unipotenten Darstellung σ von H_b eine nilpotente Darstellung $R_\sigma : h \to \mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$ durch

$$R_\sigma(a) := \log \sigma(\alpha), \quad R_\sigma(b) := \log \sigma(\beta) \quad \text{und} \quad R_\sigma(c) := b \cdot \log \sigma(\gamma)$$

zugeordnet wird, wobei log die im Beweis von Lemma 6.11 eingeführte Logarithmusreihe ist. Wiederum verifiziert man die Lie-Relationen $[R_\sigma(a), R_\sigma(b)] = R_\sigma(c)$ und $[R_\sigma(a), R_\sigma(c)] = [R_\sigma(b), R_\sigma(c)] = 0$ mit der Hausdorff-Formel, weil log auf den unipotenten Matrizen zu exp invers ist. ∎

Als Konsequenz aus 6.22 erhält man, daß sich die unipotenten Darstellungen von H_b $(b \geq 1)$ und die unipotenten Darstellungen von H_1 bis auf Isomorphie eineindeutig entsprechen. Theorem 6.13 zeigt, daß dies für beliebige Darstellungen von H_b und H_1 nicht der Fall ist.

Bemerkung 6.23: Die Proposition 6.22 gestattet es, von dem zu einer nilpotenten Darstellung $R: h \to \mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$ assoziierten Vektorraumbündel F_R auf $\tilde{X}$-E $\approx |\mathcal{O}_E(-bP)| - 0_E$ $(b \geq 1)$ zu sprechen, indem man zuerst zu der zugehörigen Darstellung $\sigma = \sigma_R$ von H_b in den unipotenten Matrizen übergeht und dann $F_R := F_\sigma$ bildet.

Um die endlichdimensionalen nilpotenten Darstellungen der Heisenberg-Liealgebra h beschreiben zu können, sind eine Reihe von Bezeichnungen erforderlich.

Bezeichnungen 6.24: (1) Mit N und D seien die beiden folgenden r×r-Matrizen bezeichnet:

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j-1}), \quad D := \begin{pmatrix} r-1 & & & & \\ & r-2 & & & \\ & & r-3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = ((r-i)\delta_{ij})$$

(2) Es sei k eine ganze Zahl mit $[\frac{r}{2}] \leq k \leq r-1$ und es seien $a_1,\dots,a_k$ und $c_{k+1},\dots,c_{r-1}$ komplexe Zahlen mit $c_{k+1} \neq 0$. Dann wird eine Darstellung $S = S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ von h in $\mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$ definiert durch

$$S(a) := \sum_{i=1}^{k} a_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} c_i N^{i-1} D,$$

$$S(b) := (a_1 - 1)\omega N + \sum_{i=2}^{k} \omega a_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} \omega c_i N^{i-1} D = \omega S(a) - \omega N,$$

$$S(c) := [S(a), S(b)].$$

(Dabei sei ω das Gittererzeugende von $\Omega = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\omega$ mit $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ aus 6.1.)

Anmerkungen 6.25: (1) Im Spezialfall $k = r-1$ wird die in 6.24(2) definierte Darstellung S mit $S(a_1,\dots,a_{r-1})$ bezeichnet. Weil dann keine Koeffizienten c_i in die Definition eingehen, entfällt auch die Bedingung $c_{k+1} \neq 0$.

(2) Die Verwendung des Symbols $S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ im folgenden soll stets die Aussage $c_{k+1} \neq 0$ beinhalten.

(3) Auf Grund der (additiven) Kommutatorrelationen $[N, N^{i-1}D] = N^i$ für alle $i \geq 1$, die man trivial durch Induktion bestätigt, erhält man für die oben eingeführte Darstellung $S = S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$:

$$S(c) = [S(a), S(b)] = [S(a), \omega S(a) - \omega N] = \omega [N, S(a)] = \sum_{i=k+1}^{r-1} \omega c_i N^i.$$

Der Rang der Matrix $S(c)$ ist also $r-k-1$, womit eine intrinsische Charakterisierung des Index k vorliegt. Wegen $k \geq [\frac{r}{2}]$ ist im übrigen $N^i \cdot N^{j-1} D = 0$ für beliebige $i,j \geq k+1$, so daß $S(c)$ trivialerweise sowohl mit $S(a)$ als auch mit $S(b)$ kommutiert. Damit ist bestätigt, daß $S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ eine Darstellung der Heisenberg-Liealgebra h definiert.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren zu können, das auf alten Ergebnissen von N. McCoy fußt und zugleich einen verwandten Satz von A. Morimoto verallgemeinert (Vgl. [Mc] und [Mo, Lemme 8.3]. Die hier benötigten Sätze aus McCoys Arbeit werden in einem Anhang zu diesem Kapitel zusammengestellt und bewiesen.)

Theorem 6.26: (1) Zu jeder r-dimensionalen nilpotenten Darstellung R der Heisenberg-Liealgebra h, deren assoziiertes Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$-E unzerlegbar ist, gibt es eine ganze Zahl k mit $[\frac{r}{2}] \leq k \leq r-1$ und komplexe Zahlen $a_1,\dots,a_k,c_{k+1},\dots,c_{r-1}$ mit $c_{k+1} \neq 0$ (sofern $k<r-1$), so daß die Darstellungen R und $S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ zueinander konjugiert sind. Umgekehrt ist zu jeder Darstellung $S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ ein unzerlegbares Vektorraumbündel assoziiert.

(2) Je zwei Darstellungen $S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ und $S(a_1',\dots,a_{k'}'|c_{k'+1}',\dots,c_{r-1}')$ sind genau dann zueinander konjugiert, wenn $k=k'$ gilt und alle Koeffizienten übereinstimmen: $a_1=a_1',\dots,a_k=a_k',c_{k+1}=c_{k+1}',\dots,c_{r-1}=c_{r-1}'$.

Damit sind auch die unipotenten Darstellungen von H_b, die zu unzerlegbaren Bündeln auf $\tilde{X}$-E Anlaß geben, vollständig klassifiziert. Die topologische Struktur dieses Raumes von Darstellungen wird im folgenden Abschnitt untersucht werden.

Beweis von Theorem 6.26: Für eine nilpotente Darstellung $R: h \to \mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$ der Heisenberg-Liealgebra wird zur Abkürzung $A=(a_{ij}):=R(a)$ und $B=(b_{ij}):=R(b)$ geschrieben. Der Beweis wird in mehreren Schritten erbracht.

(I) Behauptung: Das zu R assoziierte Vektorraumbündel F_R auf $\tilde{X}$-E ist genau dann unzerlegbar, wenn für die Nebendiagonalelemente $b_{i,i+1} \neq \omega a_{i,i+1}$ für alle $i=1,\dots,r-1$ gilt. (Insbesondere impliziert die Unzerlegbarkeit von F_R also, daß in jeder oberen Nebendiagonalposition wenigstens eine der beiden Matrizen A,B einen nichtverschwindenden Eintrag besitzt.)

Der Beweis wird durch Induktion über r geführt. Für $r=1$ ist nichts zu zeigen. Jetzt sei R eine r-dimensionale nilpotente Darstellung von h und R' die daraus durch Weglassen von erster Zeile und erster Spalte entstehende nilpotente Darstellung der Dimension r-1. Nach Induktionsannahme sei die Behauptung für die Dimension r-1 schon bewiesen, so daß zu zeigen ist:

$$F_R \text{ unzerlegbar} \quad \Leftrightarrow \quad F_{R'} \text{ unzerlegbar und } b_{12} \neq \omega a_{12}.$$

Weil R' die durch R auf einem Faktorraum des $\mathbb{C}^r$ bestimmte Darstellung ist, und das selbe für die Darstellungen $\sigma_{R'}$ und σ_R der Gruppe H_b gilt, verfügen wir über Extensionen assoziierter Bündel auf $\tilde{X}$-E und auf E

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}-E} \to F_R \to F_{R'} \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to \mathcal{O}_E \to F_R \to F_{R'} \to 0, \qquad (*)$$

wobei F_R das wie in Theorem 6.15 bzw. Proposition 6.10 (im Sinne von 6.23) definierte Bündel auf E ist, das durch den Thetafaktor

$$J(m+n\omega,z) = \exp R(m\alpha)\cdot\exp R(nb)\cdot\exp R((nz+\frac{n(n-1)}{2}\omega)c)$$

bezüglich der Überlagerung $\mathbb{C}\to E$ bestimmt wird. Den $F_{R'}$ kennzeichnenden Thetafaktor erhält man aus J durch Streichung von erster Zeile und erster Spalte, weil J nur Werte in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen annimmt, was die zweite Sequenz (*) bestätigt.

Ist F_R und damit auch F_R unzerlegbar, so folgt nach den Sätzen von Atiyah ([**At₂**, Lemma 15(ii)]), daß auch $F_{R'}$ als Quotient von F_R nach dessen eindeutig bestimmtem* trivialen Untergeradenbündel unzerlegbar ist. Ist umgekehrt $F_{R'}$ unzerlegbar, so folgt aus [**At₂**, Lemma 16 & proof], daß F_R genau dann unzerlegbar ist, wenn (*) nicht spaltet.

Wir nehmen jetzt an, daß $F_{R'}$ unzerlegbar ist. Spaltung von (*) ist äquivalent zu der Existenz eines von $\mathcal{O}_E \hookrightarrow F_R$ (aus (*)) unabhängigen holomorphen Schnittes, dessen Restklasse in $F_{R'}$ das triviale Unterbündel darin erzeugt. (Denn (*) spaltet nach Atiyah dann und nur dann, wenn die Corandabbildung $H^0(E,F_{R'})\to H^1(E,\mathcal{O}_E)$ verschwindet, wenn sich also Schnitte von $F_{R'}$ zu Schnitten von F_R liften lassen.) Ein solcher Schnitt wird - in dem Kontext der Thetafaktoren - durch eine holomorphe Abbildung

$$f = (f_1,f_2,\ldots,f_r)^t : \mathbb{C}\to\mathbb{C}^r \quad \text{mit} \quad f(z+g) = J(g,z)f(z) \quad \text{für} \quad z\in\mathbb{C},\ g\in\Omega$$

repräsentiert, wobei f_2 nirgends verschwindet und $f_3=\ldots=f_r=0$ gilt, denn $(c,0,\ldots,0)^t\in\mathbb{C}^{r-1}$ repräsentiert die nichtverschwindenden holomorphen Schnitte in dem unzerlegbaren Grad-0-Bündel $F_{R'}$. Weil $J(g,z)$ in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen liegt, ist die Funktion $f_2(z)$ doppelt-periodisch auf $\mathbb{C}$, also konstant $f_2(z)=c$, und f_1 erfüllt für alle $z\in\mathbb{C}$ die Gleichungen

$$f_1(z+1) = f_1(z) + a_{12}c \quad \text{und} \quad f_1(z+\omega) = f_1(z) + b_{12}c.$$

Eine solche holomorphe Funktion existiert für $c\neq 0$ dann und nur dann, wenn $b_{12}=\omega a_{12}$ gilt. (Aus den beiden Beziehungen folgt, daß f_1 mit z linear wächst, also als ganze holomorphe Funktion selbst linear sein muß. Daraus folgt die Behauptung $b_{12}=\omega a_{12}$ oder $f_1=0$.)

Hiermit ist die Behauptung (I) bewiesen. Die hier angegebene Begründung geht auf Morimoto, [**Mo**, Lemme 6.1], zurück. ⌋

---

*) F_R ist ein Grad-0-Bündel, das bis auf Vielfache nur einen einzigen holomorphen Schnitt besitzt. (Theorem 6.15)

(II) <u>Hilfssatz:</u> Falls R eine nilpotente Darstellung von h der Dimension $r \geq 4$ ist, deren assoziiertes Bündel F_R unzerlegbar ist, so besitzt wenigstens eine der beiden Matrizen A,B maximalen Rang und ist also zu der Jordan-Matrix N konjugiert.

Beweis: Es werden die 4×4-Hauptminoren von R betrachtet, d.h. die 4-dimensionalen Darstellungen R', die durch Auswahl einer auf der Diagonalen liegenden 4×4-Untermatrix (aus aufeinander folgenden Zeilen und Spalten) aus R hervorgehen. Wir schreiben zur Abkürzung:

$$S := R'(a) = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & * & * \\ & 0 & s_2 & * \\ & & 0 & s_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := R'(b) = \begin{bmatrix} 0 & t_1 & * & * \\ & 0 & t_2 & * \\ & & 0 & t_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

(D.h.: $s_i = a_{i_o+i-1,i_o+i}$ und $t_i = b_{i_o+i-1,i_o+i}$ für ein i_o aus $\{1,\dots,r-4\}$ und $i = 1,\dots,4$.) Es folgt

$$R'(c) = [S,T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_{12} & * \\ & 0 & 0 & p_{23} \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad p_{ij} := s_i t_j - s_j t_i .$$

Die rechten oberen Einträge in den Matrizen $[S,[S,T]]=0$ und $[T,[S,T]]=0$ sind dann

$$u := s_1p_{23} - s_3p_{12} = 0 \quad \text{und} \quad v := t_1p_{23} - t_3p_{12} = 0$$

und durch geeignete Linearkombinationen gelangt man zu den Identitäten

$$0 = t_1u - s_1v = t_1s_1p_{23} - t_1s_3p_{12} - s_1t_1p_{23} + s_1t_3p_{12} = p_{13}p_{12},$$
$$0 = t_2u - s_2v = t_2s_1p_{23} - t_2s_3p_{12} - s_2t_1p_{23} + s_2t_3p_{12} = 2p_{12}p_{23},$$
$$0 = t_3u - s_3v = t_3s_1p_{23} - t_3s_3p_{12} - s_3t_1p_{23} + s_3t_3p_{12} = p_{13}p_{23}.$$

Weil nach Teil (I) die drei Paare (s_1,t_1), (s_2,t_2) und (s_3,t_3) alle von $(0,0)$ verschieden sind, folgt aus dem eben Bewiesenen die paarweise Proportionalität dieser Zahlenpaare.

Damit haben beide Matrizen A und B die Eigenschaft, daß die oberen Nebendiagonalelemente entweder alle verschwinden oder sämtlich nicht verschwinden. (Man betrachte der Reihe nach alle 4×4-Hauptminoren!) Weil ersteres nach (I) nicht auf beide Matrizen zugleich zutreffen kann, ist hiermit der Hilfssatz bewiesen. ⌋

(III) Es sei jetzt R eine nilpotente Darstellung von h, für die $R(a)$ zu N konjugiert und F_R unzerlegbar ist.

Nach Satz 6.36 des Anhangs ([Mc, Theorem 3]) ist R bezüglich einer geeigneten Basis des $\mathbb{C}^r$ durch

$$R(a) = N \quad \text{und} \quad R(b) = \sum_{i=1}^{r-1} b_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i N^{i-1} D$$

mit $[\frac{r}{2}] \leq k \leq r-1$ und $d_{k+1} \neq 0$ (sofern $k < r-1$) ausdrückbar. Nach (I) ist überdies $b_1 \neq \omega$ (und $b_1 + d_2 \neq \omega$, wenn $r = 3$ und $k = 1$.) Der Isomorphietyp von R bezüglich Konjugation ist schon durch $b_1,\ldots,b_k,d_{k+1},\ldots,d_{r-1}$ bestimmt. Wir führen deswegen die Bezeichnung $R(b_1,\ldots,b_k|d_{k+1},\ldots,d_{r-1})$ für eine Darstellung R wie oben ein.

<u>Behauptung:</u> Durch Konjugation wird eine bijektive Beziehung hergestellt zwischen:

(a) Darstellungen $S(a_1,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})$ mit $a_1 \neq 0$ und $c_{k+1} \neq 0$ (und $a_1 + c_2 \neq 0$ bei $r = 3$, $k = 1$);

(b) Darstellungen $R(b_1,\ldots,b_k|d_{k+1},\ldots,d_{r-1})$ mit $b_1 \neq \omega$ und $b_{k+1} \neq 0$ (und $b_1 + d_2 \neq \omega$ bei $r = 3$, $k = 1$).

Beweis: Eine Darstellung $S = S(a_1,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})$ wie in (a) erfüllt die eingangs dieses Beweisabschnittes (III) gestellten Anforderungen und ist daher zu einer Darstellung $R = R(b_1,\ldots,b_k|b_{k+1},\ldots,b_{r-1})$ konjugiert. (Der Index k ist in beiden Fällen der selbe, denn bei Konjugation von $[S(a),S(b)] = \sum \omega c_i N^i$ in $[R(a),R(b)] = \sum d_i N^i$ bleibt der Rang unverändert.)

Die Transformation von S in R per Konjugation läßt sich explizit herbeiführen, indem man eine neue Basis des $\mathbb{C}^r$ durch $e_r := (0,\ldots,0,1)^t$ und $e_{r-i} := S(a)^i e_r$ für $i = 1,\ldots,r-1$ definiert. Bezüglich dieser Basis wird $S(a)$ durch N repräsentiert, so daß S die Gestalt von R annimmt (6.36). Drückt man den Vektor $S(b)e_r$ sowohl bezüglich der alten wie auch bezüglich der neuen Basis des $\mathbb{C}^r$ aus, so erhält man die Beziehung

$$(0,\ldots,0,\omega a_k,\ldots,\omega a_2,\omega(a_1-1),0)^t = S(b)e_r = \sum_{i=1}^{r-1} b_i e_{r-i} = \sum_{i=1}^{r-1} b_i S(a)^i e_r ,$$

woraus unter Beachtung des Umstandes, daß $S(a)$ auf die hinteren k+1 Komponenten des $\mathbb{C}^r$ genau wie $\sum a_j N^j$ und $S(a)^i$ entsprechend wie $(\sum a_j N^j)^i$ wirkt, die folgende Beziehung zwischen $(a_1,\ldots,a_k)$ und $(b_1,\ldots,b_k)$ resultiert:

$$b(a(X)) \equiv -\omega X \mod (X^{k+1}) \quad \text{mit} \quad a(X) := \sum_{i=1}^{k} a_i X^i \in \mathbb{C}[X] \quad \text{und}$$

$$b(Y) := \sum_{i=1}^{k} b_i Y^i - \omega Y \in \mathbb{C}[Y].$$

Weil es sich dabei im wesentlichen um das Problem der Bestimmung der k Anfangsterme einer Umkehrfunktion handelt, bestimmen die $(a_1,\ldots,a_k)$ aus $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{k-1}$ umkehrbar eindeutig die $(b_1,\ldots,b_k)$ aus $(\mathbb{C}-\{\omega\})\times\mathbb{C}^{k-1}$.

In analoger Weise liefert der Vektor $[S(a),S(b)]e_r = S(c)e_r$ die Gleichung

$$(\omega c_{r-1},\ldots,\omega c_{k-1},0,\ldots,0)^t = S(c)e_r = \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i e_{r-i} = \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i S(a)^i e_r$$

und daraus

$$d(a(X)) \equiv \omega c(X) \mod (X^r) \quad \text{mit} \quad c(X) := \sum_{i=k+1}^{r-1} c_i X^i \in \mathbb{C}[X] \quad \text{und}$$

$$d(Y) := \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i Y^i \in \mathbb{C}[Y].$$

Auch hier erkennt man sogleich die bijektive Entsprechung zwischen den $(c_{k+1},\ldots,c_{r-1}) \in \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{r-k-2}$ und $(d_{k+1},\ldots,d_{r-1}) \in \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{r-k-2}$, denn $c(X)$ geht aus $d(Y)$ im wesentlichen durch eine umkehrbare Koordinatentransformation hervor.

Damit ist die Behauptung bewiesen. ⌋

(IV) Falls zwar nicht $R(a)$, wohl aber $R(b)$ maximalen Rang besitzt, so läßt sich Teil (III) auf die "gespiegelte" Darstellung R^s anwenden, die durch $R^s(a) := -\frac{1}{\omega}R(b)$ und $R^s(b) := -\omega R(a)$ definiert ist. Diese Darstellungen stehen nach (III) bezüglich Konjugation in bijektiver Korrespondenz zu den Darstellungen $S(1,a_2,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})$ mit $c_{k+1}\neq 0$ (und $c_2\neq -1$ bei $r=3$, $k=1$.) Weil allgemein $S(a_1,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})^s = S(1-a_1,-a_2,\ldots,-a_k|-c_{k+1},\ldots,-c_{r-1})$ gilt, handelt es sich bei den hier betrachteten (nicht gespiegelten) Darstellungen R um die zu $S(0,a_2,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})$ mit $c_{k+1}\neq 0$ (und $c_2\neq 1$ bei $r=3$, $k=1$) konjugierten Darstellungen. ⌋

(V) Wegen des Hilfssatzes (II) ist mit den Teilen (III) und (IV) die Aussage (1) des Theorems 6.26 für die Dimensionen $r\geq 4$ und - trivialerweise - auch $r=1,2$ schon vollständig bewiesen. Für die dreidimensionalen nilpotenten Darstellungen R von h mit unzerlegbaren assoziierten Bündeln ist damit immerhin schon gezeigt, daß diejenigen darunter, für die eine der Matrizen $R(a)$ oder $R(b)$ Rang 2 besitzt, bijektiv den folgenden Darstellungen entsprechen:

$S(a_1,a_2)$ mit $(a_1,a_2) \in \mathbb{C}^2$ und
$S(a_1|c_2)$ mit $(a_1,c_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* - \{(1,-1),(0,1)\}$.

Ist jetzt R eine dreidimensionale Darstellung von h in den nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen, für die $R(a)$ und $R(b)$ beide nur vom Rang 1 sind, und die dem Unzerlegbarkeitskriterium aus (I) genügen, dann kann man R durch Konjugation in eine der folgenden beiden Darstellungen überführen:

$$S(1|-1): \quad a \mapsto \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad b \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -\omega & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(0|1): \quad a \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad b \mapsto \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & -\omega \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Diese beiden Darstellungen sind ihrerseits nicht zueinander konjugiert. Damit ist Teil (1) des Theorems vollständig bewiesen. (Wenn keine der Matrizen $R(a),R(b)$ Rang 2 hat, dann müssen nach (I) beide vom Rang 1 sein!) ⌋

(VI) Wir stellen fest, daß auch die Aussage (2) des Theorems aus dem oben Bewiesenen folgt. Abgesehen nämlich von den beiden zuletzt behandelten dreidimensionalen Ausnahmedarstellungen wurde mit (III) und (IV) die Aussage (2) auf die entsprechende Behauptung über die in (III) definierten Darstellungen $R(b_1,\ldots,b_k|d_{k+1},\ldots,d_{r-1})$ zurückgeführt. Für diese ist sie aber nach Satz 6.36 (im Anhang) richtig. ∎

Die Definition der Darstellungen $S(a_1,\ldots,a_k|c_{k+1},\ldots,c_{r-1})$ in 6.24 wirkt recht willkürlich, was anscheinend auch durch die Komplexität des letzten Beweises bestätigt wird. Am Ende des Anhangs zu diesem Kapitel tragen wir noch eine konzeptionellere Begründung dafür nach, daß die Menge der r-dimensionalen nilpotenten Darstellungen von h, deren assoziierte Bündel unzerlegbar sind und das Erzeugende c des Zentrums von h durch einen Endomorphismus von vorgegebenem Rang $r-k-1$ darstellen, wie $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{r-2}$ bzw. $\mathbb{C}^{r-1}$ (im Falle $k=r-1$) beschaffen ist.

Es sei aber schon hier darauf hingewiesen, daß auf diesem Weg weder eine nennenswerte Vereinfachung der Formulierung des Theorems 6.26 noch seines Beweises erzielbar ist.

Modulräume von Darstellungen. Im vorigen Abschnitt wurde die Menge M(r) der Konjugationsklassen von nilpotenten Darstellungen der dreidimensionalen Heisenberg-Liealgebra h, deren assoziierte Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$-E unzerlegbar sind, dadurch beschrieben, daß jeder Konjugationsklasse $R \in M(r)$ eine eindeutig bestimmte Matrizendarstellung $S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ aus R zugeordnet wurde. Im folgenden wird zusätzlich dazu die Topologie, mit der M(r) in natürlicher Weise ausgestattet ist, durch Limiten konvergenter Folgen und Umgebungsbasen angegeben.

Laut Theorem 6.26 ist

$$M(r) = \coprod_{k=[r/2]}^{r-1} M(r,k), \qquad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned} M(r,k) &:= \{ R \in M(r) \mid R(c) \text{ ist zu } N^k \text{ konjugiert} \} \\ &= \{ S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1}) \mid a_1,\dots,a_k,c_{k+1},\dots,c_{r-1} \in \mathbb{C},\ c_{k+1} \neq 0 \} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{r-k-2} & \text{für } [\frac{r}{2}] \leq k < r-1 \\ \mathbb{C}^{r-1} & \text{für } k = r-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nilpotente Darstellungen R von h in $M_r(\mathbb{C})$ entsprechen eineindeutig Paaren nilpotenter Matrizen $(A,B) \in (M_r(\mathbb{C}))^2$, die den Bedingungen $[A,[A,B]] = \mathbf{0}$ und $[B,[A,B]] = \mathbf{0}$ genügen,* wobei zu einer Darstellung R das Paar $(R(a),R(b))$ korrespondiert. M(r) entsteht also aus der Menge

$$E(r) := \{ (A,B) \in (M_r(\mathbb{C}))^2 \mid A^r = B^r = \mathbf{0},\ [A,[A,B]] = [B,[A,B]] = \mathbf{0} \}$$

durch Quotientenbildung nach der durch simultane Konjugation definierten Äquivalenzrelation. Die natürliche Topologie von M(r) ist demnach die Quotiententopologie aus der Topologie von E(r), die ihrerseits als Unterraumtopologie von der metrischen Topologie auf $(M_r(\mathbb{C}))^2$ ererbt ist.

Die Topologie von M(r) kann durch die konvergenten Punktfolgen eindeutig charakterisiert werden. Es ist leicht einzusehen, daß jede konvergente Folge in M(r) als Bild einer konvergenten Folge in E(r) erhalten werden kann. Andererseits sind Bildfolgen von in E(r) konvergenten Folgen stets wieder konvergent in M(r). Es sei also $(A^{(\mu)},B^{(\mu)}) \in E(r)$, $\mu \in \mathbb{N}$, eine konvergente Folge mit Limes $(A,B) \in E(r)$ und die entsprechenden Darstellungen seien als Elemente von M(r) mit $R^{(\mu)}$, $\mu \in \mathbb{N}$, und R bezeichnet. Dann ist $R \in M(r,k)$ für ein k mit $[\frac{r}{2}] \leq k \leq r-1$. Wegen der Halbstetigkeit des Ranges von $[X,Y]$

*) Dies sind additive Kommutatoren, d.h.: $[X,Y] = XY - YX$.

in Abhängigkeit von X und Y liegen alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder in einer einzigen Menge $M(r,k')$, wobei aber im allgemeinen nur $k' \leq k$ gilt.

Proposition 6.27: Jede konvergente Folge $R^{(\mu)}$ in $M(r)$ mit einem Limes $R \in M(r)$ ist bis auf endlich viele Anfangsglieder von der Form

$$R^{(\mu)} \simeq S(a_1^{(\mu)},\dots,a_{k'}^{(\mu)} | c_{k'+1}^{(\mu)},\dots,c_{r-1}^{(\mu)}) \quad \text{und}$$

$$R \simeq S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1}),$$

wobei $k' \leq k$ gilt und die folgenden Zusammenhänge bestehen:

(i) $a_i = \lim_{\mu\to\infty} a_i^{(\mu)}$ für $i = 1,\dots,k'$;

(ii) $0 = \lim_{\mu\to\infty} c_i^{(\mu)}$ für $i = k'+1,\dots,k$;

(iii) $c_i = \lim_{\mu\to\infty} c_i^{(\mu)}$ für $i = k+1,\dots,r-1$;

(iv) $a_{k'+1},\dots,a_k$ sind beliebige komplexe Zahlen.

Hat man umgekehrt $k' \leq k$ und Koeffizienten $a_1^{(\mu)},\dots,a_{k'}^{(\mu)}, c_{k'+1}^{(\mu)},\dots,c_{r-1}^{(\mu)}$ mit $c_{k'+1}^{(\mu)} \neq 0$ für $\mu \in \mathbb{N}$ sowie $a_1,\dots,a_k, c_{k+1},\dots,c_{r-1}$ mit $c_{k+1} \neq 0$ gegeben, so daß (i)-(iv) erfüllt sind, so definieren diese wie oben eine konvergente Folge $R^{(\mu)}$ mit Limes R in $M(r)$.

Beweis: Wir wollen die Aussagen (i)-(iv) für eine konvergente Folge $R^{(\mu)} \to R$ beweisen. Dazu sei wie in der Vorbemerkung eine entsprechende konvergente Matrizenfolge $(A^{(\mu)},B^{(\mu)})$ mit Limes (A,B) in $E(r)$ definiert.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß A den maximalen Rang $r-1$ besitzt. Es gibt einen Vektor $e_r \in \mathbb{C}^r$ derart, daß die $e_i := A^{r-i}e_r$ für $i = 1,\dots,r$ eine Basis des $\mathbb{C}^r$ bilden. Dann bilden für alle bis auf endlich viele $\mu \in \mathbb{N}$ auch die Vektoren $e_i^{(\mu)} := (A^{(\mu)})^{r-i}e_r$ für $i = 1,\dots,r$ Basen des $\mathbb{C}^r$. Mit T bzw. $T^{(\mu)}$ seien die Transformationen der Standardbasis des $\mathbb{C}^r$ in die Basen (e_i) bzw. $(e_i^{(\mu)})$ bezeichnet. Wir definieren nun

$$(A'^{(\mu)},B'^{(\mu)}) := (T^{(\mu)}A^{(\mu)}T^{(\mu)-1}, T^{(\mu)}B^{(\mu)}T^{(\mu)-1}), \qquad \mu \in \mathbb{N},$$

$$(A',B') := (TAT^{-1}, TBT^{-1}).$$

Nach Wahl der Basen haben wir $A'^{(\mu)} = N$ und $A' = N$ mit den Bezeichnungen von 6.24 und deswegen nach dem Satz 6.36 von McCoy

$$B'^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{r-1} b_i^{(\mu)} N^i + \sum_{i=k'+1}^{r-1} d_i^{(\mu)} N^{i-1} D \quad \text{und} \quad B' = \sum_{i=1}^{r-1} b_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i N^{i-1} D$$

Aus $A^{(\mu)} \to A$ für $\mu\to\infty$ folgt $T^{(\mu)} \to T$ und damit $B'^{(\mu)} \to B'$ für $\mu\to\infty$. Also gilt:

(i') $\lim_{\mu\to\infty} b_i^{(\mu)} = b_i$ für $i=1,\dots,k'$;

(ii') $\lim_{\mu\to\infty} d_i^{(\mu)} = 0$ für $i=k'+1,\dots,k$;

(iii') $\lim_{\mu\to\infty} d_i^{(\mu)} = d_i$ für $i=k+1,\dots,r-1$.

Aus den in Teil (III) des Beweises von Theorem 6.26 hergeleiteten (homöomorphen) Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Darstellungen der Typen $R(b_1,\dots,b_k|d_{k+1},\dots,d_{r-1})$ und $S(a_1,\dots,a_k|c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ folgt dann die Behauptung. $\lrcorner$

Sollte A nicht von maximalem Rang sein, so ist nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten entweder B von maximalem Rang - dann argumentiert man ganz analog oder man bedient sich wieder der Spiegelungsoperation aus Schritt (IV) des Beweises von 6.26 - oder (A,B) bestimmt eine der beiden dreidimensionalen Ausnahmedarstellungen, für die A und B beide vom Rang 1 sind. In diesem Fall reduziert man am einfachsten auf das schon Gezeigte, indem man von $(A^{(\mu)},B^{(\mu)})$ und (A,B) zu $(A^{(\mu)},A^{(\mu)}+B^{(\mu)})$ und (A,A+B) übergeht. (Intrinsisch bedeutet das den Übergang zu den durch den Liealgebren-Automorphismus $\varphi(xa+yb+zc) := (x+y)a+yb+zc$ von h vermittelten neuen Darstellungen $\varphi^*R^{(\mu)}$ und φ^*R.) $\lrcorner$

Die Existenz einer konvergenten Folge $R^{(\mu)} \to R$, sofern für vorgegebene Koeffizienten die Bedingungen (i)-(iv) erfüllt sind, macht man sich sofort klar, indem man die Folge $(A^{(\mu)},B^{(\mu)})$ durch

$$A^{(\mu)} := \sum_{i=1}^{k} a_i^{(\mu)} N^i + \sum_{i=k'+1}^{k} \frac{1}{\mu} N^{i-1}D + \sum_{i=k+1}^{r-1} c_i^{(\mu)} N^{i-1}D ,$$

$$B^{(\mu)} := \omega A^{(\mu)} - \omega N$$

definiert, die gegen den durch

$$A := \sum_{i=1}^{k} a_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} c_i N^{i-1}D , \qquad B := \omega A - \omega N$$

definierten Punkt (A,B) strebt. Die zu den Matrizenpaaren $(A^{(\mu)},B^{(\mu)})$ und (A,B) gehörenden Darstellungen von h sind dann vom gewünschten Typ. Im Falle von $(A^{(\mu)},B^{(\mu)})$ folgt das analog zu (oder mit den Methoden von Schritt (III) des Beweises von 6.26 sogar direkt aus) der Konjugiertheitsaussage von Satz 6.36 im Anhang. ∎

Folgerungen 6.28: (1) Für Folgen in $M(r,k)$, deren Limiten wieder in $M(r,k)$ liegen, erhält man aus 6.27 den gewöhnlichen Konvergenzbegriff der metrischen Topologie von $M(r,k) \simeq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{r-k-2}$ bzw. $M(r,k) \simeq \mathbb{C}^{r-1}$ im Fall $k = r-1$. Damit ist auch die induzierte Topologie von $M(r,k)$ als Unterraum von $M(r)$ die gewöhnliche metrische Topologie von komplexen Mannigfaltigkeiten.

(2) Die Existenz von konvergenten Folgen in $M(r,k')$, die gleichzeitig gegen unendlich viele Limespunkte in $M(r,k)$ mit $k > k'$ streben, zeigt, daß die Topologie von $M(r)$ nicht die Hausdorff-Eigenschaft besitzen kann.

Mit der expliziten Kenntnis der Folgenkonvergenz in $M(r)$ ist die Bestimmung von Umgebungsbasen zu jedem Punkt aus $M(r)$ eine triviale Übung. Man erhält so:

Theorem 6.29: $M(r)$ bezeichne den Raum der Konjugationsklassen von r-dimensionalen nilpotenten Darstellungen der Heisenberg-Liealgebra h, deren assoziierte Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ unzerlegbar sind. In den Bezeichnungen von 6.24 und 6.26 sei $S = S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ ein Repräsentant eines beliebigen Punktes aus $M(r)$. Dann bilden für $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$U_\varepsilon := \coprod_{k'=[r/2]}^{k} \left\{ S(a'_1,\dots,a'_{k'} | c'_{k'+1},\dots,c'_{r-1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} a'_i \in D_\varepsilon(a_i),\ i = 1,\dots,k'; \\ c'_i \in D_\varepsilon(c_i).\ i = k'+1,\dots,r-1 \end{array} \right\}$$

eine Basis der offenen Umgebungen von S, wobei $D_\varepsilon(z)$ die offene Kreisscheibe vom Radius ε um $z \in \mathbb{C}$ bezeichne, $c_i = 0$ für $i = k'+1,\dots,k$ zu verstehen sei und im Sinne von 6.25(2) nur Koeffizienten-$(r-1)$-Tupel mit $c'_{k'+1} \neq 0$ in Betracht gezogen werden.

Der Raum $M(r)$ entspricht nach Proposition 6.22 in homöomorpher Weise dem Raum der Konjugationsklassen von r-dimensionalen unipotenten Darstellungen σ der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b, deren assoziierte Vektorraumbündel auf $\tilde{X}-E$ unzerlegbar sind. Zusammen mit den Theoremen 6.13 und 6.15 ergibt sich so als Corollar zu 6.29:

Theorem 6.30: $R(r,d,\lambda)$ bezeichne die Menge der Konjugationsklassen von r-dimensionalen Darstellungen der diskreten Heisenberg-Gruppe H_b, zu denen ein festes Bündel F auf $\tilde{X}-E$ assoziiert ist, das aus einem Bündel $F_{r,d}(\lambda)$ mit $r \leq d < (b+1)r$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ durch triviale Ausdehnung via $\tilde{X}-E \to E$ entsteht. Als topologischer Raum ist $R(r,d,\lambda)$ homöomorph zu $\mathbb{C} \times M(h)$ mit $h := (r,d)$.

(Zu $F_{r,d}(\lambda)$ siehe 5.6; der Raum $M(h)$ wurde zu Beginn dieses Abschnittes eingeführt. Die natürliche Topologie von $R(r,d,\lambda)$ definiert man analog zu der von $M(r)$.)

Beweis: Es sei ρ eine Darstellung von H_b mit $F_\rho \simeq F$. Dann ist ρ unzerlegbar und nach Theorem 6.13 kann ρ in der Form $\rho = \chi \circledast \tau_{r_o,d_o} \circledast \sigma$ zerlegt werden, wobei $r = hr_o$ und $d = hd_o$ ist, σ eine bis auf Konjugation eindeutig bestimmte Darstellung in den unipotenten oberen Dreiecksmatrizen vom Rang h ist, und χ ein modulo den r_o-ten Einheitswurzeln wohlbestimmter Charakter von Ω ist. Nach Theorem 6.15 ist das zu σ assoziierte Bündel F_σ unzerlegbar, so daß σ eindeutig einer Darstellung $R_\sigma \in M(h)$ entspricht.

Wenn χ_o ein Charakter ist, der in einer Darstellung $\rho = \chi_o \circledast \tau_{r_o,d_o} \circledast \sigma$ mit $F_\sigma = F$ auftritt, dann sind als Folge aus Bemerkung 6.18(1) alle Charaktere χ mit dieser Eigenschaft von der Form

$$\chi(1) = \varkappa_1 e^{2\pi i w} \chi_o(1) \qquad \text{und} \qquad \chi(\omega) = \varkappa_2 e^{2\pi i w \omega} \chi_o(\omega)$$

mit $w \in \mathbb{C}$ und r_o-ten Einheitswurzeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Die Äquivalenzklassen modulo den r_o-ten Einheitswurzeln werden also durch $w \in \mathbb{C}$ in bijektiver Weise parametrisiert.

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Anhang über quasi-kommutierende Matrizen. In diesem Anhang wird eine Zusammenfassung einiger Ergebnisse von N. McCoy ([**Mc**]) mit Beweisen in zum Teil modernerer Sprache gegeben. Im Anschluß daran wird eine Anwendung auf die nilpotenten Darstellungen der Heisenberg-Liealgebra diskutiert.

Definition **6.31:** Zwei $r \times r$-Matrizen A und B werden als quasi-kommutierend bezeichnet, wenn ihr Kommutator $[A,B] = AB - BA$ sowohl mit A als auch mit B kommutiert.

Wir bedienen uns im folgenden wieder der beiden schon früher eingeführten $r \times r$-Matrizen

$$N_r = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} r-1 & & & & \\ & r-2 & & & \\ & & r-3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemma **6.32:** Wenn $A \in M_r(\mathbb{C})$ mit N kommutiert, dann ist $A = \sum_{i=0}^{r-1} a_i N^i$ mit $a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathbb{C}$.

(Aus $AN = NA$ folgt, daß die Anwendung von A auf den i-ten Standardbasisvektor des $\mathbb{C}^r$ gleich der Anwendung von N auf das Bild des (i+1)-ten Basisvektors unter A ist. Daraus ergibt sich die behauptete Struktur von A.)

Lemma **6.33:** Die Jordansche Normalform der Matrix $N^k \in M_r(\mathbb{C})$ besteht aus q Jordanblöcken der Dimension p+1 und k-q Jordanblöcken der Dimension p, wenn $r = pk + q$ mit $0 \leq q < k$ geschrieben wird.

(Die Bilder der k Basisvektoren $e_{r-k+1}, e_{r-k+2}, \dots, e_r$ der Standardbasis des $\mathbb{C}^r$ unter den Potenzen $(N^k)^i$ für $i \geq 0$ spannen die zu den unzerlegbaren Jordanblöcken gehörigen Unterräume auf. Man verifiziert ohne Mühe die behaupteten Dimensionen.)

6.34. Spurmorphismen. (Siehe auch [**ALG**, Chapitre II, §4.3].) Es sei Z eine nilpotente $r \times r$-Matrix mit Jordanscher Normalform $N_{r_1} \oplus N_{r_2} \oplus \dots \oplus N_{r_k}$, wobei gleich $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k$ angenommen werde. Dann prägt Z dem Vektorraum $\mathbb{C}^r$

die Struktur eines $\mathbb{C}[X]$-Torsionsmoduls auf, indem X durch Z auf $\mathbb{C}^r$ operiert. Wir schreiben V für den $\mathbb{C}^r$ mit der $\mathbb{C}[X]$-Modulstruktur. Eine mit Z kommutierende Matrix A ist dann nichts anderes als ein $\mathbb{C}[X]$-Modulendomorphismus von V. Weil V kein projektiver $\mathbb{C}[X]$-Modul ist, kann man einem solchen Endomorphismus A im allgemeinen keine in $\mathbb{C}[X]$ definierte Spur zuordnen. Hingegen ist $V' := V/X^{r_k}\cdot V$ sogar ein freier Modul vom Rang k über dem Ring $R := \mathbb{C}[X]/(X^{r_k})$, auf dem X wie $N_{r_k}^{\oplus k}$ operiert. Der durch A in V' induzierte Endomorphismus besitzt somit eine <u>Spur</u> $\mathrm{Tr}_R(A)$ in R.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Sätze von McCoy formulieren.

<u>Satz 6.35</u> (McCoy, [**Mc**, Theorem 2]): Genau dann ist eine Matrix $Z \in M_r(\mathbb{C})$ der Kommutator $[A,B]$ zweier quasi-kommutierender Matrizen $A,B \in M_r(\mathbb{C})$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Z ist nilpotent;

(ii) Für die Jordansche Normalform $Z \simeq N_{r_1} \oplus N_{r_2} \oplus \dots \oplus N_{r_k}$ mit $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k$ gilt $0 \leq r_i - r_{i+1} \leq 1$ für alle $i = 1,\dots,k-1$ und es gilt $r_k = 1$.

<u>Beweis:</u> Wir begründen zunächst die Notwendigkeit.

(i) Weil Z mit A und B vertauscht, zerfallen A,B,Z simultan bezüglich der Gewichtszerlegung von Z. Jede Gewichtskomponente von Z hat als Kommutator die Spur 0 (in $\mathbb{C}$) und damit das Gewicht 0. Folglich besitzt Z als einzigen Eigenwert 0, ist also nilpotent.

(ii) Weil Z nilpotent ist, gibt es eine Jordanzerlegung $Z \simeq N_{r_1} \oplus N_{r_2} \oplus \dots \oplus N_{r_k}$ mit $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k$, die $V := \mathbb{C}^r$ als $\mathbb{C}[X]$-Modul ausweist, der zu $V_{r_1} \oplus \dots \oplus V_{r_k}$ mit $V_s := \mathbb{C}[X]/(X^s)$ isomorph ist. Die $\mathbb{C}[X]$-Homomorphismen A und B kann man entsprechend als $k \times k$-Matrizen (A_{ij}) und (B_{ij}) mit Einträgen

$$A_{ij}, B_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[X]}(V_{r_j}, V_{r_i}) \simeq \begin{cases} X^{r_i - r_j}\mathbb{C}[X]/(X^{r_i}) & \text{für } i \leq j \\ \mathbb{C}[X]/(X^{r_i}) & \text{für } i > j \end{cases} \tag{*}$$

auffassen.

Wir nehmen jetzt an, daß $r_\mu - r_{\mu+1} \geq 2$ für einen Index μ gilt und betrachten den (μ,μ)-Eintrag im Kommutator $[A,B]$:

$$[A,B]_{\mu\mu} = \sum_{i=1}^{k} A_{\mu i}B_{i\mu} - \sum_{i=1}^{k} B_{\mu i}A_{i\mu} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{k} (A_{\mu i}B_{i\mu} - B_{\mu i}A_{i\mu})$$

(Die besondere Struktur, die $A_{\mu\mu}$ und $B_{\mu\mu}$ nach Lemma 6.32 besitzen, impliziert hier $A_{\mu\mu}B_{\mu\mu} - B_{\mu\mu}A_{\mu\mu} = 0$.)

Nach Annahme und wegen (*) sind alle verbleibenden Summanden $A_{\mu i}B_{i\mu}$ und $B_{\mu i}A_{i\mu}$ durch X^2 teilbar, was im Widerspruch dazu steht, daß $Z = [A,B]$ im Sinne von (*) eine k×k-Diagonalmatrix mit Einträgen $= X$ in der Diagonalen ist.

Es ist noch $r_k = 1$ nachzuweisen. Dazu betrachten wir einfach die Spur $Tr_R(Z)$ in $R := \mathbb{C}[X]/(X^{r_k})$. Weil Z eine k×k-Diagonalmatrix mit X-Einträgen ist, gilt $Tr_R(Z) = kX$. Andererseits ist $Tr_R(Z) = 0$ als die Spur eines Kommutators. Die Gleichung $kX = 0$ kann in R nur dann erfüllt sein, wenn $r_k = 1$ ist. ⌋

Um zu begründen, daß die Bedingungen (i) und (ii) auch hinreichend für die Existenz quasi-kommutierender Matrizen A,B mit $[A,B] = Z$ sind, geben wir zwei solche Matrizen als k×k-Blockmatrizen im Sinne von (*) an:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & X & & & \\ & 0 & X & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & X \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & k-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

<u>Satz 6.36</u> (McCoy, [**Mc**, Theorem 3]): Es sei $A = N \in M_r(\mathbb{C})$. Die mit A quasi-kommutierenden Matrizen $B \in M_r(\mathbb{C})$ sind genau die Matrizen der Form

$$B = \sum_{i=0}^{r-1} b_i N^i + \sum_{i=[r/2]+1}^{r-1} d_i N^{i-1} D$$

mit beliebigen Koeffizienten $b_i, d_i \in \mathbb{C}$.

Sind B und B' zwei solche Matrizen, die durch Koeffizienten (b_i, d_i) und (b_i', d_i') bestimmt sind, so ist das Paar (A,B) genau dann zu dem Paar (A,B') simultan konjugiert, wenn $d_i = d_i'$ für $i = [\frac{r}{2}]+1,\dots,r-1$ gilt und $b_i = b_i'$ für $i = 1, \dots, k$, wobei k durch $d_{k+1} \neq 0$ und $d_i = 0$ für alle $i \leq k$ bestimmt ist. (Oder $k = r-1$, wenn alle d_i verschwinden.)

<u>Beweis</u> (McCoy): (I) Matrizen A und B von dem angegebenen Typ sind trivialerweise quasi-kommutativ: Man begründet dies genau wie in 6.25(3). ⌋

(II) Nun sei $A = N$ und B eine mit A quasi-kommutierende Matrix. Mit Z werde der Kommutator $[A,B]$ bezeichnet, der insbesondere mit A vertauscht und daher nach Lemma 6.32 die Form $Z = \sum d_i N^i$ mit $d_i \in \mathbb{C}$ annimmt. Gäbe es ein $d_i \neq 0$ mit $i \leq [\frac{r}{2}]$, so würde die Jordansche Normalform von Z nach 6.33 ausschließlich aus Blöcken von Dimensionen ≥ 2 aufgebaut sein, was im Widerspruch zur Bedingung (ii) aus Satz 6.35 stünde. Folglich ist

$$Z = \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i N^i \qquad \text{mit } d_i \in \mathbb{C},\ d_k \neq 0 \text{ und } [\tfrac{r}{2}] \leq k \leq r-1.$$

Die Standardbasis des $\mathbb{C}^r$ werde für das Folgende mit $e_1, \ldots, e_r$ bezeichnet. Aus $Be_i = BNe_{i+1} = NBe_{i+1} + Ze_{i+1}$ folgt, daß die i-te Spalte von B gleich der Summe aus der (i+1)-ten Spalte von Z und der um eine Position nach oben verschobenen (i+1)-ten Spalte von B ist. Benutzt man dies zur rekursiven Bestimmung von B, beginnend mit der letzten Spalte $Be_r = (b_{r-1}, \ldots, b_0)^t$, so ergibt sich die behauptete Gestalt von B. ⌟

(III) Es bleibt die Charakterisierung derjenigen Matrizenpaare (A,B') zu leisten, die aus (A,B) durch simultane Konjugation mit einer invertierbaren Matrix T hervorgehen. Wegen $TAT^{-1} = A$ und $A = N$ folgt aus Lemma 6.32: $T = \sum t_i N^i$ mit $t_0 \neq 0$. Aus den (in trivialer Weise durch Induktion zu beweisenden) Kommutatorrelationen $[N^j, N^{i-1}D] = jN^{i+j-1}$ für alle $i,j \geq 1$ erschließt man leicht, daß sich die Koeffizienten b_i mit $i \geq k+1$ von B durch Konjugation mit solchen Matrizen T nach Belieben abändern lassen, auf alle übrigen Koeffizienten von B aber kein Einfluß genommen werden kann. ⌟

Damit ist der Satz 6.36 bewiesen. ∎

Wenn man den Standpunkt einnimmt, daß Paare (A,B) nilpotenter quasi-kommutierender Matrizen vermöge $R(a) = A$ und $R(b) = B$ den nilpotenten Darstellungen der Heisenberg-Liealgebra h (6.21) entsprechen, dann wäre eine Version von Satz 6.36 zu wünschen, die den Eigenschaften der Matrizen $R(a)$ und $R(b)$, den maximal möglichen Rang zu besitzen, gleiches Recht beimißt.

Wir bezeichnen hierzu mit $\tilde{M}(r,k)$ für $[\frac{r}{2}] \leq k \leq r-1$ die Menge der Konjugationsklassen von Darstellungen $R: h \to \mathrm{Nilp}_r(\mathbb{C})$, für die $R(a)$ oder $R(b)$ zu N konjugiert ist und $R(c) = [R(a), R(b)]$ zu N^k konjugiert ist. Als Anwendung von McCoys Sätzen zeigen wir:

Proposition 6.37: Für $r \geq 4$ und $[\frac{r}{2}] \leq k < r-1$ ist

$$\tilde{M}(r,k) \simeq \prod_{i=2}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(i+1) \times (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k+1) - 0_{\mathbb{P}_1}) \times \prod_{i=k+2}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(i),$$

was als Totalraum des entsprechenden Faserbündels mit Faser $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{r-k-2}$ über $\mathbb{P}_1$ zu verstehen ist. ($0_{\mathbb{P}_1}$ bezeichnet den Nullschnitt.)

Im Falle $r \geq 4$ und $k = r-1$ gilt entsprechend

$$\tilde{M}(r,r-1) \simeq \prod_{i=2}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(i+1).$$

Beweis: Wir führen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$P_m := X \cdot \mathbb{C}[X]/(X^{m+1}) \simeq \mathbb{C}^m \quad \text{und}$$

$$P_m^* := \{ \sum a_i X^i \in P_m \mid a_1 \neq 0 \} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{m-1}$$

Dann werden Darstellungen $R \in \tilde{M}(r,k)$ der Form

$$R(a) = N, \qquad R(b) = \sum_{i=1}^{k} b_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} d_i N^{i-1} D \tag{*}$$

durch Polynome $b(X) := \sum b_i X^i \in P_k$ und $d(X) := \sum d_i X^i \in X^k P_{r-1}^*$ parametrisiert. Wir definieren als nächstes die Räume

$$\begin{array}{ccc} V := P_k \times X^k P_{r-1}^* & \subset & \bar{V} := P_k \times X^k P_{r-1} \\ \cup & & \cup \\ U := P_k^* \times X^k P_{r-1}^* & \subset & \bar{U} := P_k^* \times X^k P_{r-1} \end{array}$$

und verstehen dabei V als den Parameter-Raum der Darstellungen (*) und U als die offene Teilmenge derjenigen Darstellungen, für die zugleich auch $R(b)$ zu N konjugiert ist. Genau entsprechend definieren wir Räume $V' \subset \bar{V}'$ und $U' \subset \bar{U}'$, die mit den Darstellungen der Form

$$R(a) = \sum_{i=1}^{k} a_i N^i + \sum_{i=k+1}^{r-1} c_i N^{i-1} D, \qquad R(b) = N \tag{*'}$$

durch $a(X) := \sum a_i X^i \in P_k$ und $c(X) := \sum c_i X^i \in X^k P_{r-1}^*$ mit V' als Parameter-Raum für $(a(X),c(X))$ verbunden sind.

Den gesuchten Modulraum $\tilde{M}(r,k)$ erhält man offensichtlich aus den beiden Parameterräumen V und V' durch Verkleben der beiden offenen Teilmengen U und U' mit einer durch die Konjugation definierten Identifikation $\Phi: U \xrightarrow{\simeq} U'$. Dabei gilt $\Phi(b(X),d(X)) = (a(X),c(X))$ genau dann, wenn die durch (b,d) definierte Darstellung (*) zu der Darstellung (*') zu (a,c) konjugiert ist. Diese Bedingung läßt sich mit denselben Methoden interpretieren, die im Schritt

(III) des Beweises von 6.26 verwendet wurden, und führt hier zu der Aussage

$$\Phi(b(X),d(X)) = (a(X),c(X)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(b(X)) \equiv X \mod (X^{k+1}) \\ c(b(X)) \equiv -d(X) \mod (X^r) \end{cases}$$

Man sieht, daß die rechts stehenden Bedingungen die Ausdehnung von Φ zu einem bijektiven Morphismus $\bar{\Phi}: \bar{U} \xrightarrow{\simeq} \bar{U}'$ gestatten.

Es seien noch zusätzlich $p: \bar{V} \to \mathbb{C}$ und $p_o: \bar{U} \to \mathbb{C}^*$ die Projektionen, die durch den Linearfaktor des Polynomes in der ersten Komponente bestimmt werden ($p(\sum b_i X^i, \sum d_i X^i) = b_1$ usw.), und $p': \bar{V}' \to \mathbb{C}$, $p_o': \bar{U}' \to \mathbb{C}^*$ seien entsprechend definiert. Wir erhalten mit diesen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
V & \supset & U & \xrightarrow[\simeq]{\Phi} & U' & \subset & V' \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\bar{V} & \supset & \bar{U} & \xrightarrow[\simeq]{\bar{\Phi}} & \bar{U}' & \subset & \bar{V}' \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_o} & & \downarrow{\scriptstyle p_o'} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\
\mathbb{C} & \supset & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}^* & \subset & \mathbb{C} \\
 & & \in & & \in & & \\
 & & z & \longmapsto & 1/z & &
\end{array}$$

Verklebt man nun $\bar{V}$ mit $\bar{V}'$ durch Identifikation von $\bar{U}$ mit $\bar{U}'$ via $\bar{\Phi}$, so erhält man einen Raum $\bar{M}$, der durch die aus p und p' durch Verklebung entstehende glatte Familie $\bar{p}: \bar{M} \to \mathbb{P}_1$ mit Faser $\mathbb{C}^{r-2}$ als der Totalraum eines Vektorraumbündels über $\mathbb{P}_1$ ausgewiesen wird. Aus dem Grothendieckschen Spaltungssatz ([Gro, Théorème 2.1]) folgt $\bar{M} \simeq \amalg\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(t_i)$ mit geeigneten $t_i \in \mathbb{Z}$ und nach Konstruktion wird man bei geeigneter Numerierung der $t_2, \ldots, t_{r-1}$ erhalten, daß

$$\bar{M}(r,k) \simeq \prod_{i=2}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(t_i) \times (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(t_{k+1}) - 0_{\mathbb{P}_1}) \times \prod_{i=k+2}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(t_i).$$

(Für $k = r-2$ oder $r-1$ entfallen der letzte oder die beiden letzten Faktoren.)

Zur Bestimmung der Grade $t_2, \ldots, t_{r-1} \in \mathbb{Z}$ geben wir $r-2$ holomorphe Schnitte in $\bar{M}$ an, die die Spaltung in $\bar{M} \simeq \amalg\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(t_i)$ explizit herbeiführen.* Wir definieren diese Schnitte dazu erst über $\mathbb{C} = \mathbb{P}_1 - \{\infty\}$:

$$s_i: \mathbb{C} \to \bar{U} \subset \bar{M}, \qquad s_i(z) := \begin{cases} (zX + X^i, 0) & \text{für } i = 2, \ldots, k \\ (zX, X^i) & \text{für } i = k+1, \ldots, r-1 \end{cases}$$

(zX ist dabei immer die Basisraum-Koordinate im $\mathbb{P}_1$!)

---

*) Über einer glatten Kurve definiert ein Schnitt in einem Vektorraumbündel auch dort ein Untergeradenbündel, wo er Nullstellen aufweist ([At$_1$, Chapter I.4]). Dies ist hier gemeint.

Zur Beschreibung des Verhaltens der s_i lokal um den Punkt $\infty \in \mathbb{P}_1$ bestimmen wir ihre Transformierten unter $\bar{\Phi}$. Mit $\zeta = 1/z$ gilt für $z \neq 0$:

$$\bar{\Phi}(s_i(z)) = \begin{cases} (\zeta X - \zeta^{i+1}X^i + \dots, 0) & \text{für } i = 2,\dots,k \\ (\zeta X, -\zeta^i X^i) & \text{für } i = k+1,\dots,r-1 \end{cases}$$

(Dabei steht "..." für Terme höherer Ordnung in X, die für $\zeta \to 0$ schneller als ζ^{i+1} gegen 0 streben.) Der Schnitt s_i besitzt also in ∞ eine Nullstelle der Ordnung $i+1$, wenn $i \leq k$ ist, und der Ordnung i, wenn $i \geq k+1$ ist, und erzeugt ein Untergeradenbündel vom selben Grad. Weil diese Bündel in $\zeta = 0$ von den Vektoren $(X^i,0)$ für $i \leq k$ und $(0,X^i)$ für $i \geq k+1$ aufgespannt werden, sind sie überall linear unabhängig und spalten $\bar{M}$ in ein Produkt von Geradenbündeln

$$\bar{M} \simeq \prod_{i=2}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(i+1) \times \prod_{i=k+1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(i).$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Im Hinblick auf die zuvor studierten Räume $M(r,k)$ von nilpotenten Darstellungen R der Heisenberg-Liealgebra h, deren assoziierte Vektorraumbündel auf $\tilde{X}$-E unzerlegbar sind, bedeutet dies wegen des Kriteriums aus Schritt (I) des Beweises von 6.26, daß im Falle $r \geq 4$ gilt:

$$M(r,k) \simeq \tilde{M}(r,k) - (\text{Faser über } \omega \in \mathbb{P}_1).$$

$M(r,k)$ ist (für $r \geq 4$) also der Totalraum eines Faserbündels über $\mathbb{P} - \{\omega\} \simeq \mathbb{C}$ mit Faser $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{r-k-2}$ (bzw. $\mathbb{C}^{r-2}$ bei $k = r-1$). Damit ist ohne weitere Rechnung klar, daß $M(r,k) \simeq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{r-k-2}$ bzw. $M(r,r-1) \simeq \mathbb{C}^{r-1}$ gelten muß!

Die zuletzt gemachte Bemerkung kann man den in 6.24(2) definierten Darstellungen $S = S(a_1,\dots,a_k | c_{k+1},\dots,c_{r-1})$ in gewisser Hinsicht auch ansehen: Interpretiert man die oberen Nebendiagonaleinträge der Matrizen $S(a)$ und $S(b)$ als homogene Koordinaten $(a_1 : (a_1-1)\omega)$ in $\mathbb{P}_1$, so erkennt man sofort, daß hier gerade Schnitte über $\mathbb{P}_1 - \{\omega\}$ definiert worden sind.

7. TORSIONSFREIE MODULN AUF DEN EBENEN KURVENSINGULARITÄTEN $\tilde{E}_8$ UND $\tilde{E}_7$.

Nach einem Satz von H. Knörrer gibt es dann, wenn eine normale zweidimensionale Hyperflächensingularität $(X,0)$ als zweiblättrige, verzweigte Überlagerung der affinen Ebene $(\mathbb{C}^2,0)$ beschrieben werden kann, eine Korrespondenz zwischen den reflexiven Moduln auf $(X,0)$ und den torsionsfreien Moduln auf der den Verzweigungsort $(Y,0)$ der Überlagerung $(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ bildenden ebenen Kurvensingularität. (In beiden Fällen handelt es sich bei den betrachteten Moduln um die maximalen Cohen-Macaulay-Moduln über den jeweiligen lokalen Ringen.) Bei dieser Korrespondenz stehen die nichttrivialen unzerlegbaren Moduln aus $MCM(\mathcal{O}_X)$ und $MCM(\mathcal{O}_Y)$ derart in Beziehung zueinander, daß entweder einem Paar nicht isomorpher reflexiver $\mathcal{O}_X$-Moduln ein einzelner torsionsfreier $\mathcal{O}_Y$-Modul entspricht, oder umgekehrt ein einzelner reflexiver $\mathcal{O}_X$-Modul zu einem Paar von torsionsfreien Moduln auf Y korrespondiert.

In dem vorliegenden Kapitel soll diese Korrespondenz dazu verwendet werden, die Auslander-Reiten-Köcher der torsionsfreien Moduln für diejenigen ebenen Kurvensingularitäten aus den Ergebnissen des Kapitels 5 abzuleiten, die als Verzweigungsorte von zweiblättrigen Überlagerungen einfach-elliptischer Singularitäten über $\mathbb{C}^2$ entstehen. Den Aussagen von 5.3(6) und 5.4 ist zu entnehmen, daß die hierfür in Betracht kommenden einfach-elliptischen Flächensingularitäten genau diejenigen der Typen El(1) und El(2) sind. Der zu einer Flächensingularität vom Typ El(1) gehörige Verzweigungsort wird als (vom Typ) $\tilde{E}_8$ bezeichnet und ist eine ebene Kurvensingularität, die aus drei glatten Zweigen besteht, die sich in einem Punkt tangential von erster Ordnung berühren. Im Falle einer Singularität vom Typ El(2) bezeichnen wir den Verzweigungsort mit $\tilde{E}_7$: hier handelt es sich um vier glatte Zweige mit einem gemeinsamen transversalen Schnittpunkt. (Die beiden letzten Feststellungen gehen aus 5.4 hervor.)

Der Auslander-Reiten-Köcher der torsionsfreien Moduln auf einer Kurvensingularität vom Typ $\tilde{E}_8$ wurde schon früher von E. Dieterich in [Di1] mit gänzlich anderen Methoden bestimmt. Wir bestätigen hier das Resultat von E. Dieterich nur in qualitativer Hinsicht, die Struktur des Auslander-Reiten-Köchers betreffend. Darüber hinaus gewinnt Dieterich durch die von ihm gewählte explizite algebraische Beschreibung Aussagen über die Eigenschaften der unzerlegbaren Moduln, etwa deren Rängen auf den Zweigen der Singularität.

Die Knörrersche Korrespondenz. Wir rekapitulieren zunächst die von uns benötigten Aussagen von H. Knörrer ([**Kn₂**]) über die Beziehungen zwischen den reflexiven Moduln auf einer zweidimensionalen Hyperflächensingularität der Multiplizität 2 und den torsionsfreien Moduln auf ihrem Verzweigungsort über $\mathbb{C}^2$.

Es sei $(X,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ eine durch $f(x,y)+z^2=0$ definierte isolierte Hyperflächensingularität in $\mathbb{C}^3$, wobei x,y,z die Koordinaten des $\mathbb{C}^3$ seien und $f(x,y)$ ein Element aus dem maximalen Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \simeq \mathbb{C}\{x,y\}$. Dann wird durch $f(x,y)=0$ eine ebene Kurvensingularität $(Y,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ definiert, die man als Verzweigungsort der Überlagerung

$$\begin{array}{ccc} (X,0) = \{(x,y,z) \in (\mathbb{C}^3,0) \mid f(x,y)+z^2=0\} & \to & (\mathbb{C}^2,0) \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

auffassen kann. Man verfügt außerdem über eine natürliche Einbettung von $(Y,0)$ in $(X,0)$, wobei $(Y,0)$ in $(\mathbb{C}^3,0)$ durch die beiden Gleichungen $f(x,y)=0$ und $z=0$ definiert wird.

Durch die Abbildung $(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$ wird eine Involution σ auf $(X,0)$ definiert, die der Vertauschung der beiden Blätter der oben eingeführten zweiblättrigen Überlagerung entspricht. Durch σ wird demzufolge der Verzweigungsort $(Y,0) \subset (X,0)$ identisch in sich abgebildet.

Definition 7.1: Es sei rest: $MCM(\mathcal{O}_X) \to MCM(\mathcal{O}_Y)$, $M \mapsto \mathrm{rest}(M) := M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$, der durch die Einbettung $(Y,0) \subset (X,0)$ induzierte Restriktionsfunktor auf den maximalen Cohen-Macaulay-Moduln.

(Wir erinnern daran, daß $MCM(\mathcal{O}_Y)$ aus den torsionsfreien $\mathcal{O}_Y$-Modulgarben besteht; 2.13(1).)

Die Involution σ von $(X,0)$ induziert auf $MCM(\mathcal{O}_X)$ eine involutive Transformation $M \mapsto \sigma^*M$ vom Moduln. Mit τ bezeichnen wir im folgenden wieder die Auslander-Reiten-Translationen in den hier betrachteten Kategorien von maximalen Cohen-Macaulay-Moduln. (2.24)

Satz 7.2 (Knörrer, [**Kn₂**]): Unter den oben gemachten Voraussetzungen gilt:

(1) Es sei $M \not\cong \mathcal{O}_X$ ein nicht-trivialer unzerlegbarer Modul in $MCM(\mathcal{O}_X)$. Dann liegt eine der beiden folgenden Situationen vor:

(a) $M \not\cong \sigma^*M$. Dann ist rest(M) unzerlegbar in $MCM(\mathcal{O}_Y)$ und es gilt rest(M) $\simeq$ rest(σ^*M).

(b) $M \simeq \sigma^*M$. Dann zerfällt rest(M) in $MCM(\mathcal{O}_Y)$ in eine direkte Summe rest(M) $\simeq N \oplus \tau N$, wobei $N \in MCM(\mathcal{O}_Y)$ ein nicht-projektiver unzerlegbarer Modul ist, für den $\tau N \not\cong N$ gilt.

Zudem gilt rest($\mathcal{O}_X$) = $\mathcal{O}_Y$ für den trivialen Modul.

(2) Jeder unzerlegbare Modul $N \in MCM(\mathcal{O}_Y)$ entsteht wie unter (1) beschrieben als direkter Summand der Restriktion eines unzerlegbaren Moduls $M \in MCM(\mathcal{O}_X)$. Ist N Summand sowohl von rest(M) als auch von rest(M') mit unzerlegbaren Moduln $M, M' \in MCM(\mathcal{O}_X)$, so folgt $M \simeq M'$ oder $M \simeq \sigma^*M'$.

(3) Es sei $0 \to M \to M' \to M \to 0$ die in einem unzerlegbaren Modul $M \not\cong \mathcal{O}_X$ endende Auslander-Reiten-Sequenz* von $MCM(\mathcal{O}_X)$. Dann ist die durch Anwendung von rest daraus entstehende Sequenz

$$0 \to \mathrm{rest}(M) \to \mathrm{rest}(M') \to \mathrm{rest}(M) \to 0 \qquad (*)$$

exakt und entsprechend der Fallunterscheidung in (1) gilt:

(a) $M \not\cong \sigma^*M$. (*) ist die in rest(M) endende Auslander-Reiten-Sequenz von $MCM(\mathcal{O}_Y)$.

(b) $M \simeq \sigma^*M$. Es gilt rest(M) $\simeq N \oplus \tau N$ und (*) ist die direkte Summe der in N und in τN endenden Auslander-Reiten-Sequenzen.

(Erläuterung zum Zitat [**Kn₂**]: Die Aussagen des Satzes 7.2 werden von Knörrer durch Übergang von den Kategorien maximaler Cohen-Macaulay-Moduln $MCM(\mathcal{O}_X)$ und $MCM(\mathcal{O}_Y)$ zu den Kategorien $MF(f+z^2)$ und $MF(f)$ von Matrix-Faktorisierungen (siehe dort) der Gleichungen $f+z^2$ und f begründet, was durch [Theorem 1.1] präzisiert wird. Man verfügt in $MF(f+z^2)$ über eine auf den unzerlegbaren Objekten zur Involution σ^* von $MCM(\mathcal{O}_X)$ kompatible Involution T.

In diesem Sinne wird Teil (1) von 7.2 mit [Proposition 2.7ii] bewiesen. Zur Aussage (b), so wie sie hier formuliert wurde, ist noch ergänzend zu begrün-

*) (X,0) ist nach Voraussetzung eine Hyperflächensingularität, besitzt also die Gorenstein-Eigenschaft, so daß die in M endende Auslander-Reiten-Sequenz zugleich dort beginnt; siehe 2.33(1).

den, daß die natürliche Involution T von $MF(f)$ auf nicht-projektiven unzerlegbaren Objekten gerade der Auslander-Reiten-Translation τ von $MCM(\mathcal{O}_Y)$ entspricht. Es ist zunächst eine elementare Feststellung, daß T auf dem Niveau der zugeordneten $\mathcal{O}_Y$-Moduln der Bildung des ersten Syzygienmoduls $\Omega^1 M$ eines Moduls M entspricht. Nach [**AuRei₄**, Theorem 2.1] kann bei einem eindimensionalen Gorenstein-Ring in dieser Weise die Auslander-Reiten-Translation τ beschrieben werden.

Der Teil (2) von Satz 7.2 wird in [**Kn₂**] mit [Proposition 2.7i] unter Verwendung des zuvor dort definierten Funktors $G: MF(f) \to MF(f+z^2)$ bewiesen. Der Teil (3) steht in [Corollary 2.10].)

Um den Knörrerschen Satz 7.2 zur Bestimmung des Köchers $AR(\mathcal{O}_Y)$ tatsächlich einsetzen zu können, ist ein genaues Verständnis der für den in 7.2(1b) zutage tretenden Zerfall charakteristischen Bedingung $M \simeq \sigma^* M$ erforderlich. Wir leisten dies, indem wir einen Zusammenhang mit der in Kapitel 3 entwickelten Beschreibung der reflexiven Moduln durch gewisse lokal freie Garben auf Reduktionszykeln der Auflösung herstellen.

Hierzu bezeichne $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,0)$ eine Auflösung von $(X,0)$, die die Eigenschaft besitze, daß sich die Involution σ von $(X,0)$ zu einer Involution $\tilde{\sigma}$ von $\tilde{X}$ liften läßt, so daß $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ \pi$ gilt. (Etwa für die minimale oder auch die minimale gute Auflösung ist dies als eine simple Konsequenz aus der universellen Eigenschaft garantiert.)

Des weiteren sei $Z \geq E$ ein Reduktionszykel (3.20) auf $(\tilde{X},E)$, von dem angenommen werde, daß er unter $\tilde{\sigma}$ invariant ist: $Z = \tilde{\sigma}^*(Z)$. Dies läßt sich stets erreichen, denn wenn Z' ein zunächst beliebiger Reduktionszykel ist, dann ist auch $Z := Z' + \tilde{\sigma}^*(Z')$ wieder ein Reduktionszykel und Z ist symmetrisch bezüglich $\tilde{\sigma}$.

Wir bezeichnen mit $\hat{\sigma}$ die Einschränkung von $\tilde{\sigma}$ auf das zu $Z \geq E$ gehörende (wieder mit Z bezeichnete) abgeschlossene Unterschema von $\tilde{X}$.

Aus Kapitel 3 übernehmen wir auch noch die Bezeichnung R_Z für den Funktor, der einem reflexiven Modul $M \in MCM(\mathcal{O}_X)$ eine lokal freie Garbe auf Z durch $R_Z(M) := (\pi^* M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_Z$ zuordnet.

<u>Proposition 7.3:</u> Unter den bis hierhin gemachten Annahmen und mit den zuvor eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$M \simeq \sigma^*M \quad \Leftrightarrow \quad R_Z(M) \simeq \tilde{\sigma}^*R_Z(M).$$

<u>Beweis:</u> Durch eine einfache Kette von (tatsächlich äquivalenten) Aussagen:

$$\begin{aligned} M \simeq \sigma^*M \quad &\Rightarrow \quad \pi^*M \simeq \pi^*\sigma^*M \simeq \tilde{\sigma}^*\pi^*M \\ &\Rightarrow \quad (\pi^*M)^{\vee\vee} \simeq (\tilde{\sigma}^*\pi^*M)^{\vee\vee} \simeq \tilde{\sigma}^*(\pi^*M)^{\vee\vee} \\ &\Rightarrow \quad R_Z(M) = (\pi^*M)^{\vee\vee}\otimes\mathcal{O}_Z \simeq (\tilde{\sigma}^*(\pi^*M)^{\vee\vee})\otimes\mathcal{O}_Z \\ &\qquad\qquad \simeq \tilde{\sigma}^*((\pi^*M)^{\vee\vee}\otimes\mathcal{O}_Z) = \tilde{\sigma}^*R_Z(M). \end{aligned}$$

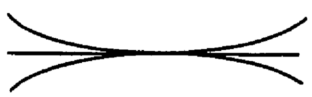
Um von der letzten Aussage zu $M \simeq \sigma^*M$ zurück zu gelangen, bedient man sich des Theorems 3.21: Reflexive Moduln sind durch ihre Bilder unter R_Z bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. ∎

<u>Zusatz:</u> Die Argumentationskette im Beweis von 7.3 liefert, daß allgemein die Aussage $R_Z(\sigma^*M) \simeq \tilde{\sigma}^*R_Z(M)$ richtig ist.

<u>**Die Kurvensingularitäten $\tilde{E}_8$ und $\tilde{E}_7$.**</u> Wir spezialisieren jetzt die zuvor noch in Allgemeinheit festgestellten Aussagen für die beiden Klassen von normalen Flächensingularitäten El(1) und El(2), deren Repräsentanten jeweils als verzweigte, generisch zweiblättrige Überlagerungen des $\mathbb{C}^2$ beschrieben werden können und folglich den eingangs dieses Kapitels gemachten Voraussetzungen über $(X,0)$ genügen.

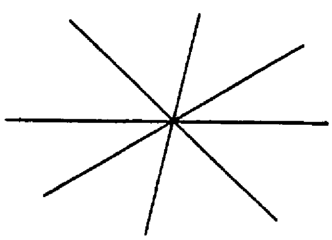
Die als Verzweigungsort $(Y,0)$ in $(\mathbb{C}^2,0)$ auftretende ebene Kurvensingularität bezeichnen wir im Falle einer Singularität $(X,0)$ vom Typ El(1) bzw. El(2) mit $\tilde{E}_8$ bzw. $\tilde{E}_7$. (Beides sind unimodulare Familien von Kurvensingularitäten.) Aus 5.4 erhält man:

<u>$\tilde{E}_8$:</u>



$y(y-x^2)(y-ax^2) = 0 \quad (a \neq 0,1)$

<u>$\tilde{E}_7$:</u>



$xy(y-x)(y-ax) = 0 \quad (a \neq 0,1)$

Zur Beschreibung der Moduln ziehen wir wieder die minimale Auflösung $\pi: (\tilde{X},E) \to (X,0)$ heran, wobei wie in 5.2 $\tilde{X}$ als der Totalraum eines Geradenbündels $\mathcal{O}_E(-bP)$ über der glatten elliptischen Kurve E verstanden werde ($b=1,2$). Als Reduktionszykel Z auf $\tilde{X}$ verwenden wir wie in Kapitel 5 die reduzierte exzeptionelle Kurve E.

Wir haben als erstes die Involution $\hat{\sigma}$ auf der elliptischen Kurve E zu beschreiben, da wir uns ansonsten die Proposition 7.3 nicht zunutze machen können. Zu diesem Zweck geben wir zunächst die Abbildung $\pi: \tilde{X} \to X$ explizit in Koordinaten auf $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-bP)|$ an, die wir bezüglich einer Überdeckung wie in 5.3(3) wählen.

Die Einbettung von (X,0) in $(\mathbb{C}^3,0)$ wird durch drei holomorphe Funktionen x,y,z auf (X,0) vermittelt, die den Restriktionen der Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^3$ entsprechen und zugleich ein Erzeugendensystem für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$ der Hyperflächensingularität (X,0) bilden. Wegen der Quasihomogenität der Singularität (X,0) nach 5.3(8) kann man sich hierzu ohne Einschränkung auf homogene Erzeugende von $\mathcal{O}_{X,0}$ zurückziehen, also den zu $\mathcal{O}_{X,0}$ assoziierten graduierten Ring

$$R := \mathrm{Gr}\, \mathcal{O}_{X,0} = \bigoplus_{\mu=0}^{\infty} R_\mu, \qquad R_\mu := H^0(E,\mathcal{O}_E(\mu bP)),$$

betrachten, wobei homogene Elemente $f \in R_\mu$ vom Grad μ als holomorphe Funktionen auf $\tilde{X}$ aufgefaßt werden können, die entlang von E von der Ordnung μ verschwinden.

Sind $x,y,z \in R$ Erzeugende von $R = \mathrm{Gr}\, \mathcal{O}_{X,0}$ (und damit von $\mathcal{O}_{X,0}$), so wird in diesem Sinne die Auflösung π durch $(x,y,z): \tilde{X} \to \mathbb{C}^3$ gegeben, wobei der Raum X das Bild der Abbildung (x,y,z) in $\mathbb{C}^3$ ist.

Die Elemente von $R_\mu = H^0(E,\mathcal{O}_E(\mu bP))$ entsprechen den meromorphen Funktionen auf E, die in $P \in E$ einen Pol höchstens der Ordnung μb haben und sonst überall holomorph sind, und als solche den meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, die doppelt-periodisch bezüglich des E durch $E \simeq \mathbb{C}/\Omega$ definierenden Gitters Ω sind und Pole höchstens in den Gitterpunkten bis zur Ordnung μb aufweisen. Bekanntlich wird der Ring der Ω-periodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit Polen höchstens in den Punkten von Ω von der konstanten Funktion 1, der Weierstraßschen $\wp$-Funktion und ihrer Ableitung $\wp'$ erzeugt, wobei die jeweiligen Polstellenordnungen in den Gitterpunkten 0, 2 und 3 betragen und die folgende Relation besteht:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{*}$$

Dabei sind g_2 und g_3 durch das Gitter Ω bestimmte Konstanten. ([FT, II, Kapitel 1, §§7,9])

Wir betrachten jetzt der Reihe nach die beiden Fälle von Singularitäten der Klassen El(1) und El(2), wobei wir uns auf die Arbeit [Sa] von K.Saito und die Behandlung des Falles El(1) in [NTS, pp. 55-57] stützen.

<u>7.4. El(1).</u> Nach [Sa, §1] wird $R = \mathrm{Gr}\ \mathcal{O}_{X,0}$ erzeugt von den drei Elementen

$$x \mathrel{\hat{=}} 1 \in R_1, \qquad y \mathrel{\hat{=}} \wp \in R_2, \qquad z \mathrel{\hat{=}} \wp' \in R_3,$$

wobei sich aus (*) durch Homogenisierung mittels x die definierende Relation zu

$$z^2 = 4y^3 - g_2x^4y - g_3x^6$$

ergibt. Auf $\tilde{X} = |\mathcal{O}_E(-P)|$ seien (u,t) wieder analog zu 5.3(3) trivialisierende Koordinaten über $E-\{P\}$ und (ζ,τ) Koordinaten lokal um die Faser über P, wobei die Beziehung $(u,t) = (\zeta,\zeta\tau)$ besteht. Es folgt für π:

$$\pi(u,t) = (t,\wp(u)t^2,\wp'(u)t^3), \qquad \pi(\zeta,\tau) = (\zeta\tau,\wp(\zeta)\zeta^2\tau^2,\wp'(\zeta)\zeta^3\tau^3).$$

Die Involution σ operiert auf $(X,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ durch $(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$. Für $\tilde{\sigma}(u,t) = (u',t')$ bedeutet das

$$(t',\wp(u')t'^2,\wp'(u')t'^3) = \pi\circ\tilde{\sigma}(u,t) = \sigma\circ\pi(u,t) = (t,\wp(u)t^2,-\wp'(u)t^3),$$

woraus sich $\tilde{\sigma}(u,t) = (\hat{\sigma}(u),t)$ mit der Einschränkung $\hat{\sigma}$ von $\tilde{\sigma}$ auf E ergibt und $\hat{\sigma}$ die durch Spiegelung an einem Punkt des Gitters Ω induzierte Involution der elliptischen Kurve E ist, weil $\hat{\sigma}$ $\wp$ in $\wp$ und $\wp'$ in $-\wp'$ überführt.

<u>7.5. El(2).</u> Aus [Sa, §1] erhält man wieder Erzeugende für $R = \mathrm{Gr}\ \mathcal{O}_{X,0}$:

$$x \mathrel{\hat{=}} 1 \in R_1, \qquad y \mathrel{\hat{=}} \wp \in R_1, \qquad z \mathrel{\hat{=}} \wp' \in R_2$$

mit der definierenden Relation

$$z^2 = 4y^4 - g_2x^3y - g_3x^4.$$

Dementsprechend folgt für die Auflösung π mit Koordinaten (u,t) und (ζ,τ) wie oben, wobei jetzt $(u,t) = (\zeta,\zeta^2\tau)$ gilt:

$$\pi(u,t) = (t,\wp(u)t,\wp'(u)t^2), \qquad \pi(\zeta,\tau) = (\zeta^2\tau,\wp(\zeta)\zeta^2\tau,\wp'(\zeta)\zeta^4\tau^2).$$

Weil σ wieder durch $(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$ gegeben wird, folgt mit $\tilde{\sigma}(u,t) = (u',t')$:

$$(t', \wp(u')t', \wp'(u')t'^2) = \pi\circ\tilde{\sigma}(u,t) = \sigma\circ\pi(u,t) = (t, \wp(u)t, -\wp'(u)t^2),$$

so daß man genau wie zuvor $\tilde{\sigma}(u,t) = (\hat{\sigma}(u),t)$ mit der durch Spiegelung an einem Gitterpunkt induzierten Involution $\hat{\sigma}$ der elliptischen Kurve E erhält.

Die Involution $\hat{\sigma}$ von E ist also in beiden uns interessierenden Fällen die durch Spiegelung an dem Basispunkt $P \in E$ definierte kanonische Involution von E. (Kanonisch ist diese Involution in der Tat für $\mathrm{Pic}^\circ E$, wo sie bezüglich der Identifizierung mit dem Basispunkt P der Inversion $\lambda \mapsto \lambda^\vee$ entspricht.) Wir geben jetzt die Operation von $\hat{\sigma}^*$ auf den unzerlegbaren lokal freien Garben von E an. Die unzerlegbaren Vektorraumbündel auf E seien wieder wie in 5.6 nach Atiyah beschrieben, wobei wiederum der Punkt P als Basispunkt für die Definition der Abbildungen $F_{r,d}$ dienen soll.

<u>Proposition 7.6:</u> Für $r \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ gilt: $\hat{\sigma}^* F_{r,d}(\lambda) = F_{r,d}(\lambda^\vee)$.
Insbesondere folgt daraus: $\hat{\sigma}^* F_{r,d}(\lambda) \simeq F_{r,d}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = 1$ in $\mathrm{Pic}^\circ E$.

<u>Beweis:</u> Die Aussage wird bewiesen, indem die in 5.34 skizzierte Atiyahsche Konstruktion der unzerlegbaren Bündel $F_{r,d}(\lambda)$ verfolgt wird.

Für $r=1$ und $d=0$ ist die Aussage trivial, weil $F_{1,0}(\lambda) = \lambda$ gilt und $\hat{\sigma}$ der Dualisierung von Geradenbündeln in $\mathrm{Pic}^\circ E$ entspricht.

Als nächstes begründen wir $\hat{\sigma}^* F_{h,0}(\lambda) \simeq F_{h,0}(\lambda^\vee)$ für $h \geq 1$. Dazu bemerken wir, daß $F_{h,0}(\lambda) \simeq F_h \otimes \lambda$ mit $F_h := F_{h,0}(1)$ gilt, und deswegen

$$\hat{\sigma}^* F_{h,0}(\lambda) \simeq \hat{\sigma}^* F_h \otimes \hat{\sigma}^* \lambda \simeq \hat{\sigma}^* F_h \otimes \lambda^\vee.$$

Es ist also nur $\hat{\sigma}^* F_h \simeq F_h$ zu zeigen. Nach 5.34 sind die F_h induktiv durch nicht spaltende Extensionen $0 \to \mathcal{O}_E \to F_h \to F_{h-1} \to 0$ definiert, wobei $F_1 := \mathcal{O}_E$ gesetzt wird. Weil $\hat{\sigma}^* \mathcal{O}_E \simeq \mathcal{O}_E$ trivial ist, folgt die Behauptung jetzt induktiv durch Anwendung von $\hat{\sigma}^*$ auf eine solche Extension:

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \hat{\sigma}^* F_h \to \hat{\sigma}^* F_{h-1} \to 0.$$

Um die Aussage schließlich auch für beliebige Paare r,d von Rang und Grad zu bestätigen, müssen wir eine Induktion im Sinne des in 5.34 beschriebenen Euklidischen Algorithmus durchführen. Die erste der beiden darein eingehen-den Reduktionen aus 5.34 führt $F_{r,d+r}$ auf $F_{r,d}$ zurück. Wenn die Aussage für $F_{r,d}$ schon bewiesen ist, dann folgt

$$\hat{\sigma}^*F_{r,d+r}(\lambda) \simeq \hat{\sigma}^*F_{r,d}(\lambda) \otimes \hat{\sigma}^*\mathcal{O}_E(P) \simeq F_{r,d}(\lambda^\vee) \otimes \mathcal{O}_E(P) \simeq F_{r,d+r}(\lambda^\vee).$$

Die zweite Reduktion führt $F_{r,d}$ im Falle $0<d<r$ auf $F_{r-d,d}$ zurück, wobei die Beziehung durch Extensionen

$$0 \to d\mathcal{O}_E \to F_{r,d}(\lambda) \to F_{r-d,d}(\lambda) \to 0$$

mit bijektiven Corandabbildungen hergestellt wird. Die Anwendung von $\hat{\sigma}^*$ auf eine solche Sequenz liefert

$$0 \to d\mathcal{O}_E \to \hat{\sigma}^*F_{r,d}(\lambda) \to \hat{\sigma}^*F_{r-d,d}(\lambda) \to 0,$$

woraus die Behauptung für $F_{r,d}$ folgt, wenn sie für $F_{r-d,d}$ schon bekannt ist. Damit ist die Proposition 7.6 bewiesen. ∎

<u>Folgerung 7.7:</u> Für die als Bilder von unzerlegbaren reflexiven $\mathcal{O}_X$-Moduln unter der Abbildung $R_E(M) := (\pi^*M)^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_E$ auftretenden (wie in 5.16 definierten) lokal freien Garben $F'_{r,d}(\lambda)$ auf E gilt

$$\hat{\sigma}^*F'_{r,d}(\lambda) \simeq F'_{r,d}(\lambda^\vee) \quad \text{für alle } r\in\mathbb{N},\ d\in\mathbb{Z} \text{ mit } r\leq d<(b+1)r \text{ und } \lambda\in \mathrm{Pic}^\circ E.$$

(Das ist eine triviale Konsequenz aus der in 5.16 gegebenen Beschreibung der Garben $F'_{r,d}(\lambda)$ und der Proposition 7.6.)

Bevor wir mit diesem Ergebnis und dem Satz 7.2 die (stabilen) Auslander-Reiten-Köcher der Kurvensingularitäten vom Typ $\tilde{E}_8$ und $\tilde{E}_7$ bestimmen, führen wir noch eine neue Bezeichnung ein.

<u>Definition 7.8:</u> Unter einer <u>Röhrenfamilie vom Typ $\tilde{D}_4$</u> versteht man eine über den Punkten von $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ indizierte Familie von Röhren (2.36) der Ränge 1 und 2, wobei zu vier Punkten $p_1,p_2,p_3,p_4 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ Röhren vom Rang 2 und zu allen übrigen Punkten $p\in\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ Röhren vom Rang 1 gehören. (Siehe auch [**Di₁**] und [**TA**].)

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist das folgende Theorem.

Theorem 7.9: Es sei $(Y,0)$ eine ebene Kurvensingularität vom Typ $\tilde{E}_8$ oder $\tilde{E}_7$ und es sei dementsprechend $b=1$ oder $b=2$. Dann ist der stabile Auslander-Reiten-Köcher $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ der torsionsfreien Modulgarben auf $(Y,0)$ eine disjunkte Vereinigung

$$AR_s(\mathcal{O}_Y) = \coprod T_{r,d} ,$$

wobei die Vereinigung über Paare von teilerfremden ganzen Zahlen r,d mit $r \geq 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ gebildet wird und $T_{r,d}$ für jedes derartige Paar r,d ganzer Zahlen eine Röhrenfamilie vom Typ $\tilde{D}_4$ ist.

Bemerkung 7.10: (1) Für Kurvensingularitäten vom Typ $\tilde{E}_8$ ist dieses Theorem zuerst von E. Dieterich bewiesen worden. ([**Di$_1$**])

(2) Nach 2.29 unterscheidet sich der stabile Auslander-Reiten-Köcher $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ von dem vollen Auslander-Reiten-Köcher nur um das Fehlen des projektiv-injektiven Punktes $[\mathcal{O}_Y]$.

(3) Wenn $(Y,0)$ als Verzweigungsort der generisch zweiblättrigen Überlagerung des $(\mathbb{C}^2,0)$ durch eine einfach-elliptische Flächensingularität $(X,0)$ vom Typ El(b), $b=1,2$, aufgefaßt wird, dann können für jede der in $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ vorkommenden Röhrenfamilien $T_{r,d}$ die vier Punkte des parametrisierenden $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, über denen Ausnahmeröhren vom Rang 2 liegen, als die Verzweigungspunkte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion $\wp: E \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ interpretiert werden, wobei E die exzeptionelle elliptische Kurve in der minimalen Auflösung von $(X,0)$ ist. (Insbesondere kann das Doppelverhältnis dieser vier Punkte aus der j-Invarianten der elliptischen Kurve E und damit aus dem analytischen Typ der Singularität $(X,0)$ bzw. $(Y,0)$ bestimmt werden; vgl. [**FT**, II, Kapitel 4, §§3,5].)

Beweis von Theorem 7.9 (unter Einschluß von 7.10(3)): Wir realisieren die ebene Kurvensingularität $(Y,0)$ wie zuvor in 7.4 bzw. 7.5 beschrieben als den Verzweigungsort der zweiblättrigen Überlagerung einer einfach-elliptischen Flächensingularität $(X,0)$ vom Typ El(b) über $(\mathbb{C}^2,0)$.

Der Auslander-Reiten-Köcher $AR(\mathcal{O}_X)$ der reflexiven $\mathcal{O}_X$-Modulgarben ist nach 5.27 eine disjunkte Vereinigung

$$AR(\mathcal{O}_X) = \coprod R_{r,d} ,$$

die über Paare r,d von teilerfremden ganzen Zahlen mit $r \geq 1$ und $r \leq d < (b+1)r$ gebildet wird, wobei $R_{r,d}$ eine über $\mathrm{Pic}^\circ E \simeq E$ indizierte Familie von

Röhren vom Rang 1 ist:

$$\mathcal{R}_{r,d}(\lambda): \quad M_{r,d}(\lambda) \rightleftarrows M_{2r,2d}(\lambda) \rightleftarrows M_{3r,3d}(\lambda) \rightleftarrows M_{4r,4d}(\lambda) \rightleftarrows \dots$$

für $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ (in den Bezeichnungen von 5.25 und 5.27.)

Wir betrachten zunächst eine feste Röhre $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$, wobei $\lambda \in \mathrm{Pic}^\circ E$ kein Zweiteilungspunkt sei, d.h. es wird $\lambda^2 \neq 1$ angenommen. Nach 7.7, 7.3 und 7.2(1a) sind dann die Restriktionen $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ aller in $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ auftretenden Moduln zu $\mathcal{O}_Y$-Moduln unzerlegbar in $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_Y)$. Überdies geben wegen 7.2(3a) alle Pfeile in $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ zu irreduziblen Homomorphismen in $\mathcal{MCM}(\mathcal{O}_Y)$ Anlaß und alle in den Moduln $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ beginnenden oder endenden irreduziblen Homomorphismen kommen so zustande (2.22). Wir erhalten also als Bild der Röhre $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ unter rest eine Röhre vom Rang 1, die eine volle Zusammenhangskomponente im Köcher $\mathcal{AR}(\mathcal{O}_Y)$ ist:

$$\mathrm{rest}(\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)): \quad \mathrm{rest}(M_{r,d}(\lambda)) \rightleftarrows \mathrm{rest}(M_{2r,2d}(\lambda)) \rightleftarrows \mathrm{rest}(M_{3r,3d}(\lambda)) \rightleftarrows \dots$$

Außerdem ergibt 7.2(1a), daß man durch Anwendung von rest auf die Röhre $\sigma^*\mathcal{R}_{r,d}(\lambda) = \mathcal{R}_{r,d}(\lambda^\vee)$, die durch Anwendung des Funktors σ^* aus der Röhre $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ hervorgeht, die selbe Röhre von unzerlegbaren torsionsfreien $\mathcal{O}_Y$-Moduln bekommt: $\mathrm{rest}(\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)) = \mathrm{rest}(\mathcal{R}_{r,d}(\lambda^\vee))$.

Wir betrachten jetzt eine Röhre $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ mit $\lambda^2 = 1$, wobei wir uns im Falle $r = 1$, $d = b$ und $\lambda = 1$ den am Anfang der Röhre stehenden trivialen Modul aus der Röhre $\mathcal{R}_{1,b}(1)$ entfernt denken wollen, damit wir stets über in den Moduln beginnende und endende Auslander-Reiten-Sequenzen verfügen. (Wir haben ja auch lediglich eine Beschreibung des stabilen Auslander-Reiten-Köchers $\mathcal{AR}_s(\mathcal{O}_Y)$ zum Ziel.) In diesem Fall zeigt wiederum die Kombination von 7.7, 7.3 und 7.2(1b), daß die Restriktionen $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ der Moduln aus $\mathcal{R}_{r,d}(\lambda)$ für alle h gleichermaßen in direkte Summen

$$\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda)) \simeq N_{hr,hd}(\lambda) \oplus \tau N_{hr,hd}(\lambda)$$

zerfallen, wobei $N_{hr,hd}(\lambda)$ ein unzerlegbarer Modul ist und $N_{hr,hd}(\lambda)$ nicht zu $\tau N_{hr,hd}(\lambda)$ isomorph ist. Aus der letztgenannten Eigenschaft folgt, daß die Moduln $N_{hr,hd}(\lambda)$ sämtlich nicht Punkten von Rang-1-Röhren im stabilen Auslander-Reiten-Köcher entsprechen können. Nach dem schon in 2.37 erwähnten Struktursatz von E. Dieterich, [Di_2, Theorem 24], muß es sich dann um Punkte von Röhren vom Rang 2 im Köcher $\mathcal{AR}_s(\mathcal{O}_Y)$ handeln.

Wir behaupten, daß man durch die Anwendung des Funktors rest auf die Röhre $R_{r,d}(\lambda)$ (mit $\lambda^2 = 1$) wiederum genau eine Zusammenhangskomponente von $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ erhält, in diesem Falle eine Röhre vom Rang 2. Dazu genügt es zu zeigen, daß alle Summanden aller Moduln $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ in ein und derselben Zusammenhangskomponente des Köchers enthalten sind, denn da man durch Anwendung von rest auf die in $M_{hr,hd}(\lambda)$ endende Auslander-Reiten-Sequenz nach 7.2(3b) die in beiden Summanden von $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ endenden Auslander-Reiten-Sequenzen erhält und entsprechendes für die dort beginnenden Auslander-Reiten-Sequenzen richtig ist, ergibt sich in dieser Weise stets eine volle Zusammenhangskomponente des stabilen Auslander-Reiten-Köchers, weil alle von einem Modul ausgehenden oder dort endenden Pfeile zugleich beschrieben werden.

Die Zusammenhangseigenschaft ist leicht einzusehen: Zunächst liegen die beiden Summanden $N_{hr,hd}(\lambda)$ und $\tau N_{hr,hd}(\lambda)$ von $\mathrm{rest}(M_{hr,hd}(\lambda))$ in einer Zusammenhangskomponente, weil beide als ihre gegenseitigen Auslander-Reiten-Translate in der selben Röhre vom Rang 2 in $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ liegen. Der Umstand, daß es in $AR(\mathcal{O}_X)$ einen Pfeil von $M_{hr,hd}(\lambda)$ nach $M_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda)$ gibt, impliziert aber mit 7.2(3b), daß es in $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ einen Pfeil von $N_{hr,hd}(\lambda)$ zu einem der beiden Moduln $N_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda)$ oder $\tau N_{(h+1)r,(h+1)d}(\lambda)$ gibt. Weil dies für alle h richtig ist, ergibt sich so der Zusammenhang aller Summanden von Restriktionen von Moduln aus $R_{r,d}(\lambda)$ im Köcher $AR_s(\mathcal{O}_Y)$.

Der Teil (2) von Satz 7.2 zeigt, daß in der beschriebenen Weise alle durch Punkte des Köchers $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ repräsentierten Moduln erreicht werden, und daß die einzige dabei auftretende Mehrdeutigkeit darin besteht, daß bei $\lambda^2 \neq 1$ die Rang-1-Röhren $\mathrm{rest}(R_{r,d}(\lambda))$ und $\mathrm{rest}(R_{r,d}(\lambda^\vee))$ übereinstimmen. Wir können die so aus der Röhrenfamilie $R_{r,d}$ erhaltenen Röhren in $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ von den Rängen 1 und 2 also in naheliegender Weise zu einer Familie $T_{r,d}$ zusammenfassen, die über dem Quotientenraum von $\mathrm{Pic}^\circ E$ nach der kanonischen Involution $\lambda \mapsto \lambda^\vee$ indiziert wird. Dabei entsprechen den vier Fixpunkten dieser Involution (i.e. den Zweiteilungspunkten von $\mathrm{Pic}^\circ E$) Röhren vom Rang 2 und allen übrigen Punkten des Quotientenraumes Röhren vom Rang 1. Der so entstehende Quotientenraum ist selbstverständlich zu $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ isomorph (folgt aus der Riemann-Hurwitz-Formel), so daß wir eine Röhrenfamilie $T_{r,d}$ vom Typ $\tilde{D}_4$ definiert haben.

Damit ist das Theorem 7.9 bewiesen. $\lrcorner$

Bedient man sich zusätzlich der schon häufig benutzten Identifizierung von $\mathrm{Pic}^\circ E$ mit E, wobei $P \in E$ auf $1 \in \mathrm{Pic}^\circ E$ abgebildet wird, so erkennt man, daß die zuvor betrachtete Quotientenbildung $E \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion vermittelt werden kann, denn diese nimmt genau in den Zweiteilungspunkten von E ihre Werte mit Multiplizität 2 an, verzweigt dort also. Damit ist auch 7.10(3) bewiesen. ∎

Durch ein gänzlich formales Argument erhält man zuletzt auch Aufschluß über das Aussehen des vollen Auslander-Reiten-Köchers.

Corollar **7.11:** Die Aussage des Theorems 7.9 gilt wörtlich ebenso für den vollen Auslander-Reiten-Köcher $AR(\mathcal{O}_Y)$ einer ebenen Kurvensingularität $(Y,0)$ vom Typ $\tilde{E}_8$ oder $\tilde{E}_7$.

Begründung: $AR(\mathcal{O}_Y)$ geht aus $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ durch die Ergänzung um den einen projektiv-injektiven Punkt $[\mathcal{O}_Y]$ hervor. Wir müssen uns also nur über die von $\mathcal{O}_Y$ ausgehenden und zu $\mathcal{O}_Y$ hinführenden Pfeile Klarheit verschaffen.

Wir schließen an den Beweis von 7.9 an und betrachten die Röhre $R_{1,b}(1)$ im Köcher $AR(\mathcal{O}_X)$. Zur Abkürzung wird $D_i := M_{i,bi}(1)$ wie in 5.24 gesetzt. Die Anwendung des Funktors rest auf die in $MCM(\mathcal{O}_X)$ erklärte Auslander-Reiten-Sequenz $0 \to D_2 \to D_3 \oplus D_1 \to D_2 \to 0$ (5.26) ergibt eine direkte Summe von zwei Auslander-Reiten-Sequenzen

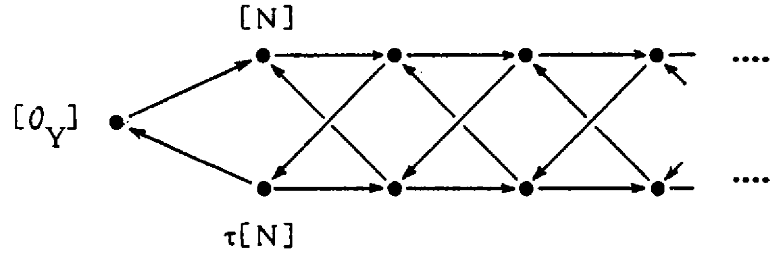
$$0 \to \tau N \to A' \to N \to 0 \qquad \text{und} \qquad 0 \to N \to A'' \to \tau N \to 0$$

mit $\mathrm{rest}(D_2) = N \oplus \tau N$. Aus dem Krull-Schmidt-Theorem folgt, daß $\mathcal{O}_Y = \mathrm{rest}(\mathcal{O}_X)$ wegen $D_1 = \mathcal{O}_X$ ein direkter Summand von A' oder von A'' ist.

Wir nehmen an, daß $\mathcal{O}_Y$ Summand von A' ist. (Der zweite Fall geht genau analog.) Dann erhält man nach 2.22 Pfeile $\tau N \to \mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O}_Y \to N$ in $AR(\mathcal{O}_Y)$. Wir werden zeigen, daß dies die einzigen Pfeile sind, die $\mathcal{O}_Y$ einbeziehen.

Dazu bemerken wir, daß $D_2 \to \mathcal{O}_X$ der einzige Pfeil zu $\mathcal{O}_X$ hin in $AR(\mathcal{O}_X)$ ist. Als Konsequenz daraus und aus [**Kn$_2$**, Corollary 2.9] folgt, daß $\tau N \to \mathcal{O}_Y$ der einzige Pfeil von $AR(\mathcal{O}_Y)$ zu $\mathcal{O}_Y$ hin ist. Mit dem exakten Funktor $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_Y)$ von $MCM(\mathcal{O}_Y)$ (2.28; $(Y,0)$ ist eine Gorenstein-Singularität) folgt sofort, daß es dann auch nur einen von $\mathcal{O}_Y$ ausgehenden Pfeil in $AR(\mathcal{O}_Y)$ geben kann.

Schließlich ist klar, daß die durch $R_{1,b}(1)$ induzierte Röhre vom Rang 2 in $AR_s(\mathcal{O}_Y)$ bei Ergänzung um den Punkt $[\mathcal{O}_Y]$ erneut eine Röhre vom Rang 2 ergibt:



■

LITERATURNACHWEISE.

Die folgende Aufstellung mit Hinweisen auf die im Text zitierten Referenzen ist in die beiden Abteilungen (A) Monographien und (B) Originalarbeiten untergliedert. Für Monographien wurden die Signaturen in Anlehnung an die Titel vergeben und die Aufreihung erfolgt alphabetisch nach den Signaturen. Die Originalarbeiten sind alphabetisch nach den Verfassernamen angeordnet. Die Namen der Autoren liegen auch den Signaturen zugrunde.

Die Signaturen von Monographien unterscheiden sich äußerlich von den übrigen Signaturen darin, daß sie ausschließlich aus Großbuchstaben zusammengesetzt sind.

A. Monographien.

[AG] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52. Springer, New York 1977.

[ALG] Bourbaki, N.: Algèbre. (Nouvelle edition.) Hermann, Paris 1970.

[AKT] Swan, R.G.: Algebraic K-Theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 76. Springer, Berlin 1968.

[AS] Grauert, H., Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren. (Unter Mitwirkung von O. Riemenschneider.) Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 176. Springer, Heidelberg 1971.

[CAS] Grauert, H., Remmert, R.: Coherent Analytic Sheaves. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 265. Springer, Berlin 1984.

[CRT] Matsumura, H.: Commutative Ring Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 8. Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[CS] Iversen, B.: Cohomology of Sheaves. Springer, Berlin 1986.

[DGLG] Helgason, S.: Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Academic Press, New York 1978.

[EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. I. Publ. Math. I.H.E.S. **4** (1960), **8** (1961); auch: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 166. Springer, Berlin 1971. III. Publ. Math. I.H.E.S. **11** (1961), **17** (1963).

[FT] Hurwitz, A., Courant, R.: Funktionentheorie. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 3. Springer, Berlin 1964.

[GAL] Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie. Hermann, Paris 1971, 1973.

[GDT] Altman, A., Kleiman, S.: Introduction to Grothendieck Duality Theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 146. Springer, Berlin 1970.

[GS] Siu, Y.-T., Trautmann, G.: Gap-sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 172. Springer, Berlin 1971.

[HA] Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological Algebra. Princeton University Press, Princeton 1956.

[KM] Herzog, J., Kunz, E. (Hrsg.): Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 238. Springer, Berlin 1971.

[LC] Grothendieck, A.: Local Cohomology. (Notes by R. Hartshorne.) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 41. Springer, Berlin 1967.

[MRT] Curtis, C.W., Reiner, I.: Methods of Representation Theory, Vol. I. John Wiley & Sons, New York 1981.

[NTS] Laufer, H.B.: Normal Two-Dimensional Singularities. Annals of Mathematics Studies, Vol. 71. Princeton University Press, Princeton 1971.

[PAG] Griffiths, P., Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. John Wiley & Sons, New York 1978.

[TA] Ringel, C.M.: Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1099. Springer, Berlin 1984.

[VB] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H.: Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Progress in Mathematics, Vol. 3. Birkhäuser, Basel 1980.

B. Originalarbeiten.

[AnGr] Andreotti, A., Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France **90**, 193-259 (1962).

[Ar_1] Artin, M.: On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. Math. **88**, 129-136 (1966).

[Ar_2] Artin, M.: On the solutions of analytic equations. Invent. Math. **5**, 277-291 (1968).

[Ar_3] Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. I.H.E.S. **36**, 23-58 (1969).

[ArVe] Artin, M., Verdier, J.-L.: Reflexive modules over rational double points. Math. Ann. **270**, 79-82 (1985).

[At_1] Atiyah, M.F.: On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves. Bull. Soc. Math. France **84**, 307-317 (1956).

[At_2] Atiyah, M.F.: Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. **7**, 414-452 (1957).

[At_3] Atiyah, M.F.: Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 181-207 (1957).

[Au] Auslander, M.: Rational singularities and almost split sequences. Trans. Amer. Math. Soc. **293**, 511-531 (1986).

[$AuRei_1$] Auslander, M., Reiten, I.: Representation theory of Artin algebras. III. Almost split sequences. Commun. Algebra **3**, 239-294 (1975).

[$AuRei_2$] Auslander, M., Reiten, I.: Representation theory of Artin algebras. IV. Invariants given by almost split sequences. Commun. Algebra **5**, 443-518 (1977).

[$AuRei_3$] Auslander, M., Reiten, I.: Representation theory of Artin algebras. V. Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms. Commun. Algebra **5**, 519-554 (1977).

[$AuRei_4$] Auslander, M., Reiten, I.: Almost split sequences for Cohen-Macaulay-modules. Math. Ann. **277**, 345-349 (1987).

[$AuRei_5$] Auslander, M., Reiten, I.: Almost split sequences in dimension two. Erscheint in Adv. in Math.

[Ba] Bădescu, L.: Applications of the Grothendieck duality theory to the study of normal isolated singularities. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **24**, 673-689 (1979).

[Be] Behnke, K.: Projektive Auflösungen von symmetrischen Frobenius-Algebren und Gorenstein-Ringen. Dissertation, Universität Hamburg (1981).

[**Bre**] Brenner, S.: Decomposition properties of some small diagrams of modules. In: Gruppi Abeliani, Rom 1972. Symposia Math. Inst. Naz. Alta Mat. **13**, 127-141 (1974).

[**Bri**] Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Invent. Math. **4**, 336-358 (1968).

[**Bru**] Bruguières, A.: The scheme of morphisms from an elliptic curve to a Grassmannian. Preprint, Ecole Norm. Sup. Paris (1986).

[**Bu**] Burger, M.: Analyse harmonique sur les groupes de Heisenberg généralisés. Monatsh. Math. **98**, 29-40 (1984).

[**Ca**] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. In: Algebraic Geometry and Topology, Princeton 1954. A Symposium in Honor of S. Lefschetz (Eds.: Fox, R.H., Spencer, D.C., Tucker, A.W.) Proceedings, pp. 90-102. Princeton University Press, Princeton 1957.

[**Di$_1$**] Dieterich, E.: Classification of the indecomposable representations of the cyclic group of order three in a complete discrete valuation ring of ramification degree four. Preprint, Universität Bielefeld (1985). Erscheint in Mem. Amer. Math. Soc. unter dem Titel "Solution of a non-domestic tame classification problem from integral representation theory of finite groups ($\Lambda = RC_3$, $v(3) = 4$)."

[**Di$_2$**] Dieterich, E.: Reduction of isolated singularities. Erscheint in Comment. Math. Helv.

[**Es**] Esnault, Ĥ.: Reflexive modules on quotient surface singularities. J. Reine Angew. Math. **362**, 63-71 (1985).

[**GePo**] Gel'fand, I.M., Ponomarev, V.A.: Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite-dimensional space. Functional Anal. Appl. **3**, 325-326 (1969). (Übersetzt aus: Funktsional. Anal. i Prilozhen. **3**(4), 81-82 (1969))

[**Ger**] Gerstenhaber, M.: On semicommuting matrices. Math. Z. **83**, 250-260 (1964).

[**Gra**] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331-368 (1962).

[**GraRe**] Grauert, H., Remmert, R.: Zur Spaltung lokal-freier Garben über Riemannschen Flächen. Math. Z. **144**, 35-43 (1975).

[**Gri**] Griffiths, P.: The extension problem in complex analysis II; Embeddings with positive normal bundle. Amer. J. Math. **88**, 366-446 (1966).

[**Gro**] Grothendieck, A.: Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Amer. J. Math. **79**, 121-138 (1957).

[**Ha**] Hartshorne, R.: Stable reflexive sheaves. Math. Ann. **254**, 121-176 (1980).

[He] Herzog, J.: Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln. Math. Ann. **233**, 21-34 (1978).

[HeKü] Herzog, J., Kühl, M.: Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki-sequences. Preprint, Universität Essen (1985).

[Hi] Hirzebruch, F.: The topology of normal singularities of an algebraic surface. Séminaire Bourbaki (1962/63), Exp. 250. Paris (1964).

[Ho] Horrocks, G.: Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring. Proc. London Math. Soc. **14**, 689-713 (1964).

[Kn_1] Knörrer, H.: Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. In: Representations of Algebras, Durham 1985 (Ed.: Webb, P.) London Math. Soc. Lecture Notes, Vol. 116, pp. 147-164. Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[Kn_2] Knörrer, H.: Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I. Invent. Math. **88**, 153-164 (1987).

[Kr] Kraft, H.: Geometric methods in representation theory. In: Representations of Algebras, Puebla 1980 (Eds.: Auslander, M., Lluis, E.) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 944, pp. 180-258. Springer, Berlin 1982.

[La_1] Laufer, H.B.: On rational singularities. Amer. J. Math. **94**, 597-608 (1972).

[La_2] Laufer, H.B.: On minimally elliptic singularities. Amer. J. Math. **99**, 1257-1295 (1977).

[Li] Lipman, J.: Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. Publ. Math. I.H.E.S. **36**, 195-279 (1969).

[Ma] Matsushima, Y.: Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus. Nagoya Math. J. **61**, 161-195 (1976).

[Mc] McCoy, N.: On quasi-commutative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 327-340 (1934).

[Mo] Morimoto, A.: Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes. Nagoya Math. J. **15**, 83-154 (1959).

[Mu] Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. I.H.E.S. **9**, 5-22 (1961).

[Na] Naruki, I.: Some remarks on isolated singularity and their application to algebraic manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **13**, 17-46 (1977).

[Od] Oda, T.: Vector bundles on an elliptic curve. Nagoya Math. J. **43**, 41-72 (1971).

[OrWa] Orlik, P., Wagreich, P.: Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ action. Ann. of Math. **93**, 205-228 (1971).

[Pe_1] Peternell, T.: Vektorraumbündel in der Nähe von kompakten komplexen Unterräumen. Math. Ann. **257**, 111-134 (1981).

[Pe_2] Peternell, T.: Vektorraumbündel in der Nähe von exzeptionellen Unterräumen - das Modulproblem. J. Reine Angew. Math. **336**, 110-123 (1982).

[Pr] Prill, D.: Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups. Duke Math. J. **34**, 375-386 (1967).

[Re] Reid, M.: Elliptic Gorenstein singularities of surfaces. Unveröffentlicht.

[Rei] Reiten, I.: The use of almost split sequences in the representation theory of artin algebras. In: Representations of Algebras, Puebla 1980 (Eds.: Auslander, M., Lluis, E.) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 944, pp. 29-104. Springer, Berlin 1982.

[Ri] Riemenschneider, O.: Characterization and application of special reflexive modules on rational surface singularities. Preprint, Universität Hamburg (1987).

[Sa] Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten. Invent. Math. **23**, 289-325 (1974).

[Sch] Schreyer, F.-O.: Finite and countable CM-representation type. Erscheint in: Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles, Lambrecht 1985. Lecture Notes in Mathematics. Springer.

[Se] Serre, J.-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier **6**, 1-42 (1956).

[Si] Siu, Y.-T.: Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional complex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **143**, 77-94 (1969).

[Wa_1] Wahl, J.M.: Equisingular deformations of normal surface singularities. I. Ann. of Math. **104**, 325-356 (1976).

[Wa_2] Wahl, J.M.: Equations defining rational singularities. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10**, 231-264 (1977).

[We] Weil, A.: Généralisation des fonctions abéliennes. J. Math. Pures Appl. **17**, 47-87 (1938).

[Wi] Williamson, J.: Sets of semi-commutative matrices. Proc. Edinburgh Math. Soc. **3**, 179-188, 231-240 (1932/33).