

**Die Monodromiegruppen
der isolierten Singularitäten
vollständiger Durchschnitte**

Wolfgang Ebeling

Mathematisches Institut der Universität & Max-Planck-Institut für Mathematik
Wegelerstraße 10 Gottfried-Claren-Straße 26
5300 Bonn 1 5300 Bonn 3

MPI 87-5



DIE MONODROMIEGRUPPEN
DER ISOLIERTEN SINGULARITÄTEN
VOLLSTÄNDIGER DURCHSCHNITTE

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der *venia legendi*

im Fach Mathematik

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von

Wolfgang Ebeling

Bonn 1986

Für

Bettina,

Bastian und Mirja.

Einleitung

Eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Hyperflächensingularitäten und ihren Deformationen spielen das Milnorgitter und die damit zusammenhängenden Invarianten. Die mittlere Homologiegruppe einer Milnorfaser der Singularität ist eine freie abelsche Gruppe, die mit einer Bilinearform, der Schnittform, versehen ist. Diese Bilinearform ist symmetrisch oder schiefsymmetrisch, je nachdem ob die Dimension gerade oder ungerade ist. Diese Gruppe zusammen mit dieser zusätzlichen Struktur nennen wir das Milnorgitter H . Eine Untergruppe der Automorphismengruppe dieses Gitters ist die Monodromiegruppe Γ der Singularität. Sie wird von den Spiegelungen bzw. symplektischen Transvektionen zu gewissen geometrisch definierten Elementen des Milnorgitters, den verschwindenden Zykeln, erzeugt. Diese bilden die Menge $\Delta \subset H$ der verschwindenden Zykeln. Dabei kann man sich auf gewisse geometrisch ausgezeichnete Basen von verschwindenden Zykeln beschränken. Die Menge der Dynkindiagramme (Schnittdiagramme) zu solchen Basen liefert eine weitere Invariante. Einen Überblick über die Beziehungen dieser Invarianten untereinander und ihre Bedeutung für die Deformationstheorie der Singularitäten im Hyperflächenfall gibt der Artikel [Brieskorn₃].

Durch Stabilisierung können wir uns im Hyperflächenfall auf den symmetrischen Fall beschränken. Für die einfachen Hyperflächensingularitäten sind die Monodromiegruppen und Mengen von verschwindenden Zykeln endlich, und es ist wohlbekannt, daß sie mit den Weylgruppen und Wurzelsystemen zu den klassischen Dynkindiagrammen¹⁾ vom Typ A_m , D_m , E_6 , E_7 oder E_8 übereinstimmen. Im allgemeinen (symme-

1) Die Bezeichnung Dynkindiagramme für diese Graphen wurde von N. Bourbaki [Bourbaki₂] verwendet und ist seither für diese Graphen gebräuchlich. Diese Bezeichnung ist auch für die allgemeineren Schnittdiagramme von beliebigen Hyperflächensingularitäten üblich und wird auch in dieser Arbeit verwendet. Leider scheint die Bezeichnung historisch nicht gerechtfertigt zu sein, diese Graphen sind wohl vielmehr H.S.M. Coxeter zuzuschreiben. Bourbaki nennt aber die eng verwandten Graphen, die Coxetersystemen zugeordnet sind, Coxetergraphen. Wir folgen Bourbaki und reservieren diese Bezeichnung ebenfalls für diese Graphen (vgl. Bemerkung 4.1.4, Beispiel 5.2.4 und Kap. 5.5).

trischen) Fall stellt sich die Frage nach der Natur dieser unendlichen Spiegelungsgruppen und dieser unendlichen Teilmengen des Milnorgitters und einer Charakterisierung dieser Invarianten. Die Beschäftigung mit dieser Frage wurde durch ein Resultat von H. Pinkham [Pinkham₁] aus dem Jahre 1977 entscheidend angeregt. Pinkham zeigte, daß die Monodromiegruppen der vierzehn exzeptionellen unimodalen Hyperflächensingularitäten arithmetisch sind. In der Folgezeit konnten wir mit Hilfe eines Satzes von M. Kneser zeigen, daß das Resultat von Pinkham für große Klassen von Hyperflächensingularitäten gültig ist. Gleichzeitig war von Anfang an klar, daß es nicht für alle Hyperflächensingularitäten richtig sein kann. Ausnahmen findet man in der anderen Klasse von unimodalen Hyperflächensingularitäten, die am Anfang der Klassifikation von Arnold stehen, nämlich unter den hyperbolischen Singularitäten der $T_{p,q,r}$ -Serie.

Die Milnorgitter, Monodromiegruppen und verschwindenden Zykeln sind allgemeiner auch für isolierte Singularitäten vollständiger Durchschnitte definiert. Man kann daher die obige Frage auch in diesem allgemeineren Zusammenhang betrachten. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Untersuchung dieser Invarianten für diese allgemeine Klasse von Singularitäten, die die Hyperflächensingularitäten umfaßt. Im Mittelpunkt der Untersuchung steht dabei die obige Frage.

Um diese Invarianten studieren zu können, entwickeln wir zunächst geeignete Berechnungsmethoden für diese Invarianten. Dabei orientieren wir uns an dem Hyperflächenfall. In diesem Fall werden zur Berechnung die Dynkindiagramme zu geometrischen Basen von verschwindenden Zykeln herangezogen. Der Begriff einer geometrischen Basis von verschwindenden Zykeln läßt sich aber nicht ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen. Man kann zwar auch im Fall von vollständigen Durchschnitten entsprechende Systeme von verschwindenden Zykeln betrachten, jedoch sind sie nicht mehr linear unabhängig und man muß zusätzlich die linearen Relationen zwischen diesen Zykeln in Betracht ziehen. Wir führen hier einen geeigneten Begriff des Dynkindiagramms für eine isolierte Singularität eines vollständigen

Durchschnitts ein. Wir stellen Methoden dar, solche Dynkindiagramme zu berechnen.

Wir wenden diese Methoden an, um Dynkindiagramme und die daraus abgeleiteten Invarianten für die Singularitäten der untersten Stufen der Hierarchie der Singularitäten vollständiger Durchschnitte zu bestimmen. Insbesondere können wir damit die Singularitäten vollständiger Durchschnitte mit definiter, parabolischer und hyperbolischer Schnittform klassifizieren. Dies verallgemeinert die entsprechende Klassifikation von Arnold für den Hyperflächenfall [Arnold₁]. Daneben stößt man auf diese Weise auf viele interessante Zusammenhänge.

Als Hauptresultat dieser Arbeit können wir die Frage nach einer Charakterisierung der Monodromiegruppen und verschwindenden Zykel im symmetrischen Fall vollständig beantworten. Wir können zeigen, daß sich die Monodromiegruppen und verschwindenden Zykel von allen isolierten Singularitäten geradedimensionaler vollständiger Durchschnitte mit Ausnahme der hyperbolischen rein arithmetisch, d.h. nur in Termen des Milnorgitters, beschreiben lassen. Insbesondere sind die einfachen Teile der Monodromiegruppen in diesen Fällen arithmetisch. Für die hyperbolischen Singularitäten kann man eine andere Beschreibung dieser Invarianten geben. Diese Resultate lassen sich auch auf globale Monodromiegruppen anwenden und es läßt sich zum Beispiel zeigen, daß die Monodromiegruppe der universellen Familie von projektiven vollständigen Durchschnitten eines festen Multigrades arithmetisch ist. Der Beweis dieser Resultate wird mit Hilfe unserer Berechnung von Dynkindiagrammen auf algebraische Ergebnisse über Spiegelungsgruppen zu verschwindenden Gittern zurückgeführt .

Wir geben nun einen Überblick über den Inhalt der Arbeit im einzelnen. Die Arbeit ist in fünf Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel führen wir die zu betrachtenden Invarianten von Singularitäten vollständiger Durchschnitte ein. Hierbei verändern wir den Gesichtspunkt gegenüber dem Hyperflächenfall ein wenig. Als grundlegende Invariante sehen wir im allgemeinen Fall nicht nur das Milnorgitter

H allein, sondern eine exakte Sequenz von Gittern

$$0 \rightarrow H' \rightarrow \hat{H} \rightarrow H \rightarrow 0 ,$$

die das Milnorgitter H beinhaltet, an. Diese Sequenz ist wie folgt definiert (vgl. Abschnitt 1.1). Es sei (X, x) eine isolierte Singularität eines n-dimensionalen vollständigen Durchschnitts und $F = (F_1, \dots, F_p) : (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ die semiuniverselle Deformation von (X, x) . Wir wählen eine Gerade ℓ im Basisraum \mathbb{C}^p , die durch den Nullpunkt verläuft und die Diskriminante von F im Nullpunkt transversal schneidet. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß die Koordinaten von \mathbb{C}^p so gewählt sind, daß diese Gerade mit der letzten Koordinatenachse zusammenfällt. Dann definiert $F' = (F_1, \dots, F_{p-1}) : (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$ eine isolierte Singularität (X', x) . Es seien X_s bzw. X'_t die Milnorfasern von (X, x) bzw. (X', x) . Dann ist die obige Sequenz ein Teil der exakten (reduzierten) Homologiesequenz des Paares (X'_t, X_s) , es gilt also $H = \tilde{H}_n(X_s, \mathbb{Z})$, $H' = H_{n+1}(X'_t, \mathbb{Z})$ und \hat{H} ist die relative Homologiegruppe $H_{n+1}(X'_t, X_s)$. Auf diesen Moduln betrachten wir die durch die Schnittform auf H induzierten Bilinearformen.

Zu jeder Invarianten, die mit dem Milnorgitter H verbunden ist, können wir dann eine entsprechende relative Invariante betrachten, die mit dem Gitter \hat{H} assoziiert ist. Den verschwindenden Zykeln sind auf diese Weise die schon von Lefschetz betrachteten Fingerhüte oder - diese Bezeichnung ziehen wir vor - verschwindenden Zellen zugeordnet (Abschnitt 1.2). Zur Monodromiegruppe Γ gehört die relative Monodromiegruppe $\hat{\Gamma}$ (Abschnitt 1.3). Die natürliche Verallgemeinerung des Begriffs einer schwach oder stark ausgezeichneten Basis von verschwindenden Zykeln im Hyperflächenfall betrachten wir in Abschnitt 1.4: Es handelt sich hierbei um eine schwach oder stark ausgezeichnete Basis von \hat{H} , die aus verschwindenden Zellen besteht. So sind die Dynkindiagramme, die wir in Abschnitt 1.5 einführen, Dynkindiagramme zu schwach oder stark ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zellen von \hat{H} . Wie im Hyperflächenfall sind sie nicht eindeutig festgelegt, und wir studieren in diesem Abschnitt auch die möglichen Transformationen dieser Diagramme. Am Ende

von Abschnitt 1.5 gehen wir auf die Invarianz der eingeführten Objekte ein. Ein Dynkindiagramm zu einer stark ausgezeichneten Basis von verschwindenden Zellen bestimmt die übrigen relativen, also mit dem Gitter \hat{H} assoziierten, Invarianten, insbesondere auch ein spezielles Element der relativen Monodromiegruppe $\hat{\Gamma}$, den relativen Monodromieoperator \hat{C} . Wir diskutieren in Abschnitt 1.6, inwieweit sich aus dem Kenntnis von \hat{H} und dem relativen Monodromieoperator \hat{C} Informationen über H' und H und damit über die gesamte obige grundlegende exakte Sequenz gewinnen lassen.

In Kapitel 2 stellen wir unsere Methoden zur Berechnung von Dynkindiagrammen zu stark ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zellen dar. Wir leiten eine Verallgemeinerung einer Methode von Gabrielov im Hyperflächenfall [Gabrielov₃] her, auf der unsere Berechnungen im wesentlichen beruhen (Abschnitt 2.2). Diese Methode erlaubt es, die Berechnung von Dynkindiagrammen auf die Berechnung von Dynkindiagrammen für einfachere Singularitäten zu reduzieren. Eine wesentliche Rolle spielt dabei eine Polarkurve der Singularität. Die benötigten Definitionen und Tatsachen über Polarkurven und Polarinvarianten im Fall von vollständigen Durchschnitten sind in Abschnitt 2.1 zusammengestellt. Die einfachsten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten überhaupt, die keine Hyperflächen sind, sind die isolierten Singularitäten von Durchschnitten von zwei Quadriken. Für eine solche Singularität hat Hamm [Hamm₂] eine Basis des Milnorgitters H angegeben. In Abschnitt 2.3 zeigen wir, daß die Basis von Hamm aus verschwindenden Zykeln besteht und daß diese Zykeln die verschwindenden Zellen einer stark ausgezeichneten Basis von \hat{H} beranden. Wir bestimmen das Dynkindiagramm zu dieser Basis und untersuchen mittels geeigneter Transformationen des Dynkindiagramms die Invarianten dieser speziellen Singularität. Man stößt dabei auf einen engen Zusammenhang zu einer von K. Saito entwickelten Theorie von erweiterten affinen Wurzelsystemen [Saito₁], auf den wir in Abschnitt 2.4 eingehen. Schließlich behandeln wir in Abschnitt 2.5 eine andere Methode zur Berechnung von Dynkindiagrammen. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung einer Methode von Lazzeri im Hyperflächenfall, die Schnittmatrix mit Hilfe der Relationen in der Fundamentalgruppe des Komplements der Diskriminante

zu berechnen. Wir führen diese Methode anhand eines Beispiels vor, das wesentlich für die späteren Anwendungen ist, bei dem aber die Anwendung der Methode von Abschnitt 2.2 bereits zu erheblichen Komplikationen führt.

In Kapitel 3 wenden wir die Methode von Kapitel 2.2 an, um Dynkindiagramme für einige spezielle Singularitäten zu bestimmen. Wir betrachten dabei ausschließlich Singularitäten, die durch Abbildungskeime $f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ mit $df(0) = 0$ und regulärem 2-Jet gegeben werden. Das bedeutet insbesondere, daß H' in diesem Fall Rang 1 hat. Wir beginnen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen zur Klassifikation dieser Singularitäten beliebiger Dimension und führen die Klassen von Singularitäten ein, die wir später betrachten werden und die zum Teil in Kapitel 4 eine Rolle spielen werden. Diese Klassen sind durch das Segresymbol des 2-Jets charakterisiert. Am Beginn der Klassifikation stehen nach den Durchschnitten von zwei Quadriken die n -dimensionalen Singularitäten $T_{2,q,2,s}^n$ (Segresymbol $\{1, \dots, 1, 2\}$). In Abschnitt 3.2 führen wir für diese Singularitäten die Berechnung von Dynkindiagrammen nach der Methode von Kapitel 2.2 exemplarisch ausführlich vor. Es stellt sich heraus, daß diese Singularitäten für n gerade hyperbolisch sind. Der Abschnitt 3.3 ist zwei weiteren Klassen von n -dimensionalen Singularitäten, den Singularitäten der $J^{(n-1)}$ - und $K^{(n-1)}$ -Serie (Segresymbol $\{1, \dots, 1, 3\}$ und $\{1, \dots, 1, (1, 2)\}$), gewidmet. Die restlichen Abschnitte von Kapitel 3 werden für Kapitel 4 nicht mehr benötigt. In Abschnitt 3.4 spezialisieren wir uns auf den Fall von Kurven und betrachten insbesondere Dynkindiagramme für die einfachen Raumkurvensingularitäten. Den Flächenfall betrachten wir in den Abschnitten 3.5 und 3.6 näher, und in 3.6 besonders die Dreiecksingularitäten und die in [Ebeling-Wall] studierte Erweiterung von Arnolds seltsamer Dualität. Wir erhalten für die Raumkurven- und Flächensingularitäten aus den Abschnitten 3.4 und 3.6 Dynkindiagramme, die eng mit den Dynkindiagrammen von Gabrielov für die unimodalen Hyperflächensingularitäten zusammenhängen. Wir studieren die Coxeter-elemente dieser Graphen und zeigen, wie unsere Ergebnisse mit neuen Resultaten von K. Saito über Coxeter-elemente einer Klasse von Graphen zusammenpassen. Abschnitt 3.6 liefert ergänzende Informationen zu der Ar...

beit [Ebeling-Wall], die das Bild weiter abrunden. Wir erwähnen schließlich ein besonderes Ergebnis unserer Berechnungen: Man findet topologisch nicht äquivalente Singularitäten, zum Beispiel schon unter den Dreiecksingularitäten, deren Monodromieoperatoren über \mathbb{Q} konjugiert sind (Korollar 3.6.4).

Die Hauptresultate dieser Arbeit werden in Kapitel 4 dargestellt. In Abschnitt 4.1 werden diese Resultate formuliert. Wir geben zunächst eine Klassifikation der isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten mit definiter, parabolischer und hyperbolischer Schnittform (Theorem 4.1.1). Dann geben wir eine Beschreibung der Monodromiegruppen, relativen Monodromiegruppen und der Mengen von verschwindenden Zykeln und Zellen für fast alle isolierten Singularitäten von geradedimensionalen vollständigen Durchschnitten (Theoreme 4.1.2 und 4.1.3). Die einzigen Ausnahmen, für die diese Beschreibungen nicht gelten, gehören zu den hyperbolischen Singularitäten. In Bemerkung 4.1.4 zeigen wir, daß man in diesem Fall für diese Invarianten andere Beschreibungen finden kann. Für den Hyperflächenfall und zum Teil für den Fall von zweidimensionalen vollständigen Durchschnitten in \mathbb{C}^4 sind diese Resultate schon in [Ebeling₅] veröffentlicht und verallgemeinern frühere Resultate in [Pinkham₁], [Ebeling₁], [Ebeling₂], [Ebeling₃]. Am Ende von Abschnitt 4.1 vergleichen wir hierzu kurz die wichtigsten entsprechenden Resultate im Fall ungerader Dimension. Für Einzelheiten sei hierbei auf [Janssen₁] verwiesen. Der Beweis unserer zentralen Resultate besteht in einer Reduktion auf algebraische Sätze, die in Kapitel 5 bewiesen werden. Zu dieser Reduktion, die in Abschnitt 4.2 dargestellt ist, werden die Resultate aus den ersten drei Kapiteln benötigt. In Abschnitt 4.3 werden Anwendungen auf globale Monodromiegruppen und Lefschetzbüschel beschrieben. Wir kommen damit auf den Zusammenhang zurück, in dem die verschwindenden Zykel und Zellen ursprünglich von Lefschetz eingeführt wurden.

In Kapitel 5 sind die algebraischen Resultate zusammengestellt, auf denen der Beweis der Ergebnisse von Kapitel 4 beruht. Wir betrachten hier Untergruppen Γ_{Δ} der Einheitengruppe eines ganzzahligen symmetrischen Gitters L , die von den Spie-

gelungen zu den Vektoren einer Teilmenge $\Delta \subset L$ erzeugt werden. Dabei soll das Paar (L, Δ) die folgenden Axiome erfüllen: (i) Δ besteht nur aus Minimalvektoren der Quadratlänge 2ε , $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ fest, (ii) Δ erzeugt L , (iii) Δ ist ein Γ_Δ -Orbit, (iv) falls $\text{rg } L > 1$, so gibt es $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ mit $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 1$. Ein solches Paar (L, Δ) nennen wir - einer Terminologie von W. Janssen und E. Looijenga folgend - ein verschwindendes Gitter (Abschnitt 5.2). Typische Beispiele für solche verschwindenden Gitter sind die Paare (H, Δ) und $(\hat{H}, \hat{\Delta})$. Wir zeigen nun, daß ein verschwindendes Gitter, das ein gewisses kleines verschwindendes Untergitter vom Witt-index 2 enthält und das wir in diesem Fall vollständig nennen, schon das maximal mögliche verschwindende Gitter ist (Abschnitt 5.3 und 5.4). Das bedeutet, daß die Teilmenge Δ maximal ist, also alle Minimalvektoren v der Quadratlänge 2ε mit $\langle v, L \rangle = \mathbb{Z}$ enthält, und Γ_Δ alle Spiegelungen zu Minimalvektoren der Quadratlänge 2ε enthält. Aus einem Satz von Kneser [Kneser₁] folgt dann, daß die Elemente von Γ_Δ dadurch gekennzeichnet sind, daß sie Spinornorm 1 haben und auf dem Quotienten $L^\#/\mathfrak{J}(L)$ des dualen Gitters $L^\#$ durch das Bild des Gitters L trivial operieren. In Abschnitt 5.5 zeigen wir diese Aussagen auch für einige verschwindende Gitter, die durch Coxetersysteme definiert sind, während im allgemeinen diese Aussagen für solche Gitter nicht richtig sind. Kapitel 5 ist bis auf einige Ergänzungen weitgehend mit §§ 1-3 und einem Teil von § 5 der Veröffentlichung [Ebeling₅] identisch.

Diese Arbeit wurde zuletzt durch ein Forschungsstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert, der ich dafür herzlich danke. Dieses Stipendium ermöglichte mir auch einen zweimonatigen Forschungsaufenthalt an der University of North Carolina in Chapel Hill/USA im Rahmen eines "Special Year" über Singularitäten und algebraische Geometrie, während dessen ein Teil dieser Arbeit entstand. Für die Gastfreundschaft und gute Arbeitsatmosphäre bin ich insbesondere den Organisatoren des "Special Year", J. Damon und J. Wahl, sehr dankbar.

Ich danke auch all denen, von denen ich beim Entstehen dieser Arbeit Anregungen und Hilfe bekommen habe, insbesondere Lê Dũng Tráng, E. Looijenga, G. Pfister,

K. Saito, J. Wahl und vor allem C.T.C. Wall. Mein besonderer Dank gilt meinem Lehrer E. Brieskorn für sein Interesse und seine Unterstützung und Bestärkung beim Zustandekommen dieser Arbeit. Er hat mein Denken und meine Sichtweise der Probleme entscheidend beeinflußt.

Die mühevollen Arbeit des Tippens wurde äußerst sorgfältig von Frau W. Ott ausgeführt, wofür ich ihr herzlich danke.

Bonn, Juni 1986

Wolfgang Ebeling

INHALTSVERZEICHNIS

1. INVARIANTEN VON VOLLSTÄNDIGEN DURCHSCHNITTEN	1
1.1 Die grundlegende exakte Sequenz	1
1.2 Verschwindende Zyklen und verschwindende Zellen	6
1.3 Monodromiegruppen und verschwindende Gitter	9
1.4 Geometrische Basen	12
1.5 Dynkindiagramme	15
1.6 Relative Monodromie	20
2. BERECHNUNG VON DYNKINDIAGRAMMEN	24
2.1 Polarkurven	24
2.2 Eine Verallgemeinerung einer Methode von Gabrielov	28
2.3 Dynkindiagramme eines Durchschnitts von zwei Quadriken	40
2.4 Erweiterte affine Wurzelsysteme	53
2.5 Verallgemeinerung einer Methode von Lazzeri	58
3. DYNKINDIAGRAMME FÜR EINIGE SPEZIELLE SINGULARITÄTEN	75
3.1 Zur Klassifikation von isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten	75
3.2 Die Singularitäten $T_{2,q,2,s}^n$	80
3.3 Die $J^{(n-1)}$ - und $K^{(n-1)}$ -Serie	91
3.4 Einfache Raumkurven	103
3.5 Flächen von vollständigem Durchschnitt	111
3.6 Seltsame Dualität	118

4. MILNORGITTER UND MONODROMIEGRUPPEN	130
4.1 Eine Beschreibung der Monodromiegruppen und verschwindenden Gitter ...	130
4.2 Reduktion auf algebraische Resultate	136
4.3 Globale Monodromiegruppen und Lefschetzbüschel	141
5. MONODROMIEGRUPPEN VON SYMMETRISCHEN VERSCHWINDENDEN GITTERN	146
5.1 Einheiten von Gittern	146
5.2 Symmetrische verschwindende Gitter	149
5.3 Vollständige verschwindende Gitter	151
5.4 Spezielle Teilmengen	155
5.5 Hyperbolische Coxetersysteme	160
LITERATUR	163

1. INVARIANTEN VON VOLLSTÄNDIGEN DURCHSCHNITTEN

1.1 Die grundlegende exakte Sequenz

Es sei (X, x) eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitte der Dimension n . Das bedeutet, daß (X, x) ein komplex-analytischer Raumkeim der Dimension n ist, der isomorph zur Faser $(f^{-1}(0), 0)$ des Keims einer analytischen Abbildung

$$f: (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$$

ist, und $x \in X$ ein isolierter singulärer Punkt von X ist. Im Fall $k = 1$ ist (X, x) eine isolierte Hyperflächensingularität.

Eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitte besitzt eine semiuniverselle Deformation mit glattem Basisraum

$$F: (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0).$$

Es sei B_ϵ eine offene Kugel vom Radius ϵ um den Nullpunkt in \mathbb{C}^{n+p} . Wir betrachten einen Repräsentanten von F von der Form

$$F: \mathcal{X} = F^{-1}(S) \cap B_\epsilon \rightarrow S$$

für eine Umgebung S von 0 in \mathbb{C}^p . Der Keim der Menge

$$C_F = \{y \in \mathcal{X} \mid y \text{ ist kritischer Punkt von } F\}$$

in 0 ist die kritische Menge von F . Der Keim der Bildmenge $D_F = F(C_F)$ in 0 ist die Diskriminante von F . Die Diskriminante $(D_F, 0)$ ist eine reduzierte irreduzible Hyperfläche in $(\mathbb{C}^p, 0)$.

Für ein genügend kleines ϵ und eine genügend kleine Umgebung S von 0 in \mathbb{C}^p ist

die Abbildung

$$F \Big|_{X-F^{-1}(D_F)} : X - F^{-1}(D_F) \rightarrow S - D_F$$

die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels. Die typische Faser X_s dieses Bündels über einem Basispunkt $s \in S - D_F$ hat nach [Milnor₁], [Hamm₁] den Homotopietyp eines Buketts von μ Sphären S^n der reellen Dimension n . Die Faser X_s heißt die Milnorfaser, die Zahl μ die Milnorzahl von (X,x) . Die einzige nicht triviale reduzierte Homologiegruppe von X_s ist die Gruppe $\tilde{H}_n(X_s, \mathbb{Z})$. Dies ist ein freier \mathbb{Z} -Modul vom Rang μ . Durch die Schnittzahl von Zykeln wird auf ihm eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, die für gerades n symmetrisch ist und für ungerades n schiefsymmetrisch. Wir nennen

$$H = (H_n(X_s, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

das Milnorgitter von (X,x) . Im Falle gerader Dimension gilt obendrein $\langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $v \in H$, d.h. das Milnorgitter ist in diesem Fall ein gerades Gitter.

Wir betrachten nun eine Konstruktion, die auf Lê Dũng Tráng zurückgeht (vgl. [Lê₂], [Looijenga₃]). Wir betrachten eine generische komplexe Gerade ℓ durch den Nullpunkt $0 \in \mathbb{C}^p$, d.h. eine Gerade, die nicht im Tangentialkegel der Diskriminante $(D_F, 0)$ in 0 liegt. Wir nehmen an, daß die Koordinaten in \mathbb{C}^p so gewählt sind, daß diese Gerade mit der letzten Koordinatenachse zusammenfällt. Das bedeutet insbesondere, daß diese Gerade die Diskriminante nur in 0 schneidet. Dies ist aber äquivalent dazu, daß

$$F' = (F_1, \dots, F_{p-1}) : (\mathbb{C}^{n+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$$

eine isolierte Singularität $(X', 0)$ eines vollständigen Durchschnitts der Dimension $n + 1$ definiert.

Wir wählen nun die Umgebung S von der Form $S = T \times \bar{\mathbb{D}}$ für eine Kreisscheibe

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \eta\}.$$

Es seien ϵ , η und T so klein und geeignet gewählt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für den Repräsentanten

$$F': \mathcal{X}' = F'^{-1}(T) \cap B_\epsilon \rightarrow T$$

gilt: Die Abbildung

$$F' \Big|_{\mathcal{X}' - F'^{-1}(D_{F'})} : \mathcal{X}' - F'^{-1}(D_{F'}) \rightarrow T - D_{F'}$$

ist die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels. Die typische Faser dieses Bündels ist eine Milnorfaser von $(X', 0)$.

(ii) Es gibt einen Homöomorphismus

$$h: \bar{\mathcal{X}} = F^{-1}(S) \cap \bar{B}_\epsilon \rightarrow \bar{\mathcal{X}}' = F'^{-1}(T) \cap \bar{B}_\epsilon,$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{X}} & \xrightarrow{F} & S = T \times \bar{D} \\ \downarrow h & & \downarrow \pi \\ \bar{\mathcal{X}}' & \xrightarrow{F'} & T \end{array} .$$

Hierbei bezeichnet π die Projektion auf den ersten Faktor, und h ist die Identität auf $F^{-1}(T \times \bar{D}_1)$ mit $\bar{D}_1 \subset \bar{D}$. Dies ist möglich nach [Looijenga₃, Proposition (5.4)].

(iii) $S - D_F$ repräsentiert den Homotopietyp von $S - D_F$ in O [Looijenga₃, (7.3)].

Die Einschränkung der Projektion $\pi: S \rightarrow T$ auf die Diskriminante $D = D_F$ ist endlich. Es sei t ein Punkt aus T , der nicht im Bild des Verzweigungsortes von $\pi|_D$ liegt.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$F|_{X'_t}: X'_t = F'^{-1}(t) \cap B_\varepsilon \rightarrow \{t\} \times \overline{\mathbb{D}}.$$

Diese Abbildung entspricht der Funktion

$$F_p: X'_t \rightarrow \overline{\mathbb{D}}.$$

Nach der Wahl von t gibt es genau m Schnittpunkte von $\{t\} \times \overline{\mathbb{D}}$ mit der Diskriminante D , wobei m die Multiplizität der Diskriminante im Ursprung ist. Diese Punkte bezeichnen wir mit s_1, \dots, s_m . Eine Faser X'_{s_i} über einem solchen Punkt hat genau eine Singularität, und diese ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Außerhalb dieser singulären Fasern ist die Abbildung $F|_{X'_t} = F_p$ die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels. Wir wählen als Basispunkt $s = (t, \eta) \in \{t\} \times \overline{\mathbb{D}}$. Die Faser X'_s über dem Punkt s ist die Milnorfaser von (X, x) . Die Situation ist in Abbildung 1.1.1 schematisch dargestellt. Hierbei erscheint die Mannigfaltigkeit X'_t als Kugel, was sie aber tatsächlich nur im Hyperflächenfall ist. Die Mannigfaltigkeit X'_t hat den Homotopietyp eines Buketts von μ' Sphären S^{n+1} , wobei μ' die Milnorzahl der Singularität $(X', 0)$ ist.

Die exakte (reduzierte) Homologiesequenz des Paares (X'_t, X'_s) reduziert sich damit auf die folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X'_t) \rightarrow H_{n+1}(X'_t, X'_s) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_n(X'_s) \rightarrow 0 \quad (*)$$

wobei die möglichen nichttrivialen Terme freie \mathbb{Z} -Moduln vom Rang μ' , m bzw. μ sind. Insbesondere gilt

$$m = \mu' + \mu.$$

Wir definieren auf $H_{n+1}(X'_t, X'_s)$ eine Bilinearform, die wir ebenfalls mit \langle, \rangle bezeichnen, durch Zurückholen der Bilinearform \langle, \rangle auf H mittels der Abbildung ∂_* . Das dadurch definierte Gitter bezeichnen wir mit \hat{H} . Also gilt

$$\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle := \langle \partial_* \hat{v}, \partial_* \hat{w} \rangle$$

für $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{H}$. Die Motivation für diese Definition sind die Picard-Lefschetz-Formeln (siehe Kap. 1.3). Eine Rechtfertigung für diese Definition ist die Tatsache, daß man \hat{v} und \hat{w} aus \hat{H} durch relative Zykeln repräsentieren kann, die sich nur auf X_s schneiden (siehe Bemerkung 1.4.1).

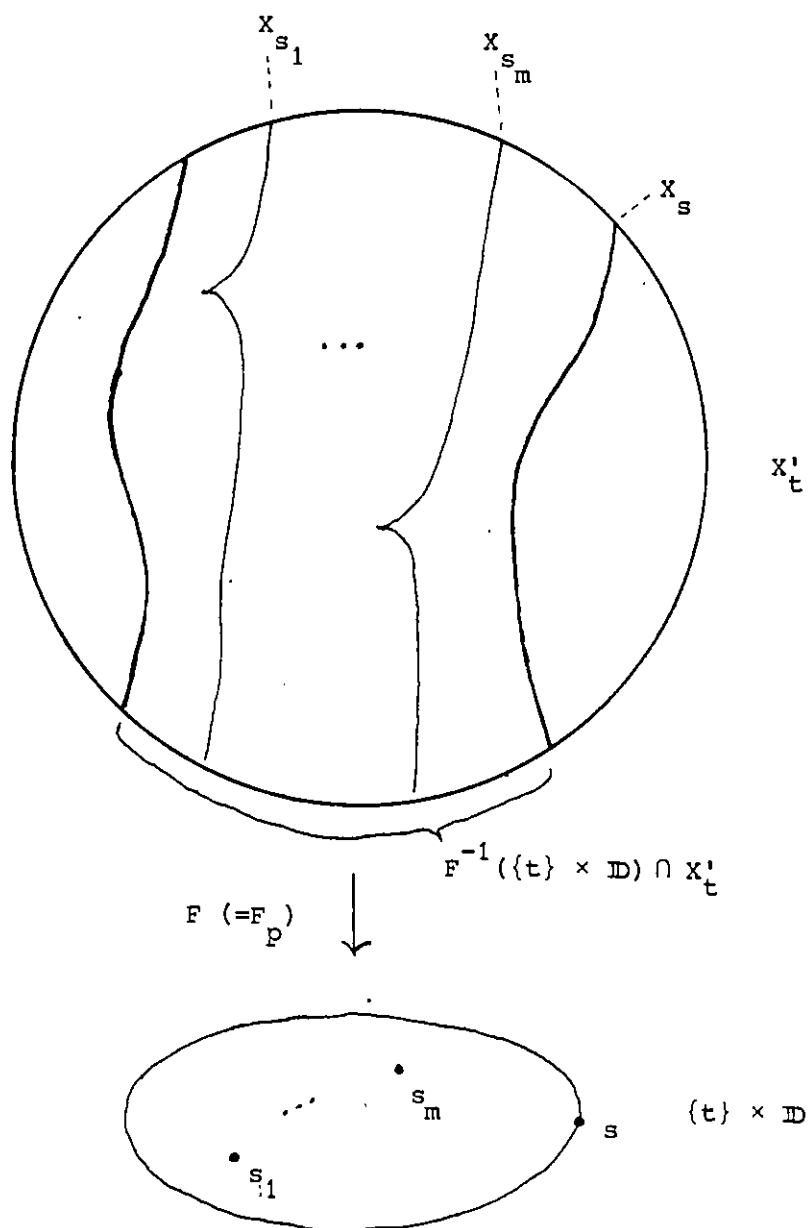


Abbildung 1.1.1

Auf $H_{n+1}(X'_t)$ betrachten wir die durch die Inklusion in \hat{H} induzierte Bilinearform. (Die Schnittform auf diesem Modul wird dabei ignoriert.) Das zugehörige Gitter bezeichnen wir mit H' . Nach Definition der Bilinearform auf \hat{H} liegt H' im

Kern (Radikal) von \hat{H} , den wir mit $\ker \hat{H}$ bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen lautet also die exakte Sequenz (*):

$$0 \rightarrow H' \rightarrow \hat{H} \xrightarrow{\partial_*} H \rightarrow 0 .$$

Im Hyperflächenfall ist H' trivial und ∂_* ein Isomorphismus von \hat{H} auf H . In diesem Fall identifizieren wir \hat{H} und H . Im allgemeinen Fall ersetzt diese grundlegende exakte Sequenz die einzelne Invariante H im Hyperflächenfall. Die im folgenden eingeführten Invarianten werden alle mit dieser Sequenz in Verbindung stehen.

1.2 Verschwindende Zyklen und verschwindende Zellen

Wir betrachten nun die lokale Situation um die Punkte $s_i \in \bar{D}$. Es sei x_i der singuläre Punkt der Faser X_{s_i} . Dies ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Es gibt also eine kleine Umgebung B_i von x_i in X'_t und lokale Koordinaten (u_1, \dots, u_{n+1}) in dieser Umgebung, so daß $F|_{B_i}$ in diesen Koordinaten wie folgt geschrieben werden kann

$$F(u_1, \dots, u_{n+1}) = s_i + u_1^2 + \dots + u_{n+1}^2 ,$$

und B_i in diesen Koordinaten eine Kugel vom Radius ϵ' ist. Ferner wählen wir eine kleine Kreisscheibe \bar{D}_i mit Mittelpunkt s_i und Radius ρ und setzen

$$Y_i = F^{-1}(\bar{D}_i) \cap B_i , \quad Y_*^{(i)} = F^{-1}(s_i + \rho) \cap B_i .$$

Dabei sei ρ so klein gewählt, daß

$$F|_{Y_i} : Y_i \rightarrow \bar{D}_i$$

eine Milnorfaserung außerhalb von s_i ist. Außerdem seien die Umgebungen B_i und die Kreisscheiben \bar{D}_i so klein gewählt, daß sie in X'_t bzw. D enthalten sind.

Die Mengen $Y_i = Y_i$ und $Y_* = Y_*^{(i)}$ können wie folgt in den obigen Koordinaten

beschrieben werden:

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{u \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |u_1|^2 + \dots + |u_{n+1}|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ und } |u_1^2 + \dots + u_{n+1}^2| \leq \rho\},$$

$$Y_* = \{u \in Y \mid u_1^2 + \dots + u_{n+1}^2 = \rho\}.$$

Die Beschreibung von \mathcal{U}_ε zeigt, daß \mathcal{U}_ε linear auf den Ursprung kontrahierbar ist.

Die grundlegende exakte Sequenz für einen gewöhnlichen Doppelpunkt reduziert sich damit auf

$$H_{n+1}(\mathcal{U}_\varepsilon, Y_*) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y_*),$$

wobei der Verbindungshomomorphismus ∂_* ein Isomorphismus ist.

Insbesondere ist \mathcal{U}_ε retrahierbar auf die reelle $n+1$ -Scheibe

$$D^{n+1} = \{u \in \mathcal{U}_\varepsilon \mid \text{alle } u_\nu \text{ reell}\}.$$

Man kann leicht zeigen (siehe z.B. [Lamotke₁, 5.5]), daß die Faser Y_* den Rand dieser Scheibe, die reelle Sphäre

$$S^n = \partial D^{n+1} = \{u \in Y_* \mid \text{alle } u_\nu \text{ reell}\}$$

als starken Deformationsretrakt hat. Nach Wahl einer Orientierung von D^{n+1} und der Orientierung von S^n als Rand von D^{n+1} liefern die Homologieklassen $[D^{n+1}]$ bzw. $[S^n]$ Erzeugende von $H_{n+1}(\mathcal{U}_\varepsilon, Y_*)$ bzw. $H_n(Y_*)$ mit $\partial_* [D^{n+1}] = [S^n]$.

Nun sei $\varphi = \varphi_i: [0,1] \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ ein Weg von s_i nach s mit $\varphi((0,1]) \subset \mathbb{D}^* = \overline{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}$, der den Rand der Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}_i$ genau in $s_i + \rho$ trifft und das zum Zeitpunkt $0 < \theta < 1$. Es sei also $\varphi(\theta) = s_i + \rho$. Es sei $\psi = \varphi([0,1])$. Da das Urbild $F|_{X'_t}{}^{-1}(\psi)$ trivial gefasert ist, gibt es eine Einbettung

$$j: Y_* \times \psi \rightarrow X'_t$$

mit $j(Y_* \times \psi) = F|_{X'_t}{}^{-1}(\psi)$, $j(y, s_i + \rho) = y$ und $F \circ j(y, \lambda) = \lambda$ für $y \in Y_*$ und $\lambda \in \psi$.

Dann definiert

$$Z = D^{n+1} \cup_j (S^n \times \psi)$$

(mit der gewählten Orientierung) ein Element

$$\hat{\delta} \in \hat{H} = H_{n+1}(X'_t, X_s)$$

Der Rand ∂Z von Z definiert ein Element

$$\delta \in H = H_n(X_s)$$

mit $\partial_* \hat{\delta} = \delta$ (vgl. Abbildung 1.2.1). Nach Lefschetz [Lefschetz₁] bezeichnen wir δ als verschwindenden Zykel (zum Weg φ). Lefschetz bezeichnet $\hat{\delta}$ in [Lefschetz₁] als "onglet". Im Englischen ist für $\hat{\delta}$ die Bezeichnung "thimble" gebräuchlich, was dem deutschen Wort "Fingerhut" entspricht. Wir wollen $\hat{\delta}$ in dieser Arbeit als verschwindende Zelle (zum Weg φ) bezeichnen.

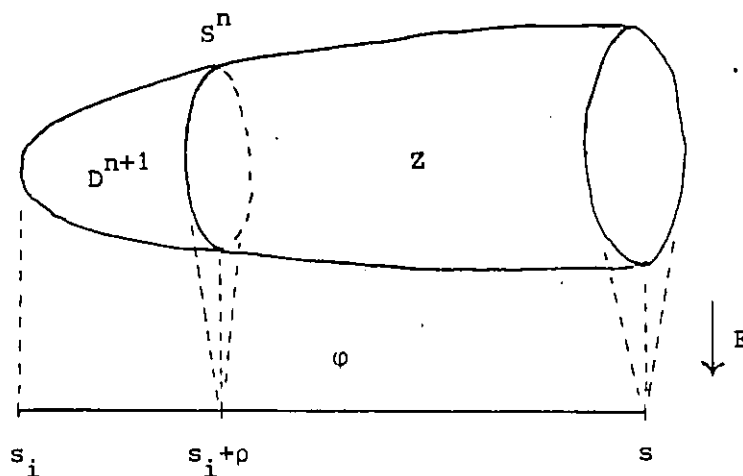


Abbildung 1.2.1

Das Normalenbündel von S^n in Y_* ist isomorph zum Tangentialbündel der Sphäre S^n . Deshalb ergibt sich

$$\langle \hat{\delta}, \hat{\delta} \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

1.3 Monodromiegruppen und verschwindende Gitter

In diesem Abschnitt studieren wir die Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{D}^*, s)$ auf H und \hat{H} , wobei $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{s_1, \dots, s_m\}$.

Dem Weg φ ist eine einfache Schleife $\omega = \omega_i$ wie folgt zugeordnet: Es sei

$$\tilde{\omega}_i(r) = s_i + \rho e^{2\pi\sqrt{-1}r}, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

der Weg, der einmal auf dem Rand von $\bar{\mathbb{D}}_i$ um s_i herumläuft. Dann definiere $\omega = \omega_i: [0,1] \rightarrow X_s$ durch

$$\omega = \psi \tilde{\omega}_i \psi^{-1}.$$

Die Schleife ω induziert nun Automorphismen $\gamma \in \text{Aut}(H)$ und $\hat{\gamma} \in \text{Aut}(\hat{H})$ wie folgt.

Da das mittels ω auf das Intervall $[0,1]$ zurückgeholte Bündel

$F_p: F_p^{-1}(\mathbb{D}^*) \cap X'_t \rightarrow \mathbb{D}^*$ trivial ist, gibt es eine stetige Abbildung

$$W: X_s \times [0,1] \rightarrow X'_t$$

mit $F_p \circ W(y,r) = \omega(r)$ und $W(y,0) = y$ für $y \in X_s, r \in [0,1]$, die für jedes $r \in [0,1]$ einen Homöomorphismus

$$\begin{aligned} W_r: X_s &\xrightarrow{\cong} X_{\omega(r)} \\ y &\mapsto W(y,r) \end{aligned}$$

induziert. Dann ist γ der durch W_1 induzierte Automorphismus von H , die Picard-Lefschetz-Transformation zum Weg φ . Die Abbildung W induziert einen Homomorphismus

$$W_*: H_{n+1}(X_s \times [0,1], X_s \times \{0\} \cup X_s \times \{1\}) \rightarrow H_{n+1}(X'_t, X_s)$$

von relativen Homologiegruppen. Die Komposition der Abbildung

$$\begin{aligned} H_n(X_s) &\rightarrow H_{n+1}(X_s \times [0,1], X_s \times \{0\} \cup X_s \times \{1\}), \\ y &\rightarrow y \times \iota, \end{aligned}$$

wobei $\iota \in H_1([0,1], \{0,1\})$ das kanonische erzeugende Element ist, mit W_* liefert einen Homomorphismus

$$\tau_\omega: H \rightarrow \hat{H},$$

den wir die Ausdehnung längs des Weges ω nennen (vgl. [Lamotke₁, (6.4)], wo auch wichtige Eigenschaften von τ_ω aufgeführt sind). Wir definieren nun (vgl. [Dimca₁, §2]):

$$\hat{\gamma}(y) = y + (-1)^n \tau_\omega(\partial_* y) .$$

Dies ist ein Automorphismus von \hat{H} , der wie γ nur von der Homotopieklasse des Weges ω abhängt. Wir nennen $\hat{\gamma}$ die relative Picard-Lefschetz-Transformation.

Die Operation von γ bzw. $\hat{\gamma}$ auf H bzw. \hat{H} wird durch die Picard-Lefschetz-Formeln beschrieben. Für $y \in H$ gilt:

$$\gamma(y) = y - (-1)^{n(n-1)/2} \langle y, \delta \rangle \delta ,$$

und für $\hat{y} \in \hat{H}$:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\hat{y}) &= \hat{y} - (-1)^{n(n-1)/2} \langle \partial_* \hat{y}, \partial_* \hat{\delta} \rangle \hat{\delta} \\ &= \hat{y} - (-1)^{n(n-1)/2} \langle \hat{y}, \hat{\delta} \rangle \hat{\delta} . \end{aligned}$$

Die erste Formel ist die übliche Picard-Lefschetz-Formel, die zweite folgt aus [Lamotke₁, (6.7.1)]. Wegen

$$\gamma(y) = y + (-1)^n \partial_* \tau_\omega(y) \quad \text{für } y \in H$$

([Lamotke₁, (6.4.6)]) gilt:

$$\partial_* \hat{\gamma} = \gamma \partial_* .$$

Daher sind die beiden Formeln zueinander äquivalent. Es sei $L^{(n)}$ ein Gitter, das für gerades n symmetrisch und für ungerades n schiefsymmetrisch ist. Für $\lambda \in L^{(n)}$ mit

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

definieren wir einen Automorphismus $s_\lambda^{(n)} \in \text{Aut}(L^{(n)})$ durch

$$s_\lambda^{(n)}(y) = y - (-1)^{n(n-1)/2} \langle y, \lambda \rangle \lambda \quad \text{für } y \in L^{(n)} .$$

Für gerades n ist $s_\lambda^{(n)}$ eine Spiegelung, für ungerades n eine symplektische Transvektion. Mit dieser Bezeichnung lassen sich die Picard-Lefschetz-Formeln auch so formulieren:

$$\gamma = s_\delta^{(n)} \quad , \quad \hat{\gamma} = s_{\hat{\delta}}^{(n)} .$$

Die Formel für $\hat{\gamma}$ ist die Motivation für die Definition der Bilinearform auf \hat{H} .

Wir haben damit eine Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{D}^*, s)$ auf H und \hat{H} definiert. Die Bilder dieser Darstellung in $\text{Aut}(H)$ bzw. $\text{Aut}(\hat{H})$ bezeichnen wir mit Γ bzw. $\hat{\Gamma}$. Da die Inklusion $j: \mathbb{D}^* \rightarrow S - D_F$ eine surjektive Abbildung der Fundamentalgruppen induziert ([Looijenga₃, (7.1)]), stimmt Γ mit der Monodromiegruppe der Singularität (X, x) überein (man berücksichtige die Bedingung (iii) von Kap. 1.1). Die Monodromiegruppe von (X, x) ist das Bild der Darstellung von $\pi_1(S - D_F, s)$ auf H . Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ nennen wir die relative Monodromiegruppe.

Läßt man statt eines in $\{t\} \times \bar{\mathbb{D}}$ verlaufenden Weges φ einen beliebigen Weg von einem regulären Punkt der Diskriminante D_F nach s zu, so liefert die obige Konstruktion ebenfalls einen (bis aufs Vorzeichen bestimmten) verschwindenden Zykel $\pm \delta \in H$. Die Menge aller dieser Homologieklassen nennen wir die Menge der verschwindenden Zykel und bezeichnen sie mit $\Delta \subset H$. Es ist wohlbekannt (siehe z.B. [Looijenga₃, (7.8)]), daß die Menge Δ außer im Fall eines gewöhnlichen Doppelpunktes A_1 einen einzigen Orbit unter der Monodromiegruppe Γ bildet. Deshalb stimmt die Menge Δ mit der Menge aller verschwindenden Zykel überein, die durch Wege φ definiert sind, die wie oben ganz in $\{t\} \times \bar{\mathbb{D}}$ verlaufen.

Die Menge aller verschwindenden Zellen $\hat{\Delta}$ definieren wir als die Menge aller verschwindenden Zellen $\hat{\delta}$, die durch einen beliebigen Weg φ in $\{t\} \times \bar{\mathbb{D}}$ definiert

sind. Sie bildet, außer im Fall A_1 , entsprechend einen $\hat{\Gamma}$ -Orbit.

Es sei $L^{(n)}$ ein symmetrisches oder schiefsymmetrisches Gitter wie oben und $\Lambda^{(n)}$ eine Teilmenge von Vektoren λ mit

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

und $s_\lambda^{(n)}$ die wie oben definierten Automorphismen von $L^{(n)}$. Es sei $\Gamma_{\Lambda^{(n)}}$ die von den $s_\lambda^{(n)}$ für $\lambda \in \Lambda^{(n)}$ erzeugte Untergruppe von $\text{Aut}(L^{(n)})$. Wir nennen das Paar $(L^{(n)}, \Lambda^{(n)})$ ein verschwindendes Gitter, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. [Looijenga₃, (7.9)], [Janssen₁]):

- (i) $\Lambda^{(n)}$ erzeugt das Gitter $L^{(n)}$
- (ii) $\Lambda^{(n)}$ ist ein Orbit unter $\Gamma_{\Lambda^{(n)}}$.
- (iii) Falls $\text{rg } L^{(n)} > 1$, so gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda^{(n)}$ mit $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = 1$.

Die Gruppe $\Gamma_{\Lambda^{(n)}}$ nennen wir die zugehörige Monodromiegruppe.

Dann sind sowohl (H, Δ) als auch $(\hat{H}, \hat{\Delta})$ verschwindende Gitter und die Gruppen Γ bzw. $\hat{\Gamma}$ ihre zugehörigen Monodromiegruppen. Daß die Bedingung (iii) erfüllt ist, folgt dabei aus der Tatsache, daß jede Singularität, die nicht vom Typ A_1 ist, in eine Singularität vom Typ A_2 deformiert [Looijenga₃, (7.18)].

1.4 Geometrische Basen

Wir betrachten wieder die Situation wie in Kap. 1.2, und wir wählen ein geordnetes System von Wegen $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ von den Punkten s_1, \dots, s_m nach s . Die Umgebungen B_i und der Radius ρ der Kreisscheiben \mathbb{D}_i seien so gewählt, daß alle diese Mengen zueinander disjunkt sind.

Wir nennen das System von Wegen schwach ausgezeichnet, wenn gilt: Die zu den φ_i gehörigen einfachen Schleifen ω_i bilden ein freies Erzeugendensystem von $\pi_1(\mathbb{D}^*, s)$.

Wir nennen das System von Wegen (stark) ausgezeichnet (oder auch geometrisch), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Wege φ_i sind doppelpunktfrei.
- (ii) Der einzige gemeinsame Punkt von φ_i und φ_j für $i \neq j$ ist s .
- (iii) Die Wege sind in der Reihenfolge numeriert, in der sie in s eintreffen, wobei man im Uhrzeigersinn vom Rand der Kreisscheibe aus zu zählen hat (siehe Abbildung 1.4.1, vgl. [Husein-Zade₁, 1.2])

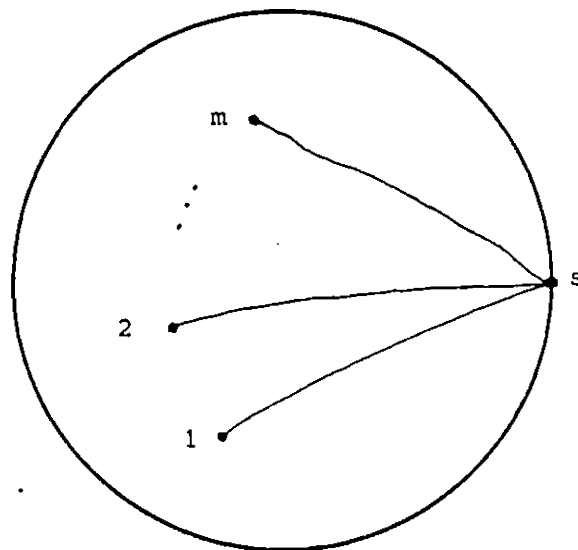


Abbildung 1.4.1

Ein stark ausgezeichnetes System von Wegen ist natürlich auch schwach ausgezeichnet.

Ein geordnetes System von Wegen $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ definiert nach Kap. 1.2 ein geordnetes System von verschwindenden Zykeln $B = (\delta_1, \dots, \delta_m)$ und von verschwindenden Zellen $\hat{B} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$, das wir entsprechend schwach oder stark ausgezeichnet nennen, wenn das System von Wegen diese Eigenschaft hat. Mit ähnlichen Methoden wie in [Brieskorn₁, Appendix] (siehe auch [Looijenga₃, 5.B]) kann man zeigen, daß ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zellen \hat{B} eine Basis von \hat{H} bildet. Nach [Husein-Zade₁, 2.1] folgt dies auch für ein schwach ausgezeichnetes System. Wir nennen entsprechend \hat{B} eine stark oder schwach ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen.

Das entsprechende geordnete System $B = (\delta_1, \dots, \delta_m)$ von verschwindenden Zykeln zu einer stark oder schwach ausgezeichneten Basis von verschwindenden Zellen bil-

det ein Erzeugendensystem von H , das wir ebenfalls stark oder schwach ausgezeichnet nennen.

Die Bedeutung dieser Basen (und entsprechenden Erzeugendensysteme) erklärt sich aus den folgenden Beziehungen. Es sei zunächst $\hat{B} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$ eine schwach ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen und $B = (\delta_1, \dots, \delta_m)$ das zugehörige schwach ausgezeichnete Erzeugendensystem von verschwindenden Zykeln. Dann erzeugen die zugehörigen Picard-Lefschetz-Transformationen

$$\hat{\gamma}_i = s_{\hat{\delta}_i}^{(n)} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_i = s_{\delta_i}^{(n)} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

die relative Monodromiegruppe $\hat{\Gamma}$ bzw. die Monodromiegruppe Γ .

Durch einen positiven Umlauf (gegen den Uhrzeigersinn) um den Rand $\partial \bar{D}$ der Kreisscheibe \bar{D} wird gemäß Kap. 1.3 sowohl ein Automorphismus $\hat{c} \in \hat{\Gamma}$ als auch ein Automorphismus $c \in \Gamma$ induziert. Wir nennen c einen (generischen) Monodromieoperator und \hat{c} einen (generischen) relativen Monodromieoperator von (X, x) . Sind nun \hat{B} und B stark ausgezeichnet, so entsprechen \hat{c} bzw. c den Coxeterelementen zu \hat{B} bzw. B , d.h. es gilt:

$$\hat{c} = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \dots \hat{\gamma}_m \quad \text{bzw.} \quad c = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m$$

Bemerkung 1.4.1: Wir hatten in Kap. 1.1 bemerkt, daß sich je zwei Elemente aus \hat{H} durch relative Zykeln repräsentieren lassen, die sich nur in X_S schneiden. Dies kann man wie folgt einsehen. Es genügt, dies für die Elemente einer stark ausgezeichneten Basis von verschwindenden Zellen $\hat{B} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$ zu zeigen. Nach Konstruktion gilt dies für $\hat{\delta}_i$ und $\hat{\delta}_j$ mit $i \neq j$. Da \mathcal{U} linear auf den Ursprung kontrahierbar ist, kann man die Klasse $[D^{n+1}] \in H_{n+1}(\mathcal{U}, Y_*)$, die in Kap. 1.2 zur Konstruktion der verschwindenden Zelle $\hat{\delta}_i$ verwendet wurde, auch durch eine Scheibe \tilde{D}^{n+1} mit

$$\tilde{D}^{n+1} \cap D^{n+1} = \partial \tilde{D}^{n+1} = \partial D^{n+1} = S^n \subset Y_*$$

repräsentieren. Daraus folgt leicht die Behauptung.

Bemerkung 1.4.2: Es ist nicht bekannt, ob man aus einem stark oder schwach ausgezeichneten Erzeugendensystem von verschwindenden Zykeln immer eine Basis des Milnorgitters H auswählen kann. Wir werden bei den von uns betrachteten speziellen Singularitäten solche Erzeugendensysteme angeben, bei denen dies möglich ist (vgl. Kap. 3). M. Merle hat mir aber vor kurzem mitgeteilt, daß er zeigen kann, daß das Milnorgitter H immer eine Basis besitzt, die aus verschwindenden Zykeln besteht [Merle₁]. Die Methoden, die er verwendet, stehen in Zusammenhang mit Kap. 2.1.

1.5 Dynkindiagramme

Es sei $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ein geordnetes System von verschwindenden Zellen $\lambda_i \in \hat{\Delta}$ oder von verschwindenden Zykeln $\lambda_i \in \Delta$ für $i = 1, \dots, r$. Die Matrix (Schnittmatrix) $((\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle))$, die die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich Λ beschreibt, wird üblicherweise durch einen Graphen D_Λ wie folgt dargestellt. Die Ecken von D_Λ sind die Ecken e_1, \dots, e_r , und für $i < j$ ist e_i mit e_j durch $|\langle e_i, e_j \rangle|$ Kanten verbunden, die mit dem Vorzeichen $+1$ oder -1 von $\langle e_i, e_j \rangle \in \mathbb{Z}$ gewichtet sind. Das Gewicht

$$\epsilon = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{n+1/2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

deuten wir in den Darstellungen der Graphen durch eine gestrichelte Kante an, das Gewicht $-\epsilon$ durch eine durchgezogene Kante. Diesen Graphen D_Λ nennen wir das Dynkindiagramm zu Λ .

Das Dynkindiagramm $D_{\hat{B}}$ zu einer Basis \hat{B} von verschwindenden Zellen stimmt aufgrund der Definition der Bilinearform auf \hat{H} mit dem Dynkindiagramm D_B zu dem entsprechenden Erzeugendensystem B von verschwindenden Zykeln überein. Wir definieren:

Definition 1.5.1: Die Menge aller Dynkindiagramme zu stark (bzw. schwach) ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zellen bezeichnen wir mit \mathcal{D}^* (bzw. \mathcal{D}°).

Bemerkung 1.5.2: Die Graphen aus \mathcal{D}^* und \mathcal{D}° sind nach [Looijenga₃, (7.5)] zusammenhängend.

Die Definition eines stark (schwach) ausgezeichneten m -Tupels $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ von verschwindenden Zellen oder Zykeln hängt von verschiedenen Wahlen ab, so von der Wahl der Geraden ℓ , der Punkte t und s , der Wege φ_i und der Orientierungen der λ_i . Wir betrachten nun Operationen auf der Menge aller solchen m -Tupel und damit auf der Menge der entsprechenden Dynkindiagramme (vgl. [Gabrielov₁], [Husein-Zade₁], [Ebeling₄], [Brieskorn₃], [Slodowy₁]).

(a) Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ (Orientierungswechsel):

$$\kappa_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, -\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m) \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

(b) Operation von Γ (bzw. $\hat{\Gamma}$):

$$\gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\gamma(\lambda_1), \dots, \gamma(\lambda_m)) \quad ,$$

wobei $\gamma \in \Gamma$ falls $\lambda_i \in \Delta$, $\gamma \in \hat{\Gamma}$ falls $\lambda_i \in \hat{\Delta}$ für alle i .

(c) Operation der Zopfgruppe Z_m :

Es sei Z_m die Zopfgruppe mit m Strängen und $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ ihre Standarderzeugenden. Für $j = 1, \dots, m-1$ operiert α_j wie folgt:

$$\alpha_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, s_{\lambda_j}^{(n)}(\lambda_{j+1}), \lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_m) \quad .$$

Die inverse Transformation α_j^{-1} wird auch mit β_{j+1} bezeichnet.

(d) Operation der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_m :

$$\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)}) \quad , \quad \sigma \in \mathcal{S}_m$$

(e) "Gabrielov-Transformationen"

$$\alpha_i(j)(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, s_{\lambda_i}^{(n)}(\lambda_j), \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m) ,$$

$$\beta_i(j) = (\alpha_i(j))^{-1} , \quad i, j \in \{1, \dots, m\} .$$

Alle diese Operationen erhalten die Eigenschaft eines m -Tupels $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, ein Erzeugendensystem oder eine Basis zu sein. Die Operationen (c) werden durch die folgenden Operationen auf dem System der Wege $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ bzw. auf dem System der zugehörigen einfachen Schleifen $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ induziert:

$$\alpha_j(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1} \omega_j \varphi_j, \varphi_{j+2}, \dots, \varphi_m) ,$$

$$\alpha_j(\omega_1, \dots, \omega_m) = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_j \omega_{j+1} \omega_j^{-1}, \omega_j, \omega_{j+2}, \dots, \omega_m) .$$

Die Transformationen (e) wurden in dem hier betrachteten Zusammenhang von Gabrielov eingeführt [Gabrielov₁] und sind Kombinationen von Transformationen von (c) und (d). Die Transformationen $\alpha_i(j)$ und $\beta_i(j)$ operieren wie folgt auf der Menge \mathcal{D}° . Für

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_i(j)} \\ \xleftarrow{\beta_i(j)} \end{array} (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$$

gilt:

$$\langle \tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_s \rangle = \langle \lambda_r, \lambda_s \rangle \quad \text{für } 1 \leq r, s \leq m , \quad r, s \neq j \quad \text{oder } r = s = j ,$$

$$\langle \tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j \rangle = (-1)^{n+1} \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle \quad \text{falls } i \neq j ,$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_j \rangle = \langle \lambda_r, \lambda_j \rangle - (-1)^{n(n-1)/2} \langle \lambda_r, \lambda_i \rangle \langle \lambda_j, \lambda_i \rangle \\ \langle \lambda_r, \lambda_j \rangle = \langle \tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_j \rangle - (-1)^{n(n+1)/2} \langle \tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_i \rangle \langle \tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_i \rangle \end{array} \right\} \quad \text{für } r \neq i, j .$$

Daraus kann man auch leicht die Operation von (c) auf der Menge \mathcal{D}^* ablesen, da die folgenden Beziehungen zwischen den Operationen aus (c), (d) und (e) bestehen. Bezeichnet $\tau_{j,j+1} \in \mathcal{S}_m$ die Transposition von j und $j+1$, so gilt:

$$\alpha_j = \tau_{j,j+1} \circ \alpha_{j(j+1)} \quad ,$$

$$\beta_{j+1} = \tau_{j,j+1} \circ \beta_{j+1(j)} \quad .$$

Die Operation (b) dient dazu, die Unbestimmtheit des Basispunktes $s \in S - D_F$ auszugleichen, und ist trivial auf den Mengen \mathcal{D} und \mathcal{D}^* . Alle Transformationen lassen die (relative) Monodromiegruppe Γ (bzw. $\hat{\Gamma}$) invariant, jedoch können die Operationen zu (d) und (e) die Konjugationsklasse von c und \hat{c} verändern (vgl. die Beispiele in [Ebeling_{1,4}]).

Definition 1.5.3: Wir nennen zwei Dynkindiagramme D und D' zu Basen von verschwindenden Zellen schwach äquivalent, wenn sie sich durch Iteration von Operationen der Klassen (a), (c), (d) und (e) ineinander überführen lassen. Wir nennen sie stark äquivalent, wenn sie sich durch Iteration von Operationen (a) und (c) ineinander überführen lassen.

Satz 1.5.4: Je zwei Dynkindiagramme aus \mathcal{D}^* sind stark äquivalent.

Dieser Satz wurde von Gabrielov bewiesen, siehe [Husein-Zade, 2.2.3].

Satz 1.5.5 (S.Humphries [Humphries₁]): Je zwei Dynkindiagramme aus \mathcal{D}° sind schwach äquivalent.

Dies wurde von Husein-Zade vermutet [Husein-Zade₁, 2.2.5] und von S.Humphries bewiesen. Der Beweis von Humphries ist elementar. Der Satz folgt auch, wie R.Pellikaan bemerkt hat, aus [Lyndon-Schupp, Proposition 4.20].

Um zu zeigen, daß die Mengen \mathcal{D}^* und \mathcal{D}° Invarianten der Singularität (X,x) sind, müssen wir noch ihre Unabhängigkeit von der Wahl der Geraden ℓ und des Punktes $t \in T$ zeigen. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes t für eine

festen Gerade ℓ folgt wie in [Siersma₁, §7] (siehe auch [Looijenga, (7.13)]), da das Bild V_ℓ des Verzweigungsortes von $\pi|_D = \pi_\ell|_D$ in $T = T_\ell$ eine echte analytische Teilmenge von T_ℓ ist, also das Komplement $T_\ell - V_\ell$ offen, dicht und wegzusammenhängend in T_ℓ ist. Die Menge $\mathcal{J}_O(D)$ aller Geraden, die im Tangentialkegel von (D, O) liegen, bilden eine echte analytische Teilmenge von $P^{p-1}(\mathbb{C})$, der Menge aller Geraden von \mathbb{C}^P durch O . Das Komplement ist also ebenfalls offen, dicht und wegzusammenhängend. Es seien $\ell, \ell' \in P^{p-1}(\mathbb{C}) - \mathcal{J}_O(D)$ und $t \in T_\ell - V_\ell$, $t' \in T_{\ell'} - V_{\ell'}$. Dann lassen sich $\{t\} \times \ell$ und $\{t'\} \times \ell'$ durch einen stückweise glatten Weg in $\mathbb{C}^P \times P^{p-1}(\mathbb{C})$ verbinden, der die Mengen $\mathbb{C}^P \times \mathcal{J}_O(D)$ und

$$\begin{array}{c} \cup \\ \ell \in P^{p-1}(\mathbb{C}) - \mathcal{J}_O(D) \end{array} \quad V_\ell \times \{\ell\}$$

vermeidet. Die Unabhängigkeit von \mathcal{D}° und \mathcal{D}^* von der Wahl von ℓ und t folgt dann ähnlich wie in [Dimca₁, §1] mit Hilfe von einfachen Stratifizierungsargumenten aus dem zweiten Isotopielemma von Thom-Mather [Gibson et al., II (5.8)].

Darüber hinaus folgt aus den gleichen Argumenten die Unabhängigkeit der grundlegenden exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H' \rightarrow \hat{H} \rightarrow H \rightarrow 0$$

von der Wahl der generischen Geraden ℓ . Aus der Invarianz von \mathcal{D}^* folgt nun auch die Invarianz der Konjugationsklasse $\hat{\mathcal{C}}^* \subset \hat{\Gamma}$ des relativen Monodromieoperators \hat{c} und, mit Hilfe der Unabhängigkeit der obigen Sequenz, die Invarianz der Konjugationsklasse $\mathcal{C}^* \subset \Gamma$ des generischen Monodromieoperators c .

Damit haben wir gezeigt, daß die eingeführten Objekte

$$H', \hat{H}, H; \hat{\Delta}, \Delta; \hat{\Gamma}, \Gamma; \mathcal{D}^*, \mathcal{D}^\circ; \hat{\mathcal{C}}^*, \mathcal{C}^*$$

allesamt Invarianten der Singularität (X, x) sind.

1.6 Relative Monodromie

Im Hyperflächenfall bestimmt die Invariante \mathcal{D}^* bzw. schon ein Dynkindiagramm aus \mathcal{D}^* das Milnorgitter H , die Menge von verschwindenden Zykeln $\Delta \subset H$, die Monodromiegruppe $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ und die Konjugationsklasse \mathcal{C}^* des Monodromieoperators $c \in \Gamma$. (Siehe auch den Artikel von Brieskorn [Brieskorn₃] für eine Übersicht über die Beziehungen zwischen den verschiedenen Invarianten im Hyperflächenfall.) Ist (X, x) dagegen keine Hyperfläche, so bestimmt \mathcal{D}^* bzw. $D \in \mathcal{D}^*$ zunächst nur die relativen Objekte $\hat{H}, \hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ und $\hat{\mathcal{C}}^*$. Zur Kenntnis von H, Δ, Γ und \mathcal{C}^* benötigt man noch zusätzliche Informationen über die linearen Relationen der verschwindenden Zykel $\delta_1, \dots, \delta_m$ des das Dynkindiagramm D bestimmenden stark ausgezeichneten Erzeugendensystems, d.h. über den Modul H' . Wir diskutieren in diesem Abschnitt, inwieweit diese Informationen aus der relativen Monodromie, dem Coxeterelement \hat{c} zu D , gewonnen werden können.

Es sei $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m) \in \hat{\Delta}^m$ eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen mit zugehörigem relativen Monodromieoperator $\hat{c} \in \hat{\Gamma}$ und zugehörigem Monodromieoperator $c \in \Gamma$. Nach Kap. 1.1 und 1.3 hat man das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H' & \rightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\partial^*} & H & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \hat{c} - \text{id}_{\hat{H}} & & \downarrow c - \text{id}_H & & \\
 0 & \rightarrow & H' & \rightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\partial^*} & H & \rightarrow & 0
 \end{array} \tag{1.6.1}$$

Hierbei ist der erste senkrechte Homomorphismus von links die Nullabbildung. Nach dem Schlangenlemma [Bourbaki₁, Chap. 1, § 1.4] erhält man daraus die folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow H' \rightarrow \ker(\hat{c} - \text{id}_{\hat{H}}) \rightarrow \ker(c - \text{id}_H) \rightarrow H' \rightarrow \text{coker}(\hat{c} - \text{id}_{\hat{H}}) \rightarrow \text{coker}(c - \text{id}_H) \rightarrow 0 \tag{1.6.2}$$

Insbesondere gilt

$$H' \subset \ker(\hat{C} - \text{id}_{\hat{H}})$$

In gewissen Fällen kann man diesen Untermodul noch genauer festlegen. Dazu dienen die folgenden Vorbereitungen.

Wir schreiben die Schnittmatrix $A = ((\langle \hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j \rangle))$ in der Form $A = V + (-1)^n V^t$, wobei V eine obere Dreiecksmatrix mit $(-1)^{n(n+1)/2}$ auf der Diagonale ist. Es sei \hat{C} die Matrix von \hat{C} bezüglich der Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$. Dann folgt aus [Bourbaki₂, Chap. V, §6, Exercice 3] (vgl. auch [Levine₁]):

Satz 1.6.3: $\hat{C} = (-1)^{n+1} V^{-1} V^t$

Korollar 1.6.4: $\ker(\hat{C} - \text{id}_{\hat{H}}) = \ker \hat{H}$

Beweis: Bezeichnet man mit $\mathbb{1}$ die $m \times m$ Einheitsmatrix, so folgt aus Satz 1.6.3:

$$\hat{C} - \mathbb{1} = -V^{-1} (V + (-1)^n V^t)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Wir bezeichnen mit $c_{\mathbb{C}}$ bzw. $\hat{c}_{\mathbb{C}}$ den komplexen Monodromieoperator $c_{\mathbb{C}}: H_{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\mathbb{C}}$ bzw. den komplexen relativen Monodromieoperator $\hat{c}_{\mathbb{C}}: \hat{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{H}_{\mathbb{C}}$, wobei $H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C}$ und $\hat{H}_{\mathbb{C}} := \hat{H} \otimes \mathbb{C}$. Nach [Lê_{3,4}] (siehe auch [Looijenga₃, Theorem (5.14)]) ist der komplexe Monodromieoperator $c_{\mathbb{C}}$ quasiunipotent, d.h. seine Eigenwerte sind Einheitswurzeln. Nach (1.6.2) ist demnach auch der relative Monodromieoperator $\hat{c}_{\mathbb{C}}$ quasiunipotent.

Wird die Singularität $(X,0)$ durch quasihomogene Polynome $f_i, i=1, \dots, k$ vom Grad d_i bezüglich der Gewichte $\text{wt}(z_j) = w_j, j=1, \dots, n+k$, für Koordinaten (z_1, \dots, z_{n+k}) von \mathbb{C}^{n+k} gegeben, und die Singularität $(X',0)$ durch die Gleichungen $f_i = 0, i = 1, \dots, k-1$, so sagen wir kurz: $(X,0)$ und $(X',0)$ sind quasihomogen (mit Graden $\underline{d} = (d_1, \dots, d_k)$ und Gewichten $\underline{w} = (w_1, \dots, w_{n+k})$).

Mit $\mu_0(X)$ bzw. $\mu_0(X')$ bezeichnen wir die Dimensionen der Kerne (Radikale) der Milnorgitter der entsprechenden Singularitäten. Dimca [Dimca₂] hat den folgenden Satz bewiesen.

Theorem 1.6.5 (Dimca): Die Singularitäten $(X,0)$ und $(X',0)$ seien quasihomogen mit Graden (d_1, \dots, d_k) . Dann gilt:

- (i) Der komplexe Monodromieoperator $c_{\mathbb{C}}$ ist diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind d_k -te Einheitswurzeln.
- (ii) $\dim(\ker(c - id)) = \mu_0(X) + \mu_0(X')$.

Wir werden bei der Berechnung von Dynkindiagrammen nur an dem Fall interessiert sein, daß die Singularität $(X',0)$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt, also eine Singularität vom Typ A_1 ist. In diesem Fall zeigen wir als Anwendung der obigen Resultate:

Satz 1.6.6: Die Singularitäten $(X,0)$ und $(X',0)$ seien quasihomogen, und $(X',0)$ sei eine Singularität vom Typ A_1 , also $\mu' = \text{rg } H' = 1$. Dann gilt:

- (i) Falls die Dimension n gerade ist, so hat $\hat{c}_{\mathbb{C}}$ genau einen nicht trivialen Jordanblock. Dieser ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ist $\hat{c}_{\mathbb{C}} = \hat{c}_s \hat{c}_u$ die (multiplikative) Jordanzerlegung von $\hat{c}_{\mathbb{C}}$ in einen halbeinfachen Teil \hat{c}_s und einen unipotenten Teil \hat{c}_u , so gilt:

$$H' = \text{im}(\hat{c}_u - id) \cap \hat{H} = \ker(\hat{c} - id) \cap \text{im}(\hat{c} - id) .$$

- (ii) Falls die Dimension n ungerade ist, so ist auch $\hat{c}_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar.

Beweis:

- (i) Ist n gerade, so ist die Dimension von $(X',0)$ ungerade. Also ist die Schnitt-

form auf der Milnorfaser von $(X', 0)$ schiefsymmetrisch und damit $\mu_0(X') = \mu' = 1$.

Aus Korollar 1.6.4 und Theorem 1.6.5 folgt:

$$\dim(\ker(\hat{c} - \text{id})) = \dim(\ker(c - \text{id})) .$$

Aus der exakten Sequenz (1.6.2) folgt damit:

$$H' \subset \ker(\hat{c} - \text{id}) \cap \text{im}(\hat{c} - \text{id}) ,$$

$$\ker(\hat{c} - \text{id})/H' \subset \ker(c - \text{id}) ,$$

$$\text{im}(\hat{c} - \text{id})/H' = \text{im}(c - \text{id}) .$$

Weil $c_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar ist, gilt $\ker(c - \text{id}) \cap \text{im}(c - \text{id}) = \{0\}$, und damit folgt die Behauptung (i).

(ii) Im Fall n ungerade ist die Dimension von $(X', 0)$ gerade. Also gilt

$\mu_0(X') = 0$ und aus Korollar 1.6.4 und Theorem 1.6.5 folgt:

$$\dim(\ker(\hat{c} - \text{id})) = \dim(\ker(c - \text{id})) + 1 .$$

Aus der exakten Sequenz (1.6.2) folgt dann:

$$\dim(\text{im}(\hat{c} - \text{id})) = \dim(\text{im}(c - \text{id})) .$$

Damit folgt die Behauptung (ii) von Satz 1.6.6.

Im Fall n gerade ist also unter den Voraussetzungen des Satzes H' durch \hat{c} bestimmt, im Fall ungerader Dimension n erhalten wir keine zusätzlichen Informationen, außer daß H' im Eigenraum von \hat{c} zum Eigenwert 1 liegt (1.6.2). Satz 1.6.6 (i) zeigt eine Parallele zu einer Konstruktion von K.Saito [Saito₁], auf die wir in Kap. 2.4 zu sprechen kommen werden.

2. BERECHNUNG VON DYNKINDIAGRAMMEN

2.1 Polarkurven

Wir betrachten in diesem Abschnitt Polarkurven von isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten und von ihnen abgeleitete Invarianten. Dieser Abschnitt dient zur Vorbereitung für die im nächsten Abschnitt dargestellte Methode zur Berechnung von Dynkindiagrammen.

Es sei $(X,0)$ eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchchnittes, die durch einen Abbildungskeim

$$f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$$

definiert ist. Wir nehmen an, daß auch

$$f' := (f_1, \dots, f_{k-1}) : (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$$

eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchchnitts definiert, die wir mit $(X',0)$ bezeichnen. Es sei $\zeta : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}$ eine lineare Funktion, die nach geeignetem Koordinatenwechsel als die letzte Koordinatenfunktion gewählt werden kann. Wir betrachten die Abbildung

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : X' \rightarrow V \subset \mathbb{C}^2,$$

wobei $\phi_1 = \zeta$, $\phi_2 = f_k$. Wir bezeichnen mit $\Sigma = \Sigma_\zeta(f_k)$ die kritische Menge dieser Abbildung und mit $\Delta = \Delta_\zeta(f_k)$ die Diskriminantenmenge dieser Abbildung. Wir setzen ferner voraus, daß die lineare Funktion ζ so gewählt worden ist, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

(2.1.1) ϕ ist eine Submersion in jedem Punkt von $\phi^{-1}(0) - \{0\}$.

Daß diese Bedingung für eine generische Funktion ζ erfüllt ist, folgt z.B. aus [Looijenga₃, Lemma (5.2)]. Schließlich nehmen wir noch an, daß gilt

(2.1.2) $f_k|_{X'}$ ist keine Submersion in 0.

Dann hat man die folgenden Tatsachen (siehe z.B. [Looijenga₃, Theorem (2.8)]):

- (i) Σ ist eine (nicht notwendig reduzierte) Kurve, d.h. $\dim \Sigma = 1$.
- (ii) $\Delta = \phi(\Sigma)$ ist eine ebene Kurve.
- (iii) Die Abbildung $\phi|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \Delta$ ist eine endliche Abbildung.

Definition 2.1.3: Die Kurve $\Sigma_{\zeta}(f_k)$ heißt die (relative) Polarkurve von f_k bezüglich ζ . Ihr Bild $\Delta_{\zeta}(f_k)$ unter ϕ wird das (relative) Cerfdiagramm von f_k bezüglich ζ genannt.

Es sei $\Sigma = \cup \Sigma_i$ die Zerlegung der Polarkurve in irreduzible Komponenten und $\Delta_i := \phi(\Sigma_i)$. Wir wählen Koordinaten von \mathbb{C}^2 , die wir mit (ζ, λ) bezeichnen, so daß die Abbildung ϕ durch $\phi_1(z) = \zeta$ und $\phi_2(z) = f_k(z) = \lambda$ für $z \in X'$ gegeben wird.

Wir nehmen an, daß der Zweig Δ_i nicht mit der Koordinatenachse $\zeta = 0$ zusammenfällt. Dann hat er die Puiseuxparametrisierung

$$\lambda = a_i \zeta^{\rho_i} + \dots, \quad a_i \neq 0,$$

wobei $a_i \in \mathbb{C}$ und $\rho_i \in \mathbb{Q}$. Nach der Definition von λ kann man dies auch so interpretieren, daß $f_k|_{\Sigma_i}$ als eine Potenzreihe mit gebrochenen Exponenten in ζ geschrieben werden kann, die mit dem Term $a_i \zeta^{\rho_i}$ beginnt. Wenn X' nichtsingulär ist, dann sind alle Zweige Δ_i tangential zur Koordinatenachse $\lambda = 0$ in 0 [$\hat{L}e_1$, Proposition 1.2], und deshalb gilt $\rho_i > 1$. Dies gilt aber im allgemeinen nicht mehr, wenn X' singulär ist (vgl. [$\hat{L}e_3$]).

Falls $\Delta_i = \{\zeta = 0\}$, so setzen wir $\rho_i = 0$.

Die im nächsten Abschnitt dargestellte Methode zur Berechnung von Dynkindiagrammen basiert auf der Tatsache, daß die kritischen Punkte der folgenden Funktionen alle auf der Polarkurve $\Sigma = \Sigma_{\zeta}(f_k)$ liegen:

$$f_k - 2\epsilon\zeta|_{X'}, \quad f_k|_{X' \cap \{\zeta = \epsilon\}}, \quad f_k + (\zeta - \epsilon)^2|_{X'}.$$

Hierbei ist $0 \leq \epsilon \ll 1$. Es sei μ_i (bzw. ν_i) die Summe der Milnorzahlen der kritischen Punkte von $f_k - 2\epsilon\zeta|_{X'}$ (bzw. $f_k|_{X' \cap \{\zeta = \epsilon\}}$), $\epsilon \neq 0$, die zu $\Sigma_i - \{0\}$ gehören und für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben. Dann hat man die folgende Beziehung:

Satz 2.1.4: Falls $\rho_i > 1$ gilt: $\mu_i = \nu_i(\rho_i - 1)$.

Beweis: Es sei Σ_i eine irreduzible Komponente von Σ mit $\rho_i > 1$. Es sei n_i die Multiplizität von Σ_i . Da $\phi|_{\Sigma}$ endlich ist, können wir, nachdem wir möglicherweise X' und V verkleinert haben, annehmen, daß $\phi|_{\Sigma_i - \{0\}}: \Sigma_i - \{0\} \rightarrow \Delta_i - \{0\}$ eine Überlagerung vom Grad d_i ist. Ein kritischer Punkt ξ von $f_k - 2\epsilon\zeta|_{X'}$, der auf $\Sigma_i - \{0\}$ liegt, wird unter ϕ auf einen Punkt von $\Delta_i - \{0\}$ abgebildet, so daß die Tangente an Δ_i in diesem Punkt parallel zu der Geraden $\lambda - 2\epsilon\zeta = 0$ ist. Es sei m_i die Anzahl solcher Punkte auf $\Delta_i - \{0\}$. Nach [Teissier₁, 2.6] ist die Milnorzahl des kritischen Punktes ξ gleich n_i . Deshalb gilt

$$\mu_i = m_i d_i n_i.$$

Die kritischen Punkte von $f_k|_{X' \cap \{\zeta = \epsilon\}}$, die auf $\Sigma_i - \{0\}$ liegen, sind die Punkte von $\Sigma_i \cap \{\zeta = \epsilon\}$. Sie werden unter ϕ auf die Punkte von $\Delta_i \cap \{\zeta = \epsilon\}$ abgebildet. Die Milnorzahl eines solchen kritischen Punktes ist aus dem gleichen Grund wie oben gleich n_i . Deshalb gilt

$$\nu_i = d_i n_i (\Delta_i, \text{red} \cdot \{\zeta = \epsilon\}) = d_i (\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\}),$$

wobei (\cdot) die Schnittzahl bezeichnet und Δ_i, red die zugehörige reduzierte Kurve zu Δ_i . Da Δ_i der Zweig einer ebenen Kurve ist und $\rho_i > 1$ gilt, kann man leicht verifizieren, daß gilt:

$$n_i m_i = (\Delta_i \cdot \{\lambda = 0\}) - (\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\}).$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{(\Delta_i \cdot \{\lambda = 0\})}{(\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\})} = \frac{n_i m_i + (\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\})}{(\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\})} \\ &= \frac{d_i n_i m_i + d_i (\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\})}{d_i (\Delta_i \cdot \{\zeta = 0\})} = \frac{\mu_i + v_i}{v_i} \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Falls $g: (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts $(Y, 0)$ definiert, so bezeichnen wir die Milnorzahl von $(Y, 0)$ auch mit $\mu(g)$. Wir bezeichnen mit X'_t eine Milnorfaser von $(X', 0)$ bezüglich der Abbildung f' , wobei $t \in \mathbb{C}^{k-1}$ hinreichend klein und nicht in der Diskriminante $D_{f'}$ von f' enthalten ist. Nach $[\hat{L}e_2]$ (siehe auch $[Dimca_1, Proposition 1.1]$) ist die Anzahl m der kritischen Punkte der Funktion

$$f_k - 2\varepsilon\zeta|_{X'_t}$$

(wobei die Punkte mit ihren Milnorzahlen zu zählen sind) gleich

$$m = \mu(f) + \mu(f') \quad .$$

Satz 2.1.5: Es gelten die folgenden Beziehungen:

(i) $\mu(f) = \mu(f', f_k - 2\varepsilon\zeta) + \sum_{i: \rho_i > 1} \mu_i \quad .$

(ii) Es sei $a_i \neq -1$ für $\rho_i = 2$. Dann gilt:

$$\mu(f', f_k + \zeta^2) = \mu(f', f_k - 2\varepsilon\zeta) + \sum_{i: 1 < \rho_i < 2} \mu_i + \sum_{i: \rho_i \geq 2} v_i$$

Beweis:

(i) Die Anzahl der kritischen Punkte der Funktion $f_k - 2\varepsilon\zeta|_{X'_t}$, die für $t \rightarrow 0$ gegen 0 streben, ist nach dem gleichen Resultat wie oben gleich der Zahl

$$\mu(f', f_k - 2\varepsilon\zeta) + \mu(f') \quad .$$

Man beachte, daß für einen Zweig Σ_i mit $\rho_i \leq 1$ die Zahl m_i , die in dem Beweis von Satz 2.1.4 definiert wurde, und damit auch die Zahl μ_i gleich null ist. Deshalb ist die Summe der Milnorzahlen der kritischen Punkte von $f_k - 2\epsilon\zeta|_{X_t}$, die für $t \rightarrow 0$ nicht gegen 0 streben, gleich der Zahl

$$\sum_{i: \rho_i > 1} \mu_i .$$

Daraus erhält man die Formel von (i).

(ii) Die Formel von (ii) erhält man aus (i), Satz 2.1.4 und der Identität

$$\mu(f', f_k + \zeta^2 - 2\epsilon\zeta) = \mu(f', f_k - 2\epsilon\zeta) .$$

2.2 Eine Verallgemeinerung einer Methode von Gabrielov

In [Gabrielov₃] gibt A.M. Gabrielov eine Methode zur Berechnung eines Dynkindiagramms einer isolierten Hyperflächensingularität, die durch einen Funktionskeim $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ gegeben wird, aus einem Dynkindiagramm der durch $f + \zeta^2$ definierten Singularität. Wir verallgemeinern seine Methode auf die obige Situation: Ein Funktionskeim $f_k: (X', 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ mit einer isolierten Singularität in 0, der auf einer isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitts $(X', 0)$ definiert ist.

Gabrielovs Resultate und Beweise lassen sich ohne große Änderungen auf die allgemeinere Situation übertragen. Deshalb folgen wir größtenteils seinem Artikel. Zur Formulierung der Resultate betrachten wir zunächst spezielle Dynkindiagramme der durch $(f', f_k + \zeta^2)$ definierten Singularität.

Satz 2.2.1: Wir betrachten die kleine Störung $g_\epsilon = f_k + (\zeta - \epsilon)^2|_{X'}$, $0 \leq \epsilon \ll 1$, von $f_k + \zeta^2|_{X'}$. Die kritischen Werte derjenigen kritischen Punkte von g_ϵ , die auf $\Sigma_i - \{0\}$ liegen und für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben, sind

$$\text{falls } \rho_i > 2 : a_i \varepsilon^{\rho_i} + o(\varepsilon^{\rho_i}) ,$$

falls $\rho_i = 2$ (wir nehmen in diesem Fall $a_i \neq -1$ an):

$$\varepsilon^2 a_i / (a_i + 1) + o(\varepsilon^2) ,$$

$$\text{falls } \rho_i < 2 : \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) .$$

Der kritische Punkt 0 wird durch g_ε auf ε^2 abgebildet.

Beweis: Die kritischen Punkte von g_ε , die auf $\Sigma_i - \{0\}$ liegen, sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial g_\varepsilon |_{\Sigma_i}}{\partial \zeta} = a_i \rho_i \zeta^{\rho_i - 1} + 2(\zeta - \varepsilon) + o(\zeta^{\rho_i - 1}) = 0 ,$$

die für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben. Betrachtet man die Asymptoten dieser Lösungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ und ihre Bilder unter g_ε , so ergeben sich die obigen Werte.

Nach Satz 2.2.1 liegen die kritischen Werte von g_ε in Ringen um den Nullpunkt: Es sei R die Menge aller Werte ρ_i . Es sei $\varepsilon \neq 0$ hinreichend klein. Für jedes $\rho \in R$ mit $\rho > 2$ können wir positive Zahlen q'_ρ und q''_ρ wählen, so daß die kritischen Werte aller kritischen Punkte von g_ε , die zu $\Sigma_i - \{0\}$ mit $\rho_i = \rho$ gehören und für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben, im offenen Kreisring $\{u | q'_\rho < |u| < q''_\rho\}$ enthalten sind. Ebenso können wir positive Zahlen q'_2 und q''_2 wählen, so daß die kritischen Werte aller zu $\Sigma_i - \{0\}$ mit $\rho_i \leq 2$ gehörenden kritischen Punkte, die außerdem für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben, und des kritischen Punktes 0 im offenen Kreisring $\{u | q'_2 < |u| < q''_2\}$ enthalten sind. Ferner können die Zahlen q'_ρ und q''_ρ ($\rho \geq 2$) so gewählt werden, daß für $\rho > \bar{\rho}$ gilt $q''_\rho < q'_\bar{\rho}$.

Im folgenden nehmen wir an, daß das Argument der komplexen Zahl u , $\arg u$, im Intervall $[-\pi, \pi]$ liegt. Es sei $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige monoton fallende Funktion mit $\sigma(q) = \rho - 1$ für $q'_\rho \leq q \leq q''_\rho$. Wir definieren

$$V_r := \{u | \arg u + 2\pi\sigma(|u|) \geq (2r - 1)\pi\}$$

für $r = 0, 1, 2, \dots$.

Wir nehmen an, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(2.2.2) \quad (-a_i)^{\ell_i} \notin \mathbb{R}_+ \quad \text{für} \quad \rho_i = k_i / \ell_i, \quad (k_i, \ell_i) = 1.$$

Dann kann man leicht aus Satz 2.2.1 ableiten, daß für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ die kritischen Werte von g_ε nicht in \mathbb{R}_- oder im Rand einer Menge V_r enthalten sind.

Nun betrachten wir die Funktion

$$g_{\varepsilon, t} = f_k + (\zeta - \varepsilon)^2 \Big|_{X_t}$$

Wähle $\varepsilon \gg \delta > 0$ klein genug, so daß für alle $t \in \mathbb{C}^{k-1}$ mit $0 < |t| \leq \delta$ und $t \notin D_{f'}$ (wobei $D_{f'}$ die Diskriminante von f' bezeichnet) auch die kritischen Werte von $g_{\varepsilon, t}$ nicht auf \mathbb{R}_- , auf dem Rand eines der obigen Kreise oder auf dem Rand einer Menge V_r liegen. Man wähle ein solches t . Falls $g_{\varepsilon, t}$ keine Morsefunktion ist, d.h. nicht nur nicht entartete kritische Punkte mit verschiedenen kritischen Werten hat, so ersetzen wir diese Funktion durch eine benachbarte Morsefunktion (dies ist möglich nach [Dimca₁]).

Nun wählen wir ein stark ausgezeichnetes System $(\varphi_1, \dots, \varphi_\nu)$ von Wegen, das die kritischen Werte von $g_{\varepsilon, t}$ mit dem nicht kritischen Wert 0 verbindet. Stark ausgezeichnet heißt in diesem Fall, daß die Wege doppeltpunktfrei, kreuzungsfrei ($\varphi_i \cap \varphi_j = \{0\}$) und in der folgenden Weise geordnet sind: Für $i < j$ sei $\arg u_i > \arg u_j$, wobei u_i bzw. u_j der Schnittpunkt von φ_i bzw. φ_j mit einem kleinen Kreis um den Nullpunkt ist. Wir nehmen zusätzlich an, daß das System von Wegen die folgende Eigenschaft erfüllt:

- (V) Jeder Weg schneidet \mathbb{R}_- nur im Nullpunkt, und ein Weg, der bei einem kritischen Wert in V_r beginnt, bleibt ganz in V_r .

Diese Bedingung ist z.B. für ein System von Geradenabschnitten zwischen den

$$f(x, y, z) = (2xz + y^2, x^2 - b^2 y^2 z + \frac{1}{\sqrt{2}} byz^4 + b^4 z^4), \quad b^8 = -1 \quad (\kappa_{1,3}^\#)$$

$$\rho_1 = 4, \quad \rho_2 = \frac{11}{2}, \quad \nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2,$$

$$\mu(f_1, f_2 - 2\epsilon z) = 2$$

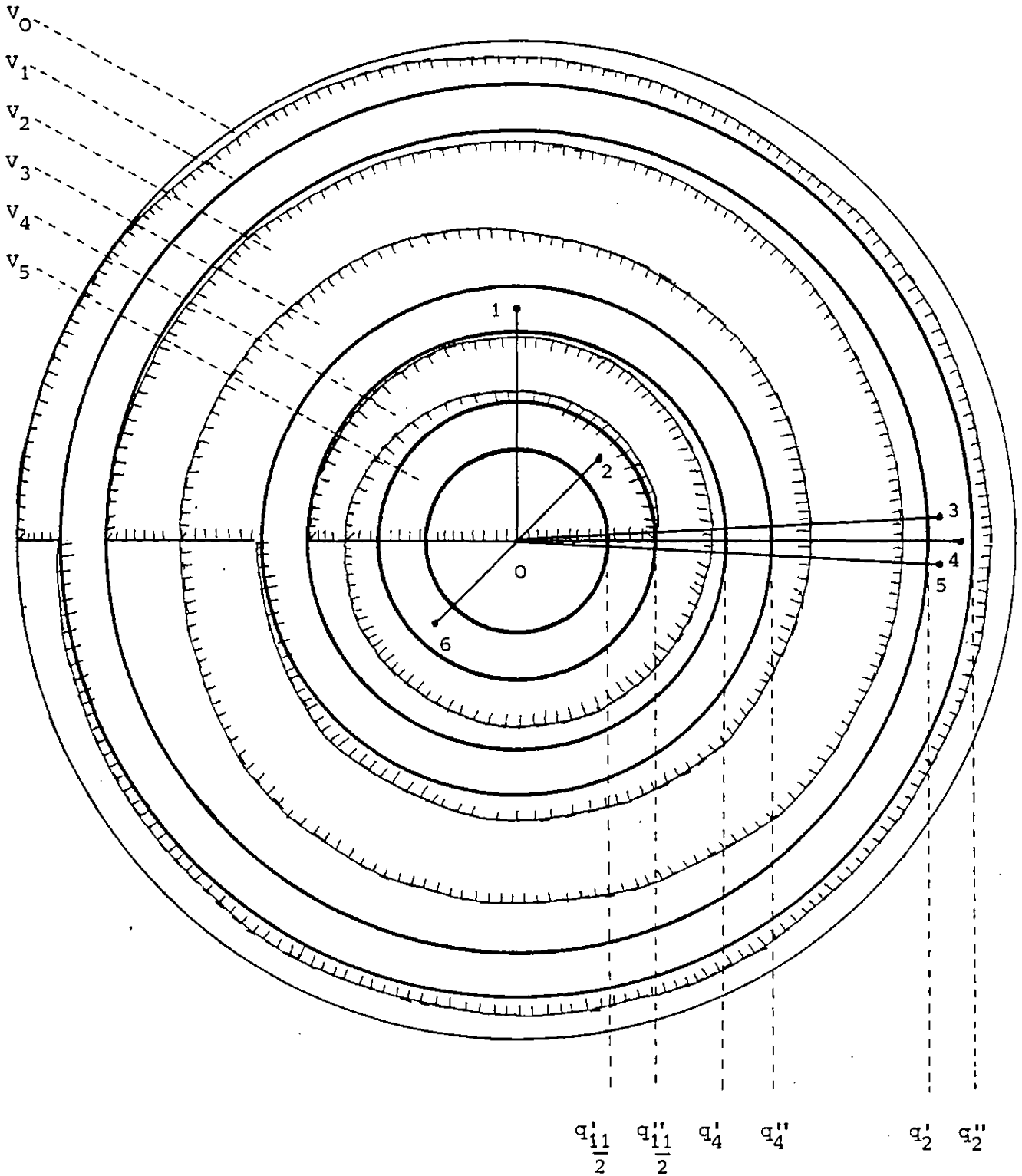


Abbildung 2.2.1

kritischen Werten von $g_{e,t}$ und 0 erfüllt (mit geeigneten Änderungen, falls zwei kritische Werte auf dem gleichen Geradenstück liegen) (vgl. Abbildung 2.2.1).

Nach diesen Vorbereitungen können wir das folgende Theorem formulieren.

Theorem 2.2.3: Es sei $f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ ein Abbildungskeim, der eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts $(X, 0)$ definiert, und durch $f' = (f_1, \dots, f_{k-1})$ werde eine isolierte Singularität $(X', 0)$ definiert. Es sei $\zeta : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}$ eine lineare Funktion, und die Bedingungen (2.1.1), (2.1.2) und (2.2.2) seien erfüllt. Schließlich sei (e_1, \dots, e_ν) die Basis von verschwindenden Zellen für $g = (f', f_k + \zeta^2)$, die zu einem stark ausgezeichneten System von Wegen gehört, das der Bedingung (V) genügt.

Dann besitzt $(X, 0)$ eine stark ausgezeichnete Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq \nu, 1 \leq r \leq M_j)$ von verschwindenden Zellen, die durch die lexikographische Ordnung der Paare (r, j) geordnet ist, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für $1 \leq j, j' \leq \nu, 1 \leq r \leq M_j$ gilt:

$$\langle e_j^1, e_{j'}^1 \rangle = \langle e_j, e_{j'} \rangle, \quad e_j^{r+1} = \hat{c}(e_j^r),$$

wobei \hat{c} der relative Monodromieoperator von (X, X') ist.

(b) Ein Paar (r, j) heiße zulässig, wenn $1 \leq j \leq \nu$ und $1 \leq r \leq M_j$. Dann ist ein Paar (r, j) genau dann zulässig, wenn die verschwindende Zelle e_j durch einen in V_r enthaltenen Weg definiert ist. Für ein System von Geradenstücken $(\varphi_1, \dots, \varphi_\nu)$ kann diese Bedingung wie folgt umformuliert werden: Die ersten μ_i Paare von jeder Menge von Paaren (r, j) , wobei e_j eine verschwindende Zelle ist, die zu einem kritischen Punkt auf $\Sigma_i - \{0\}$ gehört, sind zulässig.

(c) Die Basis (e_j^r) hat die folgende Schnittmatrix ¹⁾:

$$\langle e_j^r, e_{j'}^r \rangle = \langle e_j, e_{j'} \rangle,$$

$$\langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle = -(-1)^{n(n-1)/2} (r' - r)^n \quad \text{für } |r' - r| = 1,$$

$$\langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle = -\langle e_j, e_{j'} \rangle \quad \text{für } |r' - r| = 1 \text{ und } (r' - r)(j' - j) < 0,$$

¹⁾ Die Formeln von [Gabrielov₃] enthalten demnach Druckfehler.

$$\langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle = 0 \quad \text{für } |r' - r| > 1 \quad \text{oder} \quad (r' - r)(j' - j) > 0 .$$

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet. Die Behauptung (c) folgt leicht aus der Behauptung (a) wie im folgenden Lemma angegeben ist.

Lemma 2.2.4 (vgl. [Gabrielov₃, Lemma 1]): Es sei $(e_j^r | 1 \leq j \leq v, 1 \leq r \leq M_j)$ eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen, die nach der lexikographischen Ordnung der Paare (r, j) geordnet ist, und für die gilt: $e_j^{r+1} = \hat{c}(e_j^r)$ für $1 \leq r \leq M_j - 1$, wobei \hat{c} das zugehörige Coxeterelement ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle e_j^r, e_{j'}^r \rangle &= \langle e_j^1, e_{j'}^1 \rangle , \\ \langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle &= -(-1)^{n(n-1)/2} (r' - r)^n \quad \text{für } |r' - r| = 1 , \\ \langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle &= -\langle e_j^1, e_{j'}^1 \rangle \quad \text{für } |r' - r| = 1 \quad \text{und} \quad (r' - r)(j' - j) < 0 , \\ \langle e_j^r, e_{j'}^{r'} \rangle &= 0 \quad \text{für } |r' - r| > 1 \quad \text{oder} \quad (r' - r)(j' - j) > 0 . \end{aligned}$$

Beweis: Da \hat{c} die Schnittform respektiert, folgt $\langle e_j^r, e_{j'}^r \rangle = \langle e_j^1, e_{j'}^1 \rangle$. Setzen wir

$$\hat{\gamma}_j^r = s_{e_j^r}^{(n)} ,$$

so gilt $\hat{c} = \hat{\gamma}_1^1 \hat{\gamma}_2^1 \dots \hat{\gamma}_v^{M_v}$. Aus $\hat{c}(e_j^r) = e_j^{r+1}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j'}^{r'}(e_j^r) &= e_j^r \quad \text{für } (r', j') > (r+1, j) , \\ \hat{\gamma}_j^{r+1}(e_j^r) &= e_j^r - (-1)^{n(n-1)/2} \langle e_j^r, e_j^{r+1} \rangle e_j^{r+1} = e_j^r + e_j^{r+1} , \\ \hat{\gamma}_{j'}^{r'}(e_j^r + e_j^{r+1}) &= e_j^r + e_j^{r+1} \quad \text{für } r' = r + 1, j' < j \quad \text{und} \\ & \quad r' = r, j' > j . \end{aligned}$$

Daraus folgen die anderen Formeln von Lemma 2.2.4.

Zum Beweis von Theorem 2.2.3 muß man daher eine Basis von verschwindenden Zellen (e_j^r) für f konstruieren, die die Eigenschaften (a) und (b) hat. Zu diesem Zweck betrachten wir die Störung $f_\varepsilon = f_k - 2\varepsilon\zeta|_X$, der Funktion $f_k|_X$. Wir

berechnen wieder die Asymptoten der kritischen Werte dieser Funktion für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Satz 2.2.5: Die kritischen Werte der kritischen Punkte von $f_\varepsilon = f_k - 2\varepsilon\zeta|_{X^1}$, die auf $\Sigma_i - \{0\}$ liegen und für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben, sind

$$-a_i(\rho_i - 1) \left(\frac{2\varepsilon}{a_i \rho_i} \right)^{\rho_i/(\rho_i - 1)} + o\left(\varepsilon^{\rho_i/(\rho_i - 1)}\right).$$

Hier ist $\rho_i > 1$ notwendig für die Existenz solcher Punkte. Der kritische Punkt 0 wird durch f_ε auf 0 abgebildet.

Beweis: Dies folgt aus einer analogen Rechnung wie für den Beweis von Satz 2.2.1.

Wie oben folgt aus diesem Satz, daß wir für ein kleines $\varepsilon \neq 0$ positive Zahlen Q'_ρ und Q''_ρ für $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 2$, und eine Zahl Q'_2 finden können, so daß $Q''_\rho > Q'_\rho$ für $\rho > \bar{\rho}$ und die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die kritischen Werte aller kritischen Punkte von f_ε , die auf $\Sigma_i - \{0\}$ mit $\rho_i = \rho > 2$ liegen (und für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben), sind in einem offenen Kreisring $\{u | Q''_\rho < |u| < Q'_\rho\}$ enthalten. Der kritische Wert 0 und die kritischen Werte der kritischen Punkte von f_ε , die entsprechend auf $\Sigma_i - \{0\}$ mit $\rho_i \leq 2$ liegen, sind in einer offenen Kreisscheibe $\{u | |u| < Q'_2\}$ enthalten. Man beachte, daß die Ordnung zwischen den Kreisringen, die durch $\rho \in \mathbb{R}$ gegeben wird, umgekehrt ist, vergleicht man sie mit der entsprechenden Situation für g_ε , und 0 ist nun ein kritischer Wert.

Die grundlegende Idee ist nun, die beiden Störungen g_ε und f_ε durch die Deformation

$$F_\varepsilon^\eta = f_k + \eta\zeta^2 - 2\varepsilon\zeta|_{X^1}, \quad \eta \in [0,1],$$

wobei $F_\varepsilon^0 = f_\varepsilon$, $F_\varepsilon^1 = g_\varepsilon - \varepsilon^2$, in Beziehung zu setzen. Es stellt sich nun heraus, daß es einen Bereich G im Bildraum von f_ε gibt, so daß die kritischen Werte von f_ε , die in G enthalten sind, und nur sie in die kritischen Werte von

$g_\varepsilon - \varepsilon^2$, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben, übergehen, wenn man η von 0 nach 1 laufen läßt. Wir werden G definieren und Wegesysteme in G betrachten, die mit den vorher für g_ε definierten Wegesystemen in Verbindung stehen.

Wir wählen einen Basispunkt $u^* \in \mathbb{R}_-$, der ein kritischer Wert von f_ε ist und für den $u^* < -\max_{\rho} Q'_\rho$ gilt. Es sei $\xi: [0, -u^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige monoton fallende Funktion mit

$$\xi(q) = 1 \quad \text{für } q < Q'_2,$$

$$\xi(q) = 1/(\rho - 1) \quad \text{für } Q''_\rho \leq q \leq Q'_\rho, \quad \rho > 2,$$

$$\xi(q) > 0 \quad \text{für } \rho < -u^*,$$

$$\xi(-u^*) = 0.$$

Es sei $G = \{u \mid |u| \leq -u^*, |\arg(-u)| \leq \xi(|u|)\pi\}$. Ferner sei

$W_r = \{u \in G \mid \arg(-u) + (2r - 1)\xi(|u|)\pi \leq 2\pi\}$ für $r = 1, 2, \dots$. Insbesondere gilt.

$W_1 = G$.

Für spätere Zwecke benötigen wir auch eine Familie von Homöomorphismen

$\tau_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$\tau_\varphi(u) = ue^{2\pi\sqrt{-1}\varphi(\xi(|u|) + 1)}.$$

Nach Annahme ist die Bedingung (2.2.2) erfüllt. Es sei ε eine kleine positive Zahl. Dann kann man leicht aus Satz 2.2.5 ableiten:

Lemma 2.2.6: Keine kritischen Werte von f_ε sind in den Rändern der Mengen

$\tau_\varphi(W_r)$ für $\varphi = 0, 1, \dots$ und beliebige $r \in \mathbb{N}$ enthalten.

Dasselbe gilt für die Funktion

$$f_{\varepsilon, t} = f_k - 2\varepsilon\xi|_{X'_t}$$

für $0 < |t| \leq \delta$ (nachdem man möglicherweise δ verkleinern mußte) oder für eine

genügend benachbarte Morsefunktion. Wir nehmen auch an, daß δ so klein gewählt worden ist, daß keine kritischen Werte dieser Funktionen auf den Rändern der Kreisringe oder auf dem Rand der Kreisscheibe vom Radius Q_2' liegen.

Wir wählen ein stark ausgezeichnetes System von Wegen $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_\nu)$ innerhalb G , das die in G enthaltenen kritischen Werte von $f_{\varepsilon, t}$ mit dem nicht kritischen Wert u^* verbindet. Stark ausgezeichnet soll hier heißen, daß die Wege doppelpunktfrei, kreuzungsfrei und wie folgt geordnet sind: Für $i < j$ gilt $\arg(u_i - u^*) > \arg(u_j - u^*)$, wobei u_i bzw. u_j der Schnittpunkt von $\tilde{\varphi}_i$ bzw. $\tilde{\varphi}_j$ mit einem kleinen Kreis um u^* ist. Wir nehmen zusätzlich an, daß die folgende Bedingung erfüllt ist

(W) Ein Weg, der von einem kritischen Wert in W_r ausgeht, bleibt ganz in W_r .

Es sei (e_j^1) ein System von verschwindenden Zellen von f , das durch das gewählte Wegesystem definiert wird. Dann gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.2.7 (vgl. [Gabrielov₃, Lemma 2]): Man lasse in der Familie

$$F_{\varepsilon, t}^\eta = f_k + \eta \zeta^2 - 2\varepsilon \zeta |_{X_t'}$$

den Parameter η von 0 nach 1 variieren.

(i) Dann gehen genau die kritischen Werte von $F_{\varepsilon, t}^0 = f_{\varepsilon, t}$, die in G enthalten sind und für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ gegen 0 streben, in die kritischen Werte von $F_{\varepsilon, t}^1 = g_{\varepsilon, t} - \varepsilon^2$ über, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 streben. Dabei gehen genau die Werte in W_r in die Werte in $V_r - \varepsilon^2 = \{u - \varepsilon^2 \mid u \in V_r\}$ über.

(ii) Ein stark ausgezeichnetes System von Wegen für $F_{\varepsilon, t}^0$, das die Bedingung (W) erfüllt, kann homotopisch in ein Wegesystem für $g_{\varepsilon, t} - \varepsilon^2$ deformiert werden, das man durch eine Translation um $(-\varepsilon^2)$ aus einem ausgezeichneten System von Wegen erhält, das die Bedingung (V) erfüllt.

(iii) Die durch die entsprechenden Wegesysteme definierten Systeme von verschwindenden Zellen (e_j^1) und (a_j) haben die gleiche Schnittmatrix.

Da $|t| \leq \delta \ll \varepsilon$, folgen die Aussagen des Lemmas aus den entsprechenden Aussagen für $t = 0$. Die Milnorzahlen des kritischen Punktes 0 von g_ε und f_ε sind nach Satz 2.1.5 gleich. Deshalb folgt dieses Lemma aus [Gabrielov₃, Lemma 2].

Wir betrachten nun die Operation der relativen Monodromie. Es sei $X \subset \mathbb{C}^{n+k+h}$, $S \subset \mathbb{C}^{h+k}$ und

$$F: X \rightarrow S$$

ein Repräsentant der semiuniversellen Deformation von f in Normalform, d.h. für $x = (x_1, \dots, x_{n+k})$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ gilt:

$$F_j(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda_j & \text{für } j = 1, \dots, h, \\ f_{j-h}(x) + \sum_{i=1}^h g_{i, j-h}(x) \lambda_i & \text{für } j = h+1, \dots, h+k, \end{cases}$$

wobei $g_{i, j-h} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}^{n+k}, 0}^0$ geeignete Funktionen sind mit

$$(g_{11}, \dots, g_{1k}) = (0, \dots, 0, \zeta).$$

Wir betrachten die geometrische Monodromie, die zu dem geschlossenen Weg

$$\omega: S^1 \rightarrow S - D$$

$$\varphi \rightarrow (\lambda, y) = (\lambda_1, \dots, \lambda_h; y_1, \dots, y_k)$$

mit $\lambda_1 = 2\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi}$, $\lambda_j = 0$ für $1 < j \leq h$, $y_j = 0$ für $1 \leq j < k$, $y_k = u^* e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi}$ gehört. Da diese Schleife homotop zu der entsprechenden Schleife mit $\lambda_1 = 0$ in $S - D$ ist, definiert sie auch den relativen Monodromieoperator \hat{c} .

Wir betrachten nun die Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}} = \{y_k \mid |y_k| \leq -u^*\}$ und den Punkt $t_\varphi = (\lambda_1, \dots, \lambda_h; y_1, \dots, y_{k-1})$ mit $\lambda_1 = 2\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi}$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_h = 0$, $(y_1, \dots, y_{k-1}) = t$.

Zu dem geschlossenen Weg ω gehört eine stetige Familie von Homöomorphismen

$$\theta_\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$$

mit $\theta_0 = \text{id}$, θ_φ bildet die Punkte $u \in \overline{D}$ mit $t_0 \times u \in D$ (kritische Werte von $f_{\varepsilon, t}$) auf die entsprechenden Punkte $\theta_\varphi(u)$ mit $t_\varphi \times \theta_\varphi(u) \in D$ (kritische Werte von $f_{\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi}, t}$) ab, und $\theta_\varphi(u^*) = e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi} u^*$. Ferner können wir θ_φ so wählen, daß θ_φ auf den Rändern der Mengen W_r mit τ_φ übereinstimmt.

Lemma 2.2.8: Die Mengen $\tau_{r-1}(W_r)$ und $\tau_{r'-1}(W_{r'})$ haben für $r \neq r'$ keine gemeinsamen inneren Punkte. Jeder kritische Wert von $f_{\varepsilon, t}$ ist in einer Menge $\tau_{r-1}(W_r)$ für ein gewisses r enthalten.

Beweis: Man kann leicht zeigen, daß das Innere der Menge $\tau_{r-1}(W_r)$ mit dem Innern der Menge $\tau_{r-1}(G) - \left(\bigcup_{0 \leq p \leq r-2} \tau_p(G) \right)$ übereinstimmt. Jeder kritische Wert von $f_{\varepsilon, t}$ ist in einer Menge $\tau_{r-1}(G)$ für ein gewisses r enthalten, aber nicht im Rand einer Menge $\tau_p(G)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir erweitern das obige Wegesystem in G zu einem System von Wegen zwischen den kritischen Werten von $f_{\varepsilon, t}$ und u^* wie folgt: Für einen kritischen Wert u von $f_{\varepsilon, t}$, der in $\tau_{r-1}(W_r) = \theta_{r-1}(W_r)$ enthalten ist, definieren wir als Weg zwischen diesem Wert und u^* das Resultat der Anwendung von θ_{r-1} auf den in W_r enthaltenen Weg zwischen $\theta_{r-1}^{-1}(u)$ und u^* . Die Ordnung zwischen diesen Wegen sei dabei wie oben definiert. Unter Benutzung von Lemma 2.2.8 kann man leicht nachprüfen, daß dadurch ein stark ausgezeichnetes System von Wegen für die Singularität $(X, 0)$ definiert wird (vgl. Abbildung 2.2.2).

Es sei (e_j^r) eine zugehörige stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen. Aus der obigen Konstruktion folgt, daß diese Basis durch die lexikographische Ordnung der Paare (r, j) geordnet ist und die Eigenschaften der Aussagen (a) und (b) von Theorem 2.2.3 erfüllt.

Damit ist Theorem 2.2.3 bewiesen.

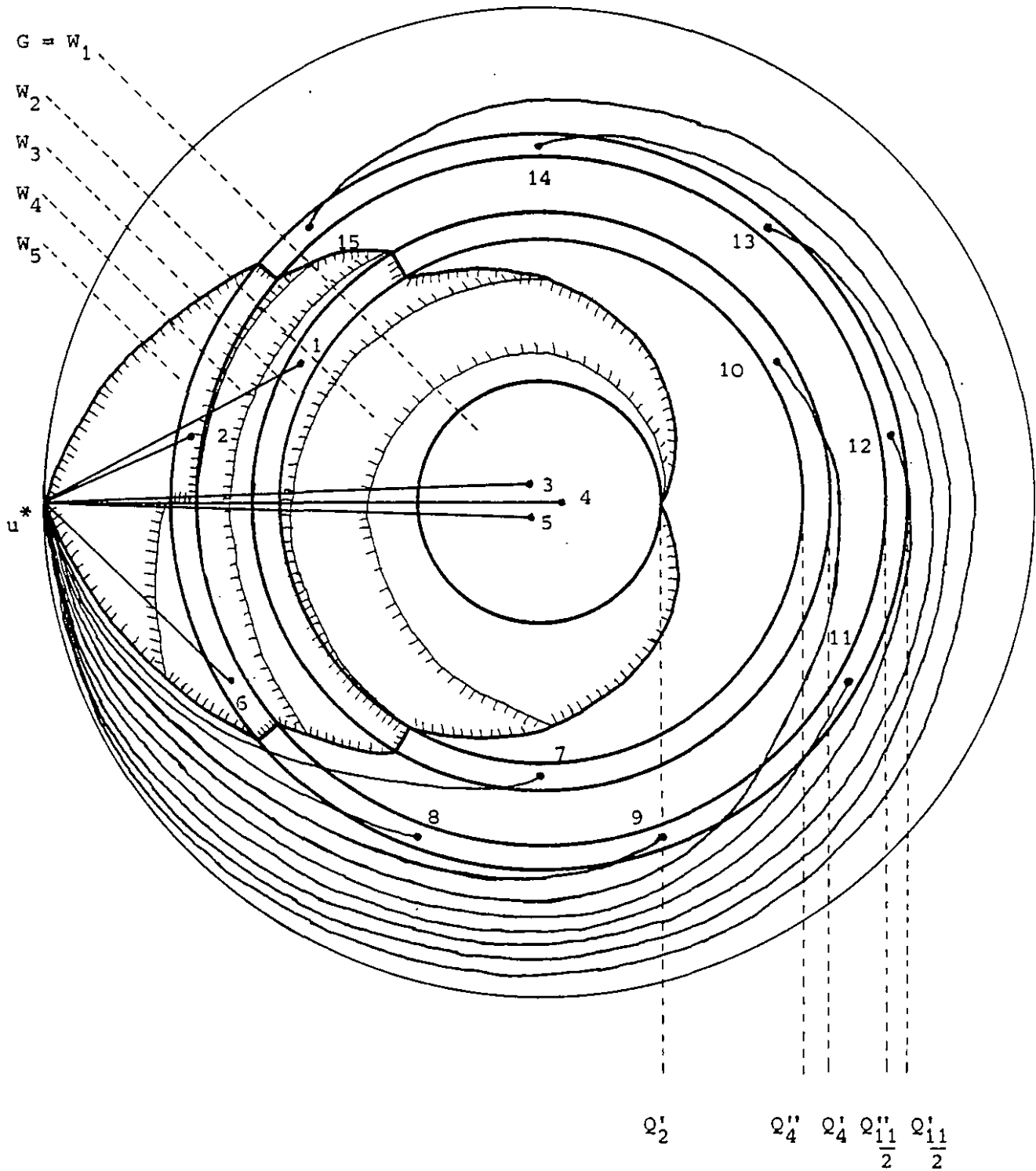


Abbildung 2.2.2 (vgl. Abbildung 2.2.1)

2.3 Dynkindiagramme eines Durchschnitts von zwei Quadriken

Nach Theorem 2.2.3 kann die Berechnung von Dynkindiagrammen auf die Berechnung von Dynkindiagrammen einfacherer Singularitäten reduziert werden. Die in gewissem Sinne einfachsten Singularitäten, die keine Hyperflächensingularitäten sind, sind die isolierten Singularitäten eines Durchschnitts von zwei Quadriken. Diese kommen nämlich in der semiuniversellen Deformation jeder isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitts, der keine Hyperfläche ist, vor. Es sind dies die Singularitäten $(X,0)$, die durch eine Abbildung

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

mit

$$f_1(z) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+2}^2 ,$$
$$f_2(z) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_{n+2} z_{n+2}^2 ,$$

wobei $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n+2$, gegeben werden. Ihre Deformationstheorie ist von H.Knörrer [Knörrer₁] (und kürzlich auch von Y.Merindol [Merindol₁]) untersucht worden. In diesem Abschnitt berechnen wir Dynkindiagramme dieser Singularitäten.

Diese Singularitäten gehören zu der Klasse von Brieskorn-Pham-Singularitäten, für die H.Hamm [Hamm₂] eine Basis des Milnorgitters H angegeben hat, wobei er eine Methode von F.Pham [Pham₁] im Hyperflächenfall verallgemeinert hat. Wir stellen die Konstruktion von Hamm in diesem speziellen Fall kurz dar. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq j \leq n+2$ und $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2}$ gilt.

Wir setzen $X' = f_1^{-1}(0)$. Die Funktion $f_2: X' \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Submersion außerhalb des Ursprungs. Wir bezeichnen die Faser von f_2 über einem hinreichend kleinen $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \neq 0$, mit $Y = Y_\eta$. Hamm [Hamm₂, Lemma 2.4] zeigt, daß die Milnorfaser $X_{s_0} = Y \cap B_\varepsilon$ von $(X,0)$ für $s_0 = (0, \eta)$ ein Deformationsretrakt von Y ist.

Es sei $\psi: \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$ die durch $(z_1, \dots, z_{n+2}) \rightarrow (w_1, \dots, w_{n+2}) = (z_1^2, \dots, z_{n+2}^2)$ definierte Abbildung. Dann bildet ψ die Mengen X und X' auf lineare Unterräume und Y auf einen affinen Unterraum von \mathbb{C}^{n+2} ab. Es sei

$$Z' := \psi(Y) \cap \mathbb{R}^{n+2}.$$

Dann ist $\psi^{-1}(Z')$ ein Deformationsretrakt von Y [Hamm₂, Lemma 3.1]. Es sei $W^0 = \mathbb{C}^{n+2}$ und $W^j = \{w \in \mathbb{C}^{n+2} \mid \text{es gibt } r_1, \dots, r_j \text{ mit } 1 \leq r_1 < \dots < r_j \leq n+2 \text{ und } w_{r_1} = \dots = w_{r_j} = 0\}$. Wir definieren eine Zellenzerlegung von Z' wie folgt: Die Menge $Z' \cap (W^{n-q} - W^{n-q+1})$ ist eine disjunkte Vereinigung von topologischen q -Zellen für $q = 0, \dots, n$; diese sollen die Zellen dieser Zerlegung bilden. Diese Zerlegung induziert eine Zellenzerlegung von $\psi^{-1}(Z')$ wie folgt. Es sei $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$ definiert durch $(w_1, \dots, w_{n+2}) \rightarrow (z_1, \dots, z_{n+2})$ mit $z_i^2 = w_i$ und $z_i \geq 0$ oder $-\sqrt{-1}z_i > 0$ für jedes i mit $1 \leq i \leq n+2$. Offensichtlich ist $\tilde{\psi}$ ein Homöomorphismus auf das Bild. Wir benutzen $\tilde{\psi}$, um eine Zellenzerlegung von $\tilde{\psi}(Z')$ zu bekommen. Es sei

$$\tau_j: \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$$

für $j = 1, \dots, n+2$ diejenige lineare Abbildung, die (z_1, \dots, z_{n+2}) in $(z_1, \dots, z_{j-1}, -z_j, z_{j+1}, \dots, z_{n+2})$ überführt; und Ω die von $\tau_1, \dots, \tau_{n+2}$ erzeugte Untergruppe von $GL(n+2; \mathbb{C})$. Dann gilt $\psi^{-1}(\mathbb{R}^{n+2}) = \Omega \cdot \tilde{\psi}(\mathbb{R}^{n+2})$ und $\psi^{-1}(Z') = \Omega \cdot \tilde{\psi}(Z')$. Deshalb erhalten wir auch eine Zellenunterteilung von $\psi^{-1}(Z')$.

Es sei Z die Vereinigung aller q -Zellen in Z' , deren Abschluß in Z' kompakt ist. Dies ist ein CW-Komplex. Hamm zeigt, daß $\psi^{-1}(Z)$ ein starker Deformationsretrakt von $\psi^{-1}(Z')$ ist [Hamm₂, Lemma 3.2].

Für alle j mit $1 \leq j \leq n+2$ beranden die Hyperebenen $w_i = 0$ für $i \neq j$ einen Simplex σ_j in Z (siehe Abbildung 2.3.1). Es sei $\varepsilon_j := \tilde{\psi}(\sigma_j)$ der zugehörige Simplex in $\tilde{\psi}(Z)$. Für $x \in \{0, 1\}$ definieren wir

$$e_{2j-1+x} := \tau_j^x(1-\tau_1) \dots \widehat{(1-\tau_j)} \dots (1-\tau_{n+2})\varepsilon_j.$$

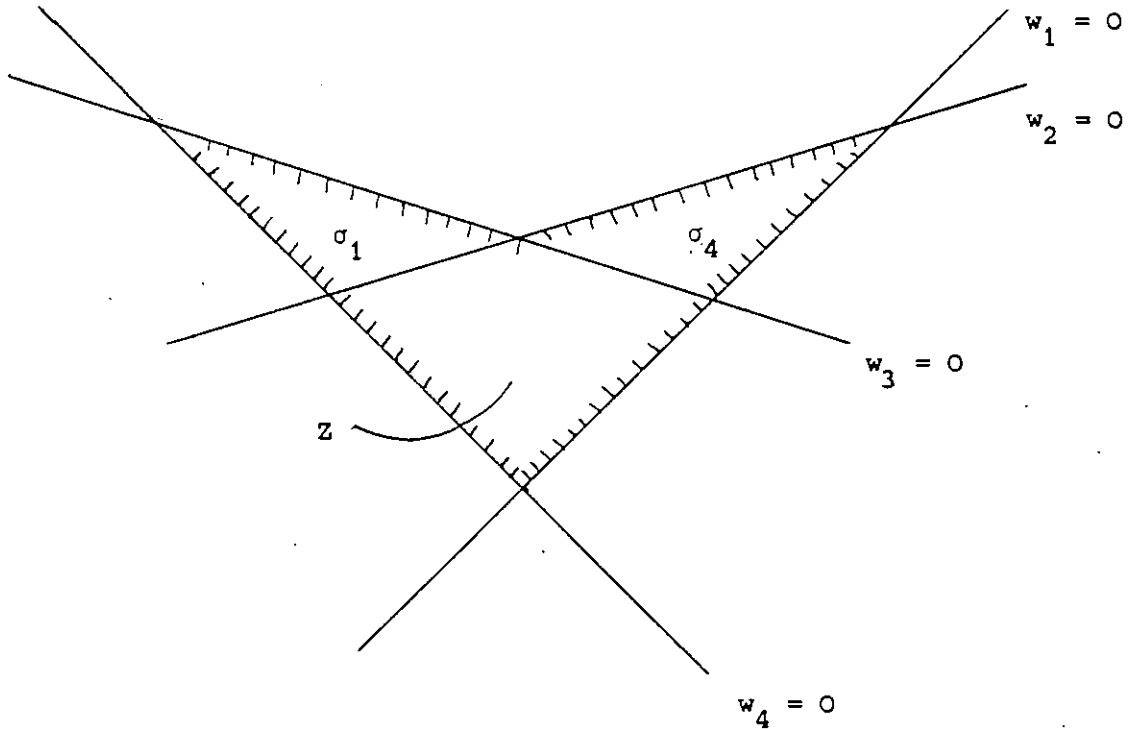


Abbildung 2.3.1: Skizze für $n = 2$.

Man kann leicht zeigen, daß diese Elemente Zykel in $\Psi^{-1}(z)$ bilden.

Satz 2.3.1:

(i) Die Elemente $e_1, e_2, \dots, e_{2n+3}$ repräsentieren eine Basis von

$$H_n(\Psi^{-1}(z), \mathbb{C}) = H_n(X_S, \mathbb{C}) = H_{\mathbb{C}}.$$

(ii) Es gilt $e_{2n+4} = e_{2n+3} + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j} (e_{2j-1} - e_{2j})$.

(iii) Es sei $h_*: H_{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\mathbb{C}}$ der von der Schleife $\tilde{\omega}: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^2, \varphi \rightarrow (0, e^{2\pi\sqrt{-1}\varphi})$, induzierte Monodromieoperator. Dann stimmt h_* mit der Abbildung $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n+2}$ überein.

Beweis: Die Aussage (i) ist Lemma 3.6 und die Aussage (iii) ist Lemma 4.1 von [Hamm₂]. Wir beweisen (ii). Durch Induktion über n zeigen wir

$$\epsilon_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \epsilon_{n+2-j} \quad (2.3.2)$$

Hieraus kann man leicht die Formel von (ii) ableiten. Für den Fall $n = 1$ hat man nach der Ordnung zwischen den Zahlen a_j das folgende Bild:

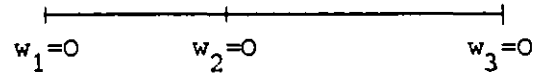


Abbildung 2.3.2

Aus diesem Bild folgt $\epsilon_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1$, also die Formel (2.3.2) für $n = 1$.

Wir nehmen nun an, daß die Formel gültig für n ist. Der Simplex ϵ_{n+3} ist eine lineare Kombination der anderen Simplizes ϵ_j ,

$$\epsilon_{n+3} = \sum_{j=1}^{n+2} k_j \epsilon_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}.$$

Die Hyperebene $w_{n+3} = 0$ berandet alle Simplizes ϵ_j mit $1 \leq j \leq n+2$, aber nicht ϵ_{n+3} . Deshalb gilt

$$\sum_{j=1}^{n+2} k_j \epsilon_j \cap \{w_{n+3} = 0\} = \emptyset.$$

Nach der Induktionsannahme für $Z' \cap \{w_{n+3} = 0\}$ gilt

$$\epsilon_{n+3} = k_{n+2} (\epsilon_{n+2} - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \epsilon_{n+2-j}).$$

Nach der Annahme $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2}$ gilt $\epsilon_{n+3} \subset \epsilon_{n+2}$. Daraus folgt $k_{n+2} = 1$ und damit die Formel (2.3.2) für $n+1$. Damit ist Satz 2.3.1 bewiesen.

Korollar 2.3.3: Die Operation des Monodromieoperators h_* auf den Zykeln e_j kann wie folgt beschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} h_*(e_{2j-1}) &= (-1)^{n+1} e_{2j} \\ h_*(e_{2j}) &= (-1)^{n+1} e_{2j-1} \end{aligned} \right\} \text{ für } 1 \leq j \leq n+2.$$

Dieses Korollar leitet man durch eine einfache Rechnung aus Satz 2.3.1 ab.

Wir konstruieren nun verschwindende Zykeln δ_i , die in die Zykeln e_i transformiert werden können. Die kritische Menge von f besteht aus den Koordinatenachsen. Die Diskriminante D_f von f besteht aus $n+2$ verschiedenen Doppelgeraden durch den Nullpunkt in \mathbb{C}^2 . Es sei $t > 0$ eine kleine reelle Zahl und $\overline{\mathbb{D}} = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| \leq \eta\}$. Wir betrachten die Kreisscheibe $\{t\} \times \overline{\mathbb{D}}$ und wählen als Basispunkt den Punkt $s = (t, \eta)$. Für genügend kleines t schneidet die Kreisscheibe die Diskriminante D_f in $n+2$ verschiedenen Punkten $\bar{s}_j = (t, a_j t)$, $j = 1, \dots, n+2$, die auf der reellen Achse im Innern von $\overline{\mathbb{D}}$ liegen. Die Punkte sind gemäß ihrer Ordnung auf der reellen Achse numeriert. Es sei ρ eine positive reelle Zahl, die so klein ist, daß $a_j t$ der einzige Punkt von D_f im Intervall $[a_j t - \rho, a_j t + \rho]$ ist. Wir wählen ein stark ausgezeichnetes System von Wegen $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$, das die Punkte \bar{s}_j mit s verbindet, durch Kombination jedes Intervalls $[a_j t, a_j t + \rho]$ mit einem Weg von $a_j t + \rho$ nach η wie in Abbildung 2.3.3.

Die Faser über dem Punkt \bar{s}_j , $j = 1, \dots, n+2$, hat zwei gewöhnliche Doppelpunkte x_{2j-1} und x_{2j} , die durch $z_j = \pm\sqrt{t}$, $z_i = 0$ für $i \neq j$ gegeben werden. Dann bestimmt das obige Wegesystem $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$ (bis auf Orientierung) ein stark ausgezeichnetes Erzeugendensystem $(\delta_1, \dots, \delta_{2n+4})$ von verschwindenden Zykeln in $H_n(X_s)$. Genauer muß man eine benachbarte Morsefunktion mit lauter verschiedenen kritischen Werten $s_1, s_2, \dots, s_{2n+4}$ und zu den Wegen $\tilde{\varphi}_j$ benachbarte Wege φ_{2j-1} , φ_{2j} wie in Abbildung 2.3.3 gestrichelt angedeutet nehmen. Für dieses stark ausgezeichnete Erzeugendensystem $(\delta_1, \dots, \delta_{2n+4})$ gilt nun:

Satz 2.3.4: Läßt man t gegen 0 gehen, so geht der verschwindende Zykel

$\delta_i \in H_n(X_s)$, $i = 1, \dots, 2n+4$, in den Zykel $e_i \in H_n(X_{s_0})$ über. Mit anderen Worten ist (e_1, \dots, e_{2n+4}) ein stark ausgezeichnetes Erzeugendensystem von verschwindenden Zykeln von $(X, 0)$. Das zugehörige Coxeterelement $c = Y_1 Y_2 \dots Y_{2n+4}$ stimmt mit dem Monodromieoperator h_* überein.

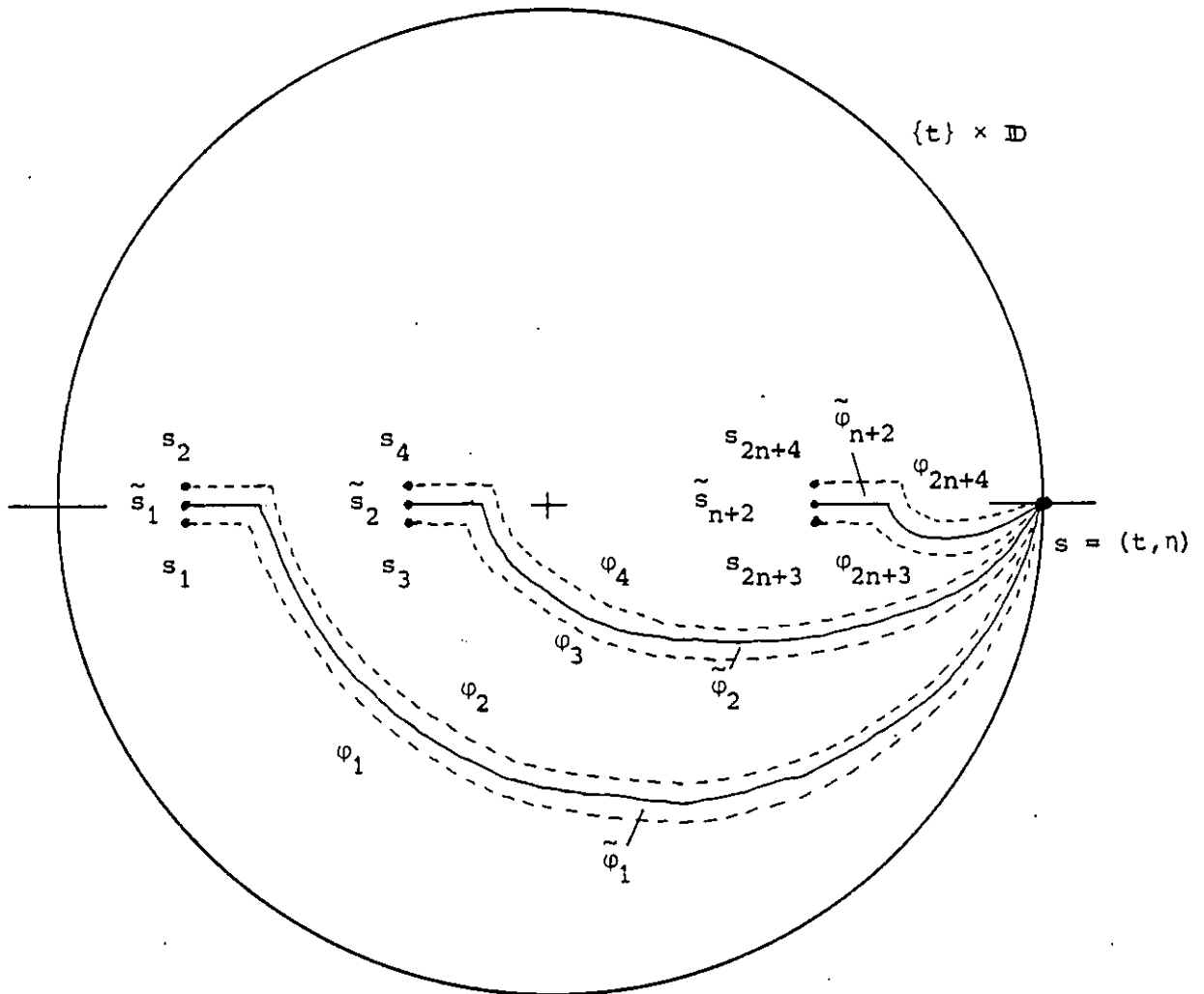


Abbildung 2.3.3

Beweis: Wir leiten die Gleichungen für die verschwindenden Zyklen δ_i gemäß Kap. 1.2 ab. Wir betrachten den kritischen Punkt x_{2j-1} , der durch $z_j = +\sqrt{t}$, $z_i = 0$ für $i \neq j$ gegeben wird. In einer Umgebung B_{2j-1} von x_{2j-1} machen wir die Koordinatentransformation

$$u_j = 2\sqrt{t}(z_j - \sqrt{t}) + \sum_{i=1, i \neq j}^{n+2} z_i^2 + (z_j - \sqrt{t})^2 ,$$

$$u_i = \sqrt{a_i - a_j} z_i \quad \text{für } i \neq j .$$

Dann wird die Faser $X'_t = f_1^{-1}(t) \cap B_\epsilon$ lokal durch die Gleichung $u_j = 0$ gegeben, und man kann u_i , $i \neq j$, $1 \leq i \leq n+2$, als lokale Koordinaten um den Punkt x_{2j-1} nehmen. Dann wird $f|_{B_{2j-1}}$ durch

$$f(u) = a_i t + u_1^2 + \dots + u_{j-1}^2 + u_{j+1}^2 + \dots + u_{n+2}^2$$

gegeben. Der verschwindende Zykel in der Faser $Y_* = f^{-1}(\tilde{s}_j + \rho) \cap B_{2j-1}$ über $\tilde{s}_j + \rho$ wird durch die Sphäre

$$S^n = \{u \in \mathbb{C}^{n+2} \mid u_j = 0; u_1^2 + \dots + u_{j-1}^2 + u_{j+1}^2 + \dots + u_{n+2}^2 = \rho; \\ \text{Im } u_i = 0 \text{ für } i \neq j\}$$

gegeben. In den Koordinaten z_i wird diese Sphäre durch die folgenden Gleichungen (für ρ klein genug) gegeben:

$$z_j^2 = t - z_1^2 - \dots - z_{j-1}^2 - z_{j+1}^2 - \dots - z_{n+2}^2, \quad (2.3.5)$$

$$(a_1 - a_j)z_1^2 + \dots + (a_{j-1} - a_j)z_{j-1}^2 + (a_{j+1} - a_j)z_{j+1}^2 + \dots + (a_{n+2} - a_j)z_{n+2}^2 = \rho, \quad (2.3.6)$$

$$\sqrt{a_i - a_j} z_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \neq j, \quad (2.3.7)$$

$$z_j > 0. \quad (2.3.8)$$

Aus (2.3.7) folgt $(a_i - a_j)z_i^2 \in \mathbb{R}_+$ für alle $i \neq j$. Damit folgt aus (2.3.5): $z_j^2 \in \mathbb{R}$.

Nun sei $\tilde{\varphi}'_j(r) = \tilde{\varphi}_j(r) - a_j t$ für $r \in [0, 1]$. Dann ergibt der Transport längs $\tilde{\varphi}_j$ eine Sphäre in der Faser über $\tilde{\varphi}_j(r)$, die durch entsprechende Gleichungen wie oben gegeben wird, wobei man ρ durch $\tilde{\varphi}'_j(r)$ in (2.3.6) und \mathbb{R} durch $\mathbb{R}e^{\sqrt{-1} \arg(\tilde{\varphi}'_j(r))}$ ersetzen muß und die Wurzel von z_j^2 in (2.3.5) durch analytische Fortsetzung von (2.3.8) zu wählen hat. In der Faser $X_s = f^{-1}(s) \cap B_\epsilon$ über $s = (t, \eta)$ wird diese Sphäre durch die Gleichungen (2.3.5), (2.3.6) mit ρ ersetzt durch $\eta - a_i t$, (2.3.7) und

$$z_j > 0 \text{ oder } -\sqrt{-1}z_j > 0 \quad (2.3.9)$$

gegeben. Nach dem Übergang $t \rightarrow 0$ erhält man die Menge E_{2j-1} , die durch die entsprechenden Gleichungen mit $t = 0$ gegeben wird.

Behauptung 2.3.10: $\Psi(E_{2j-1}) = \sigma_j$.

Aus (2.3.7) folgt, daß $(a_i - a_j)z_i^2 \in \mathbb{R}_+$ für alle $i \neq j$ gilt. Dies bedeutet aber, daß $z_i^2 \in \mathbb{R}$ und $\text{sign } z_i^2 = \text{sign}(a_i - a_j) = \text{sign}(i - j)$ oder $z_i^2 = 0$ gilt. Deshalb gilt

$$\Psi(E_{2j-1}) = \{w \in Z' \mid \text{sign } w_i = \text{sign}(i - j) \text{ für } i \neq j \text{ oder } w_i = 0\}.$$

Wir zeigen $\Psi(E_{2j-1}) = \sigma_j$ durch Induktion über n . Für $n = 1$ ergibt eine einfache Rechnung das folgende Bild

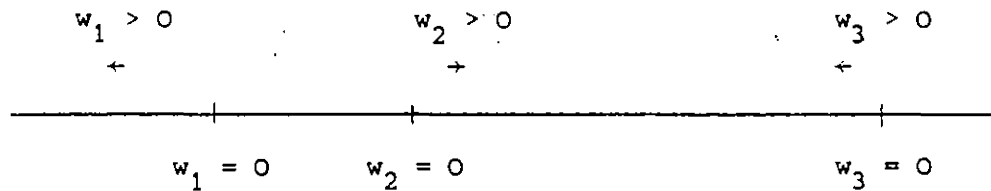


Abbildung 2.3.4

Dies beweist die Behauptung für $n = 1$. Die Behauptung sei nun richtig für $n-1$. Deshalb gilt für alle $i \neq j$

$$\Psi(E_{2j-1}) \cap \{w_i = 0\} = \sigma_j \cap \{w_i = 0\}.$$

Aber die Vereinigung über die Simplizes auf der rechten Seite ist der Rand von σ_j , dessen Komplement in Z' zwei Zusammenhangskomponenten hat, von denen eine, nämlich das Innere von σ_j , konvex ist. Da $\Psi(E_{2j-1})$ konvex ist, folgt die Behauptung (2.3.10).

Aus (2.3.9) und der Definition von e_{2j-1} folgt damit $[E_{2j-1}] = te_{2j-1}$.

Eine analoge Betrachtung für den kritischen Punkt x_{2j} ergibt den Zykel $\pm e_{2j}$. Dies beweist den ersten Teil des Satzes.

Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, daß die geschlossenen Wege, die die entsprechenden Operatoren definieren, homotop sind.

Bemerkung 2.3.11: Die verschwindende Zelle $\hat{\delta}_{2j-1+\kappa}$ ($\kappa \in \{0,1\}$), die zu dem verschwindenden Zykel $\delta_{2j-1+\kappa}$ gehört, geht für $t \rightarrow 0$ in die Menge

$$\tau_j^\kappa (1 - \tau_1) \dots (1 - \tau_j) \dots (1 - \tau_{n+2}) (\text{Kegel}(\sigma_j))$$

über, wobei $\text{Kegel}(\sigma_j)$ der reelle Kegel über σ_j mit Spitze 0 ist.

Wir orientieren die Zykel δ_i so, daß

$$\delta_{2j-1} = (-1)^{n+1} e_{2j-1} \quad ,$$

$$\delta_{2j} = e_{2j}$$

für $j = 1, \dots, n+2$. Wir setzen

$$\begin{aligned} r &= \sum_{j=1}^{n+2} (-1)^{n-j} (e_{2j-1} - e_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+2} (-1)^{n-j} ((-1)^{n+1} \delta_{2j-1} - \delta_{2j}) \quad . \end{aligned}$$

Dann folgt aus Satz 2.3.4 und Korollar 2.3.2

Korollar 2.3.12: Für die relative Monodromie \hat{c} von $(X,0)$ gilt:

$$\hat{c}(\hat{\delta}_{2j-1}) = \hat{\delta}_{2j} + b_{2j-1} r \quad ,$$

$$\hat{c}(\hat{\delta}_{2j}) = \hat{\delta}_{2j-1} + b_{2j} r$$

für $j = 1, \dots, n+2$ und gewisse Zahlen $b_{2j-1}, b_{2j} \in \mathbb{Z}$.

Mit Hilfe dieser Resultate können wir nun die Schnittmatrix der Zykeln e_i bestimmen, was von Hamm nicht gemacht wurde. Durch Satz 2.3.4 sind die Selbstschnittzahlen der Zykeln e_i bestimmt (vgl. Kap. 1.2). Mit Hilfe der Picard-Lefschetz-Formeln oder von Satz 1.6.3 kann man aus Korollar 2.3.12 die übrigen Schnittzahlen der $\hat{\delta}_i$ und damit der e_i bestimmen. Eine derartige Rechnung wird für ein anderes Beispiel im nächsten Abschnitt ausgeführt. Deshalb verzichten wir an dieser Stelle auf die Details der Rechnung und geben nur das Ergebnis an.

Korollar 2.3.13: Die Schnittmatrix bezüglich der stark ausgezeichneten Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ von verschwindenden Zellen ergibt sich aus den folgenden Formeln:

$$\langle \hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i+1, j \text{ gerade,} \\ \left. \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{(n+1)/2} (-1)^{i+j} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \right\} \text{für } i < j \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sieht man also von der Bewertung der Kanten ab, so ist das Dynkindiagramm zu der Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ ein vollständiger Graph mit $2n+4$ Ecken, bei dem die Kanten zwischen den Ecken zu $\hat{\delta}_{2j-1}$ und $\hat{\delta}_{2j}$ für $j = 1, \dots, n+2$ weggelassen sind.

Bemerkung 2.3.14: Die verschwindenden Zellen $\hat{\delta}_i$ wurden durch die Wahl eines bestimmten stark ausgezeichneten Systems von Wegen $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$ von den Punkten $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n+2}$ zum Basispunkt s konstruiert. Aus Korollar 2.3.13 folgt, daß jedes stark ausgezeichnete System von $n+2$ Wegen von den Punkten $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n+2}$ nach s auf die gleiche Weise eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen definiert, deren Schnittmatrix nach geeigneter Orientierung der Zellen mit der von $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ übereinstimmt. Dies folgt daraus, daß die Operation eines Erzeugenden $\tilde{\alpha}_j$, $j = 1, \dots, n+1$, der Zopfgruppe Z_{n+2} auf dem System der Wege $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$,

$$\tilde{\alpha}_j: (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2}) \rightarrow (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{j-1}, \tilde{\varphi}_{j+1} w_j, \tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_{j+2}, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$$

die folgende Operation auf der Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ induziert:

$$\alpha_{2j} \alpha_{2j+1} \alpha_{2j-1} \alpha_{2j} \cdot$$

Aufgrund der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ stimmt diese Operation mit

$$\alpha_{2j-1} \alpha_{2j}$$

überein, also mit zwei Orientierungswechseln. Da die Zopfgruppe Z_{n+2} auf der Menge aller stark ausgezeichneten Systeme von $n+2$ Wegen von den Punkten $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n+2}$ nach s transitiv operiert, folgt die Behauptung.

Lassen wir bei der Definition von f beliebige paarweise verschiedene $a_j \in \mathbb{C}$ zu, so schneidet die Diskriminante D_f die Kreisscheibe $\{t\} \times \overline{\mathbb{D}}$ ebenfalls in $n+2$ verschiedenen Punkten $\tilde{s}_j = (t, a_j t)$, die nun im allgemeinen nicht mehr auf der reellen Achse liegen. Jedes stark ausgezeichnete System von Wegen von den Punkten $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n+2}$ nach s liefert nun wie oben eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen, die mit geeigneter Orientierung die Schnittmatrix von Korollar 2.3.13 hat. Dies folgt daraus, daß man $n+2$ analytische Funktionen $g_j: [0,1] \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, $j = 1, \dots, n+2$, mit $g_j(0) = a_j$, $g_j(1) \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{D}}$ und $g_i(\vartheta) \neq g_j(\vartheta)$ für $1 \leq i \neq j \leq n+2$, $\vartheta \in [0,1]$ wählen und die dadurch gegebene Deformation von f betrachten kann.

Wir analysieren nun zunächst das Milnorgitter $H = \hat{H}/\mathbb{Z}.r$ im schiefssymmetrischen Fall (Dimension n ungerade). Durch die Transformationen

$$\beta_{2n+3}(2j), \beta_{2j-1}(2j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n+1 ;$$

$$\beta_{2j+1}(2j-1) \quad \text{für } j = 1, \dots, n+1 ;$$

wird die Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ in eine schwach ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen transformiert, deren modulo 2 reduzierte Schnittmatrix das Dynkin-diagramm von Abbildung 2.3.5 besitzt.

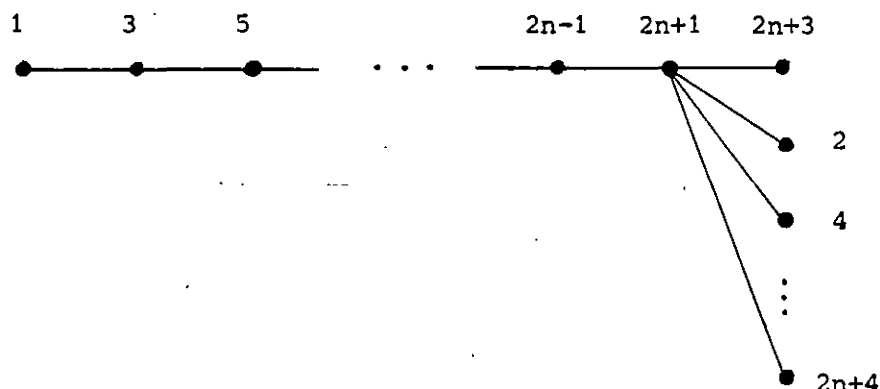


Abbildung 2.3.5

Nach [Janssen₁, (3.10)] ist diese Basis äquivalent zu einer speziellen schwach ausgezeichneten Basis im Sinne von [Wajnryb₁]. Das schiefssymmetrische verschwindende Gitter $(\hat{H}, \hat{\Delta})$ (bzw. (H, Δ)) eines ungeradedimensionalen vollständigen Durchschnitts von zwei Quadriken mit isolierter Singularität ist also das Gitter

$$A^{\text{odd}}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1/2}; p; 0)$$

mit $p = n+3$ (bzw. $p = n+2$) in Janssens Klassifikation [Janssen₂].

Für die Untersuchung des geradedimensionalen Falles transformieren wir die stark ausgezeichnete Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ mittels der Zopfgruppenoperation aus Kap. 1.5. Die Transformationen

$$(A) \quad \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n+3} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \kappa_{2n+4} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \kappa_1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

transformieren die Basis $(\hat{\delta}_i)$ in eine stark ausgezeichnete Basis $(\hat{\delta}_i^!)$ von verschwindenden Zellen mit

$$\langle \hat{\delta}_i^1, \hat{\delta}_j^1 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i + 1, j \text{ ungerade, } (i,j) = (1,2n+4) \\ \left. \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n+1)/2} (-1)^{i+j} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \right\} & \text{für } i < j \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Auf die Basis $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4}^1)$ wenden wir die folgenden Transformationen an:

$$\begin{aligned} (B) \quad & \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \\ & \alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \\ & \vdots \\ & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} \\ & \alpha_{2n+3}, \alpha_{2n+2} \end{aligned}$$

Für $n = 1$ bezeichnen wir die so erhaltene Basis mit $(\hat{\delta}_1'', \dots, \hat{\delta}_6'')$. Sie hat das Dynkindiagramm von Abbildung 2.3.6.

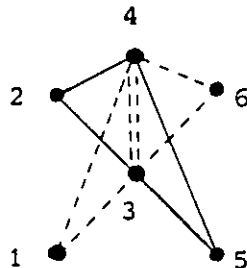


Abbildung 2.3.6

Falls $n \geq 2$, so führen wir weitere Transformationen aus, nämlich die Transformationen

$$(C) \quad \beta_n, \beta_{n+1}, \alpha_{2n+2}, \alpha_{2n+3}, \alpha_{2n+4}$$

Im Fall $n = 2$ bezeichnen wir die so erhaltene Basis mit $(\hat{\delta}_1'', \dots, \hat{\delta}_8'')$. Schließlich führen wir im Fall $n \geq 3$ noch die folgenden Transformationen aus:

$$(D) \beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \dots, \beta_2;$$

$$\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_3;$$

$$\beta_{n+1}, \beta_{n+2}; \beta_n, \beta_{n+1}; \dots; \beta_4, \beta_5.$$

Die so erhaltene immer noch stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen bezeichnen wir mit $(\hat{\delta}_1^n, \dots, \hat{\delta}_{2n+4}^n)$. Das Dynkindiagramm bezüglich dieser Basis ist in Abbildung 2.3.7 dargestellt (für n gerade; für n ungerade müssen vorher noch die Orientierungswechsel x_1, x_6 für $n = 1$ bzw. $x_2, x_4, x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{2n}; x_{2n+1}, x_{2n+4}$ für $n \geq 3$ angewandt werden).

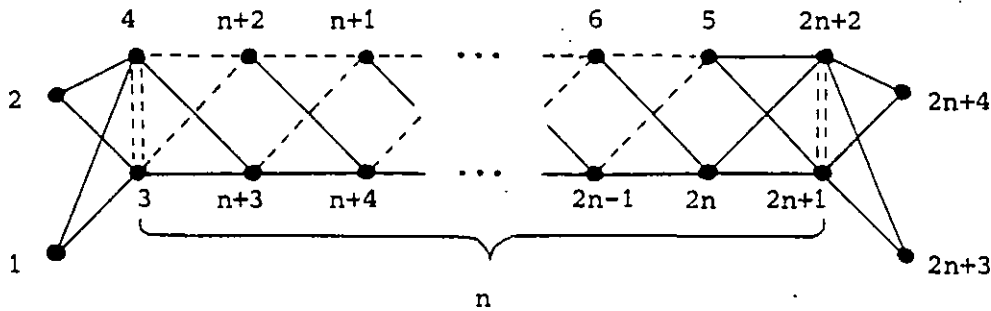


Abbildung 2.3.7

2.4 Erweiterte affine Wurzelsysteme

Der Graph von Abbildung 2.3.7 hat große Ähnlichkeit mit dem von K.Saito in [Saito₁, p.122] angegebenen Dynkindiagramm für ein erweitertes affines Wurzelsystem vom Typ $D_{n+3}^{(1,1)}$. Dies ist der in Abbildung 2.4.1 angegebene Graph.

Wir stellen kurz die Bedeutung dieses Graphen dar (vgl. [Saito₁]). Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $I: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ der Signatur (t_+, t_0, t_-) . Hierbei ist t_+ (bzw. t_-) die Dimension eines maximal positiv (bzw. negativ) definiten Unterraums von V bezüglich I , und t_0 die Dimension des Kerns von I . Für ein $\lambda \in V$ mit $I(\lambda, \lambda) \neq 0$ definieren wir $\check{\lambda} \in V$ und $w_\lambda \in GL(V)$ wie folgt:

$$\check{\lambda} := 2\lambda / I(\lambda, \lambda) ,$$

$$w_\lambda(v) := v - I(v, \check{\lambda})\lambda \quad \text{für } v \in V .$$

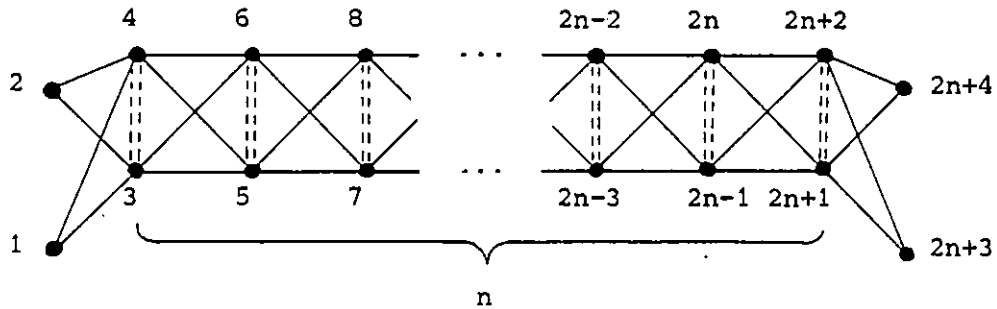


Abbildung 2.4.1

Definition 2.4.1: Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt ein erweitertes affines Wurzelsystem, falls gilt:

- (i) $(t_+, t_0, t_-) = (\ell, 2, 0)$.
- (ii) Für $Q(R) = \mathbb{Z} \cdot R$ gilt $V = Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
- (iii) Für alle $\lambda \in R$ gilt $I(\lambda, \lambda) \neq 0$.
- (iv) Für alle $\lambda \in R$ gilt $w_\lambda R = R$.
- (v) Für alle $\lambda, \check{\lambda} \in R$ gilt $I(\lambda, \check{\lambda}) \in \mathbb{Z}$.
- (vi) (Irreduzibilität) Falls $R = R_1 \dot{\cup} R_2$ mit $R_1 \subset R_2^\perp$, $R_2 \subset R_1^\perp$ (bezüglich I), so folgt $R_1 = \emptyset$ oder $R_2 = \emptyset$.

Es sei W_R die von den w_λ für $\lambda \in R$ erzeugte Untergruppe von $O(V)$.

K.Saito hat alle erweiterten affinen Wurzelsysteme klassifiziert. Diese Klassifikation hängt eng mit der entsprechenden Klassifikation im klassischen Fall, nämlich im Fall, daß I positiv definit ist, zusammen. Insbesondere gibt es (bis auf Isomorphie) nur ein erweitertes affines Wurzelsystem, dessen Quotient nach dem Radikal das klassische Wurzelsystem D_ℓ ist, und dies wird von Saito mit $D_\ell^{(1,1)}$ bezeichnet. Der obere Index hat für unsere Betrachtung keine Bedeutung, und wir

gehen deshalb darauf nicht näher ein.

Für ein erweitertes affines Wurzelsystem definiert Saito ein Dynkindiagramm wie folgt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber bei der Definition auf den Fall, daß R homogen ist, d.h. alle Wurzeln gleiche Länge haben. Dies ist insbesondere bei $D_\ell^{(1,1)}$ erfüllt. Bildet man bei einem erweiterten affinen Wurzelsystem R den Quotienten nach einem beliebigen über \mathbb{Q} definierten 1-dimensionalen Unterraum K des 2-dimensionalen Radikals $\ker I$, so erhält man ein affines Wurzelsystem [Saito₁, (3.1)]. Ist R homogen, so ist dieses affine Wurzelsystem bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt [Saito₁, §5]. Es sei $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ eine Basis dieses affinen Wurzelsystems, so daß $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ eine (Weyl-)Basis des zugehörigen klassischen Wurzelsystems ist, und

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \lambda_i, \quad m_i > 0,$$

die längste positive Wurzel. Wir setzen $m_0 = 1$. Es sei a ein Erzeugendes von K über \mathbb{Q} . Für einen Index j mit $0 \leq j \leq \ell$ und $m_j = \max_i \{m_i\}$ definieren wir

$$\lambda_j^* = \lambda_j + a.$$

Definition 2.4.2: Das Dynkindiagramm G_R zu dem erweiterten affinen Wurzelsystem R ist das Dynkindiagramm zu $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell\} \cup \{\lambda_j^* \mid m_j = \max_i \{m_i\}\}$.

Im Fall $D_\ell^{(1,1)}$ erhält man gerade den Graphen von Abbildung 2.4.1. Wir bezeichnen mit $|G_R|$ die Eckenmenge von G_R . Dann hat man die folgenden Tatsachen:

- (a) $\# |G_R| > \dim V$
- (b) Das Gitter $Q(R)$, die Gruppe $W(R)$ und R sind auf die übliche Weise durch G_R bestimmt:

$$Q(R) = \sum_{\lambda \in |G_R|} \mathbb{Z} \cdot \lambda, \quad W_R = \langle w_\lambda \mid \lambda \in G_R \rangle, \quad R = \bigcup_{\lambda \in |G_R|} W_R \cdot \lambda.$$

- (c) Aus G_R lassen sich V und R wie folgt rekonstruieren: Es sei \hat{V} der \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $\# |G_R|$, der von den $\lambda \in |G_R|$ aufgespannt wird, und \hat{Q} das ent-

sprechende \mathbb{Z} -Gitter. Um Verwirrungen zu vermeiden, bezeichnen wir das Basiselement von \hat{V} , das zu $\lambda \in |G_R|$ gehört, mit $\hat{\lambda}$. Es sei \hat{I} die durch das Dynkindiagramm G_R definierte Bilinearform, und

$$\hat{W} := \langle w_{\hat{\lambda}} \mid \lambda \in |G_R| \rangle ,$$

$$\hat{R} := \bigcup_{\lambda \in |G_R|} \hat{W} \cdot \hat{\lambda} .$$

Das Produkt $\hat{c}_R \in \hat{W}$ der $w_{\hat{\lambda}_p}$ mit $m_p \neq \max_i \{m_i\}$ und der $w_{\hat{\lambda}_j} w_{\hat{\lambda}_{j^*}}$ für $0 \leq p, j \leq \ell$ in beliebiger Reihenfolge nennen wir ein Präcoxetererelement für R . Nach [Bourbaki₂, Chap.V, §6, Lemma 1] sind je zwei Präcoxetererelemente in \hat{W} konjugiert. Nach [Saito₁, (9.6)] gilt nun der folgende Satz

Satz 2.4.3: Es sei $\hat{c}_R = \hat{c}_{R,s} \hat{c}_{R,u}$ die (multiplikative) Jordanzerlegung von \hat{c}_R in einen halbeinfachen Teil $\hat{c}_{R,s}$ und einen unipotenten Teil $\hat{c}_{R,u}$. Dann gilt

$$V = \hat{V} / \text{im} (\hat{c}_{R,u} - \text{id}) ,$$

$$Q = \hat{Q} / \text{im} (\hat{c}_{R,u} - \text{id}) \cap \hat{Q}$$

und R ist das Bild von \hat{R} in V .

Wir vergleichen nun die Graphen von Abbildung 2.3.7 und Abbildung 2.4.1. Die beiden Graphen stimmen im Fall $n = 2$ überein. Im Fall $n \geq 3$ zeigen die folgenden Transformationen, die auf den Graphen von Abbildung 2.3.7 anzuwenden sind, daß die beiden Graphen schwach äquivalent sind:

$$\alpha_{n+1}^{(n+2)}, \alpha_{n+4}^{(n+2)}; \alpha_n^{(n+1)}, \alpha_{n+5}^{(n+1)}; \dots; \alpha_5^{(6)}, \alpha_{2n}^{(6)};$$

$$\alpha_{2n+3}^{(2n+1)}, \alpha_{2n+4}^{(2n+1)}, \alpha_{2n+1}^{(5)}, \alpha_{2n+2}^{(5)}, \alpha_{2n+3}^{(2n+1)}, \alpha_{2n+4}^{(2n+1)} ;$$

$$\kappa_5, \kappa_6, \dots, \kappa_{n+2} .$$

Daraus folgt, daß wir mit $R = D_{n+3}^{(1,1)}$ die folgenden Isomorphismen haben

$$\hat{H} \cong (\hat{Q}(R), \varepsilon \hat{I}) \cong D_{n+3} \perp \ker \varepsilon \hat{I}$$

$$\dim(\ker \varepsilon \hat{I}) = n + 1 ,$$

$$\hat{\Delta} \cong \hat{R} ,$$

$$\hat{\Gamma} \cong \hat{W}_R ,$$

wobei \hat{H} , $\hat{\Delta}$ und $\hat{\Gamma}$ die entsprechenden Invarianten einer isolierten Singularität (X, O) eines n -dimensionalen vollständigen Durchschnitts von zwei Quadriken sind, n gerade und $\varepsilon = (-1)^{n/2}$ ist.

Insbesondere folgt daraus, daß die Menge von verschwindenden Zykeln Δ von (X, O) ein Wurzelsystem vom Typ D_{n+3} enthält, was bereits bekannt war (vgl. [Deligne-Katz, Exposé XIX, Proposition 5.2 (iii)], [Reid₁]) und zu der Bezeichnung \tilde{D}_{n+3} dieser Singularitäten geführt hat (vgl. [Knörrer₁]).

Im Fall $n = 2$ gilt zusätzlich für die relative Monodromie \hat{c} und das verschwindende Gitter (H, Δ) von (X, O) :

$$\hat{c} = \hat{c}_R , \quad H = (Q(R), -I) , \quad \Delta = R .$$

Es gilt aber nicht, wie ich leider irrtümlicherweise in einem Brief an K.Saito behauptet habe (vgl. [Saito₁, Added in Proof]), daß die beiden Graphen für $n \geq 3$ stark äquivalent sind. Dies folgt daraus, daß die entsprechenden Coxeter-elemente \hat{c} und \hat{c}_R verschieden sind: Es gilt

$$\dim(\text{im}(\hat{c}_u - \text{id})) = 1$$

nach Satz 1.6.6 (n gerade) und

$$\dim(\text{im}(\hat{c}_{R,u} - \text{id})) = \ell - 4 = n - 1$$

nach Satz 2.4.3. Dieser Unterschied hängt damit zusammen, daß die Gitter H und $Q(R)$ außer für $n = 2$ verschieden sind:

$$\dim(\ker H) = n , \quad \text{aber} \quad \dim(\ker Q(R)) = 2 .$$

Man beachte aber die Analogie von Satz 1.6.6 und Satz 2.4.3. Man vergleiche auch Satz 3.5.2.

2.5 Verallgemeinerung einer Methode von Lazzeri

Die Anwendung der in Kap. 2.2 beschriebenen Methode führt leider schon bei etwas komplizierteren Singularitäten zu schwierigen Rechnungen. Das trifft insbesondere auf ein Beispiel zu, das für uns eine große Rolle spielen wird. Deswegen wollen wir anhand dieses Beispiels eine andere Methode, Dynkindiagramme zu berechnen, darstellen. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung einer Methode von Lazzeri (siehe [Hefez-Lazzeri]).

Wir beschreiben diese Methode kurz. Es sei $f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ der Keim einer analytischen Abbildung mit isolierter Singularität in 0, und $f: \mathcal{X}_P \rightarrow P$ ein geeigneter Repräsentant. Wir nehmen an, daß die Diskriminante D_f von f reduziert ist und die Multiplizität von D_f in 0 mit der Multiplizität m der Diskriminante D_F der semiuniversellen Deformation übereinstimmt. Wir führen nun dieselbe Konstruktion wie in Kap. 1.1 durch, nur mit dem Unterschied, daß wir den Bildraum $P \subset \mathbb{C}^2$ der Abbildung f und nicht den Basisraum der semiuniversellen Deformation betrachten. Wir wählen also P von der Form $P = T \times \mathbb{D}$ für zwei Kreisscheiben T und \mathbb{D} , so daß $\mathbb{D} = \ell \cap P$ für eine Gerade ℓ ist, die nicht im Tangentialkegel von D_f enthalten ist. Es sei $t \in T$ ein Punkt aus T , der nicht im Bild des Verzweigungsortes der Projektion $\pi|_{D_f}: D_f \rightarrow T$ enthalten ist. Wir setzen $\mathbb{D}^* = (\{t\} \times \mathbb{D}) - ((\{t\} \times \mathbb{D}) \cap D_f)$ und wählen einen Basispunkt $s \in \mathbb{D}^*$.

Es sei $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ein stark ausgezeichnetes System von Wegen in $\{t\} \times \mathbb{D}$ von den Schnittpunkten mit D_f nach s . Wir bestimmen die Schnittmatrix einer zugehörigen stark ausgezeichneten Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$ von verschwindenden Zellen wie folgt: Das zu dem System $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ gehörige System $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ von einfachen Schleifen bildet ein Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe $\pi_1(P - D_f, s)$. Die zugehörigen Relationen erhält man aus einem Satz von Van Kampen. Mittels der Formeln von Picard-Lefschetz erhält man aus diesen Relationen Relationen für die

Picard-Lefschetz-Transformationen γ_i , $i = 1, \dots, m$. Daraus wiederum erhält man Gleichungen für die Schnittzahlen. Die zusätzliche Schwierigkeit gegenüber dem Hyperflächenfall besteht allerdings darin, daß zwischen den verschwindenden Zykeln δ_i noch lineare Relationen bestehen, die zusätzliche Unbekannte für die Gleichungen liefern. Wir betrachten nun ein Beispiel, bei dem dieser Ansatz jedoch tatsächlich zu einer Lösung führt.

Das Beispiel, das wir betrachten, ist die n -dimensionale Singularität, die durch die Abbildung $f: \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^2$, n gerade, mit

$$f = g \oplus g' \oplus h^{(1)} \oplus \dots \oplus h^{((n-2)/2)},$$

$$g(z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^3 + z_1 z_2, z_1 z_2),$$

$$g'(z_3, z_4) = (z_3 z_4, z_3^2 + z_4^3),$$

$$h^{(q)}(z_{2q+3}, z_{2q+4}) = (z_{2q+3} z_{2q+4}, a_{2q-1} z_{2q+3}^2 + a_{2q} z_{2q+4}^2 - z_{2q+3} z_{2q+4}^2),$$

$$q = 1, \dots, (n-2)/2; \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-2},$$

gegeben wird. Zur Definition von \oplus siehe Kap. 3.1. Wir werden in Kap. 3 für diese Singularität die Bezeichnung T_{2233}^n einführen.

Nach [Wall₂, Lemma 1.4] gilt für die Diskriminante D_f von f :

$$D_f = D_g \cup D_{g'} \cup D_{h^{(1)}} \cup \dots \cup D_{h^{((n-2)/2)}}.$$

Es seien (u, v) Koordinaten von P mit $f_1(z) = u$, $f_2(z) = v$. Dann rechnet man leicht nach, daß D_g und $D_{g'}$ in diesen Koordinaten wie folgt beschrieben werden können:

$$D_1 = D_g: (u - v)^5 - (5^5/3^3 2^2) v^6 = 0$$

$$D_2 = D_{g'}: u^6 - (3^3 2^2/5^5) v^5 = 0$$

Die Kurve $D_{h^{(q)}}$ hat zwei Zweige, deren Puiseuxentwicklungen wie folgt beginnen:

$$D_{2+q} = D_{h^{(q)}}: \quad v = 2a_{2q} \sqrt{\frac{a_{2q-1}}{a_{2q}}} u - \sqrt[4]{\frac{a_{2q-1}}{a_{2q}}} u^{3/2} + \dots,$$

$$D_{(n/2)+1+q} = D_h^{(2)}(q): \quad v = -2a_{2q} \sqrt{\frac{a_{2q-1}}{a_{2q}}} u - \sqrt{-1} \sqrt[4]{\frac{a_{2q-1}}{a_{2q}}} u^{3/2} + \dots ,$$

Wir wählen

$$T = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid v = 0, |u| \leq \eta_1\} ,$$

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mid u = 0, |v| \leq \eta_2\} ,$$

wobei $\eta_1 \ll \eta_2$ klein genug gewählt sein sollen. Wir wählen den Basispunkt $t = (\eta_1, 0) \in T$ und in $\{t\} \times D$ den Basispunkt $s = (\eta_1, \eta_2)$. In $\{t\} \times D$ betrachten wir nun ein stark ausgezeichnetes System $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+6})$ von Wegen von den $m = 2n+6$ Schnittpunkten mit D_f nach s wie in Abbildung 2.5.1 angedeutet ist.

Es sei $(\omega_1, \dots, \omega_{2n+6})$ das zu dem System von Wegen $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+6})$ gehörige System von einfachen Schleifen. Nach dem Satz von Van Kampen (vgl. [Brieskorn₂, 2.1.5], [Zariski₁]) definieren $(\omega_1, \dots, \omega_{2n+6})$ ein Erzeugendensystem von $\pi_1(P-D_f, s)$. Die zugehörigen Relationen erhält man nach diesem Satz wie folgt.

Wir betrachten die Projektion

$$\pi: T \times D \rightarrow T .$$

Die Einschränkung $\pi|_{D_f}$ ist eine endliche Abbildung, die genau über dem Ursprung $0 \in T$ verzweigt ist. Es sei $T^* = T - \{0\}$ und $\lambda \in \pi_1(T^*, t)$ ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe, das wir in der Form

$$\lambda(\vartheta) = \eta_1 e^{2\pi\sqrt{-1}\vartheta} , \quad \vartheta \in [0, 1] ,$$

repräsentieren. Über dem Punkt $\lambda(\vartheta)$ liegen m Punkte $(\lambda(\vartheta), v_i(\vartheta))$, $i = 1, \dots, m$, von D_f . Die m stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} v_i: [0, 1] &\rightarrow D \\ \vartheta &\mapsto v_i(\vartheta) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, m$, definieren einen Zopf, also ein Element ζ_f der Zopfgruppe

Z_m ($m = 2n + 6$) . Wir betrachten nun die Operation der Zopfgruppe aus Kap. 1.5 auf dem System von einfachen Schleifen $(\omega_1, \dots, \omega_m)$. Dazu betrachten wir hier das Erzeugendensystem β_2, \dots, β_m der Zopfgruppe Z_m . Dabei ist β_{i+1} der in Abbildung 2.5.2 angegebene Zopf.

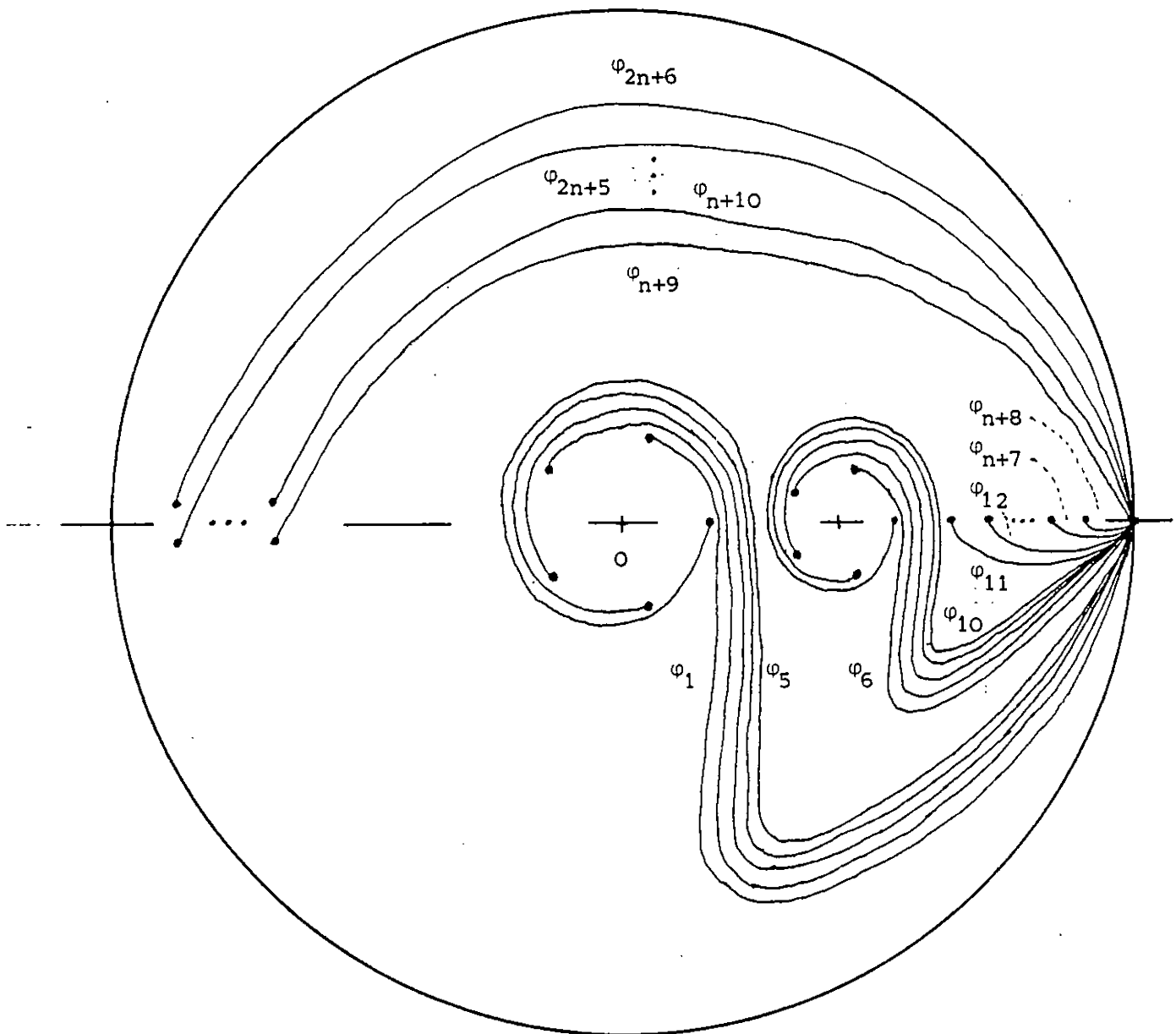


Abbildung 2.5.1

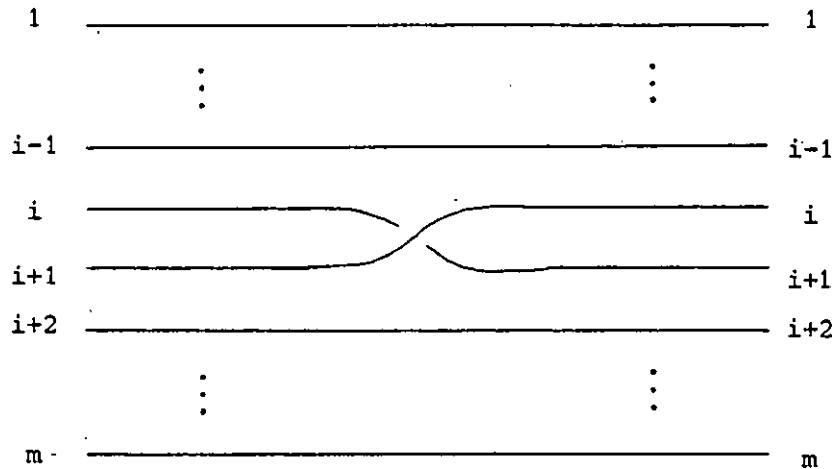


Abbildung 2.5.2

Die Operation von β_{i+1} ist dann wie in Kap. 1.5 beschrieben:

$$\beta_{i+1}(\omega_1, \dots, \omega_m) = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \omega_{i+1} \omega_i \omega_{i+1}^{-1}, \omega_{i+2}, \dots, \omega_m) .$$

Der Satz von Van Kampen besagt nun gerade, daß die Relationen in $\pi_1(P-D_f, s)$ gegeben werden durch

$$\zeta_f(\omega_i) = \omega_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m .$$

Wir wollen diese Relationen berechnen. Zunächst betrachten wir den durch v_1, \dots, v_5 gegebenen Zopf ζ_1 zu D_1 . Es gilt

$$\zeta_1 = (\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5)^6 .$$

Hierbei ist der Zopf in der Weise aufgeschrieben, daß bei der Operation auf den Schleifen dasjenige Element zuerst angewendet wird, das am weitesten rechts steht. Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \zeta_1(\omega_i) &= \tau_1 \omega_{i+1} \tau_1^{-1} \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 , \\ \zeta_1(\omega_5) &= \tau_1^2 \omega_1 \tau_1^{-2} , \end{aligned}$$

wobei $\tau_1 = \omega_5 \omega_4 \omega_3 \omega_2 \omega_1$. Entsprechendes gilt für den Zopf ζ_2 zu D_2 .

Für den Zopf ζ_j zu D_j für $j \geq 3$, der durch v_{2j+5}, v_{2j+6} gegeben wird, berechnet man

$$\zeta_j = \beta_{2j+6}^3 ,$$

$$\zeta_j(\omega_{2j+5}) = \tau_j \omega_{2j+6} \tau_j^{-1} ,$$

$$\zeta_j(\omega_{2j+6}) = \tau_j \omega_{2j+6} \omega_{2j+5}^{-1} \omega_{2j+6}^{-1} \tau_j^{-1} ,$$

wobei $\tau_j = \omega_{2j+6} \omega_{2j+5}$.

Daraus berechnen wir die Operation des gesamten Zopfes ζ_F mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma 2.5.1: Es sei ζ' ein Zopf mit p Strängen, ζ'' ein Zopf mit q Strängen und ζ der Zopf, der aus ζ' und ζ'' durch einfache Verschlingung der Zöpfe ζ' und ζ'' gemäß Abbildung 2.5.3 gebildet wird.

Dann gilt $\zeta = \zeta' \zeta'' \zeta_0$, wobei

$$\zeta_0 = \prod_{j=0}^{q-1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) \prod_{j=0}^{q-1} \left(\prod_{i=0}^{q-1} \beta_{q+1+i-j} \right) .$$

Für die Operation von ζ_0 auf einem stark ausgezeichneten System von Schleifen $(\omega_1, \dots, \omega_{p+q})$ wie oben gilt:

$$\zeta_0(\omega_\ell) = \begin{cases} \tau'' \omega_\ell (\tau'')^{-1} & \text{für } 1 \leq \ell \leq p , \\ \tau (\tau')^{-1} \omega_\ell \tau' \tau^{-1} & \text{für } p+1 \leq \ell \leq p+q , \end{cases}$$

wobei $\tau' = \omega_p \omega_{p-1} \dots \omega_1$, $\tau'' = \omega_{p+q} \omega_{p+q-1} \dots \omega_{p+1}$ und $\tau = \tau'' \tau'$.

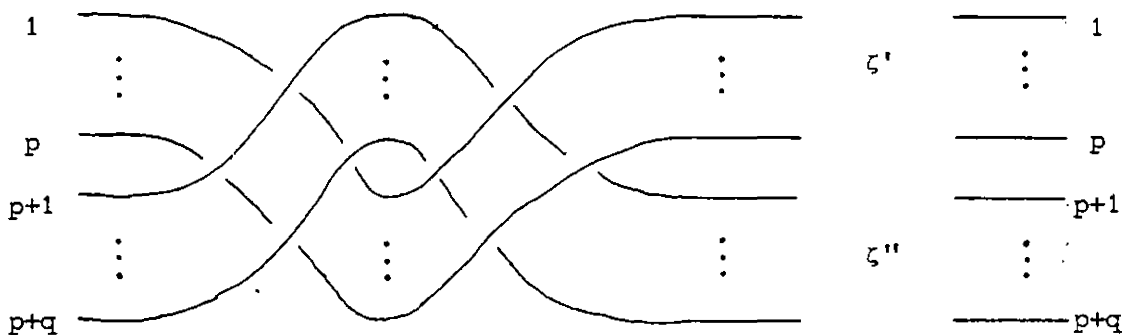


Abbildung 2.5.3

Beweis: Die Beschreibung von ζ_0 liest man leicht an Abbildung 2.5.3 ab. Es sei nun zunächst $1 \leq \ell \leq p$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \zeta_0(\omega_\ell) &= \prod_{j=0}^{q-1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) (\omega_{\ell+q}) \\ &= \prod_{j=0}^{q-2} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) (\omega_{p+q} \omega_{\ell+q-1} \omega_{p+q}^{-1}) \\ &= \omega_{p+q} \cdots \omega_{p+2} \omega_{p+1} \omega_\ell \omega_{p+1}^{-1} \omega_{p+2}^{-1} \cdots \omega_{p+q}^{-1} \\ &= \tau^{\omega_\ell} (\tau'')^{-1} \end{aligned}$$

Für $p+1 \leq \ell \leq p+q$ gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_0(\omega_\ell) &= \prod_{j=0}^{q-1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) \prod_{j=0}^{q-1-\ell+p} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{q+1+i-j} \right) (\omega_\ell \cdots \omega_{\ell-p+1} \omega_{\ell-p} \omega_{\ell-p+1}^{-1} \cdots \omega_\ell^{-1}) \\ &= \prod_{j=0}^{q-1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) (\omega_{p+q} \cdots \omega_{q+1} \omega_{\ell-p} \omega_{q+1}^{-1} \cdots \omega_{p+q}^{-1}) \\ &= \prod_{j=0}^{\ell-p-2} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \beta_{p+1+j-i} \right) (\omega_{p+q} \cdots \omega_{\ell-p} \omega_{\ell+p}^{-1} \cdots \omega_{p+q}^{-1} \omega_\ell \omega_{p+q} \cdots \omega_{\ell+p} \omega_{\ell-p}^{-1} \cdots \omega_{p+q}^{-1}) \\ &= \tau(\tau'')^{-1} \omega_\ell \tau'' \tau^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 2.5.1 bewiesen. Damit erhält man schließlich

Satz 2.5.2: Die Fundamentalgruppe $\pi_1(P-D_F, s)$ ist die Gruppe mit den Erzeugenden $(\omega_1, \dots, \omega_{2n+6})$ und den Relationen

$$\tilde{\tau} \omega_{i+1} \tilde{\tau}^{-1} = \omega_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4, \quad 6 \leq i \leq 9, \quad i = 2j+9,$$

$$\tilde{\tau} \omega_5 \omega_4 \omega_3 \omega_2 \omega_1 \omega_2^{-1} \omega_3^{-1} \omega_4^{-1} \omega_5^{-1} \tilde{\tau}^{-1} = \omega_5,$$

$$\tilde{\tau} \omega_{10} \omega_9 \omega_8 \omega_7 \omega_6 \omega_7^{-1} \omega_8^{-1} \omega_9^{-1} \omega_{10}^{-1} \tilde{\tau}^{-1} = \omega_{10},$$

$$\tilde{\tau} \omega_{2j+10} \omega_{2j+9} \omega_{2j+10}^{-1} \tilde{\tau}^{-1} = \omega_{2j+10},$$

wobei $\tilde{\tau} = \omega_{2n+6} \omega_{2n+5} \cdots \omega_2 \omega_1$ und $j = 1, \dots, n-2$.

Nun betrachten wir das zu dem System von Wegen $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ gehörige stark ausgezeichnete Erzeugendensystem $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ von verschwindenden Zykeln, die zugehörigen Picard-Lefschetz-Transformationen $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ und den Monodromieoperator $c = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m$, $m = 2n+6$. Dann können wir aus Satz 2.5.2 ableiten:

Korollar 2.5.3: Die Operation des Monodromieoperators c auf den verschwindenden Zykeln δ_i wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$c(\delta_i) = \pm \delta_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4, \quad 6 \leq i \leq 9, \quad i = 2j+9,$$

$$c(\delta_5) = \pm \gamma_5 \gamma_4 \gamma_3 \gamma_2(\delta_1),$$

$$c(\delta_{10}) = \pm \gamma_{10} \gamma_9 \gamma_8 \gamma_7(\delta_6),$$

$$c(\delta_{2j+10}) = \pm \gamma_{2j+10}(\delta_{2j+9}),$$

wobei $j = 1, \dots, n-2$.

Beweis: Wir leiten exemplarisch die letzte Gleichung ab:

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau} \omega_{2j+10} \omega_{2j+9}^{-1} \omega_{2j+10}^{-1} \tilde{\tau}^{-1} = \omega_{2j+10} \\ \Rightarrow & \gamma_{2j+10} \dots \gamma_2 \gamma_1 \gamma_{2j+10} \gamma_{2j+9} \gamma_{2j+10}^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \dots \gamma_{2j+10}^{-1} = \gamma_{2j+10} \\ \Rightarrow & \gamma_{2j+10} \gamma_{2j+9} \gamma_{2j+10}^{-1} = c \gamma_{2j+10} c^{-1} \quad (\text{da } \gamma_i^2 = \text{id}) \\ \Rightarrow & s_{\delta_{2j+10}}^{(n)} s_{\delta_{2j+9}}^{(n)} s_{\delta_{2j+10}}^{(n)} = c s_{\delta_{2j+10}}^{(n)} c^{-1} \\ \Rightarrow & s_{\gamma_{2j+10}}^{(n)}(\delta_{2j+9}) = s_c^{(n)}(\delta_{2j+10}). \end{aligned}$$

Daraus folgt $c(\delta_{2j+10}) = \pm \gamma_{2j+10}(\delta_{2j+9})$, da z.B. $\langle c(\delta_{2j+10}), c(\delta_{2j+10}) \rangle \neq 0$.
Damit ist das Korollar bewiesen.

Da bei unserem Beispiel $\mu' = 1$ gilt, besteht zwischen den verschwindenden Zykeln δ_i eine Relation

$$\sum_{i=1}^{2n+6} r_i \delta_i = 0 \quad , \quad r_i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Wir setzen

$$r = \sum_{i=1}^{2n+6} r_i \hat{\delta}_i \quad ,$$

wobei $\hat{\delta}_i$ die zu δ_i gehörige verschwindende Zelle ist. Wir nehmen nun zusätzlich an, daß die verschwindenden Zyklen δ_i so orientiert sind, daß für $1 \leq i \leq 4$, $6 \leq i \leq 9$ und $i = 2j + 9$, $j = 1, \dots, n-2$, gilt

$$c(\delta_i) = \delta_{i+1} \quad .$$

Damit folgt für die relative Monodromie \hat{c} aus Korollar 2.5.3:

Korollar 2.5.4: Für die relative Monodromie \hat{c} bezüglich der stark ausgezeichneten Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+6})$ von verschwindenden Zellen gilt:

$$\hat{c}(\delta_i) = \delta_{i+1} + b_i r \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4 \quad , \quad 6 \leq i \leq 9 \quad ; \quad i = 2j + 9 \quad ,$$

$$\hat{c}(\delta_5) = \epsilon_5 \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_4 \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_2 (\delta_1) + b_5 r \quad ,$$

$$\hat{c}(\delta_{10}) = \epsilon_{10} \hat{\gamma}_{10} \hat{\gamma}_9 \hat{\gamma}_8 \hat{\gamma}_7 (\delta_6) + b_{10} r \quad ,$$

$$\hat{c}(\delta_{2j+10}) = \epsilon_{2j+10} \hat{\gamma}_{2j+10} (\delta_{2j+9}) + b_{2j+10} r \quad ,$$

für $b_i \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $j = 1, \dots, n-2$.

Wir wollen nun die Schnittmatrix

$$A = ((a_{ij})) = ((\langle \hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j \rangle))$$

der verschwindenden Zellen $\hat{\delta}_i$ berechnen. Dazu nutzen wir die Beziehung von Satz

1.6.3 für die Matrix \hat{C} der relativen Monodromie \hat{c} bezüglich der Basis

$(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+6})$ aus:

$$\hat{C} = -V^{-1} V^t \quad ,$$

wobei $A = V + V^t$ und V eine obere Dreiecksmatrix mit $\varepsilon = (-1)^{n/2}$ auf der Diagonale ist (n gerade in unserem Fall). Daraus ergibt sich die Matrixgleichung

$$V^t = -V\hat{C} \quad (*)$$

Nach (1.6.2) gilt

$$\hat{C}(r) = r \quad (**)$$

Wir benutzen die Gleichungen (*) und (**), um rekursiv mit Hilfe von Korollar 2.5.4 die Schnittzahlen a_{ij} und die Koeffizienten r_i der Relation zu berechnen.

Setzen wir

$$b_0 = 1 - \sum_{i=1}^m b_i r_i \quad ,$$

so folgt zunächst aus (**) durch Koeffizientenvergleich, daß

$$\begin{aligned} \varepsilon_m r_m &= b_0 r_{m-1} \quad , \\ -\varepsilon_m a_{m-1,m} r_m + r_{m-1} &= b_0 r_m \quad . \end{aligned}$$

Aus $b_0 = 0$ folgt damit $r_{m-1} = r_m = 0$, und aus (*) folgt dann

$a_{i,m-1} = a_{i,m} = 0$ für $i = 1, \dots, m-2$. Das ist aber nicht möglich, da das Dynkin-diagramm zu A zusammenhängend ist (nach Bemerkung 1.5.2). Also gilt $b_0 \neq 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} r_{m-1} &= \varepsilon_m r_m / b_0 \quad , \\ a_{m-1,m} &= -\varepsilon_m b_0 + (\varepsilon / b_0) \quad . \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Gleichung (*). Wir bezeichnen mit (i,j) diejenige Gleichung, die man aus (*) erhält, indem man das Matrixelement mit Zeilenindex i und Spaltenindex j auf der rechten Seite mit dem entsprechenden auf der linken Seite der Matrixgleichung (*) vergleicht.

Schritt (1): Wir betrachten zunächst die folgenden Gleichungen

$$(m,m) \quad -1 = b_0 - (\epsilon_m/b_0) + b_m r_m$$

$$(m-1,m) \quad 0 = \epsilon_m + \epsilon_m (b_m r_m / b_0) + \epsilon_m b_0 - (1/b_0)$$

$$(m,m-1) \quad -\epsilon_m b_0 + (1/b_0) = -1 - b_{m-1} r_m$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$b_0 = \epsilon_m^2 = 1, \quad b_{m-1} = b_m, \quad b_m r_m = \epsilon_m^{-2}.$$

Für $\epsilon_m = -1$ folgt $b_m r_m = -3$. Wir setzen

$$b_{m-1} = b_m = \pm 1.$$

Dies ist erlaubt, wenn wir von nun an zulassen, daß $b_i \in \mathbb{Z}$ oder $b_i \in (1/3)\mathbb{Z}$ für $i = 1, \dots, m-2$.

Schritt (q), $q = 2, \dots, n-2$: Es sei $1 \leq p < q$. Wir nehmen an, daß die folgenden Gleichungen erfüllt sind (für $p = 1$ sind diese Gleichungen nach Schritt (1) erfüllt).

(a) für $i = m - 2p + 1, m - 2p + 2$; $i < j \leq m$:

$$(j,i) \quad \begin{cases} \epsilon a_{ij} = (2 - \epsilon_m) b_i b_j & (i,j) \neq (m-2p+1, m-2p+2) \\ \epsilon a_{ij} = -1 + (2 - \epsilon_m) b_i b_j & (i,j) = (m-2p+1, m-2p+2) \end{cases}$$

(b) für $i = m - 2p + 1, m - 2p + 2$:

$$(i,m) \quad r_i = -(-\epsilon_m)^{p-1} (2 - \epsilon_m) b_i - \sum_{\ell=i+1}^{m-2p+2} a_{i\ell} r_\ell$$

(c) $(m - 2p + 1, m - 2p + 1) \quad 0 = b_{m-2p+1} (b_{m-2p+1} - b_{m-2p+2})$

(d) $a_{m-2p+1, m-2p+2} = -\epsilon \epsilon_{m-2p+2} + \epsilon$

(Dies folgt aus (**)) wie oben. Man beachte, daß $b_0 = 1$).

$$(e) \quad \varepsilon_{m-2p+2} = \varepsilon_m, \quad b_{m-2p+1} = b_{m-2p+2} = \pm 1$$

Aus der Gültigkeit der Gleichungen (a) - (e) für $p < q$ und aus den Gleichungen (*) und (**) folgt aber die Gültigkeit der Gleichungen (a) - (d) für $p = q$. Aus der Gleichung (d) für $p = q$ und den Gleichungen $(m-2q+1, m-2q+2)$ und $(m-2q+1, m-2q+1)$ folgt dann die Gleichung (e) für $p = q$.

Schritt (n-1): Hierzu betrachten wir die folgenden Gleichungen. Es sei $p = 5$.

(a) Für $p+1 \leq i \leq p+5$, $i < j \leq m$:

$$(j,i) \begin{cases} \varepsilon a_{ij} = (2 - \varepsilon_m) b_i b_j & \text{für } j \neq i+1, \\ \varepsilon a_{ij} = -1 + (2 - \varepsilon_m) b_i b_j & \text{sonst,} \end{cases}$$

(b) für $p+1 \leq i \leq p+5$:

$$(i,m) \quad r_i = -(2 - \varepsilon_m) b_i - \sum_{\ell=i+1}^{p+5} a_{i\ell} r_\ell,$$

(c) für $p+1 \leq i \leq j \leq p+5$, $j \neq p+5$:

$$(i,j) \quad 0 = b_i (b_{j+1} - b_j).$$

(d) Aus (**) mit $b_0 = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+5} r_{p+5} &= r_{p+1}, \\ -\varepsilon \varepsilon_{p+5} a_{p+1,p+2} r_{p+5} + r_{p+1} &= r_{p+2}, \\ r_{p+1} = 0 &\Rightarrow r_{p+1} = r_{p+2} = r_{p+3} = r_{p+4} = r_{p+5} = 0. \end{aligned}$$

Wir schließen nun wie folgt: Angenommen $b_{p+1} = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a_{p+1,p+2} &= -1 && \text{(aus (p+2,p+1))} \\ \Rightarrow r_{p+2} &= 0 && \text{(aus (d))} \\ \Rightarrow r_{p+1} &= 0 && \text{(aus (p+1,m))} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_{p+1} = r_{p+2} = r_{p+3} = r_{p+4} = r_{p+5} = 0 \quad (\text{aus (d)})$$

$$\Rightarrow b_{p+1} = b_{p+2} = b_{p+3} = b_{p+4} = b_{p+5} = 0 \quad (\text{aus (b)}) .$$

Dann folgt aus (a), daß das Dynkindiagramm zu $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m)$ nicht zusammenhängend ist. Also muß $b_{p+1} \neq 0$ gelten. Dann folgt aber aus (c):

$$b_{p+1} = b_{p+2} = b_{p+3} = b_{p+4} = b_{p+5} \neq 0 .$$

Aus (a), (b) und (d) folgt dann die folgende Gleichung für b_{p+5} :

$$\epsilon_{p+5} = 5 - 20(2 - \epsilon_m)b_{p+5}^2 + 21(2 - \epsilon_m)^2 b_{p+5}^4 - 8(2 - \epsilon_m)^3 b_{p+5}^6 + (2 - \epsilon_m)^4 b_{p+5}^8 .$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$b_{p+5}^2 = 1 \quad , \quad \epsilon_{p+5} = \epsilon_m .$$

Schritt (n): Aus den Gleichungen (*) und (**) folgt unter Benutzung von Schritt (n-1), daß die Gleichungen (a) - (d) von Schritt (n-1) auch für $p = 0$ gelten und wir wie in Schritt (n-1) schließen können.

Ergebnis: Die Gleichungen (*) und (**) haben bis auf Orientierungswechsel der verschwindenden Zellen $\hat{\delta}_i$ die beiden Lösungen $(v^{(+1)}, r^{(+1)})$ für $\epsilon_m = +1$ und $(v^{(-1)}, r^{(-1)})$ für $\epsilon_m = -1$. Hierbei ist $v^{(\pm 1)} = ((v_{ij}^{(\pm 1)}))$, und für $i < j$ gilt:

$$v_{ij}^{(\pm 1)} = a_{ij}^{(\pm 1)} = \begin{cases} (-1)^{n/2} (1 \mp 1) & \text{für } j = i + 1 \text{ und } i \neq 5, 10; \quad 10 + 2p; \\ & p = 1, \dots, n-3 \quad , \\ (-1)^{n/2} (2 \mp 1) & \text{sonst} \quad , \end{cases}$$

und

$$r_i^{(+1)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, 2; 6, 7; 7+4q, 8+4q; \quad q = 1, \dots, (n-2)/2 \quad ; \\ 0 & \text{für } i = 3; 8; \\ -1 & \text{für } i = 4, 5; 9, 10; 9+4q, 10+4q; \quad q = 1, \dots, (n-2)/2 \quad ; \end{cases}$$

$$r_i^{(-1)} = \begin{cases} 3 & \text{für } i = 1, 4; 6, 9; 9+2p; \quad p = 1, \dots, n-2; \\ 0 & \text{für } i = 3; 8; \\ -3 & \text{für } i = 2, 5; 7, 10; 10+2p; \quad p = 1, \dots, n-2. \end{cases}$$

Wir zeigen, daß die Lösung $(v^{(-1)}, r^{(-1)})$ nicht möglich ist. Dazu nehmen wir folgende Basistransformation vor:

$$\begin{aligned} e_1 &= \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_4 - \hat{\delta}_5, & e_2 &= \hat{\delta}_6 - \hat{\delta}_7 + \hat{\delta}_9 - \hat{\delta}_{10}; \\ e_{2+p} &= \hat{\delta}_{2p+9} - \hat{\delta}_{2p+10}, & p &= 1, \dots, n-2; \\ e_{n+1} &= \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2, & e_{n+2} &= \hat{\delta}_3 - \hat{\delta}_2; & e_{n+3} &= \hat{\delta}_6 - \hat{\delta}_7, & e_{n+4} &= \hat{\delta}_8 - \hat{\delta}_7; \\ e_{n+5} &= -\hat{\delta}_1 + 2\hat{\delta}_2 - \hat{\delta}_4, & e_{n+6} &= \hat{\delta}_2, & e_{n+7} &= -\hat{\delta}_6 + 2\hat{\delta}_7 - \hat{\delta}_9, \\ e_{n+8} &= \hat{\delta}_7; & e_{n+8+p} &= \hat{\delta}_{10+2p}, & p &= 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Schnittmatrix zu $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+6})$ die Matrix $A^{(-1)}$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \ker(\hat{H}) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} e_i, & \sum_{i=n+1}^{n+4} \mathbb{Z} e_i &= U \perp U, & \sum_{i=n+5}^{2n+6} \mathbb{Z} e_i &=: L, \\ \hat{H} &= \ker(\hat{H}) \perp U \perp U \perp L, \end{aligned}$$

wobei U eine unimodulare hyperbolische Ebene ist und L ein indefinites Gitter vom Rang $n+2$. Daraus folgt für die Anzahl μ_ε ($\varepsilon = (-1)^{n/2}$) der Eigenwerte mit Vorzeichen ε der quadratischen Form auf \hat{H} bzw. H :

$$\mu_\varepsilon \leq n+3.$$

Aus Kapitel 3 folgt aber, daß T_{2233}^n in die Singularität T_{2223}^n deformiert, für die $\mu_\varepsilon = n+4$ gilt. Nach [Looijenga₃, (7.13)] haben wir einen Widerspruch. Wir haben damit bewiesen

Satz 2.5.5: Die n -dimensionale Singularität T_{2233}^n besitzt für n gerade eine stark ausgezeichnete Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+6})$ von verschwindenden Zellen mit den Schnittzahlen

$$\langle \hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i+1 \text{ und } i \neq 5; 10; 2p+10; \quad p = 1, \dots, n-2 \\ (-1)^{n/2} & \text{für } i < j \text{ sonst.} \end{cases}$$

Zwischen den zugehörigen verschwindenden Zykeln $(\delta_1, \dots, \delta_{2n+6})$ besteht die Relation

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_4 - \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 - \delta_9 - \delta_{10} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{j+1} (\delta_{2j+9} + \delta_{2j+10}) = 0$$

Wir transformieren diese Basis nun mit Hilfe der Zopfgruppenoperation zu einer Basis mit einem Dynkindiagramm, das eine Erweiterung des Graphen von Abbildung 2.3.7 ist. Durch die Transformationen

$$\begin{array}{cccc} \beta_{2n+3}, & \beta_{2n+4}, & \beta_{2n+5}, & \beta_{2n+6} ; \\ \beta_{2n+2}, & \beta_{2n+3}, & \beta_{2n+4}, & \beta_{2n+5} ; \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_7, & \beta_8, & \beta_9, & \beta_{10} \end{array}$$

geht die Basis $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+6})$ über in eine Basis $(\hat{\delta}'_1, \dots, \hat{\delta}'_{2n+6})$ mit

$$\langle \hat{\delta}'_i, \hat{\delta}'_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i+1 \text{ und } i \neq 5, 7, \dots, 2n+1, \\ (-1)^{n/2} & \text{für } i < j \text{ sonst.} \end{cases}$$

Durch die Transformationen

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3, \chi_4 ; \\ \beta_{2n+6}, \beta_{2n+5}, \beta_{2n+4}, \beta_{2n+6}, \beta_{2n+5}, \beta_{2n+4}, \beta_{2n+5}, \beta_{2n+4}, \chi_{2n+3} ; \\ \beta_6, \beta_5; \beta_8, \beta_7, \beta_6, \beta_5; \dots; \beta_{2n}, \beta_{2n-1}, \dots, \beta_5 ; \\ \beta_{n+2}, \beta_{n+3}; \beta_{n+1}, \beta_{n+2}; \dots; \beta_5, \beta_6 ; \\ \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5; \chi_{n+2}, \chi_n, \dots, \chi_6; \chi_{n+5}, \chi_{n+7}, \dots, \chi_{2n+1} . \end{array}$$

geht diese Basis über in die Basis $(\hat{\delta}''_1, \dots, \hat{\delta}''_{2n+6})$ mit dem Dynkindiagramm von

Abbildung 2.5.4 (vgl. Abbildung 2.3.7).

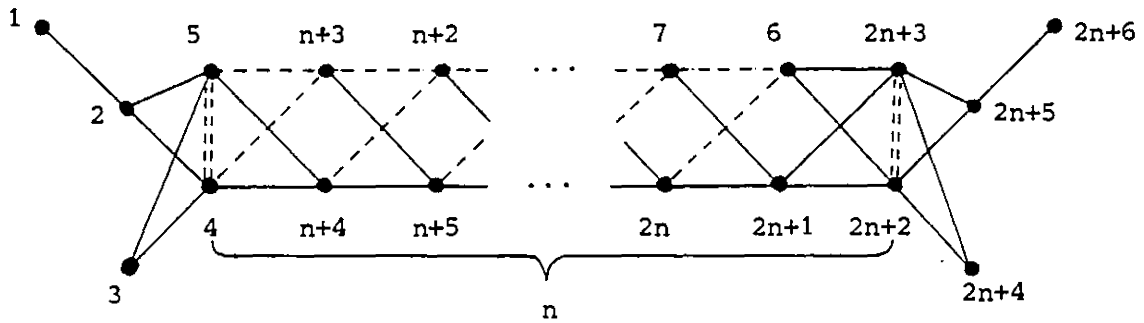


Abbildung 2.5.4

Durch die Transformationen

$$\alpha_3, \alpha_2; \beta_6, \beta_7, \dots, \beta_{n+4}; \alpha_2, \beta_5, \beta_6, \dots, \beta_{n+4};$$

$$\beta_{n+3}, \beta_{n+2}; \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_n, \dots, \beta_4; \alpha_{n+1}, \alpha_{n+3};$$

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_{n+2}, \chi_{n+3}$$

geht diese Basis über in die Basis $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n+6})$ mit dem Dynkindiagramm von Abbildung 2.5.5.

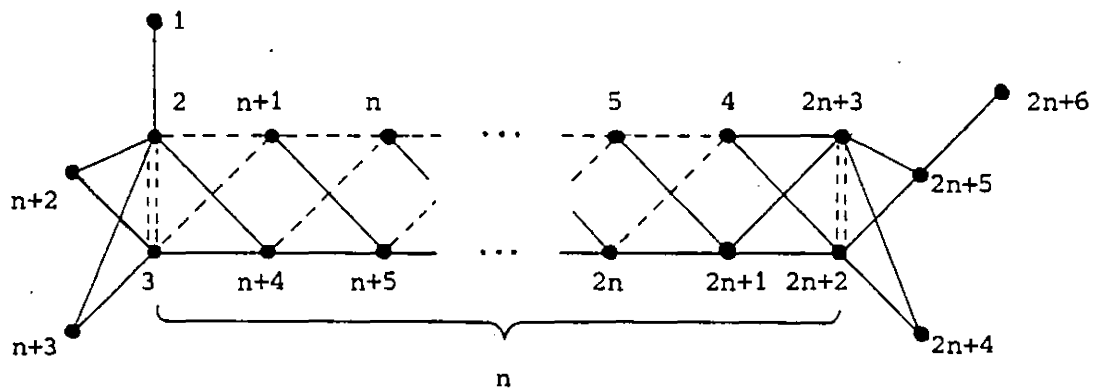


Abbildung 2.5.5

Dies ist eine spezielle Basis im Sinne von Definition 5.4.1. Mit den in Kap. 4.1

eingeführten Bezeichnungen erhält man hieraus:

$$\hat{H} = Q_{2223}^n \perp U \perp \ker \hat{H} \quad , \quad \dim(\ker \hat{H}) = n-1 \quad ,$$

wobei das Gitter Q_{2223}^n von den Vektoren $\lambda_3; \lambda_{n+2}, \lambda_{n+3}, \dots, \lambda_{2n+1}; \lambda_{2n+3}, \lambda_{2n+4},$
 $\lambda_{2n+5}, \lambda_{2n+6}$ aufgespannt wird und das Radikal $\ker \hat{H}$ von den Vektoren

$$\lambda_{2n+2} - \lambda_{2n+3} \quad ;$$

$$\lambda_{n+4+i} + \lambda_{n+3+i} + \lambda_{n+2-i} - \lambda_{n+1-i} \quad , \quad i = 1, \dots, n-3 \quad ;$$

$$\lambda_{n+4} + \lambda_{n+3} + \lambda_{n+2} - \lambda_{n+1} + 2\lambda_3 \quad .$$

Für das Gitter Q_{2223}^n (zur Definition siehe Bemerkung 4.1.4) gilt:

$$Q_{2223}^n = D_{n+3} \perp U \quad .$$

3. DYNKINDIAGRAMME FÜR EINIGE SPEZIELLE SINGULARITÄTEN

3.1 Zur Klassifikation von isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten

Wir werden in diesem Kapitel die Methoden von Kap. 2 anwenden, um Dynkindiagramme von einigen speziellen Singularitäten zu berechnen. Bei allen diesen Singularitäten wird es sich um isolierte Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten handeln, die durch einen Abbildungskeim

$$f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

gegeben werden. Für die Klassifikation solcher Singularitäten spielt der 2-Jet eine entscheidende Rolle.

Wir nehmen immer an, daß $df(0) = 0$ gilt (sonst kann man n kleiner wählen, um diese Bedingung zu erfüllen). Es sei dann $j^2 f = (q_1, q_2)$ der 2-Jet von f , d.h. q_1, q_2 sind die quadratischen Anteile der Komponentenfunktionen f_1, f_2 von f . Dann definiert

$$\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2$$

ein Bündel von Quadriken. Solche Bündel wurden von Weierstraß [Weierstraß₁] (im regulären Fall) und von Kronecker [Kronecker₁] (im allgemeinen) klassifiziert. Das Bündel heißt regulär (nicht ausgeartet), wenn eine Quadrik des Bündels nicht ausgeartet ist. Nur diesen Fall wollen wir im folgenden betrachten. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß q_1 nicht ausgeartet ist. Das bedeutet, daß f_1 eine im Ursprung nicht ausgeartete Funktion ist, also im Ursprung einen gewöhnlichen Doppelpunkt hat. Es sei

$$q_i(z) = z^t Q_i z \quad .$$

Dann ist die Jordannormalform von $Q_1^{-1} Q_2$ eine Invariante des Bündels. Wir geben die Jordannormalform in der üblichen Notation durch das Segresymbol an (vgl.

[Wall₄]). Dieses Symbol besteht aus der Liste der Größen der Jordanblöcke, wobei die Größen von solchen Jordanblöcken, die zum gleichen Eigenwert gehören, in Klammern eingeschlossen werden. Dabei können auch reguläre Büschel mit ausgeartetem q_1 eingeschlossen werden, wenn wir ∞ als Eigenwert erlauben. Die Eigenwerte liegen also in $P_1(\mathbb{C})$, die Doppelverhältnisse der Eigenwerte sind Invarianten.

Die unimodalen isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten wurden von C.T.C. Wall klassifiziert [Wall₃]. Er betrachtet dabei die Klassifikation von Abbildungskeimen modulo \mathcal{X} -Äquivalenz (oder Kontaktäquivalenz). Hierbei ist \mathcal{X} die Gruppe der Diffeomorphismen von $(\mathbb{C}^{n+2} \times \mathbb{C}^2, (0,0))$ von der Form $h(z,y) = (h_1(z), h_2(z,y))$, die auf den Abbildungskeimen $f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ wie folgt operiert: Für $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{X}$ gilt $(h.f)(z) = h_2(h_1(z), f(h_1(z)))$. Zwei Abbildungskeime f und g sind genau dann \mathcal{X} -äquivalent, wenn die Raumkeime $f^{-1}(0)$ und $g^{-1}(0)$ analytisch isomorph sind.

Eine entscheidende Bedeutung bei der Klassifikation kommt einem Spaltungssatz von C.T.C. Wall zu, der das Spaltungslemma von Thom im Hyperflächenfall verallgemeinert [Wall₂]. Hierzu betrachten wir die Untergruppe \mathcal{X}' von \mathcal{X} , die aus denjenigen Diffeomorphismen $h = (h_1, h_2)$ von $(\mathbb{C}^{n+2} \times \mathbb{C}^2, (0,0))$ wie oben besteht, für die das Differential dh' von h' mit $h'(z,y) = (z, h_2(z,y))$ in $(0,0)$ gleich der Identität ist. Wir nennen f gut, wenn f eine isolierte Singularität definiert (d.h. 0 eine isolierte Singularität von $f^{-1}(0)$ ist), und wenn $j^2(f)$ regulär ist. Für $g: (\mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ und $g': (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definieren wir die Summe $g \oplus g'$: $(\mathbb{C}^{s+t}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ durch $(g \oplus g')(u,v) = g(u) + g'(v)$, wobei u Koordinaten von \mathbb{C}^s und v Koordinaten von \mathbb{C}^t sind.

Theorem 3.1.1 (Spaltungssatz von C.T.C. Wall): Es sei $f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ein guter Abbildungskeim. Dann existiert zu jeder Partition der Menge der Eigenwerte von $j^2 f$ in zwei Teilmengen Λ_1 und Λ_2 eine zugehörige \mathcal{X}' -Äquivalenz

$$f \sim g \oplus g' ,$$

wobei g und g' gut sind und $j^2 g$ die Eigenwerte aus Λ_1 und $j^2 g'$ die Eigenwerte

aus Λ_2 hat. Ferner sind die \mathcal{K}' -Äquivalenzklassen von g und g' durch diejenige von f bestimmt. Sind umgekehrt g und g' gut und ihre 2-Jets haben keinen gemeinsamen Eigenwert, dann ist $g \oplus g'$ gut und die \mathcal{K}' -Äquivalenzklassen von g und g' bestimmen die von $g \oplus g'$.

Mit Hilfe dieses Spaltungssatzes erhält man die folgende Klassifikation von guten Abbildungskeimen f mit Eigenwerten von $j^2 f$ der Multiplizität ≤ 2 modulo \mathcal{K}' -Äquivalenz.

Fall (1): Die Multiplizität der Eigenwerte sei ≤ 1 .

Dann ist f \mathcal{K}' -äquivalent zu einer isolierten Singularität eines Durchschnitts von zwei Quadriken, also einer Singularität vom Typ \tilde{D}_{n+3} (siehe Kap. 2.3).

Fall (2): Die Multiplizität der Eigenwerte sei ≤ 2 und $\neq 2$ für mindestens einen und höchstens zwei Eigenwerte.

Im Falle eines Eigenwertes der Multiplizität 2 können wir $f = (f_1, f_2)$ auf die folgende Form reduzieren (vgl. [Wall₂], [Mather₁]):

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + 2z_{n+1}z_{n+2} \quad , \\ f_2(z) &= a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \dots + a_nz_n^2 + z_{n+1}^q + z_{n+2}^s \quad , \end{aligned}$$

wobei $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j \neq 0$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, und $2 \leq q \leq s$, $3 \leq s$. Hierbei gilt $q = 2$ für das Segresymbol $\{1, \dots, 1, 2\}$ und $q \neq 2$ für das Segresymbol $\{1, \dots, 1, (1, 1)\}$. Wir bezeichnen diese Singularitäten mit $T_{2,q,2,s}^n$.

Im Falle von zwei Eigenwerten der Multiplizität 2 können wir $f = (f_1, f_2)$ auf die folgende Form reduzieren:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-2}^2 + z_{n-1}^p + z_n^r + 2z_{n+1}z_{n+2} \quad , \\ f_2(z) &= a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \dots + a_{n-2}z_{n-2}^2 + 2z_{n-1}z_n + z_{n+1}^q + z_{n+2}^s \quad , \end{aligned}$$

wobei $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j \neq 0$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-2$, und $2 \leq q \leq s$,

$2 \leq p \leq r$, $r \leq s$, $3 \leq s$. Wir bezeichnen diese Singularitäten mit $T_{p,q,r,s}^n$.
Für $n = 2$ sind dies gerade die zweidimensionalen Spitzensingularitäten der Einbettungsdimension 4.

Fall (3): Mindestens ein Eigenwert hat eine Multiplizität ≤ 3 .

Der einfachste Fall mit einem Eigenwert der Multiplizität ≤ 3 ist der Fall des Segresymbols $\{1, \dots, 1, 3\}$: aus der Deformationstheorie der regulären Bündel von Quadriken (siehe z.B. [Gantmacher₁]) folgt, daß alle anderen regulären Bündel zu Fall (3) in ein Bündel mit diesem Segresymbol deformieren. Aus dem Spaltungssatz und der Klassifikation von Wall [Wall₄] folgt, daß sich ein $f = (f_1, f_2)$ mit Segresymbol $\{1, \dots, 1, 3\}$ auf die folgende sogenannte Pränormalform reduzieren läßt:

$$f_1(w; x, y, z) = w_1^2 + \dots + w_{n-1}^2 + 2xz - y^2 \quad ,$$

$$f_2(w; x, y, z) = a_1 w_1^2 + \dots + a_{n-1} w_{n-1}^2 + 2xy + Q(y, z) \quad .$$

Hierbei ist $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j \neq 0$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ und

$$Q(y, z) = a(z) + yb(z) + y^2c(z)$$

mit $\text{ord } a \geq 3$, $\text{ord } b \geq 2$, $\text{ord } c \geq 1$. Tatsächlich ist $c(z)$ überflüssig und kann immer gleich 0 gesetzt werden. Wir verwenden diesen Term aber zur Vereinfachung einiger Gleichungen mit. Für $n = 1$ ist $f = \tilde{f}$ mit

$$\tilde{f}(x, y, z) = (2xz - y^2, 2xy + Q(y, z))$$

Je nach Wahl von $a(z)$, $b(z)$ und $c(z)$ gehören hierzu verschiedene μ -konstant-Strata von Singularitäten. Die entsprechende Serie von Singularitäten mit dieser Pränormalform bezeichnet Wall als die J-Serie. Für allgemeines n läßt sich f schreiben als

$$f = (w_1^2, a_1 w_1^2) \oplus \dots \oplus (w_{n-1}^2, a_{n-1} w_{n-1}^2) \oplus \tilde{f} \quad .$$

Im Fall $n = 2$ bezeichnet Wall die entsprechende Serie mit J' . Wir bezeichnen für

allgemeines n diese Serie von Singularitäten als die $J^{(n-1)}$ -Serie.

Der nächste Fall mit genau einem Eigenwert der Multiplizität 3 und sonst lauter Eigenwerten der Multiplizität 1 ist nach dem Fall mit Segresymbol $\{1, \dots, 1, 3\}$ der Fall mit Segresymbol $\{1, \dots, 1, (1, 2)\}$. Ein Abbildungskeim $f = (f_1, f_2)$ mit diesem Segresymbol läßt sich nach Theorem 3.1.1 und [Wall₄] auf die folgende Pränormalform reduzieren:

$$f_1(w; x, y, z) = w_1^2 + \dots + w_{n-1}^2 + 2xz + y^2, \\ f_2(w; x, y, z) = a_1 w_1^2 + \dots + a_{n-1} w_{n-1}^2 + x^2 + Q(y, z).$$

Hierbei ist wieder $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq a_j \neq 0$ für $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ und $Q(y, z)$ wie oben. Für $n = 1$ gilt $f = \tilde{f}$ mit

$$\tilde{f}(x, y, z) = (2xz + y^2, x^2 + Q(y, z)).$$

Für $n \geq 2$ läßt sich f wie oben schreiben als

$$f = (w_1^2, a_1 w_1^2) \oplus \dots \oplus (w_{n-1}^2, a_{n-1} w_{n-1}^2) \oplus \tilde{f}.$$

Für $n = 1$ bezeichnet Wall die Serie von Singularitäten mit dem obigen Segresymbol als die K -Serie. Analog zum Fall $J^{(n-1)}$ bezeichnen wir diese Serie von Singularitäten für allgemeines n als die $K^{(n-1)}$ -Serie.

Die Abbildungskeime $f: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ mit isolierter Singularität und regulärem 2-Jet sind für $n = 1, 2$ von Wall teilweise klassifiziert worden ([Wall₃], [Wall₄]). Wall beschränkt sich dabei auf diejenigen Segresymbole, zu denen es \mathcal{K} -unimodale Abbildungskeime in der zugehörigen Klasse von Abbildungskeimen gibt.

Im Fall (3) hat man die folgende Tabelle mit den möglichen Segresymbolen und den zugehörigen Bezeichnungen der Serien von Wall.

$n = 1 :$	Segresymbol	$\{3\}$	$\{(1, 2)\}$
	Serie	J	K

$n = 2 :$	Segresymbol	{1,3}	{1,(1,2)}	{4}	{(1,3)}
	Serie	J'	K'	L	M

Wall betrachtet auch einige Fälle, bei denen das durch $j^2 f$ bestimmte Bündel von Quadriken nicht regulär ist. Wir beschränken uns hier jedoch auf den regulären Fall.

Wir werden in Abschnitt 3.2 Dynkindiagramme für die Singularitäten $T_{2,q,2,s}^n$ berechnen und in Abschnitt 3.3 Dynkindiagramme für die Singularitäten der $J^{(n-1)}$ - und der $K^{(n-1)}$ -Serie. In Abschnitt 3.4 betrachten wir Dynkindiagramme für einfache Raumkurven ($n = 1$) und schließlich in den Abschnitten 3.5 und 3.6 Dynkindiagramme für Flächen ($n = 2$) von vollständigem Durchschnitt, die durch Abbildungskeime aus den obigen Serien gegeben werden.

3.2 Die Singularitäten $T_{2,q,2,s}^n$

Wir berechnen in diesem Abschnitt mit Hilfe der Methode von Kap. 2.2 Dynkindiagramme für die Singularitäten vom Typ $T_{2,q,2,s}^n$, die im letzten Abschnitt eingeführt wurden. Das Vorgehen, das in allen Fällen ähnlich ist, wird hier exemplarisch ausführlich dargestellt. Wir beginnen mit dem Fall

(A) Segresymbol $\{1, \dots, 1, (1,1)\}$

Zur Berechnung benutzen wir die Abbildung $f = (f_1, f_2)$ mit

$$f_1(z) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + z_{n+1}^2 - z_{n+2}^2,$$

$$f_2(z) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_n z_n^2 + b_0 (z_{n+1} + z_{n+2})^q + b_0 (z_{n+1} - z_{n+2})^s$$

Hierbei sei $3 \leq q \leq s$, b_0 sei eine beliebige nicht reelle komplexe Zahl und es gelte

$$a_i \in \mathbb{C}, \quad -\frac{1}{4} < \operatorname{Re} a_i < \operatorname{Re} a_j < 0 \quad \text{für } i < j,$$

$$0 < \operatorname{Im} a_i = \operatorname{Im} a_j \ll 1 \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n,$$

wobei die genaue Bedingung an $\text{Im } a_i$ noch später festgelegt wird. Als lineare Funktion ζ wählen wir die letzte Koordinatenfunktion z_{n+2} . Dann berechnet man leicht

$$\Sigma_{z_{n+2}}(f_2) = \bigcup_{i=1}^{2n+2} \Sigma_i,$$

wobei

$$\Sigma_{2j-\alpha} = \{z_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n, z_j = g_{2j-\alpha}(z_{n+2}), z_{n+1} = \tilde{g}_{2j-\alpha}(z_{n+2})\},$$

$$\Sigma_{2n+2-\alpha} = \{z_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n, z_{n+1} = (-1)^{\alpha+1} z_{n+2}\},$$

für $1 \leq j \leq n$, $\alpha \in \{0,1\}$, und $g_{2j-\alpha}(z_{n+2})$ eine Potenzreihe in z_{n+2} ist, die mit $(-1)^\alpha z_{n+2}$ beginnt, und $\tilde{g}_{2j-\alpha}(z_{n+2})$ eine Potenzreihe von der Ordnung $q-1$ ist. Man berechnet

$$\rho_i = 2 \text{ für } i = 1, \dots, 2n, \quad \rho_{2n+1} = q, \quad \rho_{2n+2} = s.$$

Die Funktion ζ wurde gerade so gewählt, daß der 2-Jet von $g = (f_1, f_2 + \zeta^2)$ lauter verschiedene Eigenwerte der Multiplizität 1 hat. Also definiert g nach Kap. 3.1 eine Singularität vom Typ \tilde{D}_{n+3} . Zur Anwendung von Theorem 2.2.2 müssen wir die Schnittmatrix einer Basis (e_1, \dots, e_ν) von verschwindenden Zellen dieser Singularität bestimmen, die durch ein in Kap. 2.2 beschriebenes stark ausgezeichnetes System von Wegen definiert ist. Dies ist ein System von Wegen, das die kritischen Werte der Funktion

$$g_{\varepsilon,t} = (f_2 + (z_{n+2} - \varepsilon)^2) \Big|_{X'_t}$$

mit dem Nullpunkt verbindet, wobei $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$, $0 < t \leq \delta$, und X'_t die Milnorfaser von f_1 über dem Punkt t ist. Um die Schnittmatrix einer Basis von verschwindenden Zellen bezüglich eines solchen Wegesystems zu berechnen, vergleichen wir dieses Wegesystem mit dem von Kap. 2.3 für die Funktion $g_{0,t}$. Dazu müssen wir das asymptotische Verhalten der kritischen Werte von $g_{\varepsilon,t}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ studieren. Man rechnet die folgenden asymptotischen Näherungsformeln für die kritischen Werte $\tilde{s}_i^{\varepsilon,t}$ aus, die zu kritischen Punkten von $g_{\varepsilon,t}$ gehören, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$

gegen 0 gehen. Wir geben in Klammern jeweils die Zweige der Polarkurve an, auf der die zugehörigen kritischen Punkte für $t = 0$ liegen:

$$\tilde{s}_j^{\varepsilon, t} = a_j t + \frac{a_j}{1 + a_j} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^q), \quad j = 1, \dots, n, \quad (\Sigma_{2j-1}, \Sigma_{2j})$$

$$\tilde{s}_{2n+\chi}^{\varepsilon, t} = (\varepsilon + (-1)^{\chi+1} \sqrt{-t})^2 + o(t^{q/2}), \quad \chi = 1, 4, (\text{Nullpunkt})$$

$$\tilde{s}_{2n+2+\chi}^{\varepsilon, t} = b_0 ((-1)^\chi \sqrt{t + \varepsilon^2} + \varepsilon)^q + b_0 ((-1)^\chi \sqrt{t + \varepsilon^2} - \varepsilon)^q + o(\varepsilon^{q+1}),$$

$$\chi = 0, 1 \quad (\Sigma_{2n+1+\chi})$$

Wir können nun die Bedingung an $\text{Im } a_j$ formulieren: $\text{Im } a_j$ ist so klein zu wählen, daß für alle $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$\text{Re}(\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}) = \text{Re}(\tilde{s}_{2n+1}^{\varepsilon, t}) \Rightarrow \text{Im}(\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}) < \text{Im}(\tilde{s}_{2n+1}^{\varepsilon, t}) \quad (3.2.1)$$

Da für $1 \leq i < j \leq n$ nach Voraussetzung $-\frac{1}{4} < \text{Re } a_i < \text{Re } a_j < 0$ und $0 < \text{Im } a_i = \text{Im } a_j \ll 1$ gilt, folgt

$$\text{Re}(\tilde{s}_i^{\varepsilon, t}) < \text{Re}(\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}) < 0, \quad \text{Im}(\tilde{s}_i^{\varepsilon, t}) > \text{Im}(\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}) > 0.$$

Deswegen kann man leicht verifizieren, daß die obige Bedingung zu erfüllen ist. Außerdem ist die Bedingung (2.2.2) erfüllt.

Also wird das Verhalten der kritischen Werte für $\varepsilon_0 \geq \varepsilon \geq 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, schematisch durch Abbildung 3.2.1 beschrieben. Hierbei haben wir am Kreuzungspunkt von zwei Flußlinien durch Unterbrechung derjenigen Linie, die den Kreuzungspunkt später, also für kleineres ε erreicht, angedeutet, in welcher Reihenfolge die kritischen Werte diesen Punkt passieren. Die Situation an den Kreuzungspunkten wird gerade durch die obige Bedingung gewährleistet.

Wir ersetzen nun die Familie von Funktionen $g_{\varepsilon, t}: X'_t \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ durch eine benachbarte stetige Familie $\bar{g}_{\varepsilon, t}: X'_t \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ von Morsefunktionen mit lauter verschiedenen kritischen Werten, so daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ $\bar{g}_{\varepsilon, t}$ nahe bei $g_{\varepsilon, t}$ ist. Zu den kritischen Werten $\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}$ für $j = 1, \dots, n$ von $g_{\varepsilon, t}$ gehören dann jeweils zwei kritische Werte $s_{2j-1}^{\varepsilon, t}$ und $s_{2j}^{\varepsilon, t}$ von $\bar{g}_{\varepsilon, t}$, die nahe bei $\tilde{s}_j^{\varepsilon, t}$ liegen, und zu den kritischen Werten $\tilde{s}_i^{\varepsilon, t}$ für $i = 2n+1, \dots, 2n+4$ gehört jeweils ein

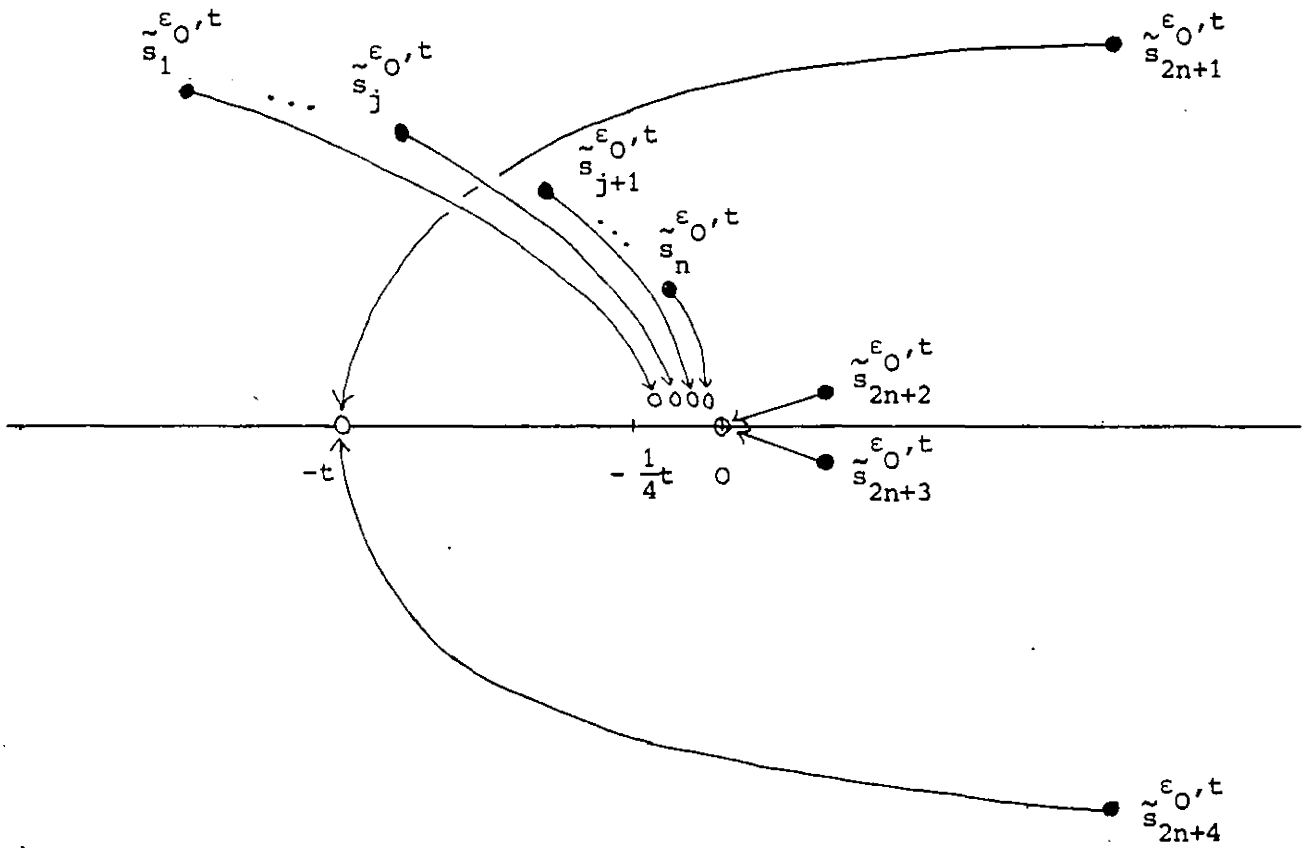


Abbildung 3.2.1

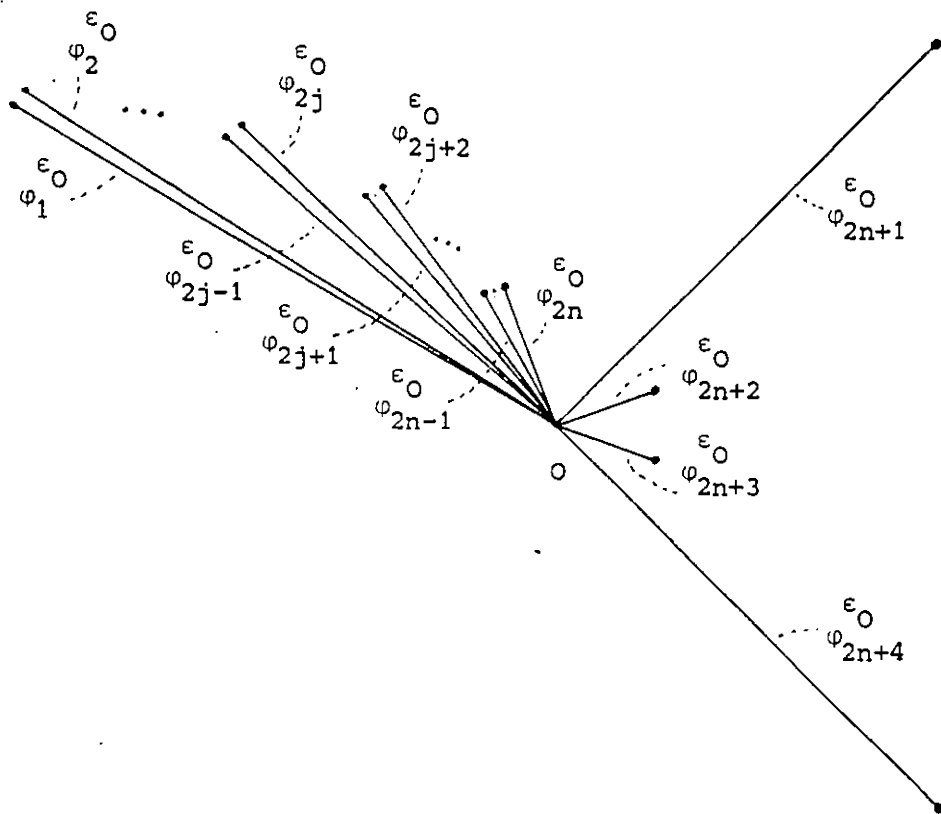


Abbildung 3.2.2

benachbarter kritischer Wert $s_i^{\epsilon, t}$. Wir wählen nun ein stark ausgezeichnetes System von Wegen $(\varphi_1^{\epsilon_0}, \dots, \varphi_{2n+4}^{\epsilon_0})$ von den kritischen Werten $s_i^{\epsilon_0, t}$ für $i = 1, \dots, 2n+4$ zum Basispunkt $s^{\epsilon_0} = 0$ wie in Abbildung 3.2.3 angedeutet ist. Dieses Wegesystem genügt der Bedingung (V) von Kap. 2.2.

Wir wählen nun eine Homotopie $(\varphi_1^\epsilon, \dots, \varphi_{2n+4}^\epsilon)$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, des Wegesystems, so daß die folgenden Bedingungen für $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ erfüllt sind:

(i) Die Wege φ_i^ϵ verbinden die kritischen Werte $s_i^{\epsilon, t}$ mit dem Basispunkt s^ϵ .

(ii) Die Wege φ_i^ϵ sind doppeltpunktfrei.

(iii) Je zwei Wege φ_i^ϵ und φ_j^ϵ für $i \neq j$ haben nur s^ϵ als gemeinsamen Punkt.

Außerdem verlangen wir, daß bei der Homotopie der Basispunkt $s^{\epsilon_0} = 0$ in den Punkt $s^0 = (\eta, 0)$ übergeht.

Dann sieht das Wegesystem $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{2n+4}^0)$ wie in Abbildung 3.2.3 angedeutet aus.

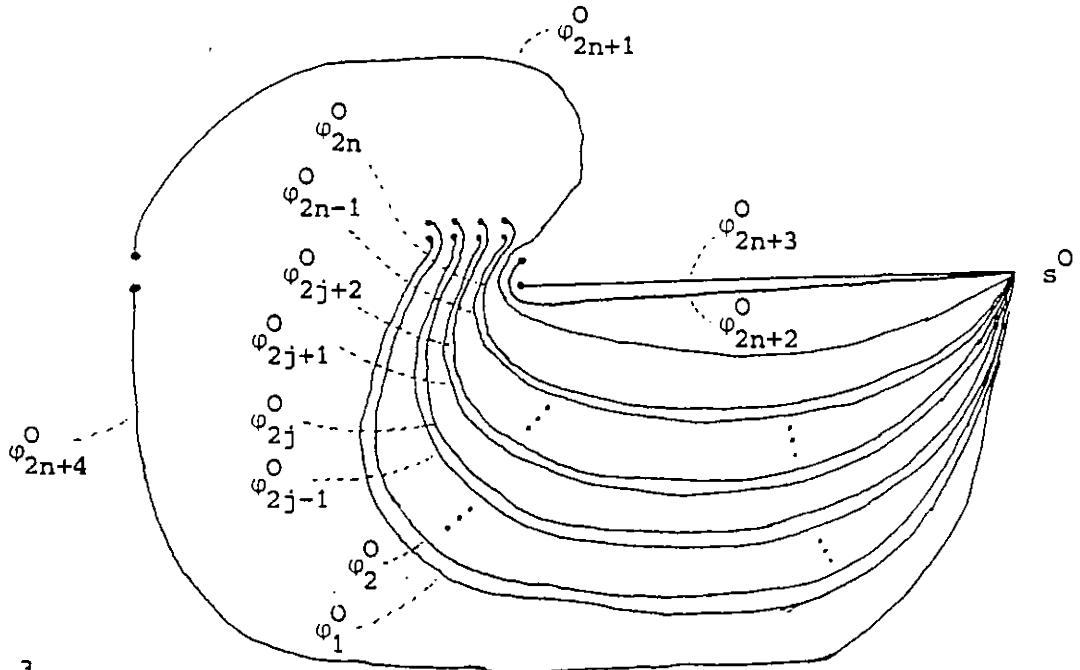


Abbildung 3.2.3

Dieses Wegesystem steht nun mit dem Wegesystem von Kap. 2.3 wie folgt in Verbindung. Die Funktion $g_{0,t}$ hat genau $n+2$ verschiedene kritische Werte, über denen

jeweils zwei gewöhnliche Doppelpunkte liegen. Wir wählen ein stark ausgezeichnetes System $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n+2})$ von Wegen von diesen kritischen Werten nach s^0 . Es sei $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+4})$ ein stark ausgezeichnetes System von benachbarten Wegen von den kritischen Werten der benachbarten Morsefunktion $\bar{g}_{0,t}$ nach s^0 . Eine zugehörige stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ hat dann nach Bemerkung 2.3.14 die Schnittmatrix von Korollar 2.3.13. Wir ändern nun zunächst die Numerierung der Wege durch zyklische Permutation

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+3}, \varphi_{2n+4}) \rightarrow (\varphi_{2n+4}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+3}) .$$

Anschließend wenden wir die Transformationen

$$\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{2n+1}$$

an. Das resultierende Wegesystem ist dann gerade homotop zu dem Wegesystem $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{2n+4}^0)$. Eine zu diesem Wegesystem gehörige stark ausgezeichnete Basis (e_1, \dots, e_{2n+4}) von verschwindenden Zellen erhält man also aus $(\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4})$ durch entsprechende Änderung der Numerierung und Anwendung der obigen Transformationen. Die zugehörige Schnittmatrix sieht demnach wie folgt aus. Im Fall n gerade gilt:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i + 1, j \text{ gerade, } 1 \leq i, j \leq 2n, \\ & (i, j) = (2n+1, 2n+4), (2n+2, 2n+3) \\ (-1)^{n/2} & \text{für } i < j \text{ sonst} \end{cases}$$

Im Fall n ungerade gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j = i + 1, j \text{ gerade, } 1 \leq i, j \leq 2n, (i, j) = (2n+2, 2n+3) \\ (-1)^{(n+1)/2} (-1)^{i+j} & \text{für } 1 \leq i < j \leq 2n \text{ sonst} \\ (-1)^{(n+1)/2} (-1)^{i+j+1} & \text{für } 1 \leq i \leq 2n, 2n+1 \leq j \leq 2n+4 \end{cases}$$

$$\langle e_{2n+1}, e_j \rangle = (-1)^{(n+1)/2} (-1)^{j+1} \quad j = 2n+2, 2n+3$$

$$\langle e_i, e_{2n+4} \rangle = (-1)^{(n+1)/2} (-1)^i \quad i = 2n+2, 2n+3$$

$$\langle e_{2n+1}, e_{2n+4} \rangle = (-1)^{(n+1)/2} (-2)$$

Durch Anwendung von Theorem 2.2.3 erhält man eine stark ausgezeichnete Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq 2n+4, 1 \leq r \leq M_j)$ von verschwindenden Zellen für die Singularität $T_{2,q,2,s}^n$ mit $M_j = 1$ für $j \neq 2n+2, 2n+3$ und $M_{2n+2} = q - 1, M_{2n+3} = s - 1$ und der folgenden Schnittmatrix

$$\langle e_j^1, e_{j'}^1 \rangle = \langle e_j, e_{j'} \rangle \quad \text{für } 1 \leq j, j' \leq 2n+4,$$

und für $j' = 2n+2, 2n+3$:

$$\langle e_j^1, e_{j'}^2 \rangle = \begin{cases} -(-1)^{n(n-1)/2} & \text{für } j = j', \\ -\langle e_{2n+4}^1, e_{j'}^1 \rangle & \text{für } j = 2n+4, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\langle e_j^r, e_{j'}^{r+1} \rangle = \begin{cases} -(-1)^{n(n-1)/2} & \text{für } j = j', 1 \leq r < M_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun transformieren wir die Basis (e_j^r) mit den zu den obigen Transformationen inversen Transformationen

$$\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}, \dots, \alpha_1.$$

Diese Transformationen haben keine Auswirkung auf den Teilgraphen des Dynkindiagramms zu $\{(e_j^r \mid (r, j) > (1, 2n+1))\}$. Die neue Basis bezeichnen wir mit (\tilde{e}_j^r) . Dann stimmt die Schnittmatrix von $(\tilde{e}_1^1, \dots, \tilde{e}_{2n+4}^1)$ mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4}^1)$ von Kap. 2.3 überein. Nun führen wir die dort angegebenen Transformationen (B), (C) und (D) (abhängig von n) durch. Die neu erhaltene stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen bezeichnen wir mit $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{2n+q+s})$. Dann stimmt die Schnittmatrix von $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{2n+4})$ mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1'', \dots, \hat{\delta}_{2n+4}'')$ von Kap. 2.3 überein. Nun wenden wir noch die folgenden Transformationen an, mit denen lediglich die Numerierung geändert wird:

$$\beta_{2n+5}; \beta_{2n+7}, \beta_{2n+6}; \beta_{2n+9}, \beta_{2n+8}, \beta_{2n+7}; \dots; \beta_{2n+2q-1}, \beta_{2n+2q-2}, \dots, \beta_{2n+q+2}.$$

Im Fall ungerader Dimension n nehmen wir noch die folgenden Orientierungswechsel vor (vgl. die Bemerkung zur Abbildung 2.3.7). Zunächst für

$$n = 1 : \quad x_2, x_3, x_4, x_5,$$

$$n \geq 3 : \quad x_2, x_4; x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{2n}; x_{2n+1}, x_{2n+4},$$

dann in beiden Fällen

$$x_{2n+2j+3}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor; \quad x_{2n+q+2j+1}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor.$$

Dadurch erhalten wir schließlich eine stark ausgezeichnete Basis $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n+q+s})$ von verschwindenden Zellen mit dem Dynkindiagramm von Abbildung 3.2.4.

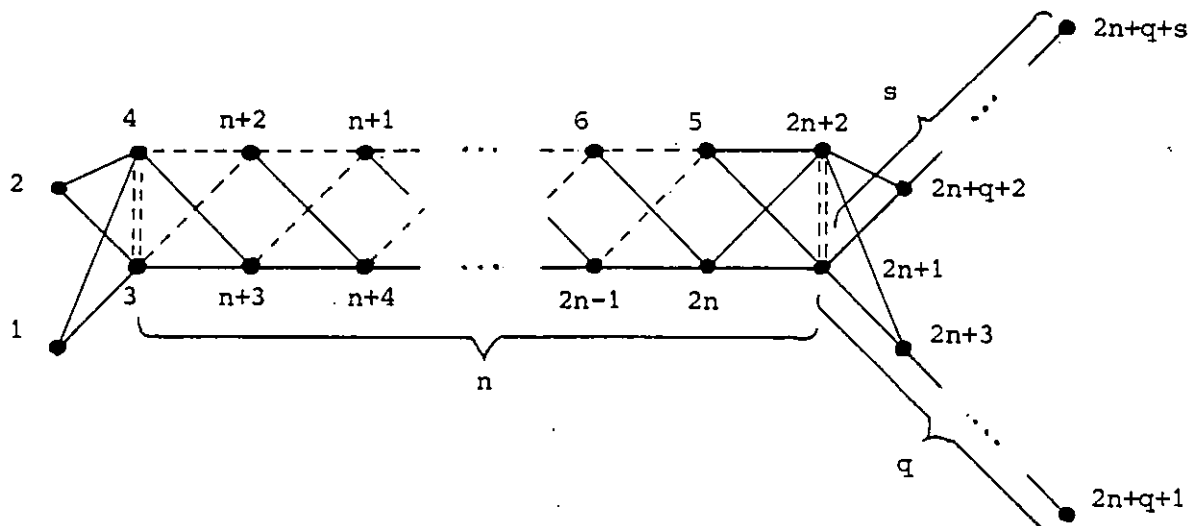


Abbildung 3.2.4

Es sei $\Pi_{p,q,r,s}^n$ der Graph von Abbildung 3.2.5 mit $m = 2n + p + q + r + s - 4$. Dann ist der Graph von Abbildung 3.2.4 stark äquivalent zu dem Graphen $\Pi_{2,q,2,s}^n$. Er unterscheidet sich nämlich nur in der Numerierung der Ecken von diesem Graphen. Diese Numerierung kann aber durch Zopftransformationen und Orientierungswechsel entsprechend geändert werden. So kann etwa die Reihenfolge der Ecken bei dem

Teilgraphen zu $\{\lambda_{2n+1}, \dots, \lambda_{2n+q+1}\}$ durch die folgenden Transformationen genau umgekehrt werden:

$$\beta_{2n+3}, \beta_{2n+2}; \beta_{2n+4}, \beta_{2n+3}; \dots; \beta_{2n+q+1}, \beta_{2n+q};$$

$$\chi_{2n+1}, \chi_{2n+2}, \dots, \chi_{2n+q+1}.$$

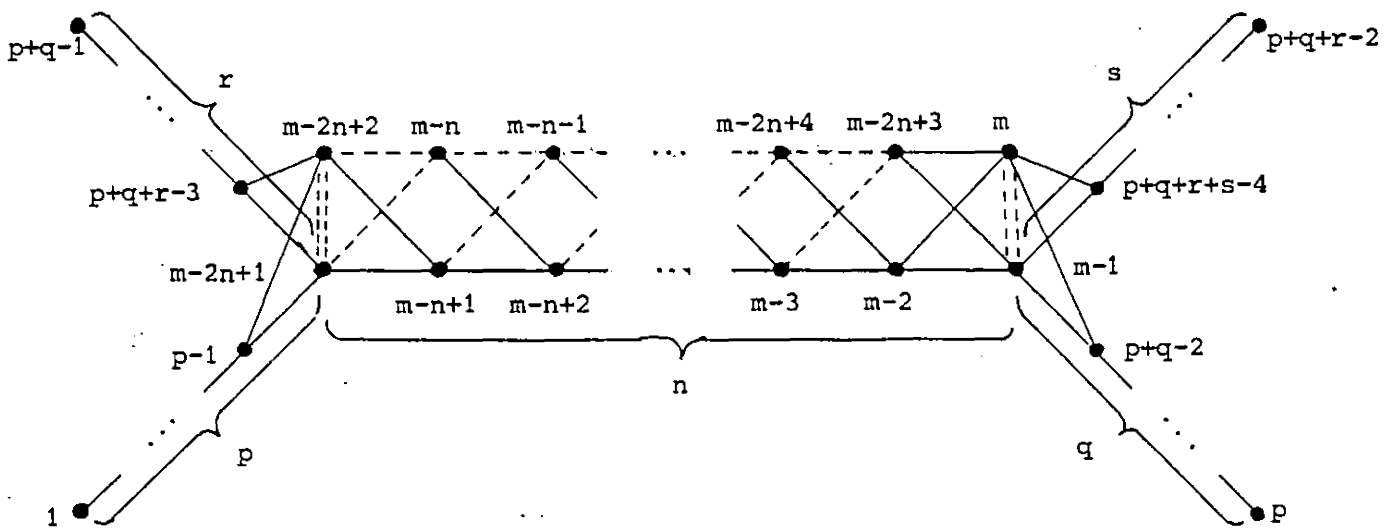


Abbildung 3.2.5: Der Graph $\mathbb{H}_{p,q,r,s}^n$

(B) Segresymbol $\{1, \dots, 1, 2\}$

Zur Berechnung benutzen wir in diesem Fall die Abbildung $f = (f_1, f_2)$

$$f_1(z) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + 2z_{n+1}z_{n+2},$$

$$f_2(z) = a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \dots + a_nz_n^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^s.$$

Hierbei sei $3 \leq s$ und es gelte wie im Fall (A)

$$a_i \in \mathbb{C}, \quad -\frac{1}{4} < \operatorname{Re} a_i < \operatorname{Re} a_j < 0 \quad \text{für } i < j,$$

$$0 < \operatorname{Im} a_i = \operatorname{Im} a_j \ll 1 \quad \text{für } i \leq i, j \leq n,$$

wobei wir die Bedingung an $\operatorname{Im} a_i$ wieder später festlegen. Als lineare Funktion ζ wählen wir wieder die letzte Koordinatenfunktion z_{n+2} . Dann berechnet man leicht:

$$\Sigma_{z_{n+2}} (f_2) = \bigcup_{i=1}^{2n+2} \Sigma_i,$$

wobei

$$\Sigma_{2j-\chi} = \{z_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq n, \quad z_j = (-1)^\chi \sqrt{-2a_j} z_{n+2}, \quad z_{n+1} = a_j z_{n+2}\},$$

$$\Sigma_{2n+1+\chi} = \{z_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad z_{n+2-\chi} = 0\},$$

für $1 \leq j \leq n$ und $\chi \in \{0, 1\}$. Man berechnet

$$\rho_i = 2 \quad \text{für } i = 1, \dots, 2n, \quad \rho_{2n+1} = 2, \quad \rho_{2n+2} = s.$$

Wieder definiert $g = (f_1, f_2 + \zeta^2)$ eine Singularität vom Typ \tilde{D}_{n+3} . Analog zum Fall

(A) studieren wir die kritischen Punkte und Werte der Funktion $g_{\epsilon, t}: X_t^1 \rightarrow \mathbb{C}$, die für $\epsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ gegen 0 gehen. Die kritischen Punkte, die für $t = 0$ auf den Zweigen $\Sigma_{2j-\chi}$ für $j = 1, \dots, n$, $\chi \in \{0, 1\}$ liegen, haben näherungsweise für $\chi = 0, 1$ jeweils die folgenden kritischen Werte

$$\tilde{s}_j^{\epsilon, t} = a_j t - \frac{a_j^2}{1 - a_j^2} \epsilon^2 + o(\epsilon^s).$$

Die übrigen vier kritischen Punkte ergeben sich als Lösungen der folgenden Gleichungen, die für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 streben:

$$z_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

$$2z_{n+1} z_{n+2} = t,$$

$$4z_{n+2}^4 - 4\epsilon z_{n+2}^3 - t^2 - 2s z_{n+2}^{s+2} = 0.$$

Die zugehörigen kritischen Werte sind die Bilder dieser Lösungen unter der Abbildung

$$z_{n+2} \mapsto 2(z_{n+2} - \frac{3}{4}\epsilon)^2 - \frac{1}{8}\epsilon^2 + o(\epsilon^2) .$$

Das Verhalten dieser kritischen Werte läßt sich schematisch wie in Abbildung 3.2.6 angegeben darstellen.

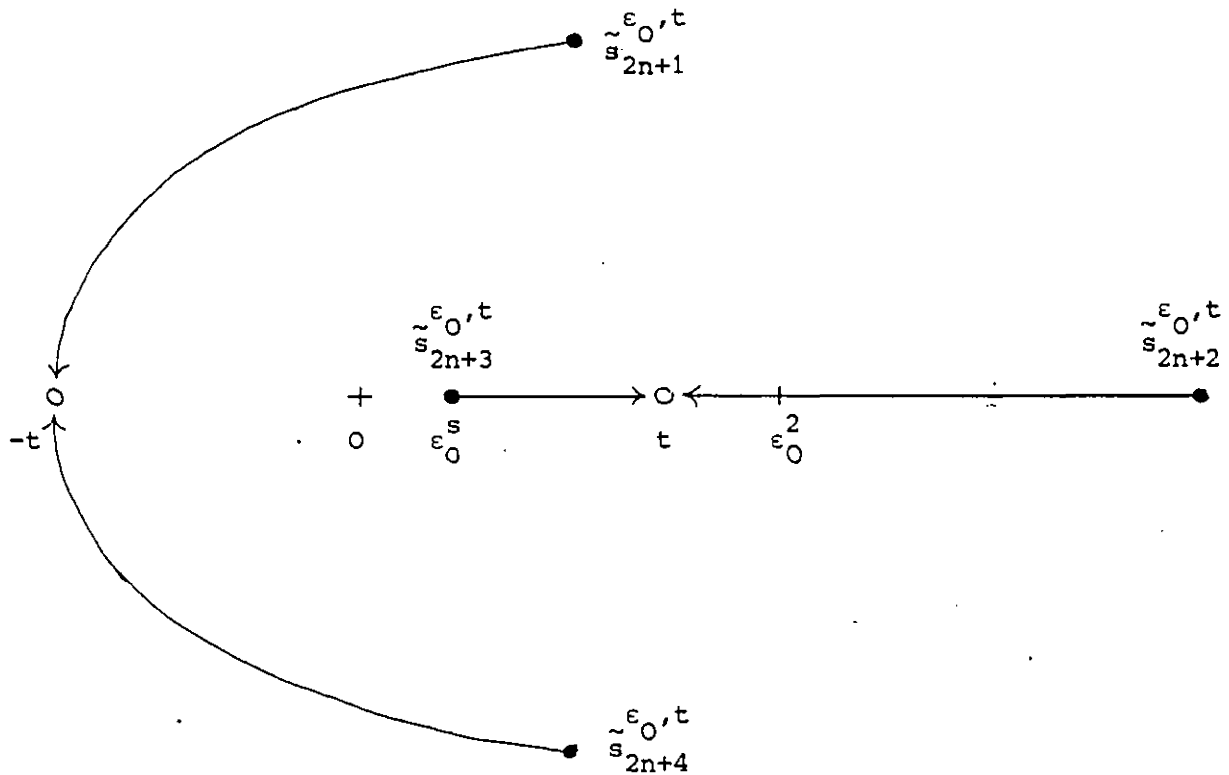


Abbildung 3.2.6

Wenn wir die gleiche Bedingung wie unter (A) an $\text{Im } a_i$ stellen, so ist Abbildung 3.2.6 wie in Abbildung 3.2.1 zu ergänzen. Die weitere Rechnung verläuft dann genau wie in (A) und wir erhalten schließlich eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen mit dem Dynkindiagramm $\Pi_{2,2,2,s}^n$ von Abbildung 3.2.5 ($m = 2n + 2 + s$).

Man vergleiche diese Ergebnisse mit denen von Kap. 2.5. Für die Singularität T_{2233}^n haben wir dort das Dynkindiagramm von Abbildung 2.5.4 erhalten. Dieser Graph ist stark äquivalent zu dem Graphen Π_{2233}^n .

3.3 Die $J^{(n-1)}$ - und $K^{(n-1)}$ -Serie

Wir berechnen nun Dynkindiagramme der Singularitäten der beiden Serien von Singularitäten beliebiger Dimension, die in Abschnitt 3.1 eingeführt wurden.

Jede dieser Singularitäten wird durch eine Abbildung der Form

$$f = (w_1^2, a_1 w_1^2) \oplus \dots \oplus (w_{n-1}^2, a_{n-1} w_{n-1}^2) \oplus \tilde{f}$$

gegeben, wobei die $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, n-1$ alle paarweise verschieden und verschieden von den Eigenwerten des 2-Jets von \tilde{f} sind. Nach [Wall₂, Proposition 3.1] folgt daher

Lemma 3.3.1: $\mu(f) = \mu(\tilde{f}) + 2(n-1)$.

Durch $\tilde{f}(x, y, z) = 0$ wird eine Raumkurve mit isolierter Singularität in 0 definiert. Zur Anwendung der Methode von Kap. 2.2 wählen wir als lineare Funktion ζ die Koordinatenfunktion z . Dann gilt für die Polarkurve $\Sigma_z(f_2)$:

$$\Sigma_z(f_2) = \left(\bigcup_{i=1}^{2n-2} \Sigma_i \right) \cup \Sigma_z(\tilde{f}_2|_{X' \cap W}) ,$$

wobei $X' = f_1^{-1}(0)$ und $W = \{(w; x, y, z) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid w_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n-1\}$ ist. Die Kurven Σ_i für $i = 1, \dots, 2n-2$ sind irreduzibel und für die entsprechenden Invarianten ρ_i und ν_i gilt: $\rho_i = 2$, $\nu_i = 1$. (Mit Hilfe von Satz 2.1.4 und Satz 2.1.5 erhält man damit einen anderen Beweis von Lemma 3.3.1 in den betrachteten Fällen.)

Wie bei [Wall₄] eliminieren wir nun die Variable x aus den Gleichungen $\tilde{f}_1 = 0$ und $\tilde{f}_2 = 0$. Dadurch erhält man eine Funktion $L_x \tilde{f}$ in den Variablen y, z , die zu einer der Serien in Arnolds Klassifikation [Arnold₂] gehört. Dieser Elimination entspricht geometrisch die folgende Operation: Die durch $\tilde{f} = 0$ gegebene Raumkurve besteht aus der x -Achse und einer Raumkurve \tilde{X} im Fall J bzw. nur aus einer Raumkurve \tilde{X} im Fall K. Dann ist $(L_x \tilde{f})(y, z) = 0$ gerade die Gleichung der Projektion von

\tilde{X} in die (y, z) -Ebene. Die Polarkurve $\Sigma_z(\tilde{f}_2|_{X' \cap W})$ ist dann die Vereinigung der x -Achse mit einer Kurve $\tilde{\Sigma}$, deren Projektion in die (y, z) -Ebene gerade die Polarkurve $\Sigma_z(L_x \tilde{f})$ von $L_x \tilde{f}$ ist. Es sei

$$\Sigma_z(L_x \tilde{f}) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Sigma_i^L$$

die Zerlegung von $\Sigma_z(L_x \tilde{f})$ in irreduzible Komponenten Σ_i^L , und ρ_i^L seien die zugehörigen Invarianten von Kap. 2.1. Es sei Σ_{2n-2+i} , $i = 1, \dots, \ell$, diejenige Komponente von $\tilde{\Sigma}$, die auf Σ_i^L projiziert wird, und ρ_{2n-2+i} sowie ν_{2n-2+i} die zugehörigen Invarianten. Wir werden bei beiden Serien Beziehungen zwischen ρ_i^L und ρ_{2n-2+i} erhalten. Mit Hilfe von Satz 2.1.4 und Satz 2.1.5 erhält man dann auch eine Formel, die die Milnorzahl $\mu(f)$ mit der Milnorzahl $\mu(L_x \tilde{f})$ in Beziehung setzt. Schließlich wird auch zwischen den Dynkindiagrammen von f und $L_x \tilde{f}$ eine Beziehung bestehen.

Zur Berechnung der Dynkindiagramme betrachten wir wieder die Abbildung $g = (f_1, f_2 + z^2)$. Sie definiert eine Singularität vom Typ \tilde{D}_{n+3} . Wir studieren wieder das Verhalten der kritischen Werte von $g_{\epsilon, t} = f_2 + (z - \epsilon)^2|_{X'_t}$ für $\epsilon \rightarrow 0$. Da wir nur an kritischen Punkten interessiert sind, die für $\epsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ gegen 0 streben, können wir die Koordinaten der kritischen Punkte als Potenzreihen in ϵ und t ansetzen und die Anfangsterme bestimmen, die dann das asymptotische Verhalten der kritischen Punkte beschreiben.

Wir gehen nun auf die Ergebnisse der Rechnungen im einzelnen ein.

(A) Die $J^{(n-1)}$ -Serie (Segresymbol $\{1, \dots, 1, 3\}$)

In diesem Fall setzen wir voraus, daß für die a_i gilt: $a_i \in \mathbb{R}$, $0 < a_i < a_j$ für $i < j$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

Die Kurven Σ_{2j-1} und Σ_{2j} für $j = 1, \dots, n-1$ sind die Zweige derjenigen Kurve, die durch die folgenden Gleichungen gegeben wird:

$$x = -a_j^2 z - \frac{1}{2} (\partial Q / \partial y)(y, z) ,$$

$$y = a_j z ,$$

$$w_j^2 = 3a_j^2 z^2 + z(\partial Q / \partial y)(y, z) , \quad w_i = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \neq j \leq n-1 .$$

Nach Elimination von x aus den Gleichungen $\tilde{f}_1(x, y, z) = 2xz - y^2 = 0$ und $\tilde{f}_2(x, y, z) = 2xy + Q(y, z) = 0$ ergibt sich die Funktion

$$(L_x \tilde{f})(y, z) = 2y^3 + 2zQ(y, z) .$$

Dies ist eine Pränormalform für Funktionen mit 3-Jet y^3 . Diese bilden nach Arnold [Arnold₂] die E/J-Serie. Wir folgen C.T.C. Wall, indem wir $E_{p,r}$ für Arnolds $J_{p,r}$ schreiben. Damit bilden die Funktionskeime mit 3-Jet y^3 einfach die E-Serie. Die Zuordnung L_x liefert eine Bijektion zwischen den μ -konstant-Strata von \tilde{f} und denen der E-Serie.

Die Polarkurve $\Sigma_z(\tilde{f}_2|_{X \cap W})$ wird durch die Gleichungen

$$2xz + 2y^2 + z(\partial Q / \partial y)(y, z) = 0 ,$$

$$2xz - y^2 = 0$$

in W gegeben. Für die Polarkurve von $L_x \tilde{f}$ gilt

$$\Sigma_z(L_x \tilde{f}) = \{(y, z) \mid 3y^2 + z(\partial Q / \partial y)(y, z) = 0\} .$$

Die Anzahl ℓ der irreduziblen Komponenten dieser Kurve ist gleich 1 oder 2, abhängig von Q . Es gilt

$$\rho_{2n-2+i} = \rho_i^L - 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, \ell ;$$

$$\mu(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 - \epsilon z) = 3 ,$$

$$v_1 = 2 \quad \text{für } \ell = 1 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2 = 1 \quad \text{für } \ell = 2 .$$

Damit erhält man aus Satz 2.1.4 und Satz 2.1.5 zusammen mit Lemma 3.3.1 (vgl. auch [Wall₃, Lemma 5.1]):

Lemma 3.3.2: $\mu(f) = 2(n-1) + \mu(L_x \tilde{f}) + 1$.

Auf Σ_{2j-1} und Σ_{2j} für $j = 1, \dots, n-1$ liegt jeweils ein von Null verschiedener kritischer Punkt von $g_{\epsilon, 0}$. Die zugehörigen kritischen Punkte von $g_{\epsilon, t}$ haben asymptotisch für $\epsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ den kritischen Wert

$$a_j t + \frac{a_j^3}{a_j^3 + 1} \epsilon^2 .$$

Für die kritischen Punkte von $g_{\epsilon, t}$, die für $t = 0$ auf $\Sigma_z(\tilde{f}_2|_{X \cap W})$ liegen, gilt: Nach Elimination von x aus den Gleichungen für die kritische Menge von $g_{\epsilon, t}$ erhält man die folgenden Gleichungen für die Anfangsterme der Koordinaten dieser Punkte, angesetzt als Potenzreihen in ϵ und t :

$$\begin{aligned} y^2 &= -\frac{1}{3} t , \\ (z^2(z-\epsilon) + \sqrt{-1}(\sqrt{t/3})^3)(z^2(z-\epsilon) - \sqrt{-1}(\sqrt{t/3})^3) &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Die Anfangsterme der kritischen Werte sind die Bilder der Lösungen dieser Gleichungen unter der Abbildung

$$z \mapsto 3(z - \frac{2}{3} \epsilon)^2 - \frac{1}{3} \epsilon^2 ,$$

außer für $z = \epsilon$. In diesem Fall werden die Asymptoten der kritischen Werte durch Satz 2.2.1 gegeben und sind von Q abhängig. Nach den Bedingungen an die Ordnung der Terme von Q sind sie von der Ordnung $o(\epsilon^2)$. Also gilt die obige Näherung bis auf Ordnung $o(\epsilon^2)$ auch für $z = \epsilon$.

Man berechnet nun, daß das Verhalten der kritischen Werte von $g_{\epsilon, t}$ für $t \neq 0$, $\epsilon = \epsilon_0 \rightarrow \epsilon = 0$, wie in Abbildung 3.3.1 schematisch dargestellt werden kann. Dieser Abbildung liegt eine Computerzeichnung zugrunde, die mit Hilfe eines einfachen BASIC-Programms auf einem Homecomputer (Schneider CPC 6128) angefertigt wurde. Dieses Programm beruht auf der Tatsache, daß es für festes t und festes Argument

von z höchstens zwei Lösungen (z, ε) der Gleichung (*) mit $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ geben kann, und diese können explizit angegeben werden.

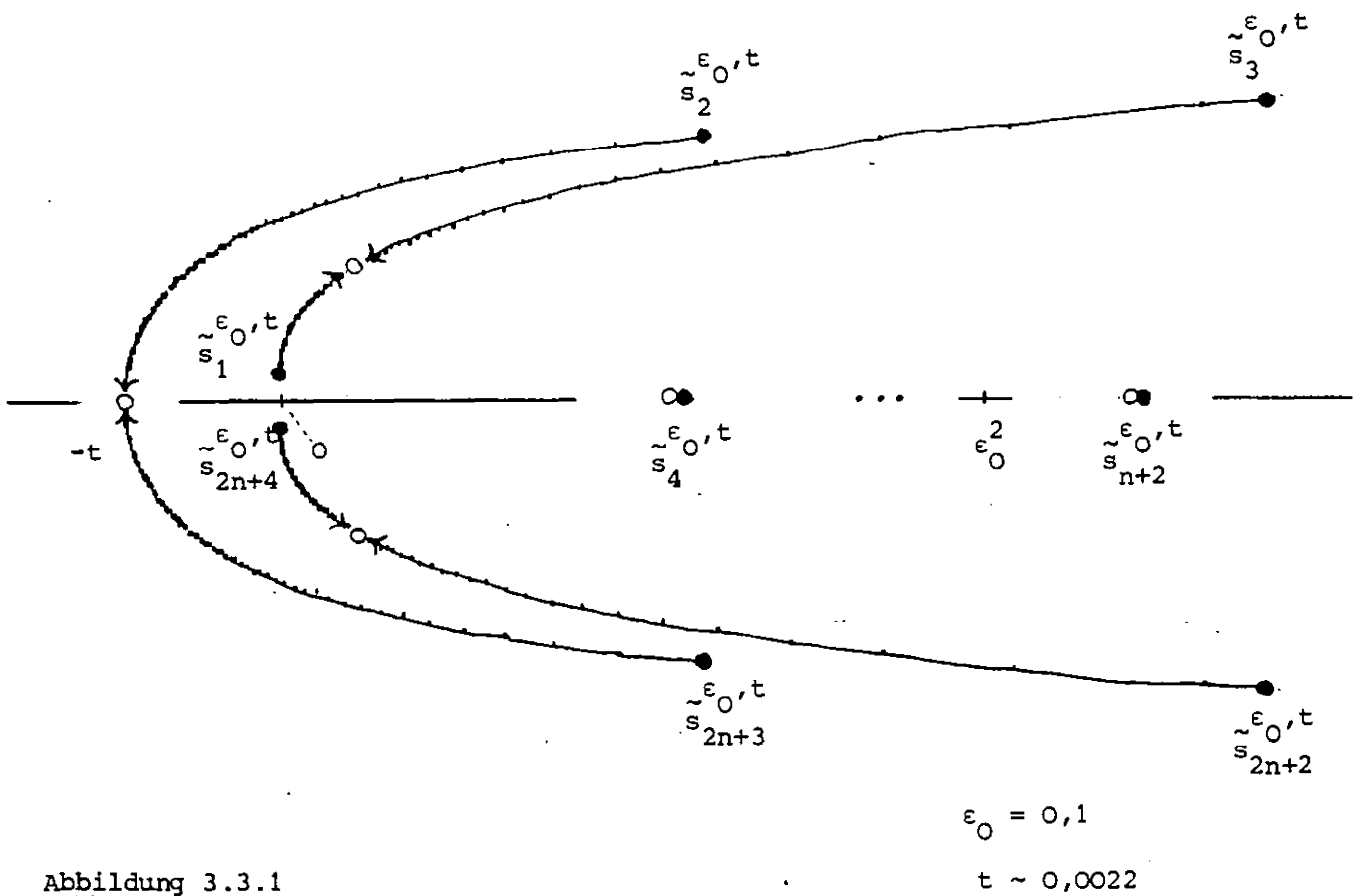


Abbildung 3.3.1

Wie in Abschnitt 3.2 ersetzen wir nun die Familie von Funktionen $g_{\varepsilon, t}$ für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ durch eine stetige Familie von benachbarten Morsefunktionen $\bar{g}_{\varepsilon, t}$ mit lauter verschiedenen kritischen Werten. Dabei spalten die kritischen Werte $\bar{s}_j^{\varepsilon, t}$ für $j = 4, \dots, n+2$ in jeweils zwei kritische Werte $s_{2j-4}^{\varepsilon, t}$ und $s_{2j-3}^{\varepsilon, t}$ auf. Wir wählen nun ein stark ausgezeichnetes Wegesystem $(\varphi_1^{\varepsilon_0}, \dots, \varphi_{2n+4}^{\varepsilon_0})$ von den kritischen Werten von $g_{\varepsilon_0, t}$ in der angegebenen Reihenfolge zum Basispunkt $s^{\varepsilon_0} = 0$. Dabei wählen wir die Wege $\varphi_i^{\varepsilon_0}$, $i = 1, 2, 3, 2n+2, 2n+3, 2n+4$, einfach als Geradenstücke. Die anderen Wege sollen glatt und die Realteile der Tangentenvektoren in jedem Punkt negativ sein. Dann ist die Bedingung (V) erfüllt. Analog zum Abschnitt 3.2 wählen wir eine Homotopie $(\varphi_1^{\varepsilon}, \dots, \varphi_{2n+4}^{\varepsilon})$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ des Wegesystems mit den dort angegebenen Eigenschaften. Dann sieht das Wegesystem $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{2n+4}^0)$ wie in Abbildung

3.3.2 angegeben aus.

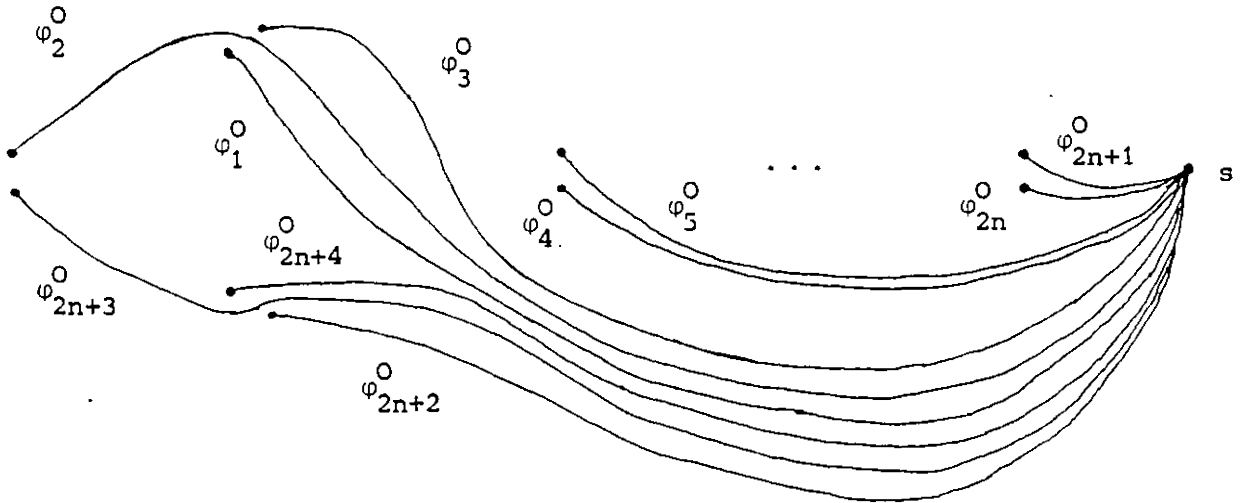


Abbildung 3.3.2

Ein solches Wegesystem erhält man aus einem stark ausgezeichneten System $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+4})$ von Wegen für $\bar{g}_{O,t}$ gemäß Kap. 2.3 wie folgt: Wie in Abschnitt 3.2 ändern wir zunächst die Numerierung durch zyklische Permutation

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+3}, \varphi_{2n+4}) \mapsto (\varphi_{2n+4}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n+3})$$

Das neue Wegesystem definiert dann nach Bemerkung 2.3.14 eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen, deren Schnittmatrix nach geeigneter Wahl der Orientierung der Zellen mit der Schnittmatrix der Basis $(\hat{\delta}'_1, \dots, \hat{\delta}'_{2n+4})$ von Kap. 2.3 übereinstimmt. Das obige Wegesystem $(\varphi_1^0, \dots, \varphi_{2n+4}^0)$ erhält man dann (bis auf Homotopie) aus einem solchen Wegesystem durch die Transformationen

$$\beta_2, \alpha_{2n+3}.$$

Es sei $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2n+4})$ diejenige stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen für g , die aus der obigen Basis durch Anwendung der Transformation β_2 und α_{2n+3} hervorgeht. Nach Theorem 2.2.3 bestimmt diese Basis eine stark ausgezeichnete

te Basis (\tilde{e}_j^F) von verschwindenden Zellen für f . Auf diese Basis wenden wir die Transformationen α_1 und β_{2n+4} an, die invers zu den obigen Transformationen sind.

Dann erhält man schließlich eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen $(e_j^F \mid 1 \leq j \leq 2n+4, 1 \leq r \leq M_j)$ für f mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Schnittmatrix von $(e_1^1, \dots, e_{2n+4}^1)$ stimmt mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4}^1)$ überein.

(ii) Die vollständige Schnittmatrix errechnet sich aus den Formeln von Theorem 2.2.3.

Für die Zahlen M_j gilt dabei

$$M_j = 1 \text{ für } j \neq 2, 2n+3, \quad M_2 = M_1^L - 1, \quad M_{2n+3} = M_2^L - 1,$$

wobei M_1^L, M_2^L die entsprechenden Zahlen aus der Tabelle 1 von [Gabrielov₃] für die Singularität $L_x \tilde{f}$ sind. Man erhält damit im einzelnen die folgende Tabelle, wobei wir jeweils die Gleichung von \tilde{f} angeben, die zur Berechnung benutzt wird.

Tabelle 3.3.1

Notation	Abbildung \tilde{f}	M_2, M_{2n+3}
$J_{6k+2n+5}^{(n-1)}$	$(2xz-y^2, 2xy+z^{3k+3})$	$3k+2, 3k+2$
$J_{6k+2n+6}^{(n-1)}$	$(2xz-y^2, 2xy+yz^{2k+2})$	$3k+3, 3k+2$
$J_{6k+2n+7}^{(n-1)}$	$(2xz-y^2, 2xy+z^{3k+4})$	$3k+3, 3k+3$
$J_{k+1,i}^{(n-1)}$	$(2xz-y^2, 2xy+y^2 z^k + z^{3k+2+i})$	$3k+i+1, 3k+1$

(B) Die $K^{(n-1)}$ -Serie (Segresymbol $\{1, \dots, 1, (1, 2)\}$)

In diesem Fall setzen wir voraus, daß für die a_i die entsprechenden Voraussetzungen wie in Abschnitt 3.2 gelten.

Die Kurven Σ_{2j-1} und Σ_{2j} für $j = 1, \dots, n-1$ sind die Zweige derjenigen Kurve, die durch die folgenden Gleichungen gegeben wird

$$\begin{aligned} x &= a_j z, \\ a_j y &= \frac{1}{2} (\partial Q / \partial y)(y, z), \\ w_j^2 &= -2a_j z^2 - y^2, \quad w_i = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \neq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Nach Elimination von x aus den Gleichungen $\tilde{f}_1(x, y, z) = 2xz + y^2 = 0$, $\tilde{f}_2(x, y, z) = x^2 + Q(y, z) = 0$ ergibt sich die Funktion

$$(L_x \tilde{f})(y, z) = y^4 + 4z^2 Q(y, z).$$

Dies ist eine Pränormalform für Funktionen mit 4-Jet y^4 . Die Funktion $L_x \tilde{f}$ gehört also nach [Arnold₂] zu einer der Serien Z, W, X, Y , und wir haben eine Bijektion zwischen den μ -konstant-Strata von \tilde{f} und denen dieser Serien.

Die Polarkurve $\Sigma_z(\tilde{f}_2|_{X' \cap W})$ wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2xy - z(\partial Q / \partial y)(y, z) &= 0, \\ y^2 + 2xz &= 0 \end{aligned}$$

in W gegeben und die Polarkurve von $L_x \tilde{f}$ durch

$$y^3 + z^2 (\partial Q / \partial y)(y, z) = 0.$$

Die Anzahl ℓ der irreduziblen Komponenten dieser Kurve ist gleich 1, 2 oder 3.

Durch Betrachtung der Puiseuxparametrisierungen dieser Komponenten kann man leicht zeigen:

$$\rho_{2n-2+i} = \rho_i^L - 2 \quad \text{für } i = 1, \dots, \ell.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{\ell} v_i = 3, \quad \mu(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 - \epsilon z) = 2.$$

Damit erhält man aus Satz 2.1.4 und Satz 2.1.5 zusammen mit Lemma 3.3.1 (vgl. auch [Wall₃, Lemma 5.2]):

Lemma 3.3.3: $\mu(f) = 2(n-1) + \mu(L_x \tilde{f}) - 4$

Auf Σ_{2j-1} und Σ_{2j} für $j = 1, \dots, n-1$ liegt jeweils ein von Null verschiedener kritischer Punkt von $g_{\varepsilon,0}$. Die zugehörigen kritischen Punkte von $g_{\varepsilon,t}$ haben asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ den kritischen Wert

$$a_j t - \frac{a_j^2}{1 - a_j^2} \varepsilon^2$$

Für die kritischen Punkte von $g_{\varepsilon,t}$, die für $t = 0$ auf $\Sigma_2(\tilde{f}_2|_{X \cap W})$ liegen, berechnet man das folgende. Vier dieser kritischen Punkte haben kritische Werte, die asymptotisch mit den Näherungswerten für die kritischen Werte $\tilde{s}_i^{\varepsilon,t}$ mit $i = 2n+1, \dots, 2n+4$ von Abschnitt 3.2 (B) (vgl. Abbildung 3.2.6) übereinstimmen. Zusätzlich hat man zwei weitere kritische Punkte, die näherungsweise durch $(x,y,z) = (\pm\sqrt{t}, 0, \varepsilon)$ gegeben werden, und deren zugehörige kritische Werte mindestens von der Ordnung $o(\varepsilon^2)$ sind, wobei die genaueren Werte von Q abhängen. Bis auf diese zwei zusätzlichen kritischen Werte und den fehlenden kritischen Wert $\tilde{s}_n^{\varepsilon,t}$ hat man also genau die Situation von Abschnitt 3.2 (B).

Eine analoge Rechnung wie in 3.2 (B) ergibt dann eine stark ausgezeichnete Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq 2n+4, 1 \leq r \leq M_j)$ von verschwindenden Zellen für f mit den gleichen Eigenschaften wie bei der entsprechenden Basis für die $J^{(n-1)}$ -Serie und mit

$$M_j = 1 \quad \text{für } j \neq 2, 2n+2, 2n+3,$$

$$M_2 = M_2^L - 2, \quad M_{2n+2} = M_3^L - 2, \quad M_{2n+3} = M_1^L - 2,$$

wobei M_1^L, M_2^L, M_3^L die entsprechenden Zahlen für die Singularität $L_x \tilde{f}$ sind. (Tatsächlich ergibt die Rechnung $M_2 = 1$ und $M_{2n+1} = M_2^L - 2$, aber durch die Transformation α_{2n} , gefolgt von Transformationen wie in Bemerkung 2.3.14 und eventuellen Orientierungswechseln, kann man die obige Basis erhalten, deren Numerierung

der Numerierung im Fall der $J^{(n-1)}$ -Serie entspricht.)

Insbesondere erhält man aus der Tabelle von [Gabrielov₃] die folgende Tabelle. Hierbei beschränken wir uns auf diejenigen Abbildungen f , für die $L_{\tilde{f}}$ zur W -Serie gehört. (Nach [Wall₃] sind nur unter diesen und zwar nur für $n = 1, 2$ \mathcal{K} -unimodale Abbildungskeime zu finden.) Wir folgen der Notation von [Wall₃].

Tabelle 3.3.2

Notation	Abbildung \tilde{f}	M_2, M_{2n+2}, M_{2n+3}
$K_{12k+2n-6}^{(n-1)}$	$(2xz+y^2, x^2+z^{4k-1})$	$4k-2, 4k-2, 4k-2$
$K_{12k+2n-5}^{(n-1)}$	$(2xz+y^2, x^2-yz^{3k-1})$	$4k-2, 4k-2, 4k-1$
$K_{k,i}^{(n-1)}$	$(2xz+y^2, x^2-y^2z^{2k-1}+z^{4k+i})$	$4k+i-1, 4k-1, 4k-1$
$K_{k,2q-1}^{(n-1), \#}$	$(2xz+y^2, x^2 - \frac{1}{2} y^2 z^{2k-1} + yz^{3k+q-1} + \frac{1}{4} z^{4k})$	$4k-1, 4k+q-1, 4k+q-2$
$K_{k,2q}^{(n-1), \#}$	$(2xz+y^2, x^2 - \frac{1}{2} y^2 z^{2k-1} + y^2 z^{2k+q-1} + \frac{1}{4} z^{4k})$	$4k-1, 4k+q-1, 4k+q-1$
$K_{12k+2n-1}^{(n-1)}$	$(2xz+y^2, x^2-yz^{3k})$	$4k, 4k, 4k-1$
$K_{12k+2n}^{(n-1)}$	$(2xz+y^2, x^2+z^{4k+1})$	$4k, 4k, 4k$

Wir betrachten nun diejenigen Singularitäten der Tabellen 3.3.1 und 3.3.2, die in der Hierarchie der entsprechenden Serien ganz unten stehen. Das bedeutet, daß alle anderen Singularitäten der beiden Serien in diese Singularitäten deformieren. Es sind dies die Singularitäten $J_{2n+5}^{(n-1)}$, $J_{2n+6}^{(n-1)}$, $J_{2n+7}^{(n-1)}$ ($k=0$), $K_{2n+6}^{(n-1)}$ und $K_{2n+7}^{(n-1)}$ ($k=1$). Die Dynkindiagramme dieser Singularitäten lassen sich auf eine "Normalform" transformieren, die eine Erweiterung des Graphen $\Pi_{2,q,2,s}^n$ darstellt.

Satz 3.3.4: Die Singularität $J_{2n+2+s}^{(n-1)}$ für $s = 3, 4, 5$ besitzt eine stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen mit dem Dynkindiagramm $\tilde{\Pi}_{2,2,2,s}^n$ und die Singularität $K_{2n+3+s}^{(n-1)}$ für $s = 3, 4$ eine solche Basis mit dem Dynkindiagramm $\tilde{\Pi}_{2,3,2,s}^n$.

Hierbei ist $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$ der Graph von Abbildung 3.3.3 mit $m = 2n+p+q+r+s-3$.

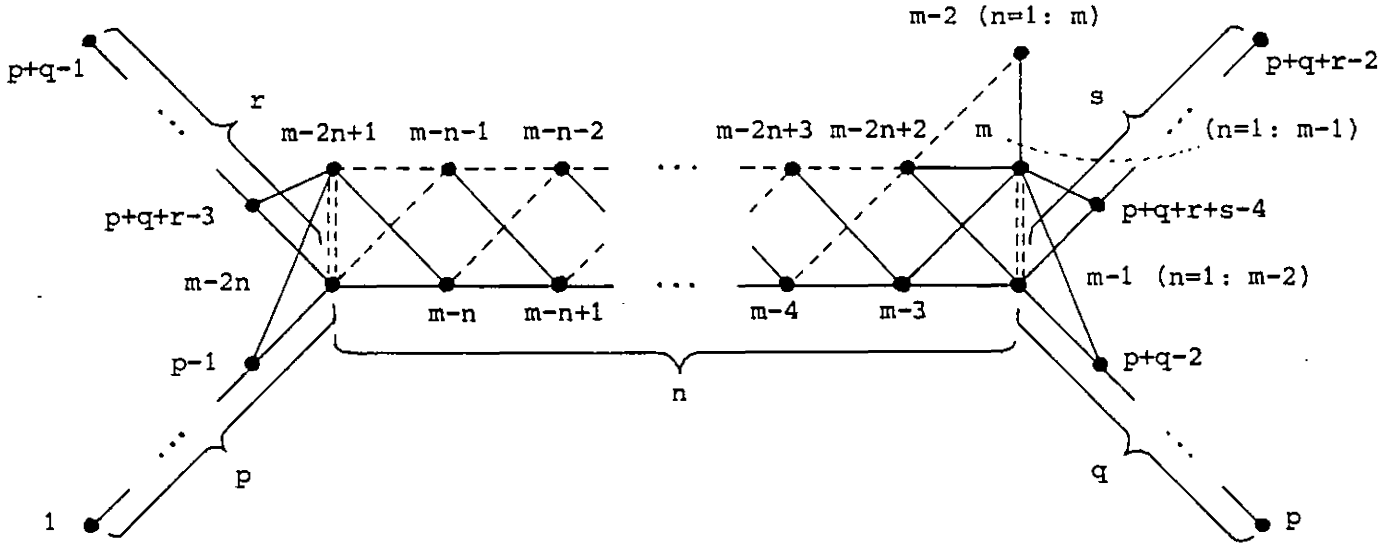


Abbildung 3.3.3: Der Graph $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$

Beweis: Wir betrachten nur die Fälle $J_{2n+5}^{(n-1)}$ und $K_{2n+6}^{(n-1)}$. Die anderen Fälle kann man dann ähnlich wie in [Ebeling₁] auf diese Fälle zurückführen. Für diese Singularitäten haben wir oben jeweils eine Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq 2n+4, 1 \leq r \leq M_j) = (e_1, \dots, e_m)$ erhalten, wobei die Schnittmatrix von $(e_1, \dots, e_{2n+4}) = (e_1^1, \dots, e_{2n+4}^1)$ mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_{2n+4}^1)$ aus Kap. 2.3 für die Singularität \tilde{D}_{n+3} übereinstimmt. Wir wenden auf diese Basis nun wieder die Transformationen (B), (C) und (D) aus Kap. 2.3 an, wobei allerdings der Block (B) von Transformationen etwas abgeändert wird. Die Transformationen von Block (B) ersetzen wir durch die folgenden Transformationen:

$$\begin{array}{l}
 \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}; \\
 \alpha_{2n-4}, \alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}; \\
 \vdots \\
 \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n}; \\
 \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; \\
 \alpha_{2n+4}^{(*)}, \alpha_{2n+3}^{(*)}, \alpha_{2n+2}^{(*)}; \alpha_{2n+4}, \alpha_{2n+3}.
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}; \\ \alpha_{2n-4}, \alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}; \\ \vdots \\ \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n}; \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; \\ \alpha_{2n+4}^{(*)}, \alpha_{2n+3}^{(*)}, \alpha_{2n+2}^{(*)}; \alpha_{2n+4}, \alpha_{2n+3}. \end{array}} \right\} \text{ nur für } n \geq 2$$

Bis auf die mit (*) bezeichneten Transformationen sind dies Transformationen des zugrundeliegenden Dynkindiagramms von \tilde{D}_{n+3} . Sie stimmen bis auf Transformationen, die nur die Numerierung ändern, mit den Transformationen (B) überein.

Die resultierenden Dynkindiagramme stimmen dann bis auf Numerierung und Orientierung der Basiselemente mit den angegebenen Graphen vom Typ $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$ überein und können leicht durch weitere Zopftransformationen und Orientierungswechsel in sie überführt werden. Damit ist Satz 2.3.4 bewiesen.

Bemerkung 3.3.5: Die Abbildung 3.3.3 ist so zu verstehen, daß für den Fall $n = 1$ die Ecken mit Nummer $m-2n$ und $m-2$ und die Ecken mit Nummer $m-2n+1$ und $m-1$ zu identifizieren sind. Insbesondere ist die Ecke m nur mit der Ecke $m-1$ verbunden. Im Fall $n \geq 2$ ist aber ein Graph von der Form von Abbildung 3.3.3, bei dem die Kante zwischen der Ecke $m-2$ und der Ecke $m-2n+2$ weggelassen ist, im allgemeinen kein Dynkindiagramm zu einer stark ausgezeichneten Basis von verschwindenden Zellen. Das folgt daraus, daß z.B. für $n = 2$ und $(p,q,r,s) = (2,2,2,3)$ das charakteristische Polynom des zugehörigen Coxeterelements kein Produkt von Kreisteilungspoly-nomen ist. Er ist aber wohl schwach äquivalent zu dem Graphen $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$. Denn durch die Transformationen

$$\alpha_m(m-2n+2), \alpha_{m-1}(m-2n+2)$$

kann eine Basis mit dem Dynkindiagramm $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$ in eine schwach ausgezeichnete Basis $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ transformiert werden, für die $\langle \lambda'_{m-2}, \lambda'_{m-2n+2} \rangle = 0$ gilt. Das

bedeutet aber, daß die Basis (e_1, \dots, e_m) mit

$$e_1 = \lambda'_{m-2}, \quad e_2 = \lambda'_m, \quad e_3 = \lambda'_{m-1}$$

und $\{e_1, \dots, e_m\} = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_m\}$ eine spezielle Basis im Sinne von Definition 5.4.1 ist. Für das zugehörige Gitter \hat{H} gilt

$$\hat{H} = Q_{pqrs}^n \perp U \perp \ker \hat{H}, \quad \dim(\ker \hat{H}) = n-1,$$

wobei das Gitter Q_{pqrs}^n in Kap. 4.1 definiert wird. Insbesondere zeigt ein Vergleich mit den Resultaten von Kap. 2.5, daß die Gitter \hat{H} für die Singularitäten T_{2233}^n und $J_{5+2n}^{(n-1)}$ übereinstimmen.

Wir werden nun im folgenden die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ genauer studieren.

3.4 Einfache Raumkurven

Wir betrachten nun speziell den Fall der Dimension $n = 1$, also den Fall von Raumkurvensingularitäten. Wir wollen die Dynkindiagramme der einfachen (O-modalen) Raumkurvensingularitäten studieren. Eine isolierte Singularität (X, x) eines vollständigen Durchschnitts heißt einfach (O-modal), wenn in der semiuniversellen Deformation von (X, x) nur endlich viele Isomorphieklassen von Singularitäten vorkommen. Die einfachen isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten wurden von M. Giusti klassifiziert [Giusti₁]. (Die Klassifikation ist implizit auch schon in [Mather₁] zu finden.) In Dimension $n \geq 1$ gibt es außer den einfachen Hyperflächensingularitäten nur einfache Raumkurvensingularitäten, genauer Singularitäten von Abbildungskeimen $f: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Es sind dies die folgenden Singularitäten:

$$\begin{aligned} S_5 &= \tilde{D}_4, \\ S_\mu &= T_{2,2,2,\mu-3}^1, \quad \mu \geq 6; \\ T_\mu &= T_{2,3,2,\mu-4}^1, \quad \mu = 7, 8, 9; \end{aligned}$$

$$U_\mu = J_\mu, \quad \mu = 7, 8, 9;$$

$$W_\mu = K_\mu, \quad \mu = 8, 9$$

sowie die Singularitäten Z_9 und Z_{10} , deren 2-Jet nicht régulär ist. Wir haben dabei die Notation von Giusti unserer bzw. Walls Notation gegenübergestellt.

Die einfachen Raumkurvensingularitäten mit regulärem 2-Jet sind also bereits in den bisher betrachteten Klassen von Singularitäten enthalten, und wir haben für sie schon Dynkindiagramme berechnet. Insbesondere kann man für sie Dynkindiagramme von der Form $\Pi_{p,q,r,s}^1$ (Abbildung 3.2.5) oder $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^1$ (Abbildung 3.3.3) finden. Wir betrachten nun eine etwas allgemeinere Klasse von Graphen, die diese Graphen umfaßt. Der allgemeine Graph dieser Klasse ist in Abbildung 3.4.1 dargestellt.

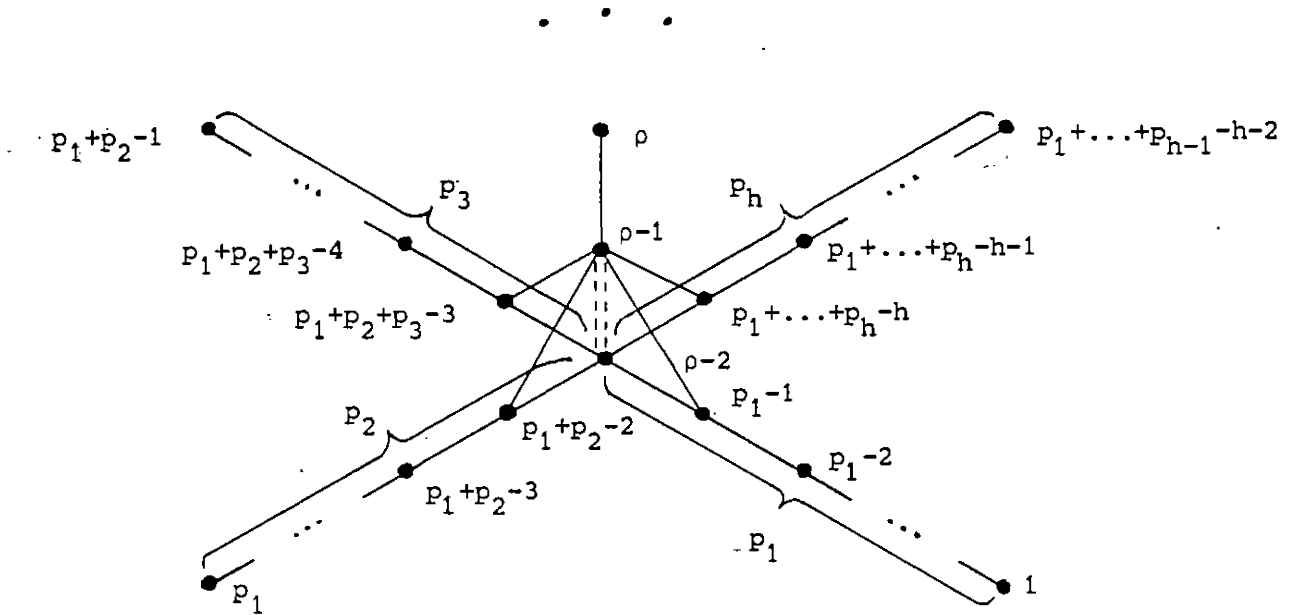


Abbildung 3.4.1: Die Graphen Θ_{p_1, \dots, p_h} und $\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h}$.

Den Graphen von Abbildung 3.4.1 bezeichnen wir mit $\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h}$. Den Teilgraphen ohne die Ecke λ_ρ bezeichnen wir mit Θ_{p_1, \dots, p_h} . Für die Zahl ρ gilt

$$\rho = \sum_{i=1}^h p_i - h + 3 .$$

Insbesondere gilt dann $\prod_{p,q,r,s}^1 = \Theta_{p,q,r,s}$ und $\prod_{p,q,r,s}^{-1} = \tilde{\Theta}_{p,q,r,s}$. Nach Abschnitt 3.2 und Satz 3.3.4 hat man dann das folgende Resultat.

Satz 3.4.1: Die einfachen Raumkurvensingularitäten, die durch Abbildungskeime $f: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ mit regulärem 2-Jet gegeben werden, besitzen stark ausgezeichnete Basen von verschwindenden Zellen mit Dynkindiagrammen der Form $\Theta_{p,q,r,s}$ oder $\tilde{\Theta}_{p,q,r,s}$ wie in Tabelle 3.4.1 angegeben ist.

Tabelle 3.4.1

Notation		$(w_1, w_2, w_3; d_1, d_2)$	Dynkin- diagramm	N	Verschwindendes Gitter (H, Δ)
S_5	\tilde{D}_4	$(1, 1, 1; 2, 2)$	Θ_{2222}	2	$A^{\text{odd}}(1; 3; 0)$
S_{3+i} $i \geq 3$	$T_{2,2,2;i}^1$	$\left\{ \left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 1; \frac{i}{2} + 1, i \right) \right\}$ $\left\{ (i, i, 2; i+2, 2i) \right\}$	$\Theta_{2,2,2,i}$	$\begin{cases} i & i \text{ gerade} \\ 2i & i \text{ ungerade} \end{cases}$	$A^{\text{odd}}(1, \dots, 1; 3; \infty)$ $A^{\text{ev}}(1, \dots, 1; 2)$
T_7	T_{2323}^1	$(3, 2, 2; 4, 6)$	Θ_{2233}	6	$O_1^{\#}(1, 1, 1; 1)$
T_8	T_{2324}^1	$(6, 4, 3; 7, 12)$	Θ_{2234}	12	$O^{\#}(1, 1, 1; 2; \infty)$
T_9	T_{2325}^1	$(15, 10, 6; 16, 30)$	Θ_{2235}	30	$O_0^{\#}(1, 1, 1, 1; 1)$
U_7	J_7	$(5, 4, 3; 8, 9)$	$\tilde{\Theta}_{2223}$	9	$O_1^{\#}(1, 1, 1; 1)$
U_8	J_8	$(4, 3, 2; 6, 7)$	$\tilde{\Theta}_{2224}$	7	$O^{\#}(1, 1, 1; 2; \infty)$
U_9	J_9	$(7, 5, 3; 10, 12)$	$\tilde{\Theta}_{2225}$	12	$O_0^{\#}(1, 1, 1, 1; 1)$
W_8	K_8	$(5, 6, 4; 10, 12)$	$\tilde{\Theta}_{2233}$	12	$O_0^{\#}(1, 1, 1, 1; 0)$
W_9	K_9	$(4, 5, 3; 8, 10)$	$\tilde{\Theta}_{2234}$	10	$O^{\#}(1, 1, 1, 1; 1, \infty)$

Die einfachen Raumkurvensingularitäten haben quasihomogene Gleichungen. Allerdings kann man nicht in jedem Fall quasihomogene Gleichungen finden, bei denen f_1 nicht ausgeartet ist. Dennoch sind die Monodromie c und die relative Monodromie \hat{c} in jedem Fall von endlicher Ordnung N , und N stimmt mit dem höheren Grad der qua-

sihomogenen Gleichungen überein (vgl. Theorem 1.6.5). Wir haben in Tabelle 3.4.1 für jede Singularität jeweils die Bezeichnung von Giusti, unsere Bezeichnung bzw. Walls Bezeichnung, den quasihomogenen Typ $(w_1, w_2, w_3; d_1, d_2)$, wobei w_i die Gewichte und d_j die Grade der Gleichungen bezeichnen, das Dynkindiagramm, die Coxeterzahl N und den Typ des verschwindenden Gitters in der Klassifikation von Janssen [Janssen₂] angegeben.

Bemerkung 3.4.2: In [Giusti₁] sind ebenfalls Dynkindiagramme für die einfachen Raumkurvensingularitäten angegeben, die allerdings nur μ und nicht $m = \mu + 1$ Ecken haben. Der Zusammenhang mit diesen Graphen ist der folgende: Wendet man auf einen Graphen $\tilde{\theta}_{2,2,r,s}$ (oder $\theta_{2,2,r,s}$) die Transformationen

$$\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_{\rho-1}; \beta_{\rho-1}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\rho-4}; \alpha_{\rho-4}; \alpha_{\rho-3}, \alpha_{\rho-2}$$

an, so hat der resultierende Graph die Gestalt von Abbildung 3.4.2.

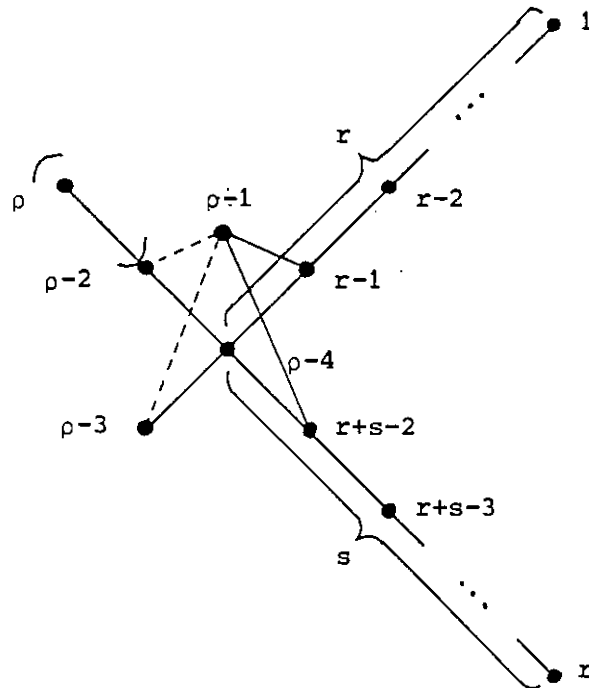


Abbildung 3.4.2

Es sei $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\rho-1}, \lambda'_\rho)$ die zugehörige stark ausgezeichnete Basis von \hat{H} . Dann ist $\lambda'_{\rho-1} - \lambda'_{\rho-4} \in \ker \hat{H}$. Das Dynkindiagramm von Giusti ist der Graph, den man

nach Entfernen der Ecke zu $\lambda'_{\rho-1}$ erhält. Das Dynkindiagramm von Giusti ist also ein Dynkindiagramm zu einer Basis von verschwindenden Zykeln von H , die sich zu einem stark ausgezeichneten Erzeugendensystem von verschwindenden Zykeln erweitern läßt.

Wir studieren nun die allgemeinen Graphen Θ_{P_1, \dots, P_h} und $\tilde{\Theta}_{P_1, \dots, P_h}$ von Abbildung 3.4.1 genauer. Zunächst folgt eine allgemeine Bemerkung.

Es sei D ein Dynkindiagramm mit Ecken $(\lambda_1, \dots, \lambda_\rho)$. Dann kann man diesem Graphen verschiedene Schnittmatrizen und Coxetererelemente wie folgt zuordnen. Es sei $\varepsilon = (-1)^{n(n+1)/2}$. Es sei $V^{(n)} = V^{(n)}(D)$ die $\rho \times \rho$ -Matrix $((v_{ij}^{(n)}))$ mit

$$v_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i > j, \\ \pm \varepsilon |v_{ij}^{(n)}| & \text{für } i < j, \end{cases}$$

wobei $|v_{ij}^{(n)}|$ für $i < j$ die Anzahl der Kanten zwischen den Ecken λ_i und λ_j ist, und das Vorzeichen $\pm \varepsilon$ von dem Gewicht der Kanten abhängt ($+\varepsilon$ falls Kanten gestrichelt, vgl. Kap. 1.5). Wir setzen

$$A^{(n)} = A^{(n)}(D) = V^{(n)} + (-1)^n (V^{(n)})^t,$$

$$\hat{C}^{(n)} = \hat{C}^{(n)}(D) = (-1)^{n+1} (V^{(n)})^{-1} (V^{(n)})^t.$$

Dann ist $\hat{C}^{(n)}$ die Matrix des Coxetererelements $\hat{c}^{(n)}$ zu einer Basis $(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_\rho^{(n)})$ eines Gitters $\hat{L}^{(n)}$ mit Schnittmatrix $A^{(n)}$ (vgl. Satz 1.6.3). Die Matrizen $\hat{C}^{(n)}$ und $\hat{C}^{(n-1)}$ unterscheiden sich also nur um ein Vorzeichen, und die Matrizen $\hat{C}^{(n)}$ und $\hat{C}^{(n-2)}$ sind gleich. Insbesondere haben die Matrizen $\hat{C}^{(n)}$ und $\hat{C}^{(n-1)}$ bis aufs Vorzeichen die gleichen Eigenwerte und ihre Jordannormalformen sind bis aufs Vorzeichen der Eigenwerte gleich. Wir schreiben

$$P^{(n)}(D)(t) = \det(t \cdot 1 - \hat{C}^{(n)})$$

für das charakteristische Polynom von $\hat{C}^{(n)}$.

Es sei nun D einer der durch die Abbildung 3.4.1 definierten Graphen, also

$D = \theta_{P_1, \dots, P_h}$ oder $D = \tilde{\theta}_{P_1, \dots, P_h}$, wobei $2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_h$. Wir betrachten zunächst das Gitter $\hat{L}^{(2)}(D)$, das durch die Schnittmatrix $A^{(2)}(D)$ zu einer Basis $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{p-1}^{(2)})$ bzw. $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_p^{(2)})$ definiert wird. Es sei Q_{P_1, \dots, P_h} das von den Vektoren $\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{p-2}^{(2)}$ aufgespannte Gitter. Im Fall $D = \theta_{P_1, \dots, P_h}$ liegt der Vektor $\lambda_{p-1}^{(2)} - \lambda_{p-2}^{(2)}$ in $\ker \hat{L}^{(2)}(D)$ und es gilt

$$\hat{L}^{(2)}(\theta_{P_1, \dots, P_h}) = Q_{P_1, \dots, P_h} \perp \mathbb{Z} \cdot (\lambda_{p-1}^{(2)} - \lambda_{p-2}^{(2)}).$$

Im Fall $D = \tilde{\theta}_{P_1, \dots, P_h}$ bildet die Basis $(\lambda_p^{(2)}, \lambda_{p-1}^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(2)})$ eine spezielle Basis im Sinne von Definition 5.4.1. Also gilt

$$\hat{L}^{(2)}(\tilde{\theta}_{P_1, \dots, P_h}) = Q_{P_1, \dots, P_h} \perp U.$$

Wir untersuchen nun das Gitter Q_{P_1, \dots, P_h} . Mit Hilfe der Formel im Beweis von [Ebeling₁, Satz 2.1.1] berechnet man, daß für die zugehörige Diskriminante (d.h. die Determinante der Schnittmatrix) gilt

$$\text{disk}(Q_{P_1, \dots, P_h}) = (-1)^p \prod_{j=1}^h p_j \left(\sum_{i=1}^h \frac{1}{p_i} - (h-2) \right)$$

Es sei $k_0 = \dim(\ker Q_{P_1, \dots, P_h})$ und k_+ bzw. k_- die Dimension eines maximal positiv bzw. negativ definiten Unterraums von $Q_{P_1, \dots, P_h} \otimes \mathbb{R}$. Dann haben wir die folgenden Äquivalenzen:

$$(-1)^p \text{disk}(Q_{P_1, \dots, P_h}) \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^h \frac{1}{p_i} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} h-2 \Leftrightarrow (k_0, k_+) = \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \end{matrix}.$$

Also gilt $k_0 = k_+ = 0$ genau dann, wenn das Dynkindiagramm zu Q_{P_1, \dots, P_h} eines der klassischen Dynkindiagramme A_{p-2} , D_{p-2} , E_6 , E_7 oder E_8 ist, $k_0 = 1$, $k_+ = 0$ genau dann, wenn $(p_1, \dots, p_h) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)$, und $k_0 = 0$, $k_+ = 1$ sonst.

Wir betrachten nun die Coxeter-elemente zu den obigen Graphen. Für die charakteristischen Polynome berechnet man wie in [Ebeling₄]:

$$\begin{aligned}
 P^{(2)}(\Theta_{p_1, \dots, p_h})(t) &= (t-1)^2 \prod_{i=1}^h \frac{t^{p_i-1}}{t-1}, \\
 P^{(2)}(\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h})(t) &= \\
 &= (t^3 - 2t^2 - 2t + 1) \prod_{i=1}^h \frac{t^{p_i-1}}{t-1} + t^2 \sum_{i=1}^h \frac{t^{p_i-1}}{t-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^h \frac{t^{p_j-1}}{t-1}.
 \end{aligned}$$

Die zweite Formel wurde von K. Saito berechnet.

Die erste Formel zeigt, daß das zu dem Graphen Θ_{p_1, \dots, p_h} gehörige Coxeterэлемент $\hat{c}^{(n)}$ für alle Werte von p_1, \dots, p_h quasiunipotent ist. Es ist allerdings nur für die Werte $(p_1, \dots, p_h) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)$ halbeinfach. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Gitter $\hat{L}^{(2)}$, das durch die Schnittmatrix $A^{(2)}$ zu dem Graphen Θ_{p_1, \dots, p_h} bestimmt ist. Es sei $m_0 = \dim(\ker \hat{L}^{(2)})$. Nach Korollar 1.6.4 ist m_0 die Dimension des Eigenraumes von $\hat{c}^{(2)}$ zum Eigenwert 1. Es gilt aber $m_0 = 1$ außer für die obigen Werte von p_1, \dots, p_h , für die $m_0 = 2$ gilt, während die Multiplizität des Eigenwerts 1 aufgrund der obigen Formel für das charakteristische Polynom gleich 2 ist. Man vergleiche auch den Beweis von Satz 3.6.1.

Dagegen ist das zu dem Graphen $\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h}$ gehörige Coxeterэлеment $\hat{c}^{(n)}$ nur für endlich viele Werte von p_1, \dots, p_h quasiunipotent. Eine genauere Auskunft gibt der folgende Satz, der von K. Saito stammt [Saito₂].

Theorem 3.4.3 (K. Saito): Es sei $\hat{c} = \hat{c}^{(2)}$ das Coxeterэлеment zu dem Graphen $\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h}$. Dann gilt: \hat{c} ist genau dann quasiunipotent, wenn (p_1, \dots, p_h) ein h -Tupel von Tabelle 3.4.2 ist. Das Coxeterэлеment \hat{c} ist zusätzlich halbeinfach, wenn das betreffende h -Tupel nicht in eckigen Klammern steht. Für quasiunipotenten \hat{c} ist genau dann die folgende Bedingung (*) erfüllt, wenn das betreffende h -Tupel nicht in runden Klammern steht:

(*) Eine N -te primitive Einheitswurzel ist ein Eigenwert von \hat{c} , wobei N die Ordnung von \hat{c} ist.

Tabelle 3.4.2

h = 3 :	[236] , 237 , 238 , 239 , (2310) , [244] , 245 , 246 , 247 , (248) , 255 , 256 , (257) , (266) , [333] , 334 , 335 , 336 , (337) , 344 , 345 , (346) , (355) , 444 , (445) .
h = 4 :	[2222] , 2223 , 2224 , 2225 , (2226) , 2233 , 2234 , (2235) , (2244) , 2333 , (2334) , [(3333)] .
h = 5 :	22222 , 22223 , [(22224)] , (22233) .
h = 6 :	(222222) .

Wir betrachten nun das Problem, welche der Graphen Θ_{P_1, \dots, P_h} und $\tilde{\Theta}_{P_1, \dots, P_h}$ als Dynkindiagramme von Singularitäten vorkommen. Dazu läßt sich bisher folgendes sagen: Wir betrachten zunächst den Fall $h = 3$. Dann sind die Graphen $\Theta_{p,q,r}$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ genau die Dynkindiagramme von [Gabrielov₂] zu stark ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zykeln für die unimodalen Hyperflächensingularitäten vom Typ $T_{p,q,r}$ in Arnolds Notation. Die Graphen $\tilde{\Theta}_{p,q,r}$ für die 14 nicht eingeklammerten Werte von Tabelle 3.4.2 sind genau die entsprechenden Dynkindiagramme von [Gabrielov₂] für die 14 exzeptionellen unimodalen Hyperflächensingularitäten. (Hierbei ist unimodal im Sinne von Rechtsäquivalenz zu verstehen.) Für den Fall $h = 4$ gilt: Die Graphen $\Theta_{2,2,r,s}$ sind Dynkindiagramme zu stark ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zellen für die Singularitäten $T_{2,r,2,s}^1$, die die einfachen Raumkurvensingularitäten S_μ , $\mu \geq 5$, und T_μ , $\mu = 7, 8, 9$, umfassen. Diese Singularitäten wurden von Wall mit $P_{r,s}$ bezeichnet [Wall₃]. Ihre Deforma-

tionstheorie wurde kürzlich von Wirthmüller untersucht [Wirthmüller_{1,2}]. Schließlich sind die Graphen $\tilde{\Theta}_{2,2,r,s}$ für die 5 nicht eingeklammerten Quadrupel $(2,2,r,s)$ von Tabelle 3.4.2 entsprechende Dynkindiagramme für die übrigen 5 einfachen Raumkurvensingularitäten, die durch Abbildungskeime mit regulärem 2-Jet gegeben werden.

Wir werden in Abschnitt 3.6 eine Interpretation für die Graphen $\tilde{\Theta}_{p_1, \dots, p_h}$ für $h = 3, 4$ geben, wobei (p_1, \dots, p_h) eins der Tupel von Tabelle 3.4.2 in runden Klammern ist.

3.5 Flächen von vollständigem Durchschnitt

Wir betrachten nun genauer den Fall $n = 2$, also den Fall von isolierten Singularitäten, die durch Abbildungskeime

$$f: (\mathbb{C}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

mit regulärem 2-Jet $j^2 f$ gegeben werden. Nach den Abschnitten 3.1 bis 3.3 haben wir noch die Fälle mit Segresymbol $\{4\}$ und $\{(3,1)\}$ zu behandeln, die die L- bzw. M-Serie bilden. Wir berechnen in diesem Abschnitt Dynkindiagramme für diese Singularitäten, wobei das Vorgehen analog zu Abschnitt 3.2 und 3.3 ist.

Eine Abbildung f mit Segresymbol $\{4\}$ (L-Serie) läßt sich nach Wall auf die Pränormalform

$$f(w, x, y, z) = (2xz + 2wy, \sqrt{-1}y^2 + 2wx + R(w, y, z))$$

mit $R(w, y, z) = a(z) + yb(z) + wd(z) + w^2e(z)$ und $\text{ord } a \geq 3$; $\text{ord } b, \text{ord } d \geq 2$; $\text{ord } e \geq 1$ bringen.

Eine Abbildung f mit Segresymbol $\{(3,1)\}$ (M-Serie) läßt sich nach Wall auf die Pränormalform

$$f(w, x, y, z) = (2xz + 2wy, -2x(w+y) + T(w, y, z) + xh(z))$$

mit $T(w, y, z) = a(z) + yb(z) + (y+w)d(z) + (y-w)^2e(z)$ und $\text{ord } a \geq 3$;

ord b , ord d , ord $h \geq 2$; ord $e \geq 1$ bringen. Dabei sind gewisse Terme wieder überflüssig, werden aber zur Vereinfachung einiger Gleichungen mit betrachtet.

Wir betrachten nun zunächst eine geeignete Projektion der Fläche $X = f^{-1}(0)$. Dazu eliminieren wir in beiden Fällen die Variable x aus den Gleichungen $f_1(w,x,y,z) = 0$ und $f_2(w,x,y,z) = 0$. Dadurch erhält man eine Funktion $L_x f$ in den Variablen w,y,z , die zu einer der Serien in der Klassifikation von Arnold [Arnold₂] gehört:

$$\text{L-Serie: } (L_x f)(w,y,z) = -4w^2y + 2\sqrt{-1}y^2z + 2zR(w,y,z) \quad (\text{S-Serie})$$

$$\text{M-Serie: } (L_x f)(w,y,z) = 4wy(w+y-h(z)) + 2zT(w,y,z) \quad (\text{U-Serie})$$

Dieser Elimination entspricht geometrisch die folgende Operation. Die Fläche $X = f^{-1}(0)$ enthält die x -Achse. Die Gleichung $(L_x f)(w,y,z) = 0$ ist dann gerade die Gleichung der Projektion von X in den (w,y,z) -Raum, bei der die x -Achse auf den Nullpunkt abgebildet wird. Wir wählen als lineare Funktion ζ die Koordinatenfunktion z . Die Polarkurve $\Sigma_z(f_2)$ ist dann die Vereinigung der x -Achse mit einer Kurve $\tilde{\Sigma}$, deren Projektion in den (w,y,z) -Raum gerade die Polarkurve $\Sigma_z(L_x f)$ ist. Es sei

$$\Sigma_z(L_x f) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Sigma_i^L$$

die Zerlegung von $\Sigma_z(L_x f)$ in irreduzible Komponenten Σ_i^L , und ρ_i^L seien die zugehörigen Invarianten von Kap. 2.1. Es sei Σ_i , $i = 1, \dots, \ell$, diejenige Komponente von $\tilde{\Sigma}$, die auf Σ_i^L projiziert wird, und ρ_i sowie v_i die zugehörigen Invarianten. Diejenigen Komponenten Σ_i^L , die nicht in der Hyperebene $z = 0$ liegen, besitzen nach [Maurer₁] eine verallgemeinerte Puiseuxparametrisierung

$$\begin{aligned} w &= b_i z^{\tilde{\beta}_i} + \dots, & b_i \in \mathbb{C}, & \tilde{\beta}_i \in \mathbb{Q}, & b_i \neq 0, \\ y &= c_i z^{\tilde{\gamma}_i} + \dots, & c_i \in \mathbb{C}, & \tilde{\gamma}_i \in \mathbb{Q}, & c_i \neq 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Parametrisierung in die Funktion $L_x f$ lassen sich die Zahlen ρ_i^L bestimmen. Aus der Gleichung $f_1(w,x,y,z) = 0$ folgt, daß auf Σ_i die Koor-

dinate x wie folgt als Potenzreihe in z mit gebrochenen Exponenten geschrieben werden kann:

$$x = d_1 z^{\tilde{\beta}_1 + \tilde{\gamma}_1 - 1} + \dots, \quad d_i \in \mathbb{C}, \quad d_i \neq 0.$$

Durch Einsetzen dieser Parametrisierung von Σ_i in die Funktion f_2 lassen sich die Zahlen ρ_i bestimmen. Ein Vergleich dieser Invarianten zeigt

$$\rho_i = \rho_i^L - 1 \quad \text{für } i \text{ mit } \Sigma_i^L \not\subset \{z = 0\}.$$

Im Fall der L-Serie ist eine Komponente der Polarkurve $\Sigma_z(L_x f)$ die Gerade $\{w = z = 0\}$. Diese liegt in der Hyperebene $\{z = 0\}$. Die Tatsache, daß eine Komponente der Polarkurve $\Sigma_z(L_x f)$ in der Hyperebene $\{z = 0\}$ liegt, ist äquivalent dazu, daß $(L_x f)|_{z=0}$ eine nicht isolierte Singularität hat (vgl. [Gabrielov₃]). Auf der Geraden $\Sigma_1 = \{w = z = 0\}$ liegen 2 kritische Punkte von $L_x f - 2\epsilon z$. Für die übrigen Komponenten Σ_i , $i > 1$, berechnet man

$$\sum_{i=2}^{\ell} v_i = 3.$$

Schließlich gilt $\mu(f_1, f_2 - 2\epsilon z) = 4$.

Im Fall der M-Serie liegt keine Komponente der Polarkurve $\Sigma_z(L_x f)$ in der Hyperebene $\{z = 0\}$. In diesem Fall berechnet man:

$$\sum_{i=1}^{\ell} v_i = 4, \quad \mu(f_1, f_2 - 2\epsilon z) = 3.$$

Aus Satz 2.1.4 und Satz 2.1.5 folgt damit in beiden Fällen:

Lemma 3.5.1: Für einen Abbildungskeim f aus der L- oder M-Serie gilt:

$$\mu(f) = \mu(L_x f) - 1.$$

Damit zeigt man auch, daß die Zuordnung $f \mapsto L_x f$ wieder Bijektionen zwischen den μ -konstant-Strata liefert.

Die Abbildung $g \doteq (f_1, f_2 + z^2)$ definiert in beiden Fällen wieder eine Singularität vom Typ \tilde{D}_5 . Wir studieren nun das Verhalten der kritischen Werte von $g_{\epsilon, t} = f_2 + (z - \epsilon)^2 \Big|_{X_t}$ für $\epsilon \rightarrow 0$ und die zugehörigen Dynkindiagramme im einzelnen.

(A) L-Serie

Die kritischen Werte von $g_{\epsilon, t}$ werden asymptotisch (bis auf Terme der Ordnung $o(\epsilon^2)$) für $\epsilon \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ wie folgt gegeben: Es sind die Bilder der Lösungen der Gleichung

$$z^5 (z - \epsilon)^3 = \sqrt{-1} \left(\frac{t}{4}\right)^4$$

unter der Abbildung

$$z \rightarrow 4 \left(z - \frac{5}{8} \epsilon\right)^2 - \frac{9}{16} \epsilon^2 .$$

Wir bezeichnen die entsprechenden kritischen Werte mit $s_i^{\epsilon, t}$, $i = 1, \dots, 8$, wobei die Reihenfolge der Ordnung des Wegesystems $(\varphi_1^{\epsilon_0}, \dots, \varphi_8^{\epsilon_0})$ entspricht, das wir wählen, um die kritischen Werte $s_i^{\epsilon_0, t}$ mit dem Nullpunkt zu verbinden. Dann wird das Verhalten der kritischen Werte für $\epsilon = \epsilon_0 \rightarrow \epsilon = 0$ schematisch durch Abbildung 3.5.1 beschrieben. Dieser Abbildung liegt, wie auch der Abbildung 3.3.1, eine Computerzeichnung zugrunde. Man vergleiche die dortigen Bemerkungen. Die genaueren asymptotischen Werte der drei kritischen Werte $s_1^{\epsilon, t}$, $s_4^{\epsilon, t}$ und $s_8^{\epsilon, t}$ hängen von $R(w, y, z)$ ab und werden durch Satz 2.2.1 gegeben.

Eine analoge Rechnung wie in Kap. 3.3 ergibt dann eine stark ausgezeichnete Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq 8, 1 \leq r \leq M_j)$ von verschwindenden Zellen für f mit den gleichen Eigenschaften wie bei den entsprechenden Basen für die $J^{(n-1)}$ - und $K^{(n-1)}$ -Serie, nämlich:

- (i) Die Schnittmatrix von (e_1^1, \dots, e_8^1) stimmt mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_8^1)$ für die Singularität \tilde{D}_5 (Kap. 2.3) überein.

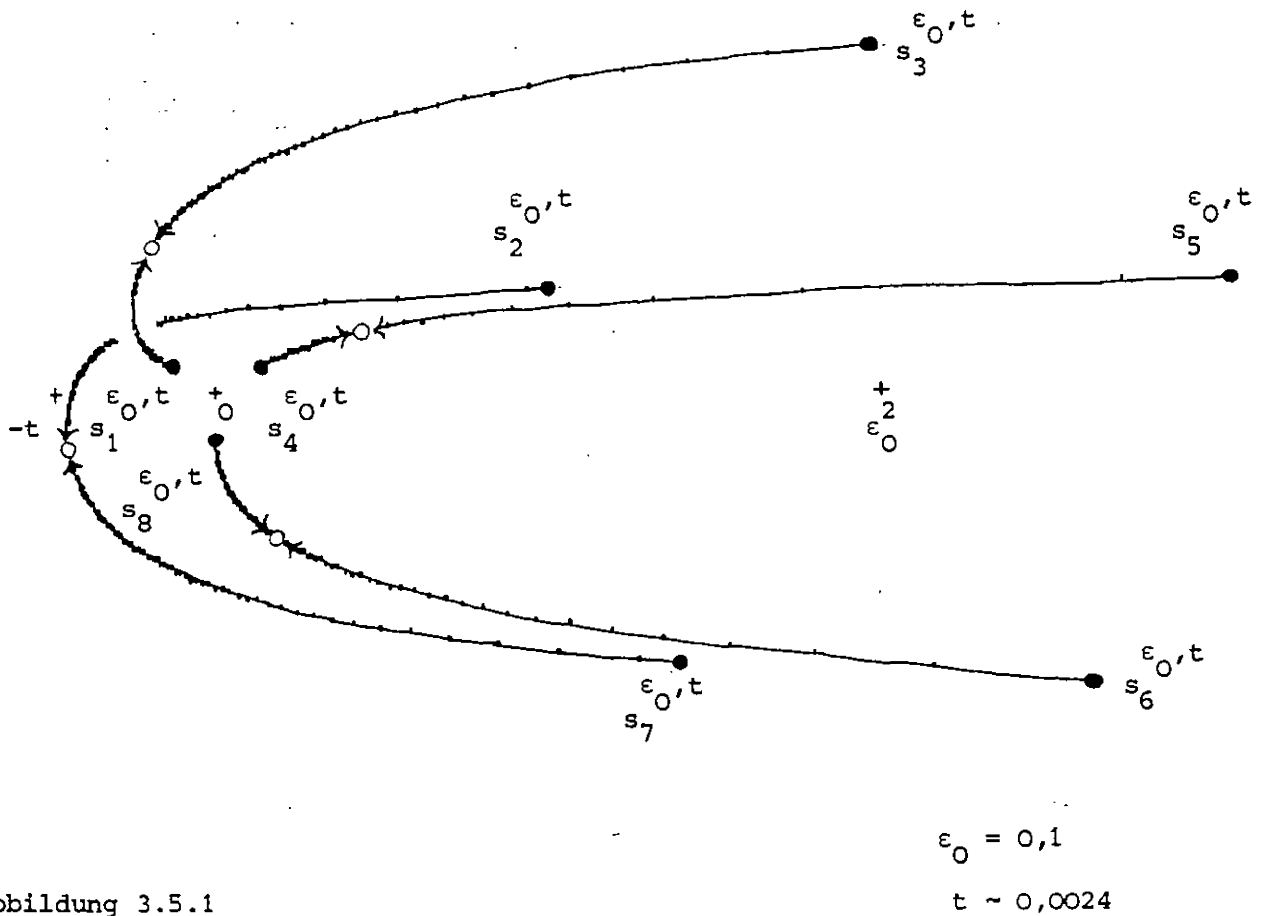


Abbildung 3.5.1

(ii) Die vollständige Schnittmatrix errechnet sich aus den Formeln von Theorem 2.2.3. Für die Zahlen M_j gilt:

$$M_j = 1 \text{ für } j \neq 2,4,7, \quad M_2 = M_4^L - 1, \quad M_4 = M_2^L - 1, \quad M_7 = M_3^L - 1$$

wobei M_2^L, M_3^L, M_4^L die entsprechenden Zahlen für die S-Serie von [Gabrielov₃] sind. Die einzelnen Werte von M_2, M_4 und M_7 sind in Tabelle 3.5.1 angegeben.

(B) M-Serie

In diesem Fall werden die kritischen Werte von $g_{\epsilon,t}$ asymptotisch für $\epsilon, t \rightarrow 0$ bis auf Terme der Ordnung $o(\epsilon^2)$ wie folgt gegeben:

Tabelle 3.5.1

Notation	Gleichung	M_2, M_4, M_7
L_{12k-2}	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+z^{4k-1})$	$4k-2, 4k-2, 4k-2$
L_{12k-1}	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+wz^{3k-1})$	$4k-2, 4k-1, 4k-2$
$L_{k,i}$	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+w^2z^{2k-1}+z^{4k+i})$	$4k+i-1, 4k-1, 4k-1$
$L_{k,2q-1}^\#$	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+yz^{2k}+wz^{3k+q-1})$	$4k-1, 4k+q-1, 4k+q-2$
$L_{k,2q}^\#$	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+yz^{2k}+w^2z^{2k+q-1})$	$4k-1, 4k+q-1, 4k+q-1$
L_{12k+3}	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+wz^{3k})$	$4k, 4k, 4k-1$
L_{12k+4}	$(2xz+2wy, \sqrt{-1}y^2+2wx+z^{4k+1})$	$4k, 4k, 4k$

Sechs der kritischen Werte sind die Bilder der Lösungen der Gleichung

$$(z^2(z-\epsilon) + \sqrt{-2}(\sqrt{\epsilon})^3)(z^2(z-\epsilon) - \sqrt{-2}(\sqrt{\epsilon})^3) = 0$$

unter der Abbildung

$$z \rightarrow -z^2 + \epsilon^2.$$

Diese Gleichung stimmt bis auf eine Konstante mit der Gleichung (*) von der $J^{(n-1)}$ -Serie überein. Ebenso unterscheidet sich die Abbildung nur durch eine Translation von z und durch Konstanten von der dort angegebenen. Das qualitative Verhalten dieser sechs kritischen Werte ist also das gleiche wie bei der $J^{(n-1)}$ -Serie und wird durch Abbildung 3.3.1 gegeben. Zusätzlich hat man bei der M-Serie noch zwei weitere kritische Punkte, die bis auf Ordnung $o(\epsilon^2)$ den kritischen Wert 0 haben. Die genaueren Asymptoten für diejenigen kritischen Werte, die für $t = 0$ bis auf Ordnung $o(\epsilon^2)$ mit 0 übereinstimmen, hängen von $T(w, y, z)$ und $h(z)$ ab und werden durch Satz 2.2.1 gegeben.

Eine analoge Rechnung wie in Kap. 3.3 ergibt dann eine stark ausgezeichnete Basis $(\tilde{e}_j^r \mid 1 \leq j \leq 8, 1 \leq r \leq \tilde{M}_j)$ von verschwindenden Zellen für f mit den folgenden Eigenschaften:

- (i') Das Dynkindiagramm zu $(\tilde{e}_1^1, \dots, \tilde{e}_8^1)$ ist der Graph von Abbildung 3.5.2.
- (ii) Die vollständige Schnittmatrix errechnet sich aus den Formeln von Theorem 2.2.3.

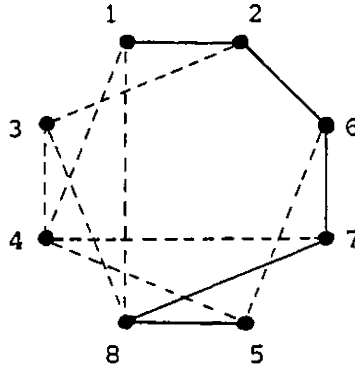


Abbildung 3.5.2

Hierbei ist $\tilde{M}_j = 1$ für $j \neq 1, 4, 7, 8$ und die Werte von $\tilde{M}_1, \tilde{M}_4, \tilde{M}_7$ und \tilde{M}_8 sind in Tabelle 3.5.2 angegeben.

In den Fällen $M_{12k-1}, M_{k,2q-1}, M_{k,2q}$ und M_{12k+3} kann man die Basis (\tilde{e}_j^r) in eine stark ausgezeichnete Basis (e_j^r) von verschwindenden Zellen transformieren, die die gleichen Eigenschaften (i) und (ii) wie bei der L-Serie und damit auch bei den anderen Serien hat: Die Schnittmatrix zu (e_1^1, \dots, e_8^1) stimmt mit der Schnittmatrix von $(\delta_1^1, \dots, \delta_8^1)$ von Kap. 2.3 überein. Es sei $(\tilde{e}_{(r,j)}) = (\tilde{e}_j^r)$. Eine solche Basis $(e_j^r \mid 1 \leq j \leq 8, 1 \leq r \leq M_j)$ erhält man nach den folgenden Transformationen

$$\beta_{(1,8)}, \beta_{(2,8)}, \dots, \beta_{(\tilde{M}_1, 8)}, \beta_{(1,7)}, \beta_{(1,6)}, \alpha_{(1,1)}, \beta_{(1,8)}.$$

Für die Zahlen M_j gilt dabei

$$M_j = 1 \text{ für } j \neq 2, 4, 5, 7, \quad (M_2, M_4, M_5, M_7) = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_4, \tilde{M}_8, \tilde{M}_7).$$

Wendet man die gleichen Transformationen auf die entsprechende Basis (\tilde{e}_j^r) für $M_{k,2q-1}^\#$ und $M_{k,2q}^\#$ an, so ist für die transformierte Basis (e_j^r) die Eigenschaft (ii)

Tabelle 3.5.2

Notation	Gleichung	$\tilde{M}_1, \tilde{M}_4, \tilde{M}_7, \tilde{M}_8$
M_{12k-1}	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+z^{3k})$	$3k-1, 3k-1, 3k-1, 3k-1$
$M_{k,2q-1}$	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+(w+y)z^{2k}+(w-y)z^{2k+q-1})$	$3k, 3k+q-1, 3k-1, 3k+q-1$
$M_{k,2q}$	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+(w+y)z^{2k}+(w-y)z^{2k+q})$	$3k, 3k+q, 3k-1, 3k+q-1$
$M_{k,2q-1}^\#$	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+yz^{2k}+(w-y)z^{2k+q-1})$	$3k+q-1, 3k, 3k+q-1, 3k-1$
$M_{k,2q}^\#$	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+yz^{2k}+(w-y)z^{2k+q})$	$3k+q, 3k, 3k+q-1, 3k-1$
M_{12k+3}	$(2xz+2wy, -2x(w+y)+z^{3k+1})$	$3k, 3k, 3k, 3k$

nicht mehr erfüllt. Man beachte dazu, daß in der Tabelle 1 von [Gabrielov₃] bei $U_{k,2q}$ ein Fehler ist, wie der Autor in [Zentralblatt für Mathematik 421.32011] bemerkt: Auch in diesem Fall muß man ein anderes Dynkindiagramm für $f|_{z=0}$ zugrundelegen.

3.6 Seltene Dualität

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten der Dimension 2, die am Anfang der Klassifikation aller solcher Singularitäten stehen. Nach den einfachen Hyperflächensingularitäten hat man die folgenden Klassen von Singularitäten (vgl. z.B. [Looijenga₃, (7.23)]):

- (a) Die einfach elliptischen Singularitäten $\tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6, \tilde{D}_5$.
- (b) Die hyperbolischen Singularitäten $T_{p,q,r}$ und $T_{p,q,r,s}^2$. Dies sind die zweidimensionalen Spitzensingularitäten der Einbettungsdimension ≤ 4 .
- (c) Die Dreieckssingularitäten $D_{p,q,r}$ (in der Notation von [Looijenga_{2,3,4}]) der Einbettungsdimension ≤ 4 . Es sind dies die 14 exzeptionellen unimodalen (im Sinne von Rechtsäquivalenz) Hyperflächensingularitäten und die 8 Singularitäten $J'_9, J'_{10}, J'_{11}, K'_{10}, K'_{11}, L_{10}, L_{11}$ und M_{11} der Einbettungsdimension 4.

Diese Singularitäten sind unimodal bezüglich \mathcal{K} -Äquivalenz. Die Klasse der \mathcal{K} -

unimodalen Singularitäten ist aber damit nicht erschöpft. Wir werden später noch weitere \mathcal{K} -unimodale Singularitäten betrachten.

Die Singularitäten der Einbettungsdimension 3 aus diesen Klassen sind genau die im Sinne von Rechtsäquivalenz unimodalen Hyperflächensingularitäten. Wir haben in Abschnitt 3.4 bereits die Dynkindiagramme von Gabrielov für diese Singularitäten betrachtet.

Für die obigen Singularitäten der Einbettungsdimension 4 haben wir bereits die folgenden Dynkindiagramme zu stark ausgezeichneten Basen von verschwindenden Zellen erhalten. Die Singularität \tilde{D}_5 besitzt nach Kap. 2.3 das Dynkindiagramm $\Pi_{2,2,2,2}^2$. Die Singularität $T_{p,q,r,s}^2$ hat nach Abschnitt 3.2 für $p = r = 2$ und nach Kap. 2.5 für $(p,q,r,s) = (2,2,3,3)$ das Dynkindiagramm $\Pi_{p,q,r,s}^2$. Wir vermuten, daß dies allgemeiner für beliebige $p,q,r,s \geq 2$ gilt. Die Dreiecksingularitäten der J' - und K' -Serie besitzen nach Satz 3.3.4 Dynkindiagramme vom Typ $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$. Der Graph $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ ist in Abbildung 3.6.1 noch einmal dargestellt. Der Graph $\Pi_{p,q,r,s}^2$ ist der Teilgraph ohne die Ecke $\lambda_{\rho-2}$. Es gilt

$$\rho = p+q+r+s+1 .$$

Das Quadrupel (p,q,r,s) sei im folgenden immer so angeordnet, daß gilt:

$$2 \leq p \leq r , \quad 2 \leq q \leq s \quad \text{und} \quad p < q \quad \text{oder} \quad p = q , \quad r \leq s .$$

Satz 3.6.1: Die acht Dreiecksingularitäten in \mathbb{A}^4 besitzen stark ausgezeichnete Basen von verschwindenden Zellen mit Dynkindiagrammen der Form $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$, wobei die Werte von p,q,r,s in Tabelle 3.6.1 angegeben sind.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Singularitäten J'_9 , K'_{10} , L_{10} und M_{11} . Für die ersten zwei Singularitäten sind die Transformationen dabei auch schon im Beweis von Satz 3.3.4 enthalten. Wie dort geben wir auch hier nur die Transformationen an, mit denen die in den Abschnitten 3.3 und 3.5 berechneten Dynkindiagramme in einen Graphen vom Typ $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ mit eventuell anderer Numerierung und Orien-

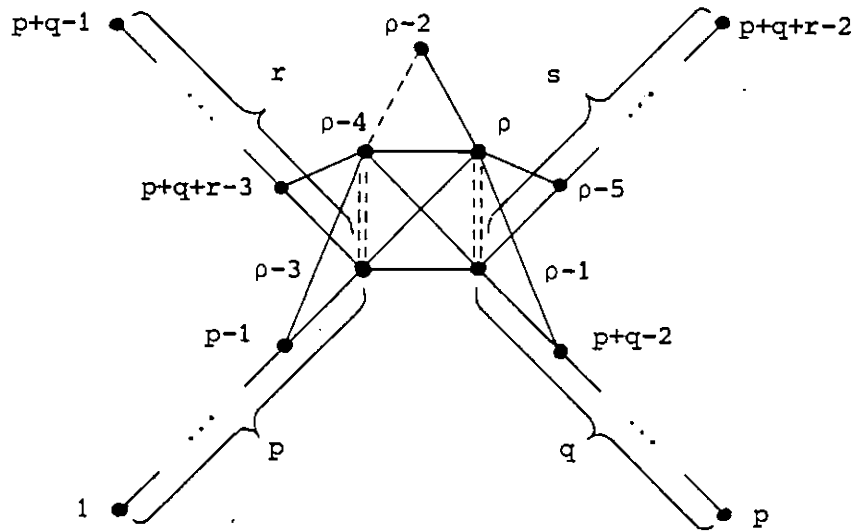


Abbildung 3.6.1: Die Graphen $\Pi_{p,q,r,s}^2$ und $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$

Tabelle 3.6.1

Wall	Notation von		p q r s	N	Duale Singularität
		Looijenga			
J_9'		$D_{2,3,10}$	2 2 2 3	18	$E_{3,-1}$
J_{10}'		$D_{2,4,8}$	2 2 2 4	14	$Z_{1,-1}$
J_{11}'		$D_{3,3,7}$	2 2 2 5	12	$Q_{2,-1}$
K_{10}'		$D_{2,6,6}$	2 3 2 3	12	$W_{1,-1}$
K_{11}'		$D_{3,5,5}$	2 3 2 4	10	$S_{1,-1}$
L_{10}		$D_{2,5,7}$	2 2 3 3	12	$W_{1,-1}^\#$
L_{11}		$D_{3,4,6}$	2 2 3 4	10	$S_{1,-1}^\#$
M_{11}		$D_{4,4,5}$	2 3 3 3	9	$U_{1,-1}$

tierung der Basiselemente überführt werden können. Es sei $(e_1, \dots, e_m) = (e_j^r \mid 1 \leq j \leq 8, 1 \leq r \leq M_j)$ die jeweilige stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen aus den Abschnitten 3.3 und 3.5, wobei die Schnittmatrix von $(e_1, \dots, e_8) = (e_1^1, \dots, e_8^1)$ mit der Schnittmatrix von $(\hat{\delta}_1^1, \dots, \hat{\delta}_8^1)$ aus Kap. 2.3 übereinstimmt. Dabei sind die Zahlen M_j gleich 1 oder 2, und $M_j = 2$ gilt für die folgenden Zahlen:

Serie	J'	K'	L	M
$M_j = 2$	M_2, M_7	M_2, M_4, M_5	M_2, M_4, M_7	M_2, M_4, M_5, M_7

Wir wenden auf die obige Basis die folgenden Transformationen an:

$$\begin{aligned} & \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \\ & (L_{10}, M_{11} : \alpha_9) , (M_{11} : \alpha_{10}) , \\ & (L_{10}, M_{11} : \alpha_8, \alpha_7, \dots, \alpha_1) , (M_{11} : \alpha_9, \alpha_8, \dots, \alpha_1) , \\ & \alpha_{8+i} (*) , \alpha_{7+i} (*) , \alpha_{6+i} (*) ; \alpha_{8+i}, \alpha_{7+i} ; \\ & \beta_{2+i}, \beta_{3+i}; \chi_{7+i}, \chi_{8+i}, \chi_{9+i} \end{aligned}$$

wobei $i = 0$ für J'_9, K'_{10} , $i = 1$ für L_{10} und $i = 2$ für M_{11} . Bis auf die eingeklammerten und die mit (*) bezeichneten Transformationen sind dies Transformationen des zugrundeliegenden Dynkindiagramms von \tilde{D}_5 und stimmen bis auf Transformationen, die nur die Numerierung ändern, mit den Transformationen (B) und (C) von Kap. 2.3 überein. Damit ist Satz 3.6.1 bewiesen.

Wir untersuchen nun die Graphen $\Pi_{p,q,r,s}^2$ und $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ genauer. Wir verwenden die Bezeichnungen von Abschnitt 3.4. Es stellt sich heraus, daß zwischen diesen Graphen und den Graphen $\Theta_{p,q,r,s} = \Pi_{p,q,r,s}^1$ und $\tilde{\Theta}_{p,q,r,s} = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^1$ von Abschnitt 3.4 eine enge Beziehung besteht.

Satz 3.6.2: Es sei D^n der Graph $\Pi_{p,q,r,s}^n$ oder $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$ für $n = 1, 2$. Hierbei sei $3 \leq s$ falls $D^n = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^n$.

Dann gilt:

(i) $P^{(2)}(D^2)(t) = (t-1)^2 P^{(2)}(D^1)(t)$

(ii) Die Jordannormalform des Coxeterelements $\hat{C}^{(2)}(D^2)$ erhält man aus der Jordannormalform des Coxeterelements $\hat{C}^{(2)}(D^1)$ durch Hinzufügen eines Blocks der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Der Eigenraum zu dem Eigenwert 1 dieses Blocks wird erzeugt von dem Vektor

$$\lambda_{\rho}^{(2)} - \lambda_{\rho-1}^{(2)} + \lambda_{\rho-4}^{(2)} - \lambda_{\rho-3}^{(2)} .$$

Beweis: (i) Die zu dem Graphen $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ gehörige Basis $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{\rho}^{(2)})$ wird durch die Transformationen

$$\beta_{\rho-1}, \beta_{\rho-2}, \beta_{\rho-3}, \beta_{\rho-3}, \beta_{\rho-2}, \beta_{\rho-1}, \alpha_{\rho-2}$$

in eine Basis $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_\rho)$ transformiert, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) $\langle \lambda'_{\rho-1}, \lambda'_\rho \rangle = -2, \langle \lambda'_i, \lambda'_{\rho-1} \rangle = \langle \lambda'_i, \lambda'_\rho \rangle$ für $1 \leq i \leq \rho-2$.

(b) Das Dynkindiagramm zu $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\rho-2})$ ist der Graph $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^1$.

Entsprechendes gilt für die zu dem Graphen $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ gehörige Basis $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{\rho-3}^{(2)}, \lambda_{\rho-1}^{(2)}, \lambda_{\rho}^{(2)})$. Dann hat die Matrix $\hat{C}^{(2)}(D^2)$ von $\hat{C}^{(2)}(D^2)$ bezüglich der Basis $(e_1, \dots, e_{\rho}) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\rho-2}, \lambda'_{\rho} - \lambda'_{\rho-1}, -\frac{1}{2} \lambda'_{\rho})$ die folgende Gestalt (im Fall $D = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ hat man den Vektor $\lambda'_{\rho-2}$ wegzulassen):

$$\hat{C}^{(2)}(D^2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & c_{1\rho} \\ & & & \vdots & \vdots \\ \hat{C}^{(2)}(D^1) & & & 0 & c_{\rho-2,\rho} \\ \hline * & \dots & * & 1 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Daraus folgt die Behauptung (i).

(ii) Es gilt im Fall $D^2 = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$:

$$c_{i\rho} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 1, \dots, p-1; p+q-1, \dots, p+q+r-3; \rho-3, \rho-2, \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq \rho-2 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen

$$e'_i = \begin{cases} e_i + \frac{1}{2(q-1)} e_{\rho-1} & \text{für } i = p, \dots, p+q-2 ; \\ e_i + \frac{1}{2(s-1)} e_{\rho-1} & \text{für } i = p+q+r-2, \dots, \rho-5 ; \\ e_i - e_{\rho-1} & \text{für } i = \rho-2 \\ e_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Es sei $\hat{c} = \hat{c}^{(2)}(D^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{c}(e'_i) &\subset \langle e'_1, \dots, e'_{\rho-2} \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, \rho-2, \\ \hat{c}(e'_{\rho-1}) &= e'_{\rho-1}, \\ \hat{c}(e'_\rho) &= e'_\rho + \frac{3}{2} e'_{\rho-1} + \sum_{i=1}^{\rho-2} c_{i\rho} e'_i. \end{aligned}$$

Wir setzen $\hat{c}' = \hat{c}^{(2)}(D^1)$. Unter der Voraussetzung $3 \leq s$ ist die Matrix $A^{(2)}(D^1)$ nicht ausgeartet. Daher hat \hat{c}' nicht den Eigenwert 1. Es sei

$$\begin{aligned} \xi &= (\hat{c}' - \text{id})^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\rho-2} c_{i\rho} e'_i \right), \\ e_i^* &= \begin{cases} e'_\rho - \xi & \text{für } i = \rho, \\ e'_i & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{c}(e_\rho^*) &= e_\rho^* + \frac{3}{2} e_{\rho-1}^*, \\ \hat{c}(e_{\rho-1}^*) &= e_{\rho-1}^*, \\ \hat{c}(e_i^*) &= \hat{c}'(e_i^*) \subset \langle e_1^*, \dots, e_{\rho-2}^* \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, \rho-2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Im Fall $D^2 = \Pi_{p,q,r,s}^2$ gilt

$$c_{i\rho} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } i = p, \dots, p+q-2; p+q+r-2, \dots, \rho-5; \rho-4 ; \\ \frac{1}{2} & \text{für } i = \rho-3 ; \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq \rho-3 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen in diesem Fall

$$e_i^* = \begin{cases} e_i + \frac{1}{2(q-1)} e_{\rho-1} & \text{für } i = p, \dots, p+q-2 ; \\ e_i + \frac{1}{2(s-1)} e_{\rho-1} & \text{für } i = p+q+r-2, \dots, \rho-5 ; \\ e_i & \text{für } i \neq \rho \text{ sonst,} \end{cases}$$

$$e_\rho^* = e_\rho + \sum_{i=p}^{p+q-2} \frac{i}{2q} e_i^* + \sum_{i=p+q+r-2}^{\rho-5} \frac{i}{2s} e_i^* + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} - 1 \right) e_{\rho-4}^* - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} - 1 \right) e_{\rho-3}^* .$$

Dann gelten für $\hat{c}(e_i^*)$ die gleichen Beziehungen wie oben.

Mit Hilfe von Satz 3.6.2 können wir die Resultate von Abschnitt 3.4 auf die hier betrachteten Graphen anwenden. Es sei $(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{\rho-3}^{(2)}, (\lambda_{\rho-2}^{(2)}, \lambda_{\rho-1}^{(2)}, \lambda_\rho^{(2)})$ eine Basis zu dem Graphen $D^2 = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ oder $D^2 = \Pi_{p,q,r,s}^2$ mit Schnittmatrix $A^{(2)}(D^2)$, \hat{L} das von dieser Basis aufgespannte Gitter, und $\hat{c}: \hat{L} \rightarrow \hat{L}$ das zugehörige Coxeterelement. Es sei L' ein primitiver \mathbb{Z} -Untermodul von $\ker(\hat{c}-id)$ vom Rang 1. Wir setzen

$$L = \hat{L}/L' .$$

Es sei $c: L \rightarrow L$ der von dem Coxeterelement \hat{c} induzierte Operator auf dem Gitter L .

Im Fall $D^2 = \Pi_{p,q,r,s}^2$ folgt dann aus Abschnitt 3.4 und Satz 3.6.2, daß c für alle Werte $p, q, r, s \geq 2$ quasiunipotent ist, aber außer höchstens für $(p, q, r, s) = (2, 2, 2, 2)$ nicht halbeinfach ist.

In den Fällen $D^2 = \Pi_{2222}^2$ und $D^2 = \tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ setzen wir

$$L' = \mathbb{Z} \cdot (\lambda_{\rho}^{(2)} - \lambda_{\rho-1}^{(2)} + \lambda_{\rho-4}^{(2)} - \lambda_{\rho-3}^{(2)}) .$$

Für Π_{2222}^2 folgt dann, daß c halbeinfach ist. In den anderen Fällen erhalten wir aus Theorem 3.4.3 und Satz 3.6.2:

Korollar 3.6.3: Der Operator c zu dem Graphen $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ ist genau dann quasiunipotent, wenn (p,q,r,s) eins der folgenden Quadrupel ist:

$$\begin{aligned} & [2222], \quad 2223 \quad , \quad 2224 \quad , \quad 2225 \quad , \quad (2226) \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad 2233 \quad , \quad 2234 \quad , \quad (2235) \quad , \quad (2244) \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad 2323 \quad , \quad 2324 \quad , \quad (2325) \quad , \quad (2424) \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2333 \quad , \quad (2334) \quad , \quad (2343) \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad [(3333)] . \end{aligned}$$

Er ist zusätzlich genau dann halbeinfach, wenn das entsprechende Quadrupel nicht in eckigen Klammern steht. Er erfüllt zusätzlich genau dann die Bedingung (*) von Theorem 3.4.3, wenn das entsprechende Quadrupel nicht in runden Klammern steht.

Die acht Graphen zu den nicht eingeklammerten Quadrupeln sind gerade die Dynkindiagramme von Satz 3.6.1 für die acht Dreiecksingularitäten in \mathbb{C}^4 . Sie besitzen quasihomogene Gleichungen. Das gleiche gilt für die Singularität \tilde{D}_5 mit dem Dynkindiagramm Π_{2222}^2 . Nach Satz 1.6.6 und Satz 3.6.2 stimmt der Modul H' mit dem obigen Modul L' für jede dieser Singularitäten überein, und der Operator c läßt sich mit dem Monodromieoperator der jeweiligen Singularität identifizieren. Ebenso läßt sich nach (1.6.2) für einen Graphen $\Pi_{p,q,r,s}^2$ zu einer Singularität $T_{p,q,r,s}^2$ einer der (von L' abhängigen) Operatoren c mit dem Monodromieoperator der Singularität identifizieren.

Aus Satz 3.6.2 und unserer Berechnung der Dynkindiagramme erhält man auch das folgende überraschende Resultat.

Korollar 3.6.4: Es sei (X, Y) eins der folgenden Paare von Singularitäten:

(T_{2323}^2, T_{2233}^2) , (K'_{10}, L_{10}) oder (K'_{11}, L_{11}) . Das Milnorgitter von X bzw. Y bezeichnen wir mit H_X bzw. H_Y . Dann gilt: $H_X \otimes \mathbb{Q} \cong H_Y \otimes \mathbb{Q} = V$ (als Vektorräume, aber nicht als quadratische Räume). Die zugehörigen Monodromieoperatoren $c_X : V \rightarrow V$ und $c_Y : V \rightarrow V$ sind über \mathbb{Q} konjugiert.

Bemerkung 3.6.5: Die Singularitäten der J' - und K' -Serie erhält man durch "Einhängung" aus den Raumkurvensingularitäten der J - und K -Serie. Die Einhängung ist dabei die folgende Operation (vgl. [Pickl₁]): Einer Abbildung $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ wird die Abbildung $f^e: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $f^e(w, x, y, z) = (f_1(x, y, z) + w^2, f_2(x, y, z))$ zugeordnet. Entsprechend erhält man die Spitzensingularitäten $T_{2,q,2,s}^2$ durch Einhängung aus den Raumkurvensingularitäten $T_{2,q,2,s}^1$. Ein Vergleich der Resultate von Abschnitt 3.4 und der obigen Resultate zeigt, daß für die Singularitäten von Tabelle 3.4.1 gilt: Hat f ein Dynkindiagramm $\Theta_{p,q,r,s}$ (bzw. $\tilde{\Theta}_{p,q,r,s}$), so hat die Einhängung f^e ein Dynkindiagramm $\Pi_{p,q,r,s}^2$ (bzw. $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$). Die Beziehung zwischen den zugehörigen relativen Monodromieoperatoren wird durch Satz 3.6.2 gegeben.

Zwischen den 14 Dreiecksingularitäten auf Hyperflächen in \mathbb{C}^3 besteht eine seltsame Dualität, auf die Arnold in [Arnold₂] aufmerksam gemacht hat. In [Ebeling - Wall] wird eine Erweiterung dieser Dualität auf eine Klasse von Singularitäten betrachtet, die insbesondere die Dreiecksingularitäten der Einbettungsdimension 4 umfaßt. Zusätzlich muß aber die folgende Klasse von \mathcal{K} -unimodalen Flächensingularitäten herangezogen werden, die in der Klassifikation auf die Dreiecksingularitäten folgt:

(d) Die Kodairasingularitäten vom Typ $I_i^*(k_1, k_2, k_3, k_4)$ und vom Grad $D = \sum k_i \leq 4$ (zur Definition und Notation siehe [Ebeling - Wall]). Für ein festes Quadrupel (k_1, k_2, k_3, k_4) ist dadurch eine Serie von Singularitäten für $i \geq 0$ definiert, die mit der Vierecksingularität $D_{k_1+2, k_2+2, k_3+2, k_4+2}$ in der Notation

von [Looijenga₄] für $i = 0$ beginnt. Es sind dies die acht bimodalen (im Sinne von Rechtsäquivalenz) Serien von Hyperflächensingularitäten und die acht Serien $J'_{1,i}$, $K'_{1,i}$, $K_{1,i}^b = K_{1,i}^{(1),\#}$, $L_{1,i}$, $L_{1,i}^{\#}$, $M_{1,i}$, $M_{1,i}^{\#}$ und $I_{1,i}$ von Singularitäten der Einbettungsdimension 4. Dabei ist die Serie $I_{1,i}$ als einzige der Serien von Singularitäten der Einbettungsdimension 4 in unseren Rechnungen nicht erfaßt, da die Singularitäten dieser Serie nicht durch Abbildungskeime mit regulären 2-Jets gegeben werden.

Die in [Ebeling - Wall] betrachtete Erweiterung von Arnolds seltsamer Dualität ist eine Dualität zwischen den acht Dreiecksingularitäten in \mathbb{C}^4 und den acht bimodalen Serien von Hyperflächensingularitäten und eine Dualität der acht Serien von Kodairasingularitäten vom Typ I_i^* in \mathbb{C}^4 untereinander. Dabei wird eine Serie jeweils durch eine "virtuelle" Singularität vertreten, die man erhält, indem man $i = -1$ setzt. Sie wird durch ein Dynkindiagramm repräsentiert, das man erhält, wenn man in Tabelle 1 von [Gabrielov₃] und in den Tabellen der Abschnitte 3.3 und 3.5 den Index i gleich -1 setzt, bzw. bei dem Index $2q-1$ die Zahl $q = 0$ einsetzt. Diese Dynkindiagramme gehören zu keiner wirklichen isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension 2, wie man zeigen kann. Diese Dynkindiagramme sind stark äquivalent zu Graphen vom Typ $\tilde{\Theta}_{p,q,r}$ oder $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$. Für die acht bimodalen Serien von Hyperflächensingularitäten erhält man auf diese Weise die acht Graphen $\tilde{\Theta}_{p,q,r}$, wobei (p,q,r) eins der acht Tripel in runden Klammern von Tabelle 3.4.2 für $h = 3$ ist. Für die entsprechenden sieben Serien von Singularitäten in \mathbb{C}^4 (wobei wir die Serie $I_{1,i}$ ausgenommen haben) erhält man auf diese Weise die sieben Graphen $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$ von Korollar 3.6.3, wobei (p,q,r,s) eins der sieben Quadrupel in runden, aber nicht eckigen Klammern ist.

Die Zuordnung der Tripel (p,q,r) bzw. Quadrupel (p,q,r,s) zu den einzelnen Serien ist in Tabelle 3.6.1 bzw. Tabelle 3.6.2 angegeben. In Tabelle 3.6.1 ist für jede der acht Dreiecksingularitäten in \mathbb{C}^4 die im obigen Sinne duale Singularität angegeben. Die zugehörigen Zahlen p,q,r für die duale Singularität (Serie) stimmen mit den Dolgachevzahlen der Dreiecksingularität überein, also mit den

Zahlen p, q, r , wobei $D_{p,q,r}$ die Bezeichnung von Looijenga für die entsprechende Dreiecksingularität ist. In Tabelle 3.6.1 ist außerdem die Coxeterzahl N der Dreiecksingularität, d.h. die Ordnung des zugehörigen Monodromieoperators c der Singularität angegeben. Es stellt sich heraus, daß sie mit dem Grad einer quasihomogenen Gleichung für die Vierecksingularität (vom Typ I_0^*) der jeweiligen dualen Serie übereinstimmt. Umgekehrt stimmt die Ordnung des Coxeterelements zu dem Graphen $\tilde{\Theta}_{p,q,r}$ mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Grade der quasihomogenen Gleichungen für die duale Dreiecksingularität überein (siehe [Ebeling - Wall, (5.2)]).

In Tabelle 3.6.2 sind für jede der sieben Serien $I_i^*(k_1, k_2, k_3, k_4)$ von Kodaira-singularitäten in \mathbb{C}^4 die folgenden Informationen angegeben

- die Notation (von Wall) für die "virtuelle" Singularität ($i = -1$),
- die Zahlen $b_i = k_i + 2$, $i = 1, \dots, 4$,
- die Zahlen p, q, r, s des zugehörigen Dynkindiagramms vom Typ $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$,
- die Coxeterzahl N , d.h. die Ordnung des Operators c zu $\tilde{\Pi}_{p,q,r,s}^2$,
- der quasihomogene Typ $(w_1, w_2, w_3, w_4; d_1, d_2)$ von quasihomogenen Gleichungen für die Vierecksingularität $I_0^*(k_1, k_2, k_3, k_4)$ der entsprechenden Serie,
- die duale Singularität.

Man stellt wieder fest, daß die Coxeterzahl N mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Grade der Vierecksingularität ($i = 0$) der entsprechenden dualen Serie I_i^* übereinstimmt.

Abschließend sei erwähnt, daß man auch für die Serien $J_{1,i}$, $K_{1,i}$ und $K_{1,i}^\#$ von Raumkurvensingularitäten aus Abschnitt 3.3 eine "virtuelle" Singularität für $i = -1$ definieren kann. Die zugehörigen Dynkindiagramme aus den Tabellen 3.3.1 und 3.3.2 mit $i = -1$ sind dann stark äquivalent zu den Graphen $\tilde{\Theta}_{2226}$, $\tilde{\Theta}_{2244}$ bzw. $\tilde{\Theta}_{2235}$. Die zugehörigen Quadrupel (p, q, r, s) sind gerade die Quadrupel von der Form $(2, 2, r, s)$ von Tabelle 3.4.2 für $h = 4$, die in runden Klammern stehen.

Tabelle 3.6.2:

"Sing."	$b_1 b_2 b_3 b_4$	p q r s	N	$(w_1, w_2, w_3, w_4; d_1, d_2)$	Dual zu
$J'_{1,-1}$	2 2 2 6	2 2 2 6	40	(2,4,5,6;8,10)	$J'_{1,-1}$
$L^{\#}_{1,-1}$	2 2 3 5	2 2 3 5	56	(2,3,4,5;7,8)	$L^{\#}_{1,-1}$
$L_{1,-1}$	2 3 2 5	2 2 4 4	24	(2,3,4,5;7,8)	$K^b_{1,-1}$
$K^b_{1,-1}$	2 2 4 4	2 3 2 5	56	(2,3,4,4;6,8)	$L_{1,-1}$
$K'_{1,-1}$	2 4 2 4	2 4 2 4	24	(2,3,4,4;6,8)	$K'_{1,-1}$
$M^{\#}_{1,-1}$	2 3 3 4	2 3 3 4	42	(2,3,3,4;6,7)	$M^{\#}_{1,-1}$
$M_{1,-1}$	2 3 4 3	2 3 4 3	42	(2,3,3,4;6,7)	$M_{1,-1}$

4. MILNORGITTER UND MONODROMIEGRUPPEN

4.1 Eine Beschreibung der Monodromiegruppen und verschwindenden Gitter

Wir geben in diesem Kapitel eine Beschreibung der Monodromiegruppe Γ , der relativen Monodromiegruppe $\hat{\Gamma}$, der Menge von verschwindenden Zykeln Δ und der Menge von verschwindenden Zellen $\hat{\Delta}$ einer isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitte gerader Dimension.

Es sei (X, x) eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitte, die durch einen Abbildungskeim $f: (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ gegeben wird. Es sei

$$0 \rightarrow H' \rightarrow \hat{H} \rightarrow H \rightarrow 0$$

die zugehörige grundlegende exakte Sequenz von Gittern aus Kap. 1.1. Es sei $\text{Aut}(H)$ die Automorphismengruppe des ganzzahligen (symmetrischen oder schiefsymmetrischen) Gitters H und $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$ die Monodromiegruppe. Das zu H gehörige nicht ausgearbeitete Gitter $H/\ker H$ bezeichnen wir mit \bar{H} . Das Bild von Γ unter der Abbildung $\text{Aut}(H) \rightarrow \text{Aut}(\bar{H})$ bezeichnen wir mit Γ_s , den Kern der Abbildung $\Gamma \rightarrow \Gamma_s$ mit Γ_u . Die Untergruppe Γ_s heißt der einfache, die Untergruppe Γ_u der unipotente Teil der Monodromiegruppe. Der unipotente Teil Γ_u der Monodromiegruppe ist abelsch und in der Untergruppe $\ker(H) \otimes \bar{H}$ von $\text{Aut}(H)$ enthalten [Looijenga₃, (7.11)]. Hierbei fassen wir $\ker(H) \otimes \bar{H}$ als Untergruppe von $\text{Aut}(H)$ auf, indem wir $v \otimes w \in \ker(H) \otimes \bar{H}$ die wie folgt definierte Abbildung zuordnen

$$(v \otimes w)(y) := y + \langle y, w \rangle v \quad \text{für } y \in H.$$

Es sei nun L ein beliebiges symmetrisches gerades Gitter mit Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es sei $\varepsilon = \pm 1$. Die zu einem Minimalvektor v der Quadratlänge $\langle v, v \rangle = 2\varepsilon$ gehörige Spiegelung s_v ist definiert durch

$$s_v(y) = y - \frac{2 \langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \quad \text{für } y \in L.$$

Wir bezeichnen mit $R_\varepsilon(L)$ diejenige Untergruppe von $O(L)$, die von allen Spiegelungen s_v zu Minimalvektoren v der Quadratlänge $\langle v, v \rangle = 2\varepsilon$ erzeugt wird (siehe Kap. 5.1). Wir definieren einen Homomorphismus

$$\sigma_\varepsilon : O(L) \rightarrow \{+1, -1\}$$

(reelle Spinornorm) wie folgt. Es sei $g \in O(L)$ und \bar{g} das induzierte Element in $O(\bar{L}_{\mathbb{R}})$. Hierbei ist $\bar{L}_{\mathbb{R}} = (L/\ker L) \otimes \mathbb{R}$. Dann kann man \bar{g} in $O(\bar{L}_{\mathbb{R}})$ als Produkt von Spiegelungen $\bar{g} = s_{v_1} \dots s_{v_r}$ schreiben, wobei die Vektoren v_i nun beliebige Länge haben können. Wir definieren

$$\sigma_\varepsilon(g) := \begin{cases} +1 & \text{falls } \varepsilon \langle v_i, v_i \rangle < 0 \text{ für eine gerade Anzahl von Indizes,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Untergruppe von $O(L)$ aller Einheiten g mit $\sigma_\varepsilon(g) = 1$ bezeichnen wir mit $O'_\varepsilon(L)$.

Diese Untergruppe kann auch wie folgt charakterisiert werden. Es sei t_+ bzw. t_- die Dimension eines maximal positiv bzw. negativ definiten Unterraums von $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ und t_0 der Rang von $\ker L$. Die Menge aller orientierten maximal ε -definiten Unterräume von $L_{\mathbb{R}}$ bildet eine offene Teilmenge der Grassmannmannigfaltigkeit $G_{t_\varepsilon}^{\text{or}}(L_{\mathbb{R}})$, die zwei Zusammenhangskomponenten hat, wenn L indefinit ist. Dann ist $g \in O'_\varepsilon(L)$ genau dann, wenn g die Zusammenhangskomponenten invariant läßt (vgl. [Looijenga₃, (7.12)]).

Wir bezeichnen mit $L^\#$ das duale Gitter $\text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ und mit $j: L \rightarrow L^\#$ den natürlichen Homomorphismus. Es sei τ der kanonische Homomorphismus

$$\tau: O(L) \rightarrow \text{Aut}(L^\# / j(L)) .$$

Es sei $O_\varepsilon^*(L)$ diejenige Untergruppe von $O(L)$, die aus allen Einheiten $g \in O(L)$ mit $\sigma_\varepsilon(g) = 1$ und $\tau(g) = 1$ besteht (vgl. Kap. 5.1). Es gilt

$$R_\varepsilon(L) \subset O_\varepsilon^*(L) .$$

Nun sei $L = H$, n gerade und $\varepsilon = (-1)^{n/2}$. Das Tripel (t_-, t_0, t_+) bezeichnen wir in diesem Fall mit (μ_-, μ_0, μ_+) . Wir nennen eine Singularität parabolisch, wenn $\mu_{-\varepsilon} = 0$ und $\mu_0 > 0$ gilt, und hyperbolisch, wenn $\mu_{-\varepsilon} = 1$ ist. Mit diesen Definitionen können wir die folgenden Resultate formulieren.

Theorem 4.1.1: Für eine isolierte Singularität (X, x) eines vollständigen Durchschnitts der geraden Dimension n gilt:

(i) Die Singularität (X, x) hat genau dann eine ε -definite Schnittform, wenn (X, x) eine einfache Hyperflächensingularität ist.

(ii) Die Singularität (X, x) ist genau dann parabolisch, wenn (X, x) vom Typ \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_8 oder \tilde{D}_{n+3} ist.

(iii) Die Singularität (X, x) ist genau dann hyperbolisch, wenn (X, x) vom Typ $T_{p,q,r}$ ($p = 2, q = 3, 7 \leq r$; $p = 2, 4 \leq q \leq r, 5 \leq r$; $3 \leq p \leq q \leq r, 4 \leq r$), $T_{p,q,r,s}^2$ ($2 \leq p \leq r, 2 \leq q \leq s, 3 \leq s$) oder $T_{2,q,2,s}^n$ ($2 \leq q \leq s, 3 \leq s$) ist.

Theorem 4.1.2: Es sei (X, x) eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts der geraden Dimension n , die nicht hyperbolisch ist oder hyperbolisch vom Typ T_{237} , T_{245} , T_{334} , T_{2223}^2 , T_{2223}^4 . Es sei $\varepsilon = (-1)^{n/2}$. Dann gilt:

(i) Die Monodromiegruppe Γ (relative Monodromiegruppe $\hat{\Gamma}$) läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\Gamma = R_{\varepsilon}(H) = O_{\varepsilon}^*(H) ,$$

$$\hat{\Gamma} = R_{\varepsilon}(\hat{H}) = O_{\varepsilon}^*(\hat{H}) .$$

(ii) Die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \Gamma_u \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma_s \rightarrow 1$$

spaltet (nicht kanonisch) und ist gleich der folgenden (nicht kanonisch) spaltenweisen exakten Sequenz:

$$1 \rightarrow \ker(H) \otimes \bar{H} \rightarrow O_{\varepsilon}^*(H) \rightarrow O_{\varepsilon}^*(\bar{H}) \rightarrow 1 .$$

Insbesondere ist Γ_s von endlichem Index in $O_\varepsilon^*(\bar{H})$, also arithmetisch.

(iii) Es sei (X,x) kein gewöhnlicher Doppelpunkt (d.h. nicht vom Typ A_1). Dann läßt sich die Menge von verschwindenden Zykeln Δ (Menge von verschwindenden Zellen $\hat{\Delta}$) wie folgt beschreiben:

$$\Delta = \{v \in H \mid \langle v, v \rangle = 2\varepsilon \text{ und } \langle v, H \rangle = \mathbb{Z}\} ,$$

$$\hat{\Delta} = \{v \in \hat{H} \mid \langle v, v \rangle = 2\varepsilon \text{ und } \langle v, \hat{H} \rangle = \mathbb{Z}\} .$$

Insbesondere hängen alle Invarianten außer in den Ausnahmefällen nur vom Milnorgitter H bzw. von dem Gitter \hat{H} ab.

Theorem 4.1.3: Für alle isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten gerader Dimension gilt:

(i) Der unipotente Teil Γ_u der Monodromiegruppe stimmt mit $\ker(H) \otimes \bar{H}$ überein, und man hat die (nicht kanonisch) spaltende exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \ker(H) \otimes \bar{H} \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\pm} \Gamma_s \rightarrow 1 .$$

(ii) Die Beziehung zwischen $\hat{\Gamma}$ und Γ wird durch die folgende (nicht kanonisch) spaltende exakte Sequenz gegeben

$$1 \rightarrow H' \otimes \bar{H} \rightarrow \hat{\Gamma} \xrightarrow{\pm} \Gamma \rightarrow 1 .$$

Die Beweise der obigen Theoreme werden in Abschnitt 4.2 gegeben.

Bemerkung 4.1.4: Bei den hyperbolischen Singularitäten gilt für die Zahl

$$\mu_0 = \text{rg}(\ker(H)) :$$

$$\mu_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } T_{p,q,r} , T_{p,q,r,s}^2 \\ n-1 & \text{für } T_{2,q,2,s}^n . \end{cases}$$

Die Gruppe Γ_s ist die Coxetergruppe, die zu einem der Coxetergraphen von Abbil-

zung 4.1.1 gehört. Dies folgt für die Singularitäten $T_{p,q,r}$ aus [Gabrielov₂], für $T_{p,q,r,s}^2$ aus [Looijenga₁, III.3.7] und für $T_{2,q,2,s}^n$ aus Kap. 3.2.

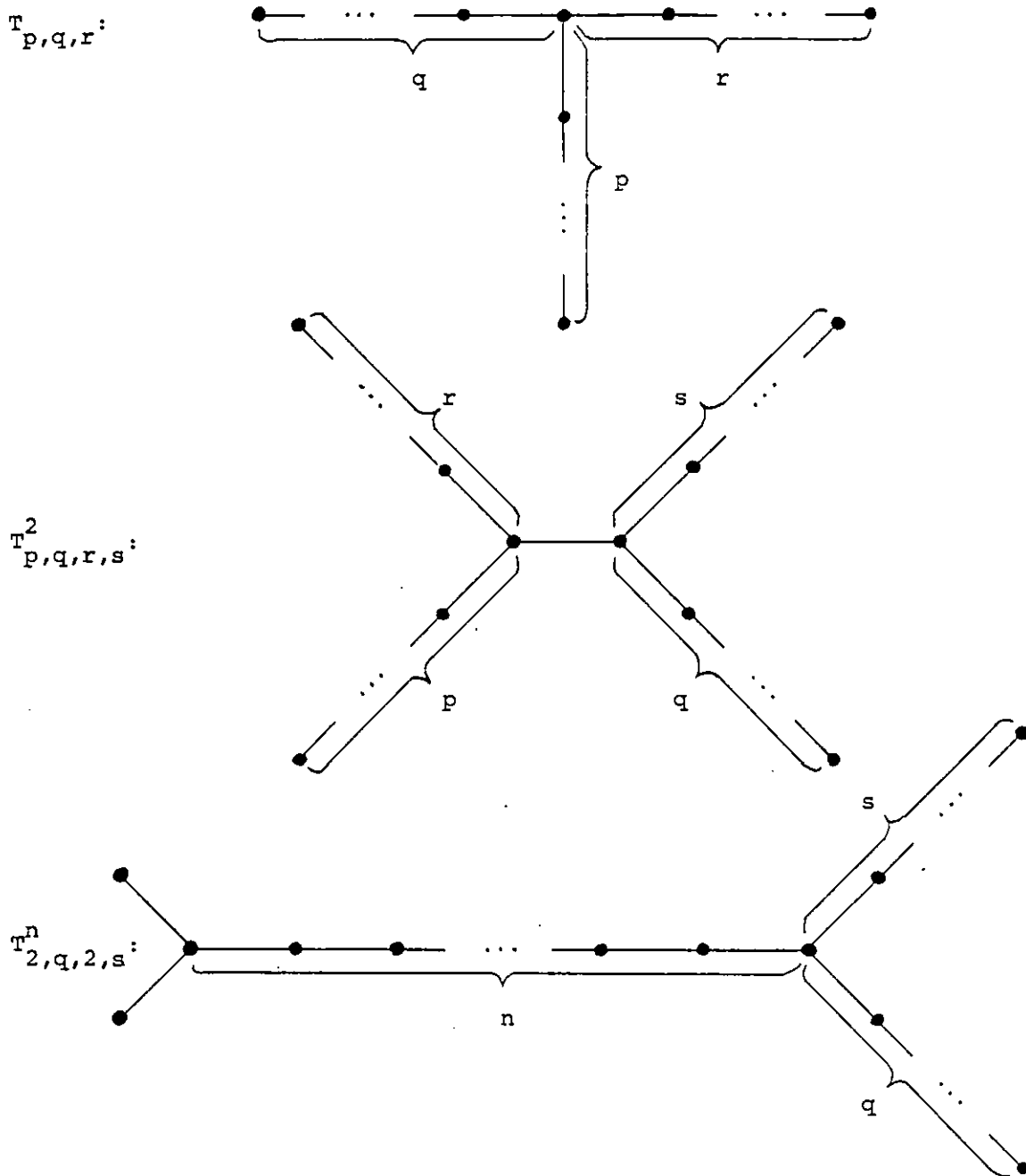


Abbildung 4.4.1

Das Gitter \bar{H} ist das entsprechende Gitter zu dem jeweiligen Coxetergraphen. Wir bezeichnen es entsprechend mit $Q_{p,q,r}$, $Q_{p,q,r,s}^2$ bzw. $Q_{2,q,2,s}^n$. Die Diskriminante des Gitters $Q_{p,q,r}$ ist in Kap. 3.4 angegeben, für die Diskriminanten der anderen Gitter gilt:

$$\text{disk}(Q_{p,q,r,s}^2) = (-1)^{p+q+r+s} ((p+r)(q+s) - pqrs) ,$$

$$\text{disk}(Q_{2,q,2,s}^n) = \varepsilon^{q+s+n} 4(q+s-qs) .$$

Nach [Bourbaki₂, Ch. V, § 4, Exercice 12] ist Γ_s genau dann von endlichem Index in $O(\bar{H})$, wenn Γ_s die Coxetergruppe zu einem Coxetersystem vom hyperbolischen Typ ist. Dies ist nur für die Graphen T_{237} , T_{245} , T_{334} , T_{2223}^2 und T_{2223}^4 der Fall. Deshalb ist die Aussage (i) für die in Theorem 4.1.2 ausgenommenen Singularitäten falsch und Γ_s ist nicht von endlichem Index in $O(\bar{H})$.

Ein Coxetergraph wie oben definiert ein verallgemeinertes Wurzelsystem $\bar{\Delta}$ in \bar{H} im Sinne von Kac-Moody-Liealgebren. Die Menge von verschwindenden Zykeln Δ ist in diesem Fall das Urbild von $\bar{\Delta}$ in H unter der Abbildung $H \rightarrow \bar{H}$ (vgl. [Looijenga₃, (7.23)], [Slodowy₁, 1.17]).

Im Falle ungerader Dimension hat man die folgenden Resultate, die wir zum Abschluß erwähnen wollen. Diese Resultate wurden in voller Allgemeinheit von W. Janssen bewiesen [Janssen₁], nach Teilresultaten von N. A'Campo [A'Campo₁], B. Wajnryb [Wajnryb₁] und S.V. Chmutov [Chmutov_{1,2}].

Im Falle ungerader Dimension ist H ein schiefsymmetrisches Gitter. Wir bezeichnen mit $Sp(H)$ die zugehörige symplektische Gruppe, und es sei wie oben $\tau: Sp(H) \rightarrow \text{Aut}(H^\# / j(H))$ der kanonische Homomorphismus. Wir definieren $Sp^\#(H) := \ker \tau$. Es sei G_H diejenige Untergruppe von $Sp^\#(H)$, die aus allen Automorphismen besteht, die trivial auf $H^\# / 2j(H)$ operieren. Sie enthält eine gewisse Kongruenzuntergruppe von $Sp^\#(H)$. Dann gilt:

Theorem 4.1.5 [Janssen₁, (2.5) und (2.9)]: Für alle isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten ungerader Dimension gilt:

- (i) Die Monodromiegruppe Γ enthält die Gruppe G_H und ist damit von endlichem Index in $Sp^\#(H)$.
- (ii) Außer im Fall eines gewöhnlichen Doppelpunktes gilt für die Menge von verschwindenden Zykeln Δ : Ein Vektor $v \in H$ ist genau dann in Δ enthalten, wenn es

ein $y \in H$ und ein $\delta \in \Delta$ gibt mit $\langle v, y \rangle = 1$ und $v - \delta \in 2H$.

Bemerkung 4.1.6: Im Falle ungerader Dimension hängt die Monodromiegruppe und die Menge von verschwindenden Zykeln nicht nur vom Milnorgitter ab, vergleiche [Chmutov₂, 2.2.].

4.2 Reduktion auf algebraische Resultate

Wir geben in diesem Abschnitt die Beweise der Theoreme 4.1.1, 4.1.2 und 4.1.3. Insbesondere reduzieren wir die Aussagen von Theorem 4.1.2 auf algebraische Sätze über Monodromiegruppen von verschwindenden Gittern, die in Kap. 5 bewiesen werden. Eine entscheidende Rolle spielt dabei der folgende Satz.

Satz 4.2.1: Jede isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension $n \geq 1$, die keine einfache Hyperflächensingularität und nicht vom Typ $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{D}_{n+3}, T_{p,q,r}, T_{p,q,r,s}^2$ oder $T_{2,q,2,s}^n$ ist, kann in eine exzeptionelle unimodale Hyperflächensingularität, eine Singularität $J_{2n+5}^{(n-k)}$ (vgl. Kap. 3.3) oder in eine Singularität T_{2233}^n ($n \geq 3$) (vgl. Kap. 3.1) deformiert werden.

Beweis: Für die Hyperflächensingularitäten folgt die Behauptung aus der Klassifikation von Arnold, wie von D. Siersma bemerkt wurde (vgl. [Brieskorn₄, p. 46]).

Es sei nun $(X,0)$ eine Singularität, die durch einen Abbildungskeim $f: (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ mit $k \geq 2$, isolierter Singularität in 0 und $df(0) = 0$ gegeben wird. Die folgenden Argumente verdanke ich C.T.C. Wall.

Wir betrachten zunächst den Fall $k = 2$ und $n = 1$. Ist der 2-Jet von f regulär, so können wir die Ergebnisse aus Kap. 3.1 anwenden. Hat das zugehörige nicht ausgeartete Büschel von Quadriken nur Eigenwerte der Multiplizität ≤ 2 , so ist die Singularität vom Typ \tilde{D}_4 oder $T_{2,q,2,s}^1$. Andernfalls deformiert die Singularität in eine Singularität mit Segresymbol $\{3\}$, also in eine Singularität der J-Serie. Diese wiederum deformieren in die Singularität J_7 .

Ist der 2-Jet von f singularär, so müssen wir nach [Wall₄, § 4] zwei Fälle betrachten. Im einen Fall hat das zugehörige Bündel Rang 2 und der reguläre Anteil hat das Segresymbol $\{1,1\}$. Dann liefert

$$(2xy, x^2 + y^2 + 2txz)$$

eine Deformation in die J -Serie. Im anderen Fall hat das zugehörige Bündel Rang 0. Dann liefert

$$(2xy, yz + tx^2)$$

eine Deformation in die J -Serie.

Nun sei weiter $k = 2$, aber $n \geq 2$. Ist der 2-Jet von f singularär oder regulär und einer der Eigenwerte des zugehörigen Bündels von Quadriken hat eine Multiplizität ≥ 3 , so deformiert f in einen Abbildungskeim

$$\tilde{f} \oplus (w_1^2, a_1 w_1^2) \oplus \dots \oplus (w_{n-1}^2, a_{n-1} w_{n-1}^2)$$

mit $\tilde{f}: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ und allen a_i verschieden und verschieden von den Eigenwerten von $j^2 \tilde{f}$, so daß \tilde{f} die obigen Eigenschaften hat. Nach dem soeben betrachteten Fall $n = 1$ deformiert \tilde{f} in die Singularität J_7 , also f in die Singularität $J_{2n+5}^{(n-1)}$. Andernfalls ist das zu dem 2-Jet von f gehörige Bündel von Quadriken regulär und alle Eigenwerte haben eine Multiplizität ≤ 2 . Ist f nicht vom Typ \tilde{D}_{n+3} , $T_{p,q,r,s}^2$ oder $T_{2,q,2,s}^n$, so ist $n \geq 3$ und mindestens zwei Eigenwerte haben genau die Multiplizität 2. Die einfachste Singularität mit diesen Eigenschaften ist die Singularität T_{2233}^n . Also deformiert f dann in diese Singularität.

Schließlich betrachten wir den Fall $k \geq 3$, $n \geq 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann $k = 3$ annehmen; da wir sonst f so deformieren können, daß $k-3$ Komponentenfunktionen linear werden. Es sei also $k = 3$. Wir zeigen, daß f eine Störung f_t besitzt, so daß für $t \neq 0$ die Abbildung f_t die gleiche Singularität definiert wie eine Abbildung $\tilde{f}_t: (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, deren 2-Jet einen Eigenwert der Multiplizität ≥ 3 hat.

Es seien $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n+2})$ die Koordinaten von \mathbb{C}^{n+3} und $z' = (z_1, \dots, z_{n+2})$.
 Es sei $j^2 f = (q_1, q_2, q_3)$ und $q_i'(z_1, \dots, z_{n+2}) = q_i(0, z_1, \dots, z_{n+2})$ für $i = 1, 2, 3$.
 Es sei Q_i' die Matrix von q_i' . Dann definiert die homogene Gleichung

$$\det(\xi_1 Q_1' + \xi_2 Q_2' + \xi_3 Q_3') = 0$$

eine Kurve $\Sigma \subset P_2(\mathbb{C})$ vom Grad $n + 2 \geq 3$. Es sei

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden in $P_2(\mathbb{C})$, die die Kurve Σ in einem Punkt mit Schnittmultiplizität ≥ 3 trifft, etwa eine Wendetangente. Wir betrachten dann die Störung

$$f_t(z) = (f_1(z) + ta_1 z_0, f_2(z) + ta_2 z_0, f_3(z) + ta_3 z_0) .$$

Dann hat diese Störung die gewünschten Eigenschaften: Da $a_i \neq 0$ für mindestens ein i gilt, können wir ohne Einschränkung $a_3 \neq 0$ annehmen. Durch einen linearen Koordinatenwechsel im Bildraum können wir erreichen, daß

$$j^2 f_t(z) = (a_3 q_1(z) - a_1 q_3(z), a_3 q_2(z) - a_2 q_3(z), q_3(z) + ta_3 z_0) .$$

Lösen wir die Gleichung $q_3(z) + ta_3 z_0 = 0$ nach z_0 auf und setzen den Ausdruck für z_0 in f_t ein, so erhalten wir:

$$j^2 f_t(z) = (a_3 q_1'(z') - a_1 q_3'(z'), a_3 q_2'(z') - a_2 q_3'(z'), q_3(z) + ta_3 z_0) .$$

Nach der Wahl der a_i , $i = 1, 2, 3$, folgt, daß das durch $a_3 q_1'(z') - a_1 q_3'(z')$ und $a_3 q_2'(z') - a_2 q_3'(z')$ bestimmte Büschel von Quadriken mindestens einen Eigenwert der Multiplizität ≥ 3 besitzt. Daraus folgt die Behauptung des Satzes für f und damit ist Satz 4.2.1 vollständig bewiesen.

Beweis von Theorem 4.1.1: Für Hyperflächensingularitäten ist die Aussage von Theorem 4.1.1 wohlbekannt (vgl. [Arnold₁]).

Wir betrachten daher isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten,

die keine Hyperflächen sind. Die Singularitäten vom Typ \tilde{D}_{n+3} sind parabolisch nach Kap. 2.3. Die Singularitäten vom Typ $T_{p,q,r,s}^2$ und $T_{2,q,2,s}^n$ sind hyperbolisch nach Bemerkung 4.1.4.

Es gilt $\mu_{-\varepsilon} = 2$ für die Singularitäten $J_{2n+5}^{(n-1)}$ nach Kap. 3.3 und für die Singularitäten T_{2233}^n nach Kap. 2.5. Nach Satz 4.2.1 deformieren alle anderen Singularitäten in diese Singularitäten. Nach [Looijenga₃, Proposition (7.13)] gilt dann auch $\mu_{-\varepsilon} \geq 2$ für alle anderen Singularitäten. Damit ist Theorem 4.1.1 bewiesen.

Beweis von Theorem 4.1.2: Wir unterscheiden je nach den Werten von $\mu_{-\varepsilon}$ und μ_0 vier Fälle.

(A) $\mu_{-\varepsilon} = 0$, $\mu_0 = 0$:

In diesem Fall ist das Milnorgitter ε -definit und (X, x) ist eine einfache Hyperflächensingularität. Die Mengen von verschwindenden Zykeln und die Monodromiegruppen sind in diesem Fall endlich. Es sind die Wurzelsysteme und zugehörigen Weylgruppen vom Typ A_μ , D_μ , E_6 , E_7 oder E_8 . Die Aussagen (i) - (iii) prüft man in diesen Fällen leicht nach.

(B) $\mu_{-\varepsilon} = 0$, $\mu_0 \neq 0$:

In diesem Fall ist das Milnorgitter parabolisch. Die zugehörigen Singularitäten sind die Singularitäten vom Typ \tilde{E}_8 , \tilde{E}_7 , \tilde{E}_6 oder \tilde{D}_{n+3} . Hierfür sind die Aussagen (i) - (iii) ebenfalls bekannt (vgl. [Looijenga₃, (7.23) (α)]) bzw. folgen leicht aus Kap. 2.3.

(C) $\mu_{-\varepsilon} = 1$:

Für die hyperbolischen Singularitäten haben wir die Aussagen nur für die Fälle T_{237} , T_{245} , T_{334} , T_{2223}^2 und T_{2223}^4 zu überprüfen. Nach Theorem 4.1.3 und Bemerkung 4.1.4 ist die Monodromiegruppe Γ das semidirekte Produkt von $\ker(H) \otimes \bar{H}$ mit der Coxetergruppe $W = \Gamma_{\mathcal{G}}$ zu dem entsprechenden Coxetergraphen. Es reicht zu zeigen, daß $W = O_{\varepsilon}^*(\bar{H})$ und $\bar{\Delta} = \{v \in \bar{H} \mid \langle v, v \rangle = 2\varepsilon\}$ gilt, wobei $\bar{\Delta}$ das Bild von Δ in \bar{H} ist. Diese Aussagen werden in Kap. 5.5 bewiesen.

(D) $\mu_{-\epsilon} \geq 2$:

In diesem Fall leiten wir die Aussagen von Theorem 4.1.2 aus den algebraischen Resultaten von Kap. 5 ab. Dazu müssen wir zeigen, daß für eine Singularität (X, x) mit $\mu_{-\epsilon} \geq 2$ die verschwindenden Gitter (H, Δ) und $(\hat{H}, \hat{\Delta})$ vollständig im Sinne von Definition 5.3.1 sind. Dann folgt die Aussage (i) aus Theorem 5.3.2 und 5.3.3, die Aussage (ii) aus (i) und Lemma 4.2.2 und die Aussage (iii) aus Satz 5.3.5.

Nach Satz 4.2.1 und Theorem 4.1.1 deformieren alle Singularitäten (X, x) mit $\mu_{-\epsilon} \geq 2$ in eine Singularität (Y, y) , wobei (Y, y) eine exzeptionelle unimodale Hyperflächensingularität oder eine Singularität vom Typ $J_{2n+5}^{(n-1)}$ oder T_{2233}^n ist. Nach [Looijenga₃, Proposition (7.13)] enthält das verschwindende Gitter (H_x, Δ_x) bzw. $(\hat{H}_x, \hat{\Delta}_x)$ von (X, x) das verschwindende Gitter (H_y, Δ_y) bzw. $(\hat{H}_y, \hat{\Delta}_y)$ von (Y, y) . Nach Bemerkung 5.3.8 reicht es daher zu zeigen, daß die verschwindenden Gitter (H_y, Δ_y) und $(\hat{H}_y, \hat{\Delta}_y)$ von (Y, y) vollständig sind.

Die exzeptionellen unimodalen Hyperflächensingularitäten besitzen nach [Ebeling₁] ([Gabrielov₂]) eine spezielle stark ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zykeln, wobei speziell im Sinne von Definition 5.4.1 zu verstehen ist. Die Singularitäten $J_{2n+5}^{(n-1)}$ besitzen nach Bemerkung 3.3.5 und die Singularitäten T_{2233}^n nach Kap. 2.5 eine spezielle schwach ausgezeichnete Basis von verschwindenden Zellen bzw. ein spezielles schwach ausgezeichnetes Erzeugendensystem von verschwindenden Zykeln. Außerdem enthalten die entsprechenden Milnorgitter jeweils ein Untergitter vom Typ $A_2 \perp U \perp U$. Aus Theorem 5.4.2 folgt daher, daß die Aussage (ii) von Korollar 5.3.6 erfüllt ist. Aus diesem Korollar folgt dann, daß die betreffenden verschwindenden Gitter (H_y, Δ_y) und $(\hat{H}_y, \hat{\Delta}_y)$ vollständig sind. Damit ist Theorem 4.1.2 bewiesen.

Lemma 4.2.2: Es sei ein gerades Gitter L , ein Untergitter L_1 mit $L_1 \subset \ker L$ und eine orthogonale Spaltung $L = L_1 \perp K$ gegeben. Dann gibt es dazu eine spaltende exakte Sequenz

$$1 \rightarrow L_1 \otimes \bar{K} \rightarrow O_{\varepsilon}^*(L) \xrightarrow{\leftarrow} O_{\varepsilon}^*(K) \rightarrow 1 .$$

Beweis: Die gegebene Spaltung $L = L_1 \perp K$ führt zunächst zu der folgenden spaltenden exakten Sequenz

$$1 \rightarrow L_1 \otimes K^{\#} \rightarrow O(L) \xrightarrow{\leftarrow} O(K) \times O(L_1) \rightarrow 1 .$$

Dabei operiert $v \otimes \varphi \in L_1 \otimes K^{\#}$ trivial auf L_1 und auf K durch

$(v \otimes \varphi)(y) = y + \varphi(y)v$ für $y \in K$. Für $O_{\varepsilon}^*(L) \subset O(L)$ erhält man daraus die obige Sequenz (vgl. auch [Ebeling₁, § 3]).

Beweis von Theorem 4.1.3: Für die nicht hyperbolischen Singularitäten folgen die Aussagen (i) und (ii) aus Theorem 4.1.2 (i) und Lemma 4.2.2.

Für die hyperbolischen Singularitäten ist die Aussage (i) außer für die Singularitäten $T_{2,q,2,s}^n$ bekannt, siehe [Gabrielov₂], [Looijenga₃, (7.23)]. Die Aussagen (i) und (ii) beweist man für die hyperbolischen Singularitäten mit Hilfe der angegebenen Dynkindiagramme. Aus diesen Dynkindiagrammen folgt, daß der Kern \hat{H} von \hat{H} von Differenzen von verschwindenden Zellen erzeugt wird (vgl. Kap. 2.5 und 2.4). Es sei L ein gerades Gitter mit $L = L_1 \perp K$ und $L_1 \subset \ker L$. Für $v \otimes w \in L_1 \otimes \bar{K}$ mit $\langle w, w \rangle = 2\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, gilt dann:

$(v \otimes w)(y) = (s_w \circ s_{w-\varepsilon v})(y)$ für $y \in L$ ($v \otimes w$ operiert wie die Eichler-Siegel-Transformation $\psi_{-v,w}$, vgl. Kap. 5.1). Mit Hilfe dieser Tatsachen kann man die Behauptungen von Theorem 4.1.3 aus den angegebenen Dynkindiagrammen herleiten.

4.3 Globale Monodromiegruppen und Lefschetzbüschel

Aus den Beschreibungen der lokalen Invarianten in Abschnitt 4.1 kann man auch Resultate für globale Invarianten von projektiven vollständigen Durchschnitten ableiten. Wir betrachten hier den Fall gerader Dimension, zum Fall ungerader Dimension siehe [Janssen₁], [Beauville₁].

Für $d = (d_1, \dots, d_k)$ sei $S_{n,d}$ der projektive Raum, der die vollständigen Durch-

schnitte von k Hyperflächen vom Grad d_1, \dots, d_k im komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}^{n+k} = \mathbb{P}_{n+k}(\mathbb{C})$ parametrisiert. Zu den glatten vollständigen Durchschnitten gehört eine offene Teilmenge $U = U_{n,d}$ dieses Raumes. Es sei $\pi: \mathcal{Y} \rightarrow U$ die zugehörige Familie von glatten projektiven vollständigen Durchschnitten. Es sei Y_u die Faser über einem Basispunkt $u \in U$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(U, u)$ operiert auf der primitiven Kohomologiegruppe $P^n(Y_u, \mathbb{Z})$. Das Bild $\Gamma_{n,d}$ dieser Darstellung $\rho: \pi_1(U, u) \rightarrow \text{Aut}(P^n(Y_u, \mathbb{Z}))$ nennen wir die globale Monodromiegruppe der unversellen Familie von projektiven vollständigen Durchschnitten der Dimension n und vom Multigrad $d = (d_1, \dots, d_k)$. Wie in [Ebeling₃, § 6] für Hyperflächen, kann man allgemeiner für vollständige Durchschnitte aus Theorem 4.1.2 ableiten:

Korollar 4.3.1: Es sei n gerade, $\epsilon = (-1)^{n/2}$. Dann stimmt die globale Monodromiegruppe $\Gamma_{n,d}$ mit der Gruppe $O_\epsilon^*(P^n(Y_u, \mathbb{Z}))$ überein, ist also von endlichem Index in $O(P^n(Y_u, \mathbb{Z}))$ und daher arithmetisch.

Die verschwindenden Zyklen und verschwindenden Zellen sind von Lefschetz ursprünglich im Zusammenhang mit Lefschetzbüscheln eingeführt worden [Lefschetz₁]. Wir können nun unsere Resultate auch auf diese Situation anwenden. Wir stellen diese Situation kurz dar, wobei wir für Einzelheiten auf [Lamotke₁] verweisen.

Ein Bündel von Hyperebenen in \mathbb{P}^N besteht aus allen Hyperebenen von \mathbb{P}^N , die einen festen $(N-2)$ -dimensionalen projektiven Unterraum A enthalten, der die Achse des Bündels genannt wird. Ein solches Bündel entspricht einer Geraden ℓ im dualen projektiven Raum $\check{\mathbb{P}}^N$, und wir bezeichnen das Bündel mit $\{H_t\}_{t \in \ell}$. Es sei V eine nichtsinguläre Untervarietät von \mathbb{P}^N der Dimension $n+1$. Wir betrachten die Durchschnitte $V_t = V \cap H_t$ für $t \in \ell$. Man nennt $\{V_t\}_{t \in \ell}$ ein Bündel von Hyper-ebenenschnitten von V . Für eine Hyperebene H ist $V \cap H$ genau dann nichtsingulär, wenn H nicht tangential zu V ist. Die zu V tangentialen Hyperebenen entsprechen den Punkten der zu V dualen Varietät \check{V} in $\check{\mathbb{P}}^N$. Die duale Varietät ist im allgemeinen eine Hyperfläche mit Singularitäten. Wir verlangen nun, daß die Gerade ℓ die

duale Varietät \check{V} transversal und nur in regulären Punkten schneidet. Diese Bedingung ist für eine generische Gerade ℓ erfüllt. Das Bündel $\{V_t\}_{t \in \ell}$ von Hyperebenenschnitten nennen wir dann ein Lefschetzbüschel. Dann schneidet die Achse A des zugehörigen Bündels von Hyperebenen die Varietät V transversal. Es sei Y der Raum, den man erhält, wenn man V längs A aufbläst. Dann ist Y nichtsingulär, und man erhält eine Abbildung $F : Y \rightarrow \ell$ mit den folgenden Eigenschaften: Die Fasern von F sind die Hyperebenenschnitte V_t und die kritischen Werte von F sind die (endlich vielen) Punkte von $\check{V} \cap \ell$. Die singulären Fasern haben genau einen singulären Punkt, und dieser ist nicht ausgeartet, also ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Außerhalb der kritischen Werte hat man ein lokal triviales Faserbündel

$$F : Y^* \rightarrow \ell^* .$$

Es sei \mathbb{D} eine Kreisscheibe in ℓ , die die kritischen Werte von F im Innern enthält und t ein Punkt auf dem Rand von \mathbb{D} . Es sei $Y_{\mathbb{D}} = F^{-1}(\mathbb{D})$ und $Y_t = F^{-1}(t)$. Nach Kap. 1 sind dann die Menge von verschwindenden Zykeln $\Delta \subset H_n(Y_t, \mathbb{Z})$, die Menge von verschwindenden Zellen $\hat{\Delta} \subset H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t)$ und die zugehörigen Gruppen $\Gamma_{\Delta} \subset \text{Aut}(H_n(Y_t, \mathbb{Z}))$ und $\Gamma_{\hat{\Delta}} \subset \text{Aut}(H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t))$ definiert. Die verschwindenden Zykeln $\delta \in \Delta$ erzeugen die Untergruppe $P_n(Y_t, \mathbb{Z})$ von $H_n(Y_t, \mathbb{Z})$, die primitive oder verschwindende Homologiegruppe. Die Menge der verschwindenden Zellen $\hat{\Delta}$ erzeugt die relative Homologiegruppe $H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t)$, die vom Rang m ist, wobei m die Anzahl der kritischen Werte von F ist. Je zwei verschwindende Zykeln können bis aufs Vorzeichen durch die Gruppe Γ_{Δ} ineinander überführt werden [Lamotke₁, (7.3.5)]. Im Falle gerader Dimension ist also Δ ein Orbit unter Γ_{Δ} . Im Falle ungerader Dimension folgt dies unter der Voraussetzung, daß es $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ gibt mit $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 1$ [Janssen₁, Lemma (2.1)]. Dies ist auch eine der Bedingungen, die ein verschwindendes Gitter (L, Δ) erfüllen muß (siehe Kap. 1.3). Falls es also (außer für $\text{rg } P_n(Y_t, \mathbb{Z}) = 1$) $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ mit $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 1$ gibt, so folgt, daß $(P_n(Y_t, \mathbb{Z}), \Delta)$ und $(H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t), \hat{\Delta})$ verschwindende Gitter sind.

Nun sei V ein vollständiger Durchschnitt und $\{V_t\}_{t \in \ell}$ ein Lefschetzbüschel von Hyperebenenschnitten von V , so daß für alle $t \in \ell$ V_t ein vollständiger Durch-

schnitt der Dimension n und vom Multigrad $d = (d_1, \dots, d_k)$ in \mathbb{P}^{n+k} ist. Ist V hinreichend allgemein, so folgt aus einem Satz von Zariski, daß die Inklusion $\ell^* \subset U_{n,d}$ einen Epimorphismus der Fundamentalgruppen induziert. Anstelle der Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(U_{n,d}, t)$ auf der primitiven Kohomologiegruppe $P^n(Y_t, \mathbb{Z})$ wie oben können wir auch die Operation auf der primitiven Homologiegruppe $P_n(Y_t, \mathbb{Z})$ betrachten, die Poincaré-dual zu $P^n(Y_t, \mathbb{Z})$ ist. Das Bild dieser Darstellung in $O(P_n(Y_t, \mathbb{Z}))$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\Gamma_{n,d}$. Dann folgt, daß die Monodromiegruppe $\Gamma_{n,d}$ mit der Gruppe Γ_Δ übereinstimmt.

Zu der lokalen Situation besteht nun die folgende Beziehung. Es sei Y_0 ein vollständiger Durchschnitt von k Hyperflächen vom Grad d_1, \dots, d_k in \mathbb{P}^{n+k} , der in einem Punkt x eine isolierte Singularität besitzt. Die Milnorfaser X_η dieser Singularität ist der Durchschnitt einer glatten Nachbarfaser Y_η von Y_0 mit einer kleinen Kugel um x in \mathbb{P}^{n+k} . Es sei $H_x = H_n(X_\eta, \mathbb{Z})$ und $\Delta_x \subset H_x$ die zugehörige Menge von verschwindenden Zykeln. Durch Transport von Y_η nach Y_t erhält man einen Homomorphismus $\iota: H_x \rightarrow P_n(Y_t, \mathbb{Z})$, der die Schnittformen respektiert und Δ_x nach Δ abbildet. Ist die Schnittform auf H_x nicht ausgeartet, so ist dieser Homomorphismus injektiv.

Es sei nun n gerade. Unter Benutzung der obigen Beziehung kann man dann zeigen, daß die Paare $(P_n(Y_t, \mathbb{Z}), \Delta)$ und $(H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t), \hat{\Delta})$ für $k = 1$, $d \geq 3$ und $n \geq 4$ für $d = 3$, sowie $k \geq 2$, $d \neq (2,2)$ vollständige verschwindende Gitter sind [Beauville₁]. Dazu muß man geeignete Singularitäten (Y_0, x) finden, für die nach dem Beweis von Theorem 4.1.2 die verschwindenden Gitter (H_x, Δ_x) vollständig sind, und für die die Gitter H_x außerdem nicht ausgeartet sind. In [Beauville₁] wird zum Beispiel gezeigt, daß man unter den angegebenen Voraussetzungen immer einen vollständigen Durchschnitt der Dimension n und vom Multigrad d in \mathbb{P}^{n+k} finden kann, der eine exzeptionelle unimodale Hyperflächensingularität vom Typ U_{12} hat. Also folgt, daß auch in diesem Fall die Beschreibungen von Theorem 4.1.2 für die Mengen Δ und $\hat{\Delta}$ und die Gruppen $\Gamma_\Delta = \Gamma_{n,d}$ und $\Gamma_{\hat{\Delta}}$ gelten, wobei man hier H durch $P_n(Y_t, \mathbb{Z})$ und \hat{H} durch $H_{n+1}(Y_{\mathbb{D}}, Y_t)$ zu ersetzen hat. Es bleiben nun noch die Qua-

driken, kubischen Flächen und Durchschnitte von zwei Quadriken übrig. Für diese sind die Gitter $P_n(Y_t, Z)$ definit und entsprechen den Gittern A_1, E_6 bzw. D_{n+3} . Man prüft nun direkt nach, daß die Beschreibungen von Theorem 4.1.2 entsprechend auch für diese vollständigen Durchschnitte mit Ausnahme der Aussage (iii) für die Quadriken gelten.

Bemerkung 4.3.2: Der Index in Korollar 4.3.1 läßt sich auch genau bestimmen. Das Gitter $L = P^n(Y_u, Z)$ ist nicht ausgeartet. Für indefinites L folgt aus [Nikulin₁, 1.14.2], daß der Homomorphismus $\tau: O(L) \rightarrow O(L^\# / L)$ surjektiv ist. Dies kann man im übrigen auch für die obigen definiten Gitter zeigen. Für eine Spiegelung s_v zu einem Vektor v mit $\langle v, v \rangle = -2\epsilon$ gilt: $\sigma_\epsilon(s_v) = -1$, aber $s_v \in \ker \tau$. Deshalb ist für indefinites L der Index von $\Gamma_{n,d}$ in $O(L)$ gleich der Ordnung von $O(L^\# / L)$ multipliziert mit 2.

Beispiel 4.3.3: Für $k = 1$, $n = 2$, $d = 4$ ist der Index von $\Gamma_{n,d}$ in $O(L)$ gleich 4.

In dem uns vorliegenden Preprint [Beauville₁] wird behauptet, daß die Gruppe $\Gamma_{n,d}$ mit der Untergruppe $O'_\epsilon(L)$ von $O(L)$ zusammenfällt, die für indefinite Gitter L vom Index 2 in $O(L)$ ist. Dies ist deshalb leider im allgemeinen nicht richtig.

5. MONODROMIEGRUPPEN VON SYMMETRISCHEN VERSCHWINDENDEN GITTERN

5.1 Einheiten von Gittern

Es sei L ein gerades Gitter, d.h. ein freier endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit $\langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$. Wir bezeichnen mit $O(L)$ die Gruppe der Einheiten (= Isometrien) von L . Es sei $\varepsilon = \pm 1$. Ein Vektor $\delta \in L$ mit $\langle \delta, \delta \rangle = 2\varepsilon$ heißt ein Minimalvektor der Quadratlänge 2ε . Die zu einem solchen Vektor δ gehörige Spiegelung s_δ ist definiert durch

$$s_\delta(x) = x - \frac{2\langle x, \delta \rangle}{\langle \delta, \delta \rangle} \delta \quad \text{für } x \in L.$$

Es sei $\Delta \subset L$ eine Teilmenge von L mit $\langle \delta, \delta \rangle = 2\varepsilon$ für alle $\delta \in \Delta$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Z}\Delta$ das Untergitter, das von Δ aufgespannt wird, und mit Γ_Δ die Untergruppe von $O(L)$, die von den Spiegelungen s_δ für $\delta \in \Delta$ erzeugt wird. Mit $R_\varepsilon(L)$ bezeichnen wir diejenige Untergruppe von $O(L)$, die von allen Spiegelungen s_v , die zu Minimalvektoren v der Quadratlänge 2ε gehören, erzeugt wird.

Wir definieren eine Untergruppe $O_\varepsilon^*(L)$ von $O(L)$ wie folgt. Wir bezeichnen den Kern (das Radikal) von L mit $\ker L$ und definieren $\bar{L} = L/\ker L$, das zugehörige nicht ausgeartete Gitter. Außerdem setzen wir $\bar{L}_{\mathbb{R}} = \bar{L} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}\bar{L}$. Wir definieren einen Homomorphismus

$$\sigma_\varepsilon : O(L) \rightarrow \{+1, -1\}$$

(reelle Spinornorm) wie folgt. Es sei $g \in O(L)$ und \bar{g} das induzierte Element in $O(\bar{L}) \subset O(\bar{L}_{\mathbb{R}})$. Dann kann man \bar{g} in $O(\bar{L}_{\mathbb{R}})$ als Produkt von Spiegelungen

$\bar{g} = s_{v_1} \circ \dots \circ s_{v_r}$ schreiben. Wir definieren

$$\sigma_\varepsilon(g) := \begin{cases} +1 & \text{falls } \varepsilon \langle v_i, v_i \rangle < 0 \text{ für eine gerade Anzahl von Indizes,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $L^\#$ das duale Gitter $\text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ und mit $j : L \rightarrow L^\#$ den natürlichen Homomorphismus. Es sei τ der kanonische Homomorphismus

$$\tau : O(L) \rightarrow \text{Aut}(L^\# / jL) .$$

Definition 5.1.1: $O_\varepsilon^*(L) := \ker \sigma_\varepsilon \cap \ker \tau .$

Es sei nun $f \in L$ ein isotroper Vektor (d.h. $\langle f, f \rangle = 0$) und $w \in L$ ein zu f orthogonaler Vektor. Dann ist die Eichler-Siegel-Transformation $\psi_{f,w} \in O(L)$ definiert durch

$$\psi_{f,w}(x) = x + \langle x, f \rangle w - \langle x, w \rangle f - \frac{1}{2} \langle w, w \rangle \langle x, f \rangle f$$

für $x \in L$ [Eichler₁]. Es sei U eine unimodulare hyperbolische Ebene mit einer Basis $\{f_1, f_2\}$ von isotropen Vektoren mit $\langle f_1, f_2 \rangle = 1$. Wir nehmen an, daß L die orthogonale direkte Summe von U und einem geraden Gitter M ist, $L = M \perp U$.

Definition 5.1.2: Es sei $\Psi_U(L)$ diejenige Untergruppe von $O(L)$, die von den Transformationen $\psi_{f_1,w}$ und $\psi_{f_2,w}$ für beliebige $w \in M$ erzeugt wird.

Wir stellen hier einige Eigenschaften dieser Transformationen zusammen (vgl. [Eichler₁], [Ebeling₃]):

(a) Alle Elemente $\varphi \in \Psi_U(L)$ haben Determinante 1 und Spinornorm

$$\sigma_+(\varphi) = \sigma_-(\varphi) = 1 .$$

(b) Für $w, w' \in M$ und $i = 1, 2$ gilt

$$\psi_{f_i, w} \circ \psi_{f_i, w'} = \psi_{f_i, w+w'} ,$$

also definiert $w \mapsto \psi_{f_i, w}$ einen Homomorphismus $M \rightarrow \Psi_U(L)$.

(c) Für $w \in M$ mit $\langle w, w \rangle = 2\varepsilon$ gelten die folgenden Formeln:

$$(c1) \quad \psi_{f_i, w} = s_w \circ s_{w+\epsilon f_i} ,$$

$$(c2) \quad s_w = \psi_{f_2, w} \circ \psi_{f_1, \epsilon w} \circ \psi_{f_2, w} \circ s_{f_1 + \epsilon f_2} .$$

(d) $O(U)$ normalisiert $\Psi_U(L)$.

(e) Es sei $L = U' \perp U$ für eine weitere unimodulare hyperbolische Ebene U' .

Dann gibt es für jeden Vektor $x \in U' \perp U$ ein $\varphi \in \Psi_U(U' \perp U)$, so daß

$$\varphi(x) = \alpha f_1 + \beta f_2 \quad \text{mit} \quad \alpha | \beta .$$

Aus der Eigenschaft (e) folgt unmittelbar das folgende Lemma, das eine wichtige Rolle spielt

Lemma 5.4.1: Es sei $L = L'' \perp U' \perp U$. Dann existiert zu jedem Vektor $v \in L$ ein $\varphi \in \Psi_U(U' \perp U)$ mit $\varphi(v) \in L'' \perp U'$.

Hierbei fassen wir $\Psi_U(U' \perp U)$ in natürlicher Weise als Untergruppe von $\Psi_U(L)$ auf.

Es sei Δ eine Menge von Minimalvektoren der Quadratlänge 2ϵ . Dann hat man zwischen den verschiedenen Gruppen die folgenden Inklusionen:

$$\Gamma_{\Delta} \subset R_{\epsilon}(L) \subset O_{\epsilon}^*(L) \subset O(L) ,$$

$$\Psi_U(L) \subset O_{\pm}^*(L) .$$

Aus (b) und der Formel (c1) folgt, daß zusätzlich gilt

$$\Psi_U(L) \subset R_{\epsilon}(L) ,$$

falls M von Minimalvektoren der Quadratlänge 2ϵ aufgespannt wird.

5.2 Symmetrische verschwindende Gitter

Wir betrachten hier das symmetrische Analogon zu einem schief-symmetrischen verschwindenden Gitter, das in [Janssen₁] eingeführt wurde. Es sei $\epsilon \in \{+1, -1\}$ fest gewählt.

Definition 5.2.1: Es sei L ein gerades Gitter und $\Delta \subset L$ eine Teilmenge von L . Ein Paar (L, Δ) nennen wir ein (symmetrisches) verschwindendes Gitter, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Δ besteht aus Minimalvektoren der Quadratlänge 2ϵ .
- (ii) Δ erzeugt L .
- (iii) Δ ist ein Γ_Δ -Orbit.
- (iv) Falls der Rang $\text{rg}(L)$ ungleich 1 ist, so existieren $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ mit $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 1$.

Die Gruppe Γ_Δ nennen wir die Monodromiegruppe des verschwindenden Gitters.

Beispiel 5.2.2: Die symmetrischen verschwindenden Gitter (L, Δ) mit ϵ -definitem Gitter L sind genau die Paare (L, Δ) , wobei Δ ein irreduzibles homogenes Wurzelsystem, also vom Typ A_m, D_m, E_6, E_7 oder E_8 ist, und L das zugehörige Wurzelgitter. Dabei ist im Fall $\epsilon = -1$ die übliche Bilinearform von [Bourbaki₂] mit $\epsilon = -1$ zu multiplizieren. Wir bezeichnen die entsprechenden Gitter ebenfalls mit den Symbolen A_m, D_m usw., wobei wir vereinbaren, daß die übliche Bilinearform mit ϵ zu multiplizieren ist. Die Monodromiegruppen Γ_Δ sind gerade die zugehörigen Weylgruppen. Diese Charakterisierung der definiten verschwindenden Gitter folgt aus [Bourbaki₂, Ch. VI, § 4, insbesondere n^o4]. Aus der Bedingung (iii) für (L, Δ) folgt gerade die Irreduzibilität des Wurzelsystems Δ . Die ϵ -definiten verschwindenden Gitter sind also genau die Milnorgitter der einfachen Hyperflächensingularitäten in Dimension

$$n \equiv \begin{cases} 0 \pmod{4} & \text{für } \varepsilon = +1, \\ 2 \pmod{4} & \text{für } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Bemerkung 5.2.3: Ist für ein verschwindendes Gitter (L, Δ) die Menge Δ oder die Monodromiegruppe Γ_Δ endlich, so ist das Gitter L definit. Den folgenden einfachen Beweis für diese Tatsache verdanke ich K. Saito (siehe auch [Saito₁, (1.3) Note 2]). Ist Δ endlich, so ist auch Γ_Δ endlich, da Γ_Δ als Untergruppe der Permutationsgruppe von Δ aufgefaßt werden kann. Sei also Γ_Δ endlich und $b: L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ irgendeine (positiv oder negativ) definite symmetrische Bilinearform. Dann wird durch

$$b'(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\Delta} b(\gamma x, \gamma y), \quad \text{für } x, y \in L,$$

eine unter Γ_Δ invariante definite symmetrische Bilinearform definiert. Nach [Bourbaki₂, Ch. V, § 2, Proposition 1] stimmt b' bis aufs Vorzeichen mit \langle, \rangle überein.

Beispiel 5.2.4: Es sei $\varepsilon = \pm 1$ und Q ein gerades Gitter, das eine Basis $B = \{e_1, \dots, e_r\}$ mit $\langle e_i, e_i \rangle = 2\varepsilon$ und

$$\langle e_i, e_j \rangle = -\varepsilon \quad \text{oder} \quad 0$$

für $1 \leq i \neq j \leq r$ besitzt. Dabei sei das Dynkindiagramm zu B ein zusammenhängender Graph. Es sei $S = \{s_{e_i} \mid i = 1, \dots, r\}$ und W die von S erzeugte Untergruppe von $O(Q)$. Dann ist (W, S) ein irreduzibles Coxetersystem (vgl. [Bourbaki₂, Ch. V, § 4]). Wir definieren $R = W.B = \{w(e_i) \mid w \in W, e_i \in B\}$. Dann ist (Q, R) ein verschwindendes Gitter und die zugehörige Monodromiegruppe Γ_R stimmt mit der Coxetergruppe W überein. Ist Q ε -definit, so sind wir im Fall von Beispiel 5.2.2 und die zugehörigen verschwindenden Gitter (Q, R) sind gerade die verschwindenden Gitter zu den klassischen irreduziblen homogenen Wurzelsystemen R . Ist Q ε -semidefinit, so sind die verschwindenden Gitter (Q, R) gerade die verschwindenden Gitter zu den zugehörigen affinen Wurzelsystemen R [Bourbaki₂, Ch. VI, § 4.3]. Ist Q indefinit,

so ist die Gruppe W im allgemeinen nicht von endlichem Index in $O(Q)$. Denn wenn Q nicht ausgeartet und indefinit ist, so ist nach [Bourbaki₂, Ch. V, § 4, Exercice 12] W höchstens dann von endlichem Index in $O(Q)$, wenn (W,S) ein Coxetersystem vom hyperbolischen Typ ist. Das bedeutet, daß das Gitter Q hyperbolisch ist und jede echte Teilmenge von B ein semidefinites Untergitter von Q aufspannt. Solche verschwindenden Gitter werden in Abschnitt 5.5 betrachtet.

5.3 Vollständige verschwindende Gitter

Wir führen nun zusätzliche Bedingungen an ein verschwindendes Gitter ein.

Es sei wieder $\varepsilon = \pm 1$ wie oben fest. Wir betrachten zunächst das Gitter $A_2 \perp U' \perp U$. Es sei $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine Basis von A_2 aus Minimalvektoren der Länge 2ε mit $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = -\varepsilon$. Es seien $\{f_1, f_2\}$ bzw. $\{f'_1, f'_2\}$ Basen aus isotropen Vektoren von U bzw. U' mit $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f'_1, f'_2 \rangle = 1$. Wir setzen

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_1 - f_1, f_1 + \varepsilon f_2, \omega_1 - f'_1, f'_1 + \varepsilon f'_2\}.$$

Die Menge Ω bildet eine Basis von $A_2 \perp U' \perp U$ aus Minimalvektoren der Quadratlänge 2ε .

Definition 5.3.1: Ein verschwindendes Gitter (L, Δ) heißt vollständig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) L enthält ein Untergitter $A_2 \perp U' \perp U$.
- (ii) Δ enthält die oben definierte Teilmenge Ω dieses Untergitters.

Wir können nun das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

Theorem 5.3.2: Es sei (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Dann gilt

$$\Gamma_{\Delta} = R_{\varepsilon}(L).$$

Diesen Satz beweisen wir in Abschnitt 5.4.

M. Kneser hat den folgenden Satz bewiesen.

Theorem 5.3.3 (M. Kneser): Es sei L ein gerades Gitter, so daß für das zugehörige nicht ausgeartete Gitter \bar{L} gilt:

(i) Der Witt-Index von $\bar{L}_{\mathbb{R}}$ sei mindestens 2.

(ii) \bar{L} enthalte ein Untergitter L_1 vom Rang $\text{rg}(L_1) \geq 5$, dessen Diskriminante $\text{disk}(L_1)$ nicht durch 3 teilbar ist, sowie ein Untergitter L_2 mit $\text{rg}(L_2) \geq 6$, $2 \nmid \text{disk}(L_2)$.

Dann gilt

$$R_{\varepsilon}(L) = O_{\varepsilon}^*(L) .$$

Dieser Satz folgt mit Hilfe der Argumente in [Ebeling₂, Beweis von Theorem 3.1c)] aus [Kneser₁, Satz 4].

Die Voraussetzungen von Theorem 5.3.3 sind insbesondere für Gitter L erfüllt, die ein Untergitter $A_2 \perp U' \perp U$ enthalten, also auch für vollständige verschwindende Gitter. Durch Kombination von Theorem 5.3.2 und Theorem 5.3.3 erhält man deshalb:

Theorem 5.3.4: Es sei (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Dann gilt

$$\Gamma_{\Delta} = O_{\varepsilon}^*(L) .$$

Mit Hilfe des folgenden Satzes folgt aus diesem Theorem, daß die Menge Δ für ein vollständiges verschwindendes Gitter (L, Δ) bereits durch L bestimmt ist.

Satz 5.3.5: Es sei (L, Δ) ein verschwindendes Gitter, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es existiert eine orthogonale Spaltung $L = L'' \perp U' \perp U$.

(ii) $\Psi_U(L) \subset \Gamma_\Delta$ (Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\Gamma_\Delta = O_\epsilon^*(L)$).

Dann gilt:

$$\Delta = \{v \in L \mid \langle v, v \rangle = 2\epsilon \text{ und } \langle v, L \rangle = \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Dieser Satz folgt aus einem allgemeineren Resultat von E. Looijenga (vgl. [Brieskorn₄, 4.2]).

Wir geben hier für den Leser einen direkten Beweis, der an den Beweis von [Looijenga-Peters, Theorem (2.4)] angelehnt ist (Man vergleiche auch [Pjateckiĭ-Šapiro-Šafarevič, Appendix to § 6]). Daß Δ in der Menge auf der rechten Seite enthalten ist, folgt aus der Definition eines verschwindenden Gitters. Sei deshalb v ein Element aus der Menge auf der rechten Seite. Wir schreiben $v = v' + v''$ mit $v' \in U' \perp U$ und $v'' \in L''$. Es sei $\{f_1, f_2\}$ eine Basis von U wie oben. Nach 5.1(e) existiert ein $\varphi \in \Psi_U(U' \perp U)$, so daß für $\tilde{v}' = \varphi(v)$ gilt: $\langle \tilde{v}', f_2 \rangle \mid \langle \tilde{v}', f_1 \rangle$. Da aber $\varphi(v'') = v''$ gilt, folgt, daß auch für $\tilde{v} = \varphi(v)$ gilt: $\langle \tilde{v}, f_2 \rangle \mid \langle \tilde{v}, f_1 \rangle$. Wir können deshalb annehmen, daß dies schon für v gilt. Da $\langle v, L \rangle = \mathbb{Z}$ gilt, gibt es ein $y \in L$ mit $\langle v, y \rangle = -1$. Wir schreiben $y = y_1 + y_2$, wobei $y_1 \in L'' \perp U'$ und $y_2 \in U$. Dann gilt

$$\psi_{f_2, y_1}(v) = \alpha f_1 + \beta f_2 + v_1$$

mit $v_1 \in L'' \perp U'$. Der größte gemeinsame Teiler von α und β ist aber 1, da $\alpha = \langle v, f_2 \rangle$ und

$$\begin{aligned} \beta &= \langle v, f_1 \rangle - \langle v, y_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle y_1, y_1 \rangle \langle v, f_2 \rangle \\ &\equiv -\langle v, y_1 \rangle \pmod{\alpha} \equiv -\langle v, y \rangle \pmod{\alpha} \equiv 1 \pmod{\alpha}. \end{aligned}$$

Nach 5.1 (e) können wir nach einer erneuten Anwendung eines Elements von

$\Psi_U(U' \perp U)$ annehmen, daß $\alpha = 1$ ist. Dann bildet $\psi_{f_2, -v_1}$ diesen Vektor auf einen Vektor der Form $f_1 + \tilde{\epsilon} f_2$ ab. Aber

$$\langle f_1 + \tilde{\epsilon} f_2, f_1 + \tilde{\epsilon} f_2 \rangle = \langle v, v \rangle = 2\epsilon$$

impliziert $\tilde{\epsilon} = \epsilon$. Also kann jeder Minimalvektor v der Quadratlänge 2ϵ mit $\langle v, L \rangle = \mathbb{Z}$ durch ein Element von $\Psi_U(L) \subset \Gamma_\Delta$ auf den Vektor $f_1 + \epsilon f_2$ abgebildet werden. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 5.3.6: Es sei (L, Δ) ein verschwindendes Gitter, und L enthalte ein Untergitter $A_2 \perp U' \perp U$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) (L, Δ) ist vollständig.
- (ii) $\Psi_U(L) \subset \Gamma_\Delta$.
- (iii) Δ enthält alle Minimalvektoren der Quadratlänge 2ϵ von $A_2 \perp U' \perp U$.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii) folgt aus Theorem 5.3.4.

(ii) \Rightarrow (iii) folgt aus Satz 5.3.5, wenn man beachtet, daß für einen Minimalvektor $v \in K = A_2 \perp U' \perp U$ gilt: $\langle v, K \rangle = \mathbb{Z}$.

(iii) \Rightarrow (i) ist trivial.

Bemerkung 5.3.7: Die Bedingung (i) von Definition 5.3.1, nämlich die Existenz eines Untergitters $A_2 \perp U' \perp U$, ist zwar hinreichend für Theorem 5.3.3, aber nicht für Theorem 5.3.2, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir betrachten das nicht ausgeartete Gitter $L := A_2 \perp A_2 \perp U' \perp U$. Dann existiert eine Basis B von L , die aus Minimalvektoren der Quadratlänge 2ϵ besteht, so daß die Matrix der Bilinearform bezüglich dieser Basis durch das Dynkindiagramm von Abbildung 5.3.1 gegeben wird (man beachte die Konvention von Kap. 1.5).

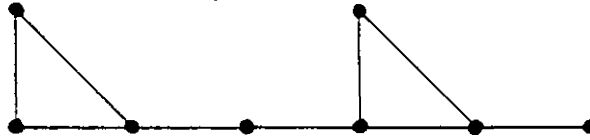


Abbildung 5.3.1

Es sei (L, Δ) das verschwindende Gitter, das nach Beispiel 5.2.4 durch B definiert ist. Da L nicht ausgeartet, indefinit und nicht hyperbolisch ist, ist nach Beispiel 5.2.4 die Gruppe Γ_{Δ} nicht von endlichem Index in $O(L)$. Nach Theorem 5.3.4 ist daher das verschwindende Gitter (L, Δ) nicht vollständig.

Bemerkung 5.3.8: Es seien (L, Δ_L) und (K, Δ_K) verschwindende Gitter. Wir sagen, daß (L, Δ_L) das verschwindende Gitter (K, Δ_K) enthält, falls K ein primitives Untergitter von L ist und $\Delta_K \subset \Delta_L$ gilt. Es sei $M = A_2 \perp U \perp U'$ und $\Omega \subset M$ die obige Basis von M . Wir setzen $\bar{\Omega} = \Gamma_{\Omega} \cdot \Omega$. Dann kann man leicht zeigen, daß $(M, \bar{\Omega})$ ein verschwindendes Gitter ist (vgl. Beispiel 5.4.3). Die Definition 5.3.1 kann dann auch so formuliert werden: Ein verschwindendes Gitter (L, Δ) ist genau dann vollständig, wenn es das verschwindende Gitter $(M, \bar{\Omega})$ enthält. Nach Korollar 5.3.6 besteht $\bar{\Omega}$ aus allen Minimalvektoren der Quadratlänge 2ε von M . Man beachte, daß ein verschwindendes Gitter (L, Δ_L) , das ein vollständiges verschwindendes Gitter enthält, selbst vollständig ist.

5.4 Spezielle Teilmengen

In diesem Abschnitt geben wir den Beweis von Theorem 5.3.2. Zu diesem Zweck müssen wir den Begriff einer speziellen Untermenge einführen. Es sei L ein gerades Gitter und Λ eine Teilmenge von L . Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Λ , die mit \sim_{Λ} bezeichnet wird, wie folgt. Für $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ sei $\lambda \sim_{\Lambda} \lambda'$ genau dann, wenn es eine

Folge $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k = \lambda'$ gibt mit $\langle \lambda_{i-1}, \lambda_i \rangle = -\varepsilon$ und $\lambda_i \in \Lambda$ für $i = 1, \dots, k$, oder wenn $\lambda = \lambda'$ ist.

Definition 5.4.1: Eine Teilmenge $\Lambda \subset L$ heißt speziell, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Λ besteht aus Minimalvektoren der Quadratlänge 2ε .
- (ii) Es existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ mit $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = -\varepsilon$ und $\langle \lambda_1, \lambda \rangle = 0$, $\langle \lambda_2, \lambda \rangle = \langle \lambda_3, \lambda \rangle$ für alle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$.
- (iii) Es sei $\Lambda' = \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Dann gilt $\lambda \sim_{\Lambda'} \lambda_3$ für alle $\lambda \in \Lambda'$.

Es sei Λ eine spezielle Teilmenge von L und $\Lambda' = \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ wie oben. Wir setzen

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_2 + \lambda_3, \\ f_2 &= \varepsilon \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \\ U &= \mathbb{Z} \cdot f_1 + \mathbb{Z} \cdot f_2. \end{aligned}$$

Dann ist U eine unimodulare hyperbolische Ebene und

$$\mathbb{Z} \cdot \Lambda = U \perp \mathbb{Z} \cdot \Lambda'.$$

Theorem 5.4.2: Es sei $\Lambda \subset L$ eine spezielle Teilmenge. Dann gilt $\Psi_U(\mathbb{Z} \cdot \Lambda) \subset \Gamma_{\Delta}$.

Wenn darüberhinaus eine weitere unimodulare hyperbolische Ebene U' in $\mathbb{Z} \cdot \Lambda'$ enthalten ist, so gilt $R_{\varepsilon}(\mathbb{Z} \cdot \Lambda) = \Gamma_{\Delta}$.

Der Beweis von Theorem 5.4.2 ist der gleiche wie der Beweis von [Ebeling₂, Theorem 3], angewandt auf das Gitter $K = \mathbb{Z} \cdot \Lambda$, außer daß wir keine Basis B' von $K' = \mathbb{Z} \cdot \Lambda'$ haben, sondern nur ein Erzeugendensystem Λ' . Aber die lineare Unabhängigkeit der Elemente von B' wird nicht benutzt.

Beispiel 5.4.3: Es sei Ω die Teilmenge des Gitters $M = A_2 \perp U' \perp U$ von Abschnitt 5.3. Dann ist Ω speziell: Es sei $\lambda_1 = f_1 + ef_2$, $\lambda_2 = \omega_1 - f_1$, $\lambda_3 = \omega_1$. Man prüft leicht nach, daß alle Elemente von Ω bezüglich \sim_Ω äquivalent sind. Für $\omega \in \Omega' = \Omega - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ gilt sogar $\omega \sim_\Omega \lambda_3$. Ferner gilt $U' \subset \mathbb{Z} \cdot \Omega'$. Aus Theorem 5.4.2 folgt daher

$$\Psi_U(U' \perp U) \subset \Psi_U(\mathbb{Z} \cdot \Omega) \subset \Gamma_\Omega.$$

Es sei nun (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Die Idee des Beweises von Theorem 5.3.2 besteht nun darin, die Teilmenge $\Omega \subset \Delta$ zu einem speziellen Erzeugendensystem $\Lambda \subset \Delta$ von L zu erweitern und anschließend Theorem 5.4.2 anzuwenden. Dazu dienen die folgenden Hilfssätze.

Lemma 5.4.4: Es sei (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Dann ist Δ eine Äquivalenzklasse bezüglich \sim_Δ .

Beweis: Jede Äquivalenzklasse $\tilde{\Delta}$ ist ein Γ_Δ -Orbit. Denn $\langle \delta, \delta' \rangle = -\epsilon$ impliziert $s_\delta s_{\delta'}(\delta') = \delta'$. Andererseits gilt $\Gamma_\Delta(\tilde{\Delta}) \subset \tilde{\Delta}$. Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß mit δ auch $s_\delta(\delta) = -\delta$ in $\tilde{\Delta}$ liegt. Denn es gibt ein $\gamma \in \Gamma_\Delta$ mit $\gamma(\omega_2) = \delta$, und

$$\{\gamma(\omega_2), \gamma(\omega_1 - f_1), \gamma(f_1 + ef_2)\}$$

ist die Basis eines Wurzelsystems vom Typ A_3 , das in $\tilde{\Delta}$ enthalten ist. Nun sei $\delta, \delta' \in \tilde{\Delta}$. Dann kann man leicht durch Induktion über die minimale Länge einer Folge $\delta = \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k = \delta'$ mit $\langle \delta_{i-1}, \delta_i \rangle = 1$ und $\delta_i \in \tilde{\Delta}$ für $i = 1, \dots, k$ zeigen, daß $s_\delta(\delta') \in \tilde{\Delta}$ gilt.

Da Γ_Δ die symmetrische Bilinearform respektiert, permutiert Γ_Δ Äquivalenzklassen. Es sei nun $\tilde{\Delta}$ eine Äquivalenzklasse und $\delta \in \Delta$. Dann reicht es zu zeigen, daß es ein $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$ gibt mit $s_\delta(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}$, also $\langle \delta, \tilde{\delta} \rangle = 0$. Denn daraus folgt, daß Γ_Δ die Äquivalenzklasse $\tilde{\Delta}$ invariant läßt, also $\tilde{\Delta} = \Gamma_\Delta \cdot \tilde{\Delta} = \Delta$ gilt.

Es sei $\delta_1 \in \tilde{\Delta}$. Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma_{\Delta}$ mit $\gamma(\omega_1) = \delta_1$. Daraus folgt $\gamma(\Omega) \subset \tilde{\Delta}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\delta_1 = \omega_1$ annehmen, da wir sonst $U' \perp U$ durch $\gamma^{-1}(U' \perp U)$ und ω_1, ω_2 durch $\gamma^{-1}(\omega_1), \gamma^{-1}(\omega_2)$ ersetzen können. Dann gilt $\Omega \subset \tilde{\Delta}$. Da das Gitter $U' \perp U \subset \mathbb{Z} \cdot \Omega$ unimodular ist, können wir $L = L'' \perp U' \perp U$ schreiben. Nach Lemma 5.1.4 gibt es dann ein $\varphi \in \Psi_U(U' \perp U) \subset \Gamma_{\Omega}$ mit $\varphi(\delta) \in L'' \perp U$. Dann gilt

$$\langle \delta, \varphi^{-1}(f_1 + \epsilon f_2) \rangle = \langle \varphi(\delta), f_1 + \epsilon f_2 \rangle = 0,$$

und $f_1 + \epsilon f_2 \in \tilde{\Delta}$, $\varphi \in \Gamma_{\tilde{\Delta}}$. Da jede Äquivalenzklasse $\tilde{\Delta}$ ein $\Gamma_{\tilde{\Delta}}$ -Orbit ist, haben wir damit das Lemma bewiesen.

Lemma 5.4.5: Es sei (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Es sei

$$\Delta_0 := \{ \delta \in \Delta \mid \langle \omega_1, \delta \rangle = -\epsilon \text{ oder } \delta = \omega_1 \}.$$

Dann gilt $\Gamma_{\Delta_0} = \Gamma_{\Delta}$ und $L = \mathbb{Z} \cdot \Delta_0$.

Beweis: Der Beweis ist der gleiche wie der von Lemma (2.7) in [Janssen₁]. Es sei

$\delta \in \Delta$. Mit $\ell(\delta)$ bezeichnen wir die minimale Länge einer Folge

$\omega_1 = \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k = \delta$ mit $\delta_i \in \Delta$ und $\langle \delta_{i-1}, \delta_i \rangle = -\epsilon$ für $i = 1, \dots, k$, die

nach Lemma 5.4.4 existiert. Durch Induktion über $\ell(\delta)$ zeigen wir: $\delta \in \Gamma_{\Delta_0} \cdot \omega_1$.

Für $\ell(\delta) = 0$ gilt $\delta = \omega_1$. Nun sei $k = \ell(\delta) > 0$, und es sei eine Folge wie

oben gegeben. Nach Induktionsannahme gibt es ein $\gamma \in \Gamma_{\Delta_0}$ mit $\gamma(\delta_{k-1}) = \omega_1$.

Aber

$$\langle \omega_1, \gamma(\delta_k) \rangle = \langle \gamma(\delta_{k-1}), \gamma(\delta_k) \rangle = \langle \delta_{k-1}, \delta_k \rangle = -\epsilon,$$

also gilt $s_{\gamma(\delta_k)} \in \Gamma_{\Delta_0}$. Daraus folgt

$$s_{\delta_k} = \gamma^{-1} s_{\gamma(\delta_k)} \gamma \in \Gamma_{\Delta_0}.$$

Deshalb gilt

$$\delta_k = s_{\delta_{k-1}} s_{\delta_k} (\delta_{k-1}) \in \Gamma_{\Delta_0} \cdot \omega_1 .$$

Nun impliziert $\Delta = \Gamma_{\Delta_0} \cdot \Delta_0$ aber $\Gamma_{\Delta_0} = \Gamma_{\Delta}$ und $L = \mathbb{Z} \cdot \Delta = \mathbb{Z} \cdot (\Gamma_{\Delta_0} \cdot \Delta_0) \subset \mathbb{Z} \cdot \Delta_0$.

Satz 5.4.6: Es sei (L, Δ) ein vollständiges verschwindendes Gitter. Es sei

$$\Lambda_0 := \{ \delta \in \Delta \mid \langle f_1, \delta \rangle = \langle f_2, \delta \rangle = 0 \} ,$$

$$\Lambda' := \{ \delta \in \Delta_0 \mid \delta \sim_{\Lambda_0} \omega_1 \} ,$$

$$\Lambda := \Lambda' \cup \{ \omega_1 - f_1, f_1 + \epsilon f_2 \} .$$

Dann ist Λ eine spezielle Teilmenge von L mit $\Omega \subset \Lambda \subset \Delta$, $U' \subset \mathbb{Z} \cdot \Lambda'$ und

$$L = \mathbb{Z} \cdot \Lambda .$$

Beweis: Es ist klar, daß Λ speziell ist und daß $\Omega \subset \Lambda$ gilt. Da U' in $\mathbb{Z} \cdot \Omega$ enthalten ist, ist U' auch in $\mathbb{Z} \cdot \Lambda'$ enthalten. Also müssen wir nur $L = \mathbb{Z} \cdot \Lambda$ zeigen. Nach dem vorhergehenden Lemma reicht es zu zeigen, daß Δ_0 in $\mathbb{Z} \cdot \Lambda$ enthalten ist.

Es sei $\delta \in \Delta_0$, $\delta \neq \omega_1$. Es gilt $L = L'' \perp U' \perp U$. Nach Lemma 5.1.4 existiert ein $\varphi \in \Psi_U(U' \perp U)$ mit $\varphi(\delta) \in L'' \perp U'$ und

$$\langle \varphi(\delta), \omega_1 \rangle = \langle \varphi(\delta), \varphi(\omega_1) \rangle = \langle \delta, \omega_1 \rangle = -\epsilon ,$$

da $\omega_1 \in L''$ und $\delta \in \Delta_0$. Also liegt $\tilde{\delta} = \varphi(\delta)$ in Λ' . Da aber φ aus $\Gamma_{\Omega} \subset \Gamma_{\Lambda}$ ist ist, folgt

$$\delta = \varphi^{-1}(\tilde{\delta}) \in \Gamma_{\Lambda}(\Lambda') \subset \mathbb{Z} \cdot \Lambda .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Theorem 5.3.2 folgt nun aus Satz 5.4.6 und Theorem 5.4.2.

5.5 Hyperbolische Coxetersysteme

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige nicht vollständige verschwindende Gitter, die durch hyperbolische Coxetersysteme gemäß Beispiel 5.2.4 definiert sind.

In Beispiel 5.2.4 haben wir zu bestimmten Coxetersystemen (W,S) verschwindende Gitter definiert. Es sei (Q,R) ein solches verschwindendes Gitter. Wir haben bereits in Beispiel 5.2.4 bemerkt, daß für ein nicht ausgeartetes und indefinites Gitter Q , für das das Coxetersystem (W,S) nicht vom hyperbolischen Typ ist, die Gruppe $\Gamma_R = W$ nicht von endlichem Index in $O(Q)$ ist. Man erhält also eine Klasse von verschwindenden Gittern, für die die Aussagen von Theorem 5.3.2 und Satz 5.3.5 nicht gültig sind (vgl. auch Bemerkung 5.3.7).

Wir zeigen aber für einige verschwindende Gitter (Q,R) zu Coxetersystemen vom hyperbolischen Typ, daß für sie die Beschreibungen der angegebenen Sätze gelten. Es sei Q eins der hyperbolischen Gitter von Tabelle 5.5.1 (vgl. Kap. 4.1) und B eine Basis von Q , deren Dynkindiagramm mit dem entsprechenden Coxetergraphen zu Q nach Abbildung 4.1.1 übereinstimmt (mit der Konvention von Kap. 1.5).

Tabelle 5.5.1

Q	Q_{237}	Q_{245}	Q_{334}	Q_{2223}^2	Q_{2223}^4
Q'	E_8	E_7	E_6	D_5	D_7
ϵ	-1	-1	-1	-1	+1

Satz 5.5.1: Für die verschwindenden Gitter (Q,R) zu einem der Gitter Q von Tabelle 5.5.1 gilt:

- (i) $\Gamma_R = W = O_E^*(Q)$.
- (ii) $R = \{v \in Q \mid \langle v,v \rangle = 2\epsilon\}$.

Beweis: (i) Für die ersten drei Gitter wurde die Aussage (i) von E. Brieskorn

(unveröffentlicht) bewiesen. Wir geben hier seinen Beweis, der sich auch auf die anderen Fälle übertragen läßt.

Das Gitter Q ist jeweils von der Form $Q = Q' \perp U$, wobei Q' ein Wurzelgitter ist. Die jeweiligen Wurzelgitter Q' sind in Tabelle 5.5.1 angegeben. Man kann leicht zeigen, daß die Gitter Q' die Reduktionseigenschaft (R) von [Wall₁, § 5] besitzen. Aus [Wall₁, 5.2] folgt daher

$$o(Q) = o(Q') \cdot o(U) \cdot \psi_U(Q).$$

(In [Wall₁] ist dieses Resultat nur für unimodulare Gitter formuliert, der Beweis läßt sich aber auch auf die Gitter Q übertragen.) Daraus folgt

$$o_\varepsilon^*(Q) = o_\varepsilon^*(Q') \cdot o_\varepsilon^*(U) \cdot \psi_U(Q) \quad (*)$$

Nun gilt aber $o_\varepsilon^*(Q') = W'$, wobei W' die Weylgruppe des Wurzelgitters Q' ist, und $o_\varepsilon^*(U) = \{1, s_{f_1 + \varepsilon f_2}\}$, wobei f_1, f_2 eine Basis von isotropen Vektoren von U ist. Hierbei kann man für f_1 und f_2 die Vektoren $f_1 = \tilde{\lambda} + e_{r-1}$, $f_2 = -\varepsilon(e_r + f_1)$ wählen, wobei e_{r-1} und e_r die Vektoren sind, die zu den beiden äußersten Ecken des längsten Arms des jeweiligen Coxetergraphen zu Q gehören, und $\tilde{\lambda}$ die längste Wurzel von Q' ist [Bourbaki₂]. Die Gruppe $\psi_U(Q)$ wird von den Transformationen

$$\psi_{f_i, \lambda} = s_\lambda \cdot s_{\lambda + \varepsilon f_i}$$

erzeugt, wobei λ eine Wurzel von Q' ist. Unter Benutzung dieser Tatsachen kann man leicht zeigen, daß alle Gruppen auf der rechten Seite der Gleichung (*) in W enthalten sind.

(ii) Es sei v ein Minimalvektor der Quadratlänge 2ε von Q . Wir müssen zeigen, daß v in R liegt. Da die Gitter Q' die Reduktionseigenschaft (R) von [Wall₁, § 5] besitzen, kann man wie bei [Wall₁, 5.1] zeigen, daß v unter $\psi_U(Q)$ zu einem der folgenden Vektoren äquivalent ist: λ , $\lambda + \varepsilon f_1$, $\lambda + \varepsilon f_2$, $f_1 + \varepsilon f_2$, wobei λ eine Wurzel von Q' ist und $a, b \in \mathbb{Z}$. Da nach (i) $\psi_U(Q)$ in Γ_R enthalten ist, reicht es also zu zeigen, daß diese Vektoren in R liegen. Nach der Wahl von f_1 und f_2 wie in

(i) gilt: $f_1 + ef_2 = -e_r \in R$. Die Weylgruppe $W' \subset \Gamma_R$ des Wurzelgitters Q' operiert transitiv auf den Wurzeln und es gilt $s_{f_1 + ef_2}(\lambda + bf_2) = \lambda - bf_1$. Deshalb brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $\tilde{\lambda} + af_1$ für $a \in \mathbb{Z}$ in R liegt, wobei $\tilde{\lambda}$ die längste Wurzel von Q' ist. Da mit δ auch $-\delta$ in R liegt, können wir $a > 0$ annehmen. Nun ist aber $\tilde{\lambda} + af_1 = (a+1)\tilde{\lambda} + ae_{r-1}$. Durch abwechselnde Anwendung von $s_{\tilde{\lambda}}$ und $s_{e_{r-1}}$ erhält man aus diesem Vektor $\tilde{\lambda}$ oder e_{r-1} , die in R liegen. Damit ist auch Teil (ii) bewiesen.

LITERATUR

A'Campo, N.:

- 1) Tresses, monodromie et le groupe symplectique. Comm. Math. Helv. 54, 318-327 (1979)

Arnold, V.I.:

- 1) Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers. Usp. Math. Nauk. 28:5, 17-44 (1973) (Engl. Übersetzung in Russ. Math. Surv. 28:5, 19-48 (1973))
- 2) Critical points of smooth functions and their normal forms. Usp. Math. Nauk. 30:5, 3-65 (1975) (Engl. Übersetzung in Russ. Math. Surv. 30:5, 1-75 (1975))

Beauville, A.:

- 1) Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes. Preprint Université Paris-Sud, Orsay (1985)

Bourbaki, N.:

- 1) Algèbre Commutative. Chap. 1. Hermann, Paris 1961
- 2) Groupes et Algèbres de Lie. Chaps. 4, 5 et 6. Hermann, Paris 1968

Brieskorn, E.:

- 1) Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta math. 2, 103-160 (1970)
- 2) Special singularities - resolution, deformation and monodromy. Vervielfältigtes Manuskript zu einer Reihe von Übersichtsvorträgen zum AMS Summer Research Institute Algebraic Geometry, Arcata 1974
- 3) Milnor lattices and Dynkin diagrams. Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 40, Part 1, 153-165 (1983)
- 4) Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten. Bonner Mathematische Schriften Nr. 150, Bonn 1983

Chmutov, S.V.:

- 1) Monodromy groups of critical point of functions. Invent. math. 67, 123-131 (1982)
- 2) The monodromy groups of critical points of functions II. Invent. math. 73, 491-510 (1983)

Deligne, P., Katz, N.:

Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7 II). Lecture Notes in Math. No. 340, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973

Dimca, A.:

- 1) Monodromy of functions defined on isolated singularities of complete intersections. Compositio Math. 54, 105-119 (1985)
- 2) Monodromy and Betti numbers of weighted complete intersections. Topology 24, 3, 369-374 (1985)

Ebeling, W.:

- 1) Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten. Math. Ann. 255, 463-498 (1981)
- 2) On the monodromy groups of singularities. Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 40, Part 1, 327-336 (1983)
- 3) Arithmetic monodromy groups. Math. Ann. 264, 241-255 (1983)
- 4) Milnor lattices and geometric bases of some special singularities. In: Nœuds, tresses et singularités (C. Weber ed.), L'Enseignement Math. Monographie N° 31, Genève 1983, pp. 129-146; L'Enseignement Math. 29, 263-280 (1983)
- 5) An arithmetic characterisation of the symmetric monodromy groups of singularities. Invent. math. 77, 85-99 (1984)

Ebeling, W., Wall, C.T.C.:

Kodaira singularities and an extension of Arnold's strange duality.
Compositio Math. 56, 3-77 (1985)

Eichler, M.:

- 1) Quadratische Formen und orthogonale Gruppen (2. Auflage). Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1974

Gabrielov, A.M.:

- 1) Intersection matrices for certain singularities. Funkt. Anal. Jogo Prilozh. 7:3, 18-32 (1973) (Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl. 7, 182-193 (1974))
- 2) Dynkin diagrams of unimodal singularities. Funkt. Anal. Jogo Prilozh. 8:3, 1-6 (1974) (Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl. 8, 192-196 (1974)).
- 3) Polar curves and intersection matrices of singularities. Invent. math. 54, 15-22 (1979)

Gantmacher, F.R.:

- 1) The theory of matrices I, II. Chelsea 1959

Gibson, C.G., Wirthmüller, K., Du Plessis, A.A., Looijenga, E.J.N.:

Topological stability of smooth mappings. Lecture Notes in Math. No. 552, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1976

Giusti, M.:

- 1) Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 284, 167-170 (1977)

Hamm, H.:

- 1) Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann. 191, 235-252 (1971)
- 2) Exotische Sphären als Umgebungsänderer in speziellen komplexen Räumen. Math. Ann. 197, 44-56 (1972)

Hefez, A., Lazzeri, F.:

The intersection matrix of Brieskorn singularities. Invent. math. 25, 143-157 (1974)

Humphries, S.P.:

- 1) On weakly distinguished bases and free generating sets of free groups. Quart. J. Math. Oxford (2), 36, 215-219 (1985)

Husein-Zade, S.M.:

- 1) The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces. Usp. Math. Nauk. 32:2, 23-65 (1977) (Engl. Übersetzung in Russ. Math. Surv. 32:2, 23-69 (1977))

Janssen, W.A.M.:

- 1) Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. Math. Ann. 266, 115-133 (1983)
- 2) Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. II. Math. Ann. 272, 17-22 (1985)

Kneser, M.:

- 1) Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen. Math. Ann. 255, 453-462 (1981)

Knörrer, H.:

- 1) Die Singularitäten vom Typ \tilde{D} . Math. Ann. 251, 135-150 (1980)

Kronecker, L.:

- 1) Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1890)

Lamotke, K.:

- 1) The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology 20, 15-51 (1981)

Lê, D.T.:

- 1) Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23(4), 261-270 (1973)
- 2) Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection. Funkt. Anal. Jogo Priložh. 8:2, 45-49 (1974) (Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl. 8, 127-131 (1974))
- 3) Some remarks on relative monodromy. In: Real and Complex Singularities. Proc. Nordic Summer School Oslo (Ed. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff 1977, pp. 397-403
- 4) The geometry of the monodromy theorem. In: C.P. Ramanujam, a tribute (Ed. K.G. Ramanathan) Tata Institute Studies in Math. 8, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1978, pp. 157-173

Lefschetz, S.:

- 1) L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique. Gauthier-Villars, Paris 1924

Levine, J.:

- 1) Polynomial invariants of knots of codimension two. Ann. of Math. 84, 537-554 (1966)

Looijenga, E.J.N.:

- 1) Rational surfaces with an anti-canonical cycle. *Annals of Math.* 114, 267-322 (1981)
- 2) The smoothing components of a triangle singularity I. *Proc. of Symp. in Pure Math.* Vol. 40, Part 2, 173-183 (1983)
- 3) Isolated singular points on complete intersections. *Lond. Math. Soc. Lecture Note Series* 77, Cambridge University Press 1984
- 4) The smoothing components of a triangle singularity II. *Math. Ann.* 269, 357-387 (1984)

Looijenga, E., Peters, Ch.:

Torelli theorems for Kähler K3 surfaces. *Compositio Math.* 42, 145-168 (1981)

Lyndon, R.C., Schupp, P.E.:

Combinatorial Group Theory. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1977

Mather, J.N.:

- 1) Stability of C^∞ -mappings. VI. The nice dimensions. In: *Liverpool Singularities Symposium I* (Ed. C.T.C. Wall), *Lecture Notes in Math.* 192, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1971, pp. 207-253

Maurer, J.:

- 1) Puiseux expansion for space curves. *Manuscripta math.* 32, 91-100 (1980)

Mérindol, J.Y.:

- 1) Théorème de Torelli affine pour les intersections de deux quadriques. *Invent. math.* 80, 375-416 (1985)

Merle, M.:

- 1) in Vorbereitung

Milnor, J.:

- 1) Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. of Math. Studies*, Princeton 1968

Nikulin, V.V.:

- 1) Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* 43, 111-177 (1979) (Engl. Übersetzung in *Math. USSR Izv.* 14, No. 1, 103-167 (1980))

Pham, F.:

- 1) Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. math France* 93, 333-367 (1965)

Pickl, A.:

- 1) Die Homologie der Einhängung eines vollständigen Durchschnitts mit isolierter Singularität. SFB-Preprint, Göttingen 1985

Pinkham, H.:

- 1) Groupe de monodromie des singularités unimodulaires exceptionnelles. C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 284, 1515-1518 (1977)

Pjateckiĭ-Šapiro, I.I., Šafarevič, I.R.:

- A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3. Izv. Akad. Nauk. SSSR, 35, No. 3, 530-572 (1971) (Engl. Übersetzung in Math. USSR Izv. 5, No. 3, 547-588 (1971))

Reid, M.:

- 1) The complete intersection of two or more quadrics. Thesis, Cambridge University 1972

Saito, K.:

- 1) Extended affine root systems I (Coxeter transformations). Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 21, 75-179 (1985)
- 2) in Vorbereitung

Siersma, D.:

- 1) Classification and deformation of singularities. Proefschrift, Amsterdam 1974

Slodowy, P.:

- 1) Singularitäten, Kac-Moody-Liealgebren, assoziierte Gruppen und Verallgemeinerungen. Habilitationsschrift, Bonn 1984

Teissier, B.:

- 1) The hunting of invariants in the geometry of discriminants. In: Real and Complex Singularities. Proc. Nordic Summer School Oslo (Ed. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff 1977, pp. 565-678
- 2) Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces. Invent. math. 40, 267-292 (1977)

Wajnryb, B.:

- 1) On the monodromy group of plane curve singularities. Math. Ann. 246, 141-154 (1980)

Wall, C.T.C.:

- 1) On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms. II. J. Reine Angew. Math. 213, 122-136 (1963)
- 2) A splitting theorem for maps into \mathbb{R}^2 . Math. Ann. 259, 443-453 (1982)
- 3) Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections. Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 40, Part 2, 625-640 (1983)
- 4) Notes on the classification of singularities. Proc. London Math. Soc. (3), 48, 461-513 (1984)

Weierstraß, K.:

- 1) Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatshefte Akad. Wiss. Berlin, 310-338 (1868); Werke II (Mayer und Müller, Berlin, 1895), pp. 19-44

Wirthmüller, K.:

- 1) Torus embeddings and deformations of simple singularities of space curves. Preprint, Universität Regensburg 1984
- 2) The discriminants of a series of unimodular singularities of space curves. Preprint, Universität Regensburg 1986

Zariski, O.:

- 1) Algebraic surfaces. Second supplemented edition. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 61. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1971