Eisensteinreihen für einige arithmetisch definierte Untergruppen von $SL_2(\mathbb{H})$

Volker Krafft

Dietmar Osenberg

MPI/87-63

Eisensteinreihen für einige arithmetisch definierte Untergruppen von $SL_2(\mathbb{H})$

Volker Krafft[1]

Dietmar Osenberg[2]

1 Fachbereich Mathematik
der Katholischen Universität Eichstätt
Ostenstr. 26-28
D-8078 Eichstätt

2 Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 3

Ich danke dem Max-Planck-Institut für Mathematik für die Unterstützung während der Niederschrift dieser Arbeit.

§ 0 Einleitung

Sei $\mathcal{H}$ eine positiv definite rationale Quaternionenalgebra, G die einfache algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe, deren Gruppe der $\mathbb{Q}$-Punkte $SL_2(\mathcal{H}) = \{\mu \in M_2(\mathcal{H}) \mid \mathrm{Nrd}(\mu) = 1\}$ (Nrd die reduzierte Norm) ist. Wir wählen einen $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus von $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ auf den "Hamiltonschen Quaternionenschiefkörper" $\mathbb{H}$, vermöge dessen beide miteinander identifiziert seien. Zur reellen einfachen Liegruppe $G(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{H})$ gehört als symmetrischer Raum der 5-dimensionale hyperbolische Raum, den wir durch sein Poincaré-Modell T beschreiben (siehe § 1).

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die arithmetischen Untergruppen $SL_2(\mathcal{O})$ in $SL_2(\mathcal{H})$, wobei $\mathcal{O}$ eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathcal{H}$ bezeichnet, und untersuchen analytische und arithmetische Eigenschaften von Eisensteinreihen für $SL_2(\mathcal{O})$, die sich als Maaß-Wellenformen auf T auffassen lassen. Dabei orientiert sich die Problemstellung an der Elstrodts, Grunewalds und Mennickes in ihrer Untersuchung [3] von Eisensteinreihen für $SL_2(S)$ mit dem Ring S der ganzen Zahlen in einem imaginär quadratischen Zahlkörper.

Während die Bahnen der Spitzen unter der Operation von $SL_2(S)$ in Bijektion zu den S-Idealklassen stehen, ist die Zahl der inäquivalenten Spitzen von $SL_2(\mathcal{O})$ gerade das Quadrat der Anzahl h der Links-$\mathcal{O}$-Idealklassen. Denn im Gegensatz zur direkten Summe von gebrochenen S-Idealen M und N, die genau dann zum S-Modul $S \oplus S$ isomorph ist, wenn $M \cong N^{-1}$, ist die direkte Summe zweier gebrochener Links-$\mathcal{O}$-Ideale stets ein zu $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ isomorpher Links-$\mathcal{O}$-Modul (siehe §2).

In Analogie zu [3] definieren wir in § 4 Eisensteinreihen mi einer Summation über $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, die Rechts-$M_2(\mathcal{O})$-Modul sind, also über Gitter der Form $M \times M$ mit einem gebrochenen Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal M in $\mathcal{H}$:

$$\hat{E}_M(P,s) = |\mathrm{Nrd}(M)|^s \sum_{(c,d)\in M\times M-\{0\}} \left[\frac{r}{\mathrm{Nrd}(cz+d)+r^2\mathrm{Nrd}(c)}\right]^s ,$$

wobei $P = (z,r) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$. Für jedes $s \in \mathbb{C}$ m Re $s > 4$ erzeugen die $\hat{E}_M(\cdot,s)$ einen h-dimensionalen $\mathbb{C}$-Untervektorraum $\hat{E}(s)$ des h^2-dimensionalen Eisensteinreihenraumes.

Der 5. Paragraph gibt für jedes $P \in T$ per Hecke-Integralda stellung eine meromorphe Fortsetzung der Dirichlet-Reihe $\hat{E}_M(P,$ nach $\mathbb{C}$, die unter Funktionalgleichung auf eine Eisensteinreihe mit einer Summation über das "duale Gitter" übergeht. Der Schni des von diesen Eisensteinreihen zu den "dualen Gittern" erzeugt Vektorraums mit $\hat{E}(s)$ ist eindimensional für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > 4$.

Von der Fourierentwicklung der Eisensteinreihen in § 3 führt § 6 durch eine nähere Betrachtung der Summationsbedingungen in den Fourierkoeffizienten auf eine Fourierentwicklung der $\hat{E}_M$, d in beiden Teilen des nullten Koeffizienten ζ-Funktionen und in den höheren Teilersummen aufweist. Daraus liest man einen von d Integraldarstellung unabhängigen Beweis der Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung ab.

Außerdem gewinnen wir aus der Fourierentwicklung eine Kroneckersche Grenzformel für $\hat{E}_M$ und ein Analogon zu $\log|\eta|$; ferner erkennen wir die nach Hecke [7] bzw. Maaß [10], [11] zu $\hat{E}_M(\cdot,t)$ $(t \in \mathbb{C})$ assoziierte Dirichlet-Reihe als Produkt von ζ-Funktionen (siehe § 7).

Ergebnisse, die sich mit den Argumentationen aus [3] unmittelbar ergeben, notieren wir ohne detaillierte Begründung.

Die dieser Arbeit zugrundeliegende Zahlentheorie zentraler einfacher Algebren mit algebraischen Zahlkörpern als Zentrum entnehmen wir Reiner [13], Weil [17] und Vignéras [16].

Prof. Dr. F. Grunewald gab die Anregung zur vorliegenden Arbeit, deren Abfassung von ihm und Prof. Dr. J. Schwermer mit hilfreichen Hinweisen begleitet wurde. Beiden danken wird herzlich.

Generelle Bezeichnungen

Für eine zentrale einfache Algebra bezeichne red. char. pol., Nrd resp. Trd das reduzierte charakteristische Polynom, die reduzierte Norm resp. die reduzierte Spur.

Für eine zweidimensionale separable Körpererweiterung L über K, dem Erzeugenden σ der Galoisgruppe und $c \in K^*$ definieren wir auf der zyklischen K-Algebra $(L/K,\sigma,c)$ zur Basis $\{u_o,u_1\}$ den involutiven Antiautomorphismus

$$\bar{\ }: \ell_o u_o + \ell_1 u_1 \mapsto \sigma(\ell_o)u_o - \ell_1 u_1 \quad .$$

§ I Die $\mathbb{Q}$-Gruppe G und ihr symmetrischer Raum

Sei $\mathcal{H}$ eine positiv definite rationale Quaternionenalgebra, E ein Zerfällungskörper von $\mathcal{H}$.

Die einfache algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe G, die $SL_2(\mathcal{H})$ als Grup der $\mathbb{Q}$-Punkte hat, ist E-isomorph zu SL_4/E.

Die maximalen über $\mathbb{Q}$ zerfallenden Tori resp. minimalen par bolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen resp. maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergru pen von G sind jeweils konjugiert über $G(\mathbb{Q})$ zu den Repräsen tanten S resp. P resp. $U = R_U(P)$ (dem unipotenten Radikal von P), die durch die Gruppen ihrer $\mathbb{Q}$-Punkte wie folgt gegeben seien:

$$S(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{Q}^* \right\} , \quad P(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathcal{H}) \middle| \, c = 0 \right\} ,$$

$$U(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathcal{H} \right\} .$$

$SL_2(\mathcal{H})$ operiert von links auf $\mathbb{P}^1(\mathcal{H}) = ({}^t(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) - \{0\})/\mathcal{H}^*$ repräsentantenweise durch Matrizenmultiplikation. Die $G(\mathbb{Q})$-äqui variante Bijektion $G(\mathbb{Q})/P(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathcal{H})$, $gP(\mathbb{Q}) \longmapsto g\binom{1}{0}$ liefert eine Bijektion der minimalen parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen von nach $\mathbb{P}^1(\mathcal{H})$.

S ist auch maximal als über $\mathbb{R}$ zerfallender Torus; somit $rk_{\mathbb{R}}(G) = rk_{\mathbb{Q}}(G) = 1$.

Die reelle einfache Liegruppe $G(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{H})$ enthält $K = \{\kappa \in SL_2(\mathbb{H}) \mid \sigma(\kappa) = \kappa\}$ als maximale kompakte Untergruppe, wobei σ den analytischen, involutiven Automorphismus von $SL_2(\mathbb{H})$ $\mu \longmapsto {}^H\mu^{-1}$ mit ${}^H\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$ bezeichnet. $SL_2(\mathbb{H})/K$ trägt eine bis auf positive reelle Vielfache eindeutig bestimmte $SL_2(\mathbb{H})$-invariante Riemannstruktur, bezüglich der $SL_2(\mathbb{H})/K$ ein riemannscher, global symmetrischer Raum ist. Bezeichnet $\pi: SL_2(\mathbb{H}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{H})/K$ die Projektion, so gilt für die geodätische Symmetrie $s_{\pi(id)}$: $s_{\pi(id)} \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

Indem wir die Iwasawa-Zerlegung von $SL_2(\mathbb{H})$ bezüglich K explizit durchführen, geben wir einen analytischen Diffeomorphismus ψ von $SL_2(\mathbb{H})/K$ nach $T := \mathbb{H} \times \mathbb{R}^{>0}$ an.

1.1. Satz: <u>Sei</u> $N = \left\{\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{H}\right\}$, $A = \left\{\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \middle| r \in \mathbb{R}^{>0}\right\}$.

<u>Die Abbildung</u> $\varphi: N \times A \times K \longrightarrow SL_2(\mathbb{H})$, $(\nu,\alpha,\kappa) \longmapsto \nu\,\alpha\,\kappa$ <u>ist ein analytischer Diffeomorphismus</u>.

<u>Für</u> $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{H})$, $r = \dfrac{1}{Nrd(c)+Nrd(d)}$, $z = \dfrac{a\bar{c}+b\bar{d}}{Nrd(c)+Nrd(d)}$ <u>gilt dabei</u> $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{bmatrix} K$.

1.2. Korollar: <u>Mit</u> φ <u>ist auch die Abbildung</u> $\psi: SL_2(\mathbb{H})/K \longrightarrow T$, $\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{bmatrix} K \longmapsto (z,r)$ <u>ein analytischer Diffeomorphismus</u>. <u>Für die analytische Operation</u> $SL_2(\mathbb{H}) \times T \longrightarrow T$, $(\mu,(z,r)) \longmapsto \mu(z,r) = \psi(\mu\cdot\psi^{-1}(z,r))$ <u>erhält man</u>:

<u>Ist</u> $\mu = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mu(z,r) = (z_o, r_o)$, <u>so gilt</u>

$$z_o = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}r^2}{\mathrm{Nrd}(cz+d)+\mathrm{Nrd}(c)r^2} \quad \underline{\text{und}} \quad r_o = \frac{r}{\mathrm{Nrd}(cz+d)+\mathrm{Nrd}(c)r^2}.$$

Wähle $i,j \in \mathbb{H}$ mit $i^2 = j^2 = -1$ und $ij = -ji$; $\{1,i,j,ij\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis für $\mathbb{H}$. Seien $x_i\colon SL_2(\mathbb{H})/K \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch $\psi(P) = x_1(P)(1,0) + x_2(P)(i,0) + x_3(P)(j,0) + x_4(P)(ij,0) + x_5(P)(0,1)$ definierten Abbildungen. $\mathfrak{D}^1(SL_2(\mathbb{H})/K)$ bezeichne den $\mathscr{C}^\infty(SL_2(\mathbb{H})/K)$-Modul der Derivationen der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathscr{C}^\infty(SL_2(\mathbb{H})/K)$, $\mathfrak{D}_1(SL_2(\mathbb{H})/K)$ den zu $\mathfrak{D}^1(SL_2(\mathbb{H})/K)$ dualen $\mathscr{C}^\infty(SL_2(\mathbb{H})/K)$-Modul, $\{dx_1,\ldots,dx_5\}$ die zu $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_5}\}$ duale Basis. Die Riemann-Struktur $Q = \frac{1}{x_5^2}\sum_{i=1}^{5} dx_i \otimes dx_i$ ist $SL_2(\mathbb{H})$-invariant. Die 5-Form $x_5^{-5}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_5$ ist das Volumenelement; $\Delta\colon \mathscr{C}^\infty(SL_2(\mathbb{H})/K) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(SL_2(\mathbb{H})/K)$, $f \mapsto x_5^2 \sum_{i=1}^{5}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f\right] - 3x_5\left[\frac{\partial}{\partial x_5} f\right]$ ist der Laplace-Beltrami-Operator zu Q.

Bei der Betrachtung der reellen Liegruppe $SL_2(\mathbb{H})$ und ihrer Operation auf dem Poincaré-Modell des hyperbolischen Raums konnten wir auf das unveröffentlichte Manuskript von Grunewald und Zimmert "Über einige arithmetische Gruppen" zurückgreifen.

§ 2 Die arithmetische Untergruppe $SL_2(\mathcal{O})$

Sei Γ eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$. Dann gilt:

a) Eine parabolische Untergruppe $\tilde{P}$ von G ist genau dann über $\mathbb{Q}$ definiert, wenn $R_U(\tilde{P})(\mathbb{R}) \cap \Gamma$ endliches Kovolumen in $R_U(\tilde{P})(\mathbb{R})$ hat.

b) Für ein unipotentes $\beta \in G(\mathbb{Q}) - \{id\}$ gibt es eine über $\mathbb{Q}$ definierte parabolische Untergruppe $\tilde{P} \underset{\neq}{\subset} G$ mit $\beta \in \tilde{P}(\mathbb{Q})$. Wegen $rk_{\mathbb{Q}}(G) = 1$ ist $\tilde{P}$ mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt.

c) $G(\mathbb{Q})$ enthält unipotente Elemente, daher ist $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})$ nicht kompakt.

Die Existenz einer endlichen Teilmenge C von $G(\mathbb{Q})$ und eines Siegel-Bereiches Σ bezüglich K, P, S mit $G(\mathbb{R}) = \Gamma C \Sigma$ (cf. Borel [2], § 13) impliziert:

d) $vol(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ ist endlich. ($vol(\Sigma)$ ist endlich, da G keine über $\mathbb{Q}$ definierten, nicht trivialen Charaktere besitzt.)

e) $\Gamma \setminus G(\mathbb{Q})/P(\mathbb{Q})$ ist endlich.

Als arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$ wählen wir ab jetzt vorwiegend $SL_2(\mathcal{O})$ für eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung $\mathcal{O}$ in $\mathcal{K}$. $M_2(\mathcal{O})$ ist dann eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $M_2(\mathcal{K})$ (nach dem Satz von Eichler (cf. [13], [5]) bis auf Konjugation die einzige).

Im folgenden geben wir eine genaue Beschreibung der Spitzenbahnen $SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1(\mathcal{K})$:

Sei $\mathcal{V}$ ein 2-dimensionaler Links-$\mathcal{K}$-Vektorraum, $\mathcal{V}'$ der duale Rechts-$\mathcal{K}$-Vektorraum; wir identifizieren $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ bezüglich einer Basis $\langle b_1, b_2 \rangle$ und $\mathcal{V}'$ mit ${}^t(\mathcal{K} \times \mathcal{K})$ bezüglich der dualen Basis. Sei $\mathcal{O}$ eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathcal{K}$, ${}_{\mathcal{O}}I$ die Menge der gebrochenen Links-$\mathcal{O}$-Ideale. Für einen Links-$\mathcal{O}$-Modul der freie abelsche Gruppe vom Rang 4 ist, bezeichne $[M] \in {}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^*$ diejenige Links-$\mathcal{O}$-Idealklasse, deren Elemente isomorph zu M als Links-$\mathcal{O}$-Moduln sind.

2.1.Satz: Die Spitzenbahnen $SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1(\mathcal{K})$ stehen in Bijektion zur Menge $\{([M],[N]) \in ({}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^*)^{(2)} \mid M \oplus N \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ als Links-$\mathcal{O}$-Moduln$\}$.

2.2. Satz: Für alle $M,N \in {}_{\mathcal{O}}I$ gilt: $M \oplus N \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ als Links-$\mathcal{O}$-Moduln.

Die Zahl der Spitzenbahnen ist also das Quadrat der (einseitigen) Klassenzahl von $\mathcal{O}$.

Beweis von Satz 2.1:

Für $\binom{c}{d} \in \mathcal{V}'$ sei $R\binom{c}{d}: \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{K};\ (o_1,o_2) \mapsto o_1 c + o_2 d$ (also die Einschränkung von $\binom{c}{d}$ auf $(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{V}$). Sei

$$\varphi: SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1(\mathcal{K}) \to ({}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^*)^{(2)}$$
$$\binom{c}{d} \mapsto \left[[\mathrm{Im}(R\tbinom{c}{d})],\ [\mathrm{Kern}(R\tbinom{c}{d})]\right].$$

φ ist offensichtlich wohldefiniert.

a) φ ist injektiv:

Seien $\binom{c}{d}$, $\binom{\tilde{c}}{\tilde{d}} \in \mathcal{V}' - \{0\}$; sei ι: Kern $R\binom{\tilde{c}}{\tilde{d}} \to$ Kern $R\binom{c}{d}$ ein Links-$\mathcal{O}$-Modul-Isomorphismus und $h \in \mathcal{K}^*$ mit $\mathcal{O}c + \mathcal{O}d = \mathcal{O}\tilde{c}h + \mathcal{O}\tilde{d}h$. Da gebrochene Links-$\mathcal{O}$-Ideale projektive $\mathcal{O}$-Moduln sind (cf. Reiner [13]), spalten die exakten Sequenzen in den Zeilen des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \text{Kern } R\binom{\tilde{c}}{\tilde{d}} \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{O} \times \mathcal{O} \arrow[r, "R\binom{\tilde{c}h}{\tilde{d}h}"] \arrow[d, dotted, "\alpha"'] & \mathcal{O}\tilde{c}h + \mathcal{O}\tilde{d}h \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[l, dotted, bend left, "\tilde{S}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \text{Kern } R\binom{c}{d} \arrow[r] & \mathcal{O} \times \mathcal{O} \arrow[r, "R\binom{c}{d}"] & \mathcal{O}c + \mathcal{O}d \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend left, "S"] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

durch Monomorphismen $\tilde{S}: \mathcal{O}\tilde{c}h + \mathcal{O}\tilde{d}h \to \mathcal{O} \times \mathcal{O}$

$S: \mathcal{O}c + \mathcal{O}d \to \mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

Damit ist $\alpha := \iota \oplus (S \circ R\binom{\tilde{c}h}{\tilde{d}h})$ ein Links-$\mathcal{O}$-Modul-Automorphismus von $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$, der obiges Diagramm kommutieren läßt. Für das zu (dem nach $\mathcal{V}$ fortgesetzten) α Duale $\alpha^*: \mathcal{V}' \to \mathcal{V}'$ gilt somit

$\alpha^*\binom{c}{d} = \binom{\tilde{c}h}{\tilde{d}h}$.

α und α^* werden durch die gleiche Matrix aus $GL_2(\mathcal{O}) = SL_2(\mathcal{O})$ beschrieben.

b) Es gilt

$$\varphi(SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1(\mathcal{K})) = \left\{([M],[N]) \in ({}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^*)^{(2)} \,\middle|\, M \oplus N \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \ \underline{\text{als Links-}\mathcal{O}\text{-Moduln}}\right\}:$$

"$\supseteq$" ist offensichtlich. "$\subseteq$" erhält man aus der Projektivität von gebrochenen Links-$\mathcal{O}$- Idealen wie in a). ∎

<u>Beweis von Satz 2.2:</u>

Als "Links-$\mathcal{O}$-Gitter in $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$" bezeichnen wir im folgenden die $\mathbb{Z}$-Gitter, die Links-$\mathcal{O}$-Untermoduln von $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ sind.

Die Abbildung

$$\psi : \{L \mid L \ \underline{\text{ist}}\ \underline{\text{Links}}\text{-}\mathcal{O}\text{-}\underline{\text{Gitter}}\ \underline{\text{in}}\ \ \mathcal{K} \times \mathcal{K}\} \longrightarrow$$
$$\{I \subseteq M_2(\mathcal{K}) \mid I \ \underline{\text{ist}}\ \underline{\text{gebrochenes}}\ \underline{\text{Links}}\text{-}M_2(\mathcal{O})\text{-}\underline{\text{Ideal}}\}$$
$$L \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} \times \mathcal{O}, L)$$

ist bijektiv. Es sind $\psi(L) \cong \psi(\tilde{L})$ als Links-$M_2(\mathcal{O})$-Moduln, gen wenn $L \cong \tilde{L}$ als Links-$\mathcal{O}$-Moduln (dabei identifizieren wir Homo morphismen zwischen Links-$\mathcal{O}$-Gittern in $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ mit ihrer Fortsetzung zu Links-$\mathcal{K}$-Endomorphismen des $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$).

Da $M_2(\mathcal{K})$ die Eichler-Bedingung bezüglich $\mathbb{Z}$ erfüllt, folg aus dem Satz von Eichler, daß $M_2(\mathcal{O})$ die Klassenzahl 1 hat, und damit die Behauptung (cf. [13], [5]). ∎

§ 3 Eisensteinreihen

In diesem Paragraphen sei Γ eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q}) = SL_2(\mathbb{Z})$. Für ein $\eta = \alpha^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (mit $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$) sei

$$\Gamma_\eta := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\eta = \gamma\} = \alpha^{-1}P(\mathbb{Q})\alpha \cap \Gamma$$
$$\Gamma'_\eta := \{\gamma \in \Gamma_\eta \mid \gamma \text{ unipotent}\} = \alpha^{-1}U(\mathbb{Q})\alpha \cap \Gamma \quad .$$

3.1. Definition: Eine (reell) unendlich oft differenzierbare Abbildung $f: T \to \mathbb{C}$ heißt Wellenform für Γ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn gilt:

a) $f(\gamma P) = f(P)$ für alle $\gamma \in \Gamma$, $P \in T$

b) $\Delta f = \lambda f$

c) f wächst höchstens polynomial in den Spitzen von Γ, d.h. für jedes $\eta = \alpha^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ gibt es $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, so daß $|f(\alpha^{-1}P)| \leq r^k$ für alle $P = (z,r) \in T$ mit $r > c$.

3.2. Definition und Satz: Sei $\imath: T \to \mathbb{R}^{>0}$, $(z,r) \mapsto r$ die Projektion. Sei $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $\eta = \alpha^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.
Dann konvergiert für $P \in T$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$ die Eisensteinreihe

$$E_\alpha(P,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma'_\eta\backslash\Gamma} \imath(\alpha\gamma P)^s$$

absolut und gleichmäßig auf Kompakta. Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$ ist $E_\alpha(\cdot,s)$ Wellenform für Γ zum Eigenwert $s(s-4)$.

Beweis:

Da für jedes $P \in T$ die Menge $\{r(\gamma P) \mid \gamma \in \Gamma\}$ nach oben beschränkt ist, folgt die Konvergenz von $\sum_{\gamma \in (\alpha\Gamma\alpha^{-1})'_\infty \backslash \alpha\Gamma\alpha^{-1}} r(\gamma\alpha P)^s$

$\sum_{\gamma \in \Gamma'_\eta \backslash \Gamma} r(\alpha\gamma P)^s$ mit der Argumentation in Kubota [8], § 2.1. Die Γ-Invarianz von $E_\alpha(\cdot,s)$ ist offensichtlich. Da Δ $SL_2(\mathbb{H})$-äquivariant ist (i.e. $\Delta(f \circ \mu) = \Delta f \circ \mu$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, $\mu \in SL_2(\mathbb{H})$), folgt aus $\Delta((z,r) \mapsto r^s) = s(s-4)\cdot((z,r) \mapsto r^s)$ aufgrund des Regularitätssatzes für ellip tische Operatoren: $E_\alpha(\cdot,s)$ ist unendlich oft differenzierbar u erfüllt

$$\Delta(E_\alpha(\cdot,s)) = s(s-4)\ E_\alpha(\cdot,s) \quad .$$

Das Wachstumsverhalten von $E_\alpha(\cdot,s)$ in den Spitzen von Γ erkennt man mit den oben erwähnten Methoden Kubotas oder mit de jetzt folgenden Fourierentwicklung als polynomial. ∎

Wie berechnen jetzt die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen in den Spitzen von Γ.

Sei $<\ ,\ >$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{H}$ mit $<h,h'> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Trd}(\bar{h}h')$; für ein Gitter L in $\mathbb{H}$ sei $\tilde{L}$ das dual Gitter bezüglich $<\ ,\ >$; dh sei das Haar-Maß auf $\mathbb{H}$, das dem Fundamentalparallelotop einer $\mathbb{R}$-Orthonormalbasis für $<\ ,\ >$ da Volumen 1 zuordnet.

3.3. Satz: Seien $\alpha, \beta \in SL_2(\mathcal{K})$ und $\zeta = \alpha^{-1}\infty$, $\eta = \beta^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathcal{K})$, $L = \{\omega \in \mathbb{H} \mid \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \beta\Gamma'_\eta\beta^{-1}\}$.

Für $P = (z,r) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$ erhält man folgende Fourierentwicklung:

$$E_\alpha(\beta^{-1}P,s) = \epsilon r^s + \frac{\pi^2}{\mathrm{vol}(Q)\cdot(s-1)(s-2)} \cdot \sum_{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{bmatrix} \in R} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^s}\, r^{4-s}$$

$$+ \frac{2r^2\pi^s}{\mathrm{vol}(Q)\cdot\Gamma(s)} \cdot \sum_{\tilde{\omega} \in \tilde{L}-\{0\}} \Bigg[\sum_{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{bmatrix} \in R} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^s} \cdot e^{2\pi i \langle \tilde{\omega}, c^{-1}d \rangle}$$

$$\cdot \sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}^{\,s-2}\, K_{s-2}\big(2\pi\sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}\, r\big) \Bigg]\, e^{2\pi i \langle \tilde{\omega}, z \rangle} .$$

Dabei bezeichnen

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \gamma\eta \neq \zeta \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \\ \dfrac{[\Gamma_\zeta : \Gamma'_\zeta]}{\mathrm{Nrd}(d_0)^s} & \text{, falls } \gamma_0 \in \Gamma \text{ mit } \gamma_0\eta = \zeta,\ \alpha\gamma_0\beta^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \end{cases},$$

Q ein Fundamentalparallelotop für L in $\mathbb{H}$, $\mathrm{vol}(Q)$ sein Volumen bzgl. dh, R ein Repräsentantensystem für

$$\alpha\Gamma'_\zeta\alpha^{-1} \backslash (\alpha\Gamma\beta^{-1}) - (\alpha\Gamma\beta^{-1})_\infty / \beta\Gamma'_\eta\beta^{-1}$$

und K_s die modifizierte Bessel-Funktion (cf. [12], p. 66).

Beweis:

Sei $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 4$. $\mathcal{E}: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto E_\alpha(\beta^{-1}(z,r),s$ ist L-periodisch und hat also eine Fourierentwicklung:

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{\tilde{\omega}\in\tilde{L}} a(\tilde{\omega}) e^{2\pi i<\tilde{\omega},z>}, \quad \text{wobei}$$

$$a(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\operatorname{vol}(Q)} \int_Q \mathcal{E}(h) e^{-2\pi i<\tilde{\omega},h>}\, dh.$$

Für $\tilde{\omega} \in \tilde{L}$ ist

$$a(\tilde{\omega}) = a_1(\tilde{\omega}) + a_2(\tilde{\omega}) \quad \text{mit}$$

$$a_1(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\operatorname{vol}(Q)} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma'_\zeta\backslash\Gamma \\ \gamma\eta=\zeta}} \int_Q r(\alpha\gamma\beta^{-1}(h,r))^s\, e^{-2\pi i<\tilde{\omega},h>}\, dh \,,$$

$$a_2(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\operatorname{vol}(Q)} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma'_\zeta\backslash\Gamma \\ \gamma\eta\neq\zeta}} \int_Q r(\alpha\gamma\beta^{-1}(h,r))^s\, e^{-2\pi i<\tilde{\omega},h>}\, dh \,.$$

Berechnet man $a_1(\tilde{\omega})$ und $a_2(\tilde{\omega})$ nach dem Verfahren aus [3] § 2 so erhält man

$$a_1(\tilde{\omega}) = \begin{cases} [\Gamma_\zeta : \Gamma'_\zeta] \left[\dfrac{r}{\operatorname{Nrd}(d_0)}\right]^s \\ \qquad \text{für } \tilde{\omega} = 0 \text{ und } \gamma_0 \in \Gamma \text{ mit } \alpha\gamma_0\beta^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} \\ 0 \quad \text{für } \tilde{\omega} \neq 0 \end{cases}$$

und

$$a_2(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(Q)} \sum_{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{bmatrix} \in R} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^s} \cdot e^{2\pi i \langle \tilde{\omega}, c^{-1} d\rangle} \cdot b(\tilde{\omega})$$

mit

$$b(\tilde{\omega}) = \int_{\mathbb{H}} \left[\frac{r}{\mathrm{Nrd}(h)+r^2}\right]^s \cdot e^{-2\pi i \langle \tilde{\omega}, h\rangle} \, dh$$

$$= r^{4-s} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+1)^s} \, dt \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+1)^{s-1/2}} \, dt \cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+1)^{s-1}} \, dt \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}\, r h_1}}{(1+h_1^2)^{s-3/2}} \, dh_1$$

und unter Verwendung der Integralformeln für Γ ([12], p. 6) und K_s ([12], p. 85)

$$b(\tilde{\omega}) = \begin{cases} r^{4-s} \dfrac{\pi^2}{(s-2)(s-1)} & \text{für } \tilde{\omega} = 0 \\[2ex] \dfrac{2r^2 \pi^s \sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}^{\,s-2}}{\Gamma(s)} K_{s-2}(2\pi \sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}\, r) & \text{für } \tilde{\omega} \neq 0 \end{cases} \quad . \; \blacksquare$$

3.4. Korollar: <u>Sei</u> $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\, s > 4$, Rep <u>ein Repräsentantensystem für</u> $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/\Gamma$.

<u>Dann ist</u> $\{E_\alpha(\cdot, s) \mid \alpha \in \mathrm{Rep}\}$ $\mathbb{C}$-<u>linear unabhängig</u>.

§ 4 Eisensteinreihen für $SL_2(\mathcal{O})$

Sei $\mathcal{O}$ eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathfrak{A}$; für ein gebrochenes $\mathbb{Z}$-Ideal I bezeichne $|I|$ ein positives Erzeugendes; für $\alpha \in SL_2(\mathfrak{A})$ mit $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix}$ sei

$$o_\alpha = a\mathcal{O} + b\mathcal{O} \quad , \quad u_\alpha = c\mathcal{O} + d\mathcal{O} \quad \text{und}$$
$$v_\alpha = \mathcal{O}\tilde{a} + \mathcal{O}\tilde{c} \quad , \quad h_\alpha = \mathcal{O}\tilde{b} + \mathcal{O}\tilde{d} \quad .$$

Zunächst formulieren wir die Summationsbedingung der Eisensteinreihen E_α (zu $SL_2(\mathcal{O})$) mit den Methoden aus der Beschreibung der Spitzenbahnen in § 2.

4.1. Satz: <u>Für</u> $(c,d) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ <u>sei</u> $R(c,d)\colon {}^t(\mathcal{O}\times\mathcal{O}) \to \mathfrak{A}$,

$\begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \end{bmatrix} \mapsto co_1 + do_2.$

<u>Dann</u> <u>gilt</u> <u>für</u> $\alpha \in SL_2(\mathfrak{A})$, $P = (z,r) \in T$ <u>und</u> $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\, s > 4$

$$E_\alpha(P,s) = \#(O_r(v_\alpha)^*) \sum_{\substack{(c',d')\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \\ c'\mathcal{O}+d'\mathcal{O}=u_\alpha \\ \mathrm{Kern}(R(c',d'))\cong v_\alpha^{-1} \\ (\underline{\text{als}}\ \underline{\text{Rechts}}\text{-}\mathcal{O}\text{-}\underline{\text{Moduln}})}} \left[\frac{r}{\mathrm{Nrd}(c'z+d')+\mathrm{Nrd}(c')r^2}\right]^s$$

<u>Beweis:</u>

Sei $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix}$, $\eta = \alpha^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathfrak{A})$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} SL_2(\mathcal{O})'_\eta \backslash SL_2(\mathcal{O}) &\longrightarrow \Big\{(c',d') \in \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \,|\, c'\mathcal{O}+d'\mathcal{O} = c\mathcal{O}+d\mathcal{O} \ \underline{\text{und}} \\ &\qquad\qquad \mathrm{Kern}(R(c',d')) \cong \mathrm{Kern}(R(c,d))\Big\} \\ SL_2(\mathcal{O})'_\eta\, \gamma &\longmapsto (c,d)\,\gamma \end{aligned}$$

ist offensichtlich wohldefiniert. Die Surjektivität entspricht der Injektivität der Abbildung φ im Beweis des Satzes 2.1, folgt also aus der Projektivität von gebrochenen Rechts-$\mathcal{O}$-Idealen. Die Kardinalität einer jeden Faser ist

$$\begin{aligned} &[\{\gamma \in SL_2(\mathcal{O}) \,|\, (c,d)\gamma = (c,d)\} : SL_2(\mathcal{O})'_\eta] \\ &= [\{\gamma \in \alpha SL_2(\mathcal{O})\alpha^{-1} \,|\, (0,1)\gamma = (0,1)\} : (\alpha SL_2(\mathcal{O})\alpha^{-1})'_\infty] \quad , \end{aligned}$$

und der letzte Index ist gerade $\#(O_r(v_\alpha)^*)$ (offensichtlich, falls $u_\alpha = h_\alpha^{-1}$, und somit nach Lemma 6.9 c) allgemein gültig).

Es ist
$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(R(c,d)) &= \begin{bmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} (\tilde{a}^{-1}\mathcal{O} \cap \tilde{c}^{-1}\mathcal{O}) \\ &= \begin{bmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{c}\end{bmatrix} (\mathcal{O}\tilde{a} + \mathcal{O}\tilde{c})^{-1} \\ &\cong v_\alpha^{-1} \quad . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Auch unter Verwendung obiger Summationsbedingung sehen wir, falls $\mathcal{O}$ eine von 1 verschiedene Klassenzahl hat, keine Möglichkeit, das Repräsentantensystem R aus der Fourierentwicklung der E_α (§ 3) besser handzuhaben. Wie in [3] ist es naheliegend, Linearkombinationen der Eisensteinreihen zu $SL_2(\mathcal{O})$ zu betrachten, die Epstein-ζ-Funktionen sind (Epstein [4]). Für solche Linearkombinationen steht außerdem die Methode der Integraldarstellung zur Verfügung (§ 5).

4.2. Definition und Satz: <u>Sei</u> M <u>ein gebrochenes Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal.</u> <u>Dann konvergiert für</u> $P = (z,r) \in T$ <u>die Reihe</u>

$$\hat{E}_M(P,s) := |\mathrm{Nrd}(M)|^s \sum_{(c,d)\in M\times M-\{0\}} \left[\frac{r}{\mathrm{Nrd}(cz+d)+\mathrm{Nrd}(c)r^2}\right]^s$$

<u>absolut</u> <u>und</u> <u>gleichmäßig</u> <u>auf</u> <u>Kompakta</u> <u>in</u> $\{s \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\, s > 4\}$ <u>und</u> <u>erfüllt</u> $\hat{E}_{hM}(\gamma P,s) = \hat{E}_M(P,s)$ <u>für</u> $h \in \mathfrak{X}^*$, $\gamma \in SL_2(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u>

Die Summationsmenge von $\hat{E}_M(P,s)$ ist ein $\mathbb{Z}$-Gitter vom Rang 8 und die Abbildung $\mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{R}^{>0}$, $(c,d) \mapsto \frac{1}{r}\,\mathrm{Nrd}(cz+d) + r\,\mathrm{Nrd}(c)$ ist eine reelle positiv definite quadratische Form. ∎

4.3. Satz: <u>Sei</u> Rep <u>ein</u> <u>Repräsentantensystem</u> <u>für</u> $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/SL_2(\mathcal{O})$, M <u>ein</u> <u>gebrochenes</u> <u>Rechts</u>-$\mathcal{O}$-<u>Ideal</u>, $P = (z,r) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\, s > 4$.

<u>Dann</u> <u>gilt</u>:

$$\hat{E}_M(P,s) = \sum_{\alpha\in\mathrm{Rep}} \frac{|\mathrm{Nrd}(u_\alpha)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\alpha^{-1}\infty} : SL_2(\mathcal{O})'_{\alpha^{-1}\infty}]}\, \zeta(Mu_\alpha^{-1},\tfrac{s}{2})\; E_\alpha(P,s)$$

(Man beachte die Definition $\zeta(M,s) = |N(M)|^s \sum_{m\in M-\{0\}} \frac{1}{N(m)^s}$ mit der unreduzierten Norm $N_{\mathfrak{X}/\mathbb{Q}}$.)

<u>Beweis:</u>

Diese Linearkombination ist eine triviale Umsummation mit Hilfe der Abbildung

$$\dot{\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Rep}}} (Mu_\alpha^{-1}-\{0\}) \times \alpha\, SL_2(\mathcal{O}) \longrightarrow M\times M - \{0\}$$

$$\left[h,\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ c & d\end{bmatrix}\right] \mapsto (hc,hd).$$

Sei $(c',d') \in M \times M - \{0\}$. Dann gibt es genau ein $\alpha \in \mathrm{Rep}$ mit $(c',d') \in \{h(0,1)\alpha\gamma \mid h \in Mu_\alpha^{-1}$ und $\gamma \in SL_2(\mathcal{O})\}$.
Mit $SL_2(\mathcal{O})_{\alpha^{-1}\infty} = \{\gamma \in SL_2(\mathcal{O}) \mid$ Es gibt ein $h \in \mathfrak{k}^*$ mit

$$(c',d')\gamma = h(c',d')\}$$

ist die Kardinalität der Faser von (c',d'):

$$[SL_2(\mathcal{O})_{\alpha^{-1}\infty} : \{\gamma \in SL_2(\mathcal{O}) \mid (c',d')\gamma = (c',d')\}]. \qquad \blacksquare$$

4.4. Korollar: Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$, $\{M_1,\dots,M_h\}$ ein Repräsentantensystem für die Rechts-$\mathcal{O}$-Idealklassen.
Dann ist $\{\hat{E}_{M_1}(\cdot,s),\dots,\hat{E}_{M_h}(\cdot,s)\}$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig.

Beweis:

Für $1 \leq i \leq h$ sei

$$E_{M_i}(\cdot,s) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathrm{Rep}\\ u_\alpha \cong M_i\\ (\text{als Rechts-}\mathcal{O}\text{-Moduln})}} \frac{|\mathrm{Nrd}(u_\alpha)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\alpha^{-1}\infty} : SL_2(\mathcal{O})'_{\alpha^{-1}\infty}]} E_\alpha(\cdot,s)$$

Aus der Fourierentwicklung (§3) folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{E_{M_1}(\cdot,s),\dots,E_{M_h}(\cdot,s)\}$. Nach dem vorstehenden Satz ist

$$\begin{bmatrix} \zeta(M_1M_1^{-1},\frac{s}{2}) & \cdots & \zeta(M_1M_h^{-1},\frac{s}{2}) \\ \vdots & & \\ \zeta(M_hM_1^{-1},\frac{s}{2}) & \cdots & \zeta(M_hM_h^{-1},\frac{s}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{M_1}(\cdot,s) \\ \vdots \\ E_{M_h}(\cdot,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{M_1}(\cdot,s) \\ \vdots \\ \hat{E}_{M_h}(\cdot,s) \end{bmatrix}$$

Wie im anschließenden Exkurs erläutert, ist die Matrix $(\zeta(M_iM_j^{-1},s))_{1\leq i,j\leq h}$ regulär für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$. $\blacksquare$

Exkurs: Wir referieren für uns bedeutsame Ergebnisse aus der Literatur über ζ-Funktionen zu Idealklassen von maximalen $\mathbb{Z}$-Ordnungen in $\mathfrak{A}$.

Sei N ein $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathfrak{A}$ mit $O_{\mathfrak{l}}(N)$ maximal, $[N]$ seine Links-$O_{\mathfrak{l}}(N)$-Idealklasse. Dann konvergiert die Reihe

$$\zeta_{[N]}(s) := \sum_{\substack{L \text{ gebrochenes} \\ \text{Links-}O_{\mathfrak{l}}(N)\text{-Ideal} \\ L \subseteq O_{\mathfrak{l}}(N) \\ [L]=[N]}} \frac{1}{|N(L)|^s}$$

($N(\cdot)$ die unreduzierte Norm von $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Q}$)
absolut und lokal gleichmäßig für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$. Da die Einheitengruppen von $\mathbb{Z}$-Ordnungen in $\mathfrak{A}$ endlich sind, gilt für ein $\mathbb{Z}$-Gitter M mit $O_r(M)$ maximal:

$$\#(O_r(M)^*)\zeta_{[M^{-1}]}(s) = \zeta(M,s) := |N(M)|^s \sum_{m \in M-\{0\}} \frac{1}{N(m)^s}$$

($s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$).

Die Hecke-Integraldarstellung für $\zeta(M,\cdot)$ liefert: $\zeta(M,\cdot)$ hat eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$, die holomorph ist bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ mit Residuum $\frac{2\pi^2}{d_{red}}$ und die Funktionalgleichung

$$\psi(s)\zeta(M,s) = \psi(1-s)\zeta(\mathfrak{D}^{-1}M^{-1},1-s)$$

mit $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $s \mapsto (2\pi)^{-2s} d_{red}^{s}\, \Gamma(2s)$ erfüllt ($\mathfrak{D}$ die Differente von $O_r(M)$ über $\mathbb{Z}$, $d_{red} = |Nrd(\mathfrak{D})|$ die reduzierte Diskriminante).

Sei $\mathcal{O}$ eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathfrak{A}$ wie zuvor, $\{M_1,\ldots,M_h\}$ ein Repräsentantensystem der Rechts-$\mathcal{O}$-Idealklassen. Wir fassen die Matrix $(\zeta_{[M_j M_i^{-1}]}(s))_{1\leq i,j\leq h}$ als ζ-Funktion zu einer Darstellung einer Hecke-Algebra auf und erhalten daraus eine Eulerproduktentwicklung (cf. Tamagawa [15], Shimizu [14] und Godement-Jacquet [6]):

Für $p \in M_{\mathbb{Q}} - \{\infty\}$ ($M_{\mathbb{Q}}$ die Menge der Stellen von $\mathbb{Q}$) bezeichne $H(\mathfrak{A}_p^*, \mathcal{O}_p^*)$ die Algebra der $\mathcal{O}_p^*$-biinvarianten Funktionen $\mathfrak{A}_p^* \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Das eingeschränkte Tensorprodukt $H(\mathfrak{A}_{\underline{A},f}^*, \mathcal{O}_{\underline{A},f}^*) := \hat{\bigotimes}_{p\in M_{\mathbb{Q}}-\{\infty\}} H(\mathfrak{A}_p^*, \mathcal{O}_p^*)$ ist in natürlicher Weise isomorph zur Algebra der Funktionen $\mathfrak{A}_{\underline{A},f}^* \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger, die $\mathcal{O}_{\underline{A},f}^*$- biinvariant sind. (Dabei sei

$$\mathfrak{A}_{\underline{A},f}^* := \varinjlim_{\substack{S \\ S\subseteq M_{\mathbb{Q}}-\{\infty\} \\ S\ \underline{\text{endlich}}}} \prod_{p\in M_{\mathbb{Q}}-(S\cup\{\infty\})} \mathcal{O}_p^* \times \prod_{p\in S} \mathfrak{A}_p^*,$$

$$\mathcal{O}_{\underline{A},f}^* := \prod_{p\in M_{\mathbb{Q}}-\{\infty\}} \mathcal{O}_p^* .)$$

Durch Konvolution wird eine Darstellung ρ von $H(\mathfrak{A}_{\underline{A},f}^*, \mathcal{O}_{\underline{A},f}^*)$ auf dem h-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$V := \{f: \mathfrak{A}_{\underline{A},f}^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(kxg) = f(x)\ \underline{\text{für}}\ k \in \mathcal{O}_{\underline{A},f}^*,\ x \in \mathfrak{A}_{\underline{A},f}^*,\ g \in \mathfrak{A}^*\}$$

definiert. Für ein Ideal I in $\mathbb{Z}$ sei $T(I)$ die charakteristische Funktion auf $\mathscr{I}^*_{\underline{A},f}$ von

$$\{(x_p)_p \in \mathscr{I}^*_{\underline{A},f} \mid x_p \in \mathcal{O}_p \ \underline{\text{und}}\ \mathrm{Nrd}(x_p\mathcal{O}_p) = I_p \ \underline{\text{für}}\ \underline{\text{alle}}\ \ p \in M_{\mathbb{Q}}-\{\infty\}\};$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ bezeichne $\Psi(s)$ den Endomorphismus von V $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \rho(T(n\mathbb{Z})) \cdot n^{-2s}$. Wählt man als Basis für V die charakteristischen Funktionen der Elemente von $\mathcal{O}^*_{\underline{A},f}\backslash\mathscr{I}^*_{\underline{A},f}/\mathscr{I}^*$, so entspricht $\Psi(s)$ der Matrix $(\zeta_{[M_jM_i^{-1}]}(s))_{1\leq i,j\leq h}$. Da $H(\mathscr{I}^*_{\underline{A},f},\mathcal{O}^*_{\underline{A},f})$ kommutativ ist und vermöge ρ halbeinfach auf V operiert, lassen sich die $\rho(T(n\mathbb{Z}))$, $n \in \mathbb{N}$ simultan diagonalisieren. Die Eulerfaktoren ergeben sich aus der Struktur der Algebren $H(\mathscr{I}^*_p,\mathcal{O}^*_p)$, die mit Hilfe von Repräsentantensystemen für $(\mathscr{I}^*_p \cap \mathcal{O}_p)/\mathcal{O}^*_p$ und $\mathcal{O}^*_p\backslash(\mathscr{I}^*_p \cap \mathcal{O}_p)/\mathcal{O}^*_p$ bestimmt werden. Die absolut Konvergenz der Eulerprodukte für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ impliziert die Regularität von $(\zeta_{[M_jM_i^{-1}]}(s))_{1\leq i,j\leq h}$.

Die auf obige Weise einer Hecke-Eigenform aus V zugeordnete Dirichlet-Reihe läßt sich auch als idelisches Integral auffassen dessen Fortsetzung und Funktionalgleichung sich mit den Methoden von Tate gewinnen lassen.

§ 5 Fortsetzung und Funktionalgleichung von Eisensteinreihen mit Gittersummationsbedingung aus der Integraldarstellung

Fassen wir die Abbildung $s \mapsto \frac{1}{|\mathrm{Nrd}(M)|^s} \hat{E}_M(P,s)$ als Dirichletreihe zu einer quadratischen Form auf, so erkennen wir $\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\frac{1}{|\mathrm{Nrd}(M)|^s} \hat{E}_M(P,s)$ als Mellintransformation der zugehörigen θ-Reihe. Die θ-Transformationsformel ermöglicht die meromorphe Fortsetzung des obigen Mellinintegrals nach $\mathbb{C}$ und führt auf eine Funktionalgleichung. Die darin aufkommende Mellintransformierte der θ-Reihe zum "dualen Gitter" erkennen wir wieder als Eisensteinreihe.

Mellintransformation der θ-Reihen zu Gittern in $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$

Sei V ein zweidimensionaler Links-$\mathbb{H}$-Vektorraum, $\hat{V} = \{\psi\colon V \longrightarrow S^1 \mid \psi$ <u>ist stetiger Gruppenhomomorphismus</u>$\}$ der "topologisch duale" Rechts-$\mathbb{H}$-Vektorraum. Für ein Gitter L in V (i.e. eine diskrete Untergruppe $L \subsetneq V$ mit V/L kompakt) sei $\hat{L} = \{\psi \in \hat{V} \mid \psi(L) = \{1\}\}$. V' bezeichne den "algebraisch dualen" Rechts-$\mathbb{H}$-Vektorraum zu V.

Der nicht triviale Charakter $\chi\colon \mathbb{H} \longrightarrow S^1$, $h \mapsto e^{2\pi i \mathrm{Trd}(h)}$ erfüllt $\chi(gh) = \chi(hg)$ für $g,h \in \mathbb{H}$ und definiert daher einen Rechts-Vektorraumisomorphismus $\Omega_\chi\colon V' \longrightarrow \hat{V}$, $\lambda \mapsto \chi \circ \lambda$. Für ein Gitter L in V sei $L' = \Omega_\chi^{-1}(\hat{L}) = \{\lambda \in V' \mid \mathrm{Trd}(\lambda(L)) \subsetneq \mathbb{Z}\}$.

Wir identifizieren V mit $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ bezüglich einer Basis und V' mit ${}^t(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$ bezüglich der dualen Basis. Wir definieren einen $\mathbb{H}$-Vektorraum-Semiisomorphismus $\alpha\colon V \longrightarrow V'$,

$(h_1, h_2) \mapsto \left[\overline{\frac{h_1}{h_2}}\right] \cdot \frac{1}{2}$ und ein positiv definites reelles Skalarprodukt $<\ ,\ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \mathrm{Trd}(\alpha(v)(w))$. Das Haar-Maß auf V sei so normiert, daß es gleich seinem unter $\Omega_\chi \circ \alpha$ zurückgeholten dualen Maß ist, d.h., daß das Fundamenta[l]parallelotop einer $\mathbb{R}$-Orthonormalbasis bezüglich $<\ ,\ >$ Volumen 1 hat.

Für die Schwartz-Funktion $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{C},\ v \mapsto e^{-\pi<v,v>}$ und ihr[e] Fouriertransformierte $\hat{\varphi}: \hat{V} \to \mathbb{C}$ gilt $\hat{\varphi} \circ \Omega_\chi \circ \alpha = \varphi$.

5.1. **Definition:** <u>Für ein Gitter</u> L <u>in</u> V <u>sei</u> $\theta_L: \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \sum_{\omega \in L} \varphi(\sqrt{a}\,\omega)$.

Aus der Poisson-Summationsformel erhält man den

5.2. **Satz:** (θ-<u>Transformationsformel</u>)
<u>Für alle</u> $a \in \mathbb{R}^{>0}$ <u>gilt</u>: $\theta_L(a) = \frac{1}{a^4 \mathrm{vol}(V/L)}\, \theta_{\alpha^{-1}(L')}(a^{-1})$.

5.3. **Definition und Satz:** <u>Für ein Gitter</u> L <u>in</u> V <u>existiert</u>

$$\mathrm{Mel}(\theta_L - 1, s) = \int_0^\infty (\theta_L(a) - 1)\, a^s \frac{da}{a}$$

<u>für</u> $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\, s > 4$, <u>hat eine meromorphe Fortsetzung nach</u> $\mathbb{C}$, <u>die holomorph ist bis auf Pole erster Ordnung bei</u> $s = 0$ <u>mi[t] Residuum</u> -1 <u>und bei</u> $s = 4$ <u>mit Residuum</u> $\frac{1}{\mathrm{vol}(V/L)}$, <u>und es gi[lt] die Funktionalgleichung</u>

$$\mathrm{Mel}(\theta_L-1,s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(V/L)}\,\mathrm{Mel}(\theta_{\alpha^{-1}(L')}-1,4-s).$$

<u>Beweis:</u>

Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$. Die θ-Transformationsformel liefert die Existenz des Integrals $\int_0^1 \ldots$ aus der des Integrals $\int_1^\infty \ldots$ sowie die Identität

$$\mathrm{Mel}(\theta_L-1,s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{\mathrm{vol}(V/L)}\,\frac{1}{s-4}$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{vol}(V/L)} \int_1^\infty (\theta_{\alpha^{-1}(L')}(a)-1)a^{4-s}\,\frac{da}{a}$$

$$+ \int_1^\infty (\theta_L(a)-1)a^s\,\frac{da}{a}\quad .$$

Da die beiden rechts notierten Integrale holomorphe Funktionen in $s \in \mathbb{C}$ definieren, folgt die meromorphe Fortsetzbarkeit von $\mathrm{Mel}(\theta_L-1,\cdot)$ auf $\mathbb{C}$. Die Funktionalgleichung liest man unmittelbar ab. ■

Anwendung auf Eisensteinreihen

Sei $\mathfrak{D}$ die Differente von $\mathcal{O}$ über $\mathbb{Z}$, $d_{red} = |\mathrm{Nrd}(\mathfrak{D})|$ die reduzierte Diskriminante.

5.4. Satz: <u>Sei</u> M <u>ein gebrochenes Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal</u>, $\mu \in SL_2(\mathbb{H})$, $P_0 = (0,1) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\, s > 4$.
<u>Dann gilt</u>:

$$\mathrm{Mel}(\theta_{(M\times M)\mu}-1,s) = \frac{\pi^{-s}\Gamma(s)}{|\mathrm{Nrd}(M)|^{s}}\,\hat{E}_M(\mu P_0,s) \quad .$$

<u>Beweis:</u>

$$\mathrm{Mel}(\theta_{(M\times M)\mu}-1,s) = \sum_{(c,d)\in(M\times M)\mu-\{0\}} \int_0^\infty e^{-\pi(\mathrm{Nrd}(c)+\mathrm{Nrd}(d))a} \cdot a^s$$

$$= \sum_{(c,d)\in(M\times M)\mu-\{0\}} (\pi(\mathrm{Nrd}(c)+\mathrm{Nrd}(d)))^{-s}\,\Gamma(s) \quad .$$

5.5. **Lemma:** <u>Sei</u> M <u>ein</u> <u>gebrochenes</u> <u>Rechts</u>-$\mathcal{O}$-<u>Ideal</u>.

<u>Dann</u> <u>gilt</u>: a) $\tilde{M} = 2\,\overline{M^{-1}}\,\mathfrak{D}^{-1}$

b) $\mathrm{vol}(\mathbb{H}/M) = \frac{1}{4}\,d_{red}\,|\mathrm{Nrd}(M)|^2$.

<u>Beweis:</u>

a) Klar aus der Definition von $<\ ,\ >$.

b) Sei $M \subseteq \mathcal{O}$. Dann ist $\tilde{M} \supseteq M$,

$$[\tilde{M}:M] = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{H}/M)}{\mathrm{vol}(\mathbb{H}/\tilde{M})} = (\mathrm{vol}(\mathbb{H}/M))^2$$

und andererseits

$$[\tilde{M}:M] = \frac{|\mathrm{Nrd}(M)|^2}{|\mathrm{Nrd}(\tilde{M})|^2} = \frac{|\mathrm{Nrd}(M)|^4 d_{red}^2}{16} \quad . \quad \blacksquare$$

Damit erhält man aus den Eigenschaften der Mellintransformierte

folgendes

5.6. Korollar: Sei M ein gebrochenes Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal, $P_0 = (0,1) \in T$.

a) Dann hat die Abbildung $s \mapsto \hat{E}_M(P,s)$ für jedes $P \in T$ eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$, die holomorph ist bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = 4$ mit Residuum $\frac{8\pi^4}{3\, d_{red}^2}$, ferner gilt $\hat{E}_M(P,0) = -1$, und $\hat{E}_M(P,s)$ hat einfache Nullstellen in $s = -n$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Die Fortsetzungen genügen für jedes $P \in T$ der Funktionalgleichung

$$\left[\frac{2\pi}{\sqrt{d_{red}}}\right]^{-s} \Gamma(s)\hat{E}_M(P,s) = \left[\frac{2\pi}{\sqrt{d_{red}}}\right]^{-(4-s)} \Gamma(4-s)\hat{E}_{\tilde{M}}(s_{P_0}(P),4-s)$$

(s_{P_0} die geodätische Symmetrie an P_0 (cf. §1)).

Beweis:

Sei $\mu \in SL_2(\mathbb{H})$ mit $\mu P_0 = P$. Es gilt
$\alpha^{-1}(((M\times M)\mu)') = \alpha^{-1}(\mu^{-1}({}^t(\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}\times\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}))) = (\tilde{M}\times\tilde{M})\ {}^{H}\mu^{-1}$
und $\mathrm{vol}(V/(M\times M)\mu) = 2^{-4}\, d_{red}^2 |\mathrm{Nrd}(M)|^4$. ∎

5.7. Lemma: Sei σ der involutive Automorphismus von $SL_2(\mathbb{H})$ mit $\sigma(\mu) = {}^{H}\mu^{-1}$.

a) Sei $\beta \in SL_2(\mathcal{X})$, $P_0 = (0,1) \in T$, $P \in T$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$. Dann gilt $E_\beta(s_{P_0}(P),s) = E_{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\sigma(\beta)}(P,s)$.

b) Sei M ein gebrochenes Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal, Rep ein Repräsentantensystem für $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/SL_2(\mathcal{O})$.

Dann gilt:

$$\hat{E}_M(s_{P_0}(P),s) = \sum_{\beta \in \mathrm{Rep}} \frac{|\mathrm{Nrd}(v_\beta)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\beta^{-1}\infty} : SL_2(\mathcal{O})'_{\beta^{-1}\infty}]} \cdot \zeta(M\,\overline{v_\beta^{-1}},\tfrac{s}{2}) \cdot E_\beta(P,s) \;.$$

Beweis:

a) Für $(z,r) \in T$ errechnet man $s_{P_0}(z,r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(-\bar{z},r)$.
Wegen $\sigma(SL_2(\mathcal{O})) = SL_2(\mathcal{O})$ folgt die Behauptung.

b) Mit Teil a) erhält man aus der Linearkombination der $\hat{E}$ in Satz 4.3

$$\hat{E}_M(s_{P_0}(P),s) =$$

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{Rep}} \frac{|\mathrm{Nrd}(u_\gamma)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\gamma^{-1}\infty} : SL_2(\mathcal{O})'_{\gamma^{-1}\infty}]} \zeta(Mu_\gamma^{-1},\tfrac{s}{2}) \cdot E_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sigma(\gamma)}(P,s)$$

Da mit γ auch $\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sigma(\gamma)$ ein Repräsentantensystem für $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/SL_2(\mathcal{O})$ durchläuft, folgt die Behauptung. ∎

5.8. Satz: Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$, $\{M_1,\ldots,M_h\}$ ein Repräsentantensystem für die Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal- klassen $\mathcal{H}^*\backslash I_{\mathcal{O}}$, τ der durc $f \mapsto f \circ s_{P_0}$ definierte involutive Automorphismus des von den $E_\beta(\cdot,s)$ erzeugten $\mathbb{C}$-Vektorraums, $\hat{E}$ der Unterraum mit Basis $\{\hat{E}_{M_1}(\cdot,s),\ldots,\hat{E}_{M_h}(\cdot,s)\}$.
Dann ist $\hat{E} \cap \tau(\hat{E})$ eindimensional.

Beweis:

Nach §4 ist $\{E_{M_1}(\cdot,s),\ldots,E_{M_h}(\cdot,s)\}$ eine Basis für $\hat{E}$, wobei

$$E_{M_i}(\cdot,s) = \sum_{\substack{\beta\in\mathrm{Rep}\\ u_\beta\cong M_i}} \frac{|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\beta^{-1}\infty}:SL_2(\mathcal{O})'_{\beta^{-1}\infty}]} E_\beta(\cdot,s) .$$

Lemma 5.7 a) liefert

$$\tau(E_{M_i}(\cdot,s)) = \sum_{\substack{\tau\in\mathrm{Rep}\\ v_\tau\cong M_i}} \frac{|\mathrm{Nrd}(v_\tau)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\tau^{-1}\infty}:SL_2(\mathcal{O})'_{\tau^{-1}\infty}]} E_\tau(\cdot,s) .$$

Sei $f = \sum_{\beta\in\mathrm{Rep}} a(\beta) \frac{|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^s}{[SL_2(\mathcal{O})_{\beta^{-1}\infty}:SL_2(\mathcal{O})'_{\beta^{-1}\infty}]} E_\beta(\cdot,s)$.

Ist $f \in \hat{E}$, so gilt also $a(\beta) = a(\beta')$, wenn $\beta, \beta' \in$ Rep mit $u_\beta \cong u_{\beta'}$. Ist $f \in \tau(\hat{E})$, so gilt $a(\tau) = a(\tau')$, wenn $\tau, \tau' \in$ Rep mit $v_\tau \cong v_{\tau'}$. (Man beachte dazu $\mathrm{Nrd}(v_\tau) = \mathrm{Nrd}(u_\tau)$ nach Lemma 6.9 b).)

Da, wie in §2 gezeigt, die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi:\ SL_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{P}^1(\mathcal{K}) &\longrightarrow {}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^* \times {}_{\mathcal{O}}I/\mathcal{K}^* , \\ \beta^{-1}\infty &\longmapsto ([v_\beta],[u_\beta^{-1}]) \end{aligned}$$

bijektiv ist, gilt für $f \in \hat{E} \cap \tau(\hat{E})$: $a(\beta) = a(\beta')$ für alle β, $\beta' \in$ Rep. ∎

§ 6 Fourierentwicklung der Eisensteinreihen mit Gittersummationsbedingung

In diesem Paragraphen sei $\beta \in SL_2(\mathscr{K})$, $\eta = \beta^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathscr{K})$, $L = \{\omega \in \mathscr{K} \mid \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \beta\, SL_2(\mathcal{O})'_\eta\, \beta^{-1}\}$, M ein gebrochenes Rechts-Ideal.

Wie in §3 erhalten wir die Fourierentwicklung für $\hat{E}_M(\beta^{-1}(\cdot,r),s)$:

6.1. Satz: Für $P = (z,r) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$ ist

$$\hat{E}_M(\beta^{-1}P,s) = r^s |\mathrm{Nrd}(M)|^s \sum_{(0,d)\in(M\times M)\beta^{-1}-\{0\}} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(d)^s}$$

$$+ r^{4-s} \frac{\pi^2 |\mathrm{Nrd}(M)|^s}{\mathrm{vol}(Q)(s-2)(s-1)} \sum_{(c,d)\in R_0} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^s}$$

$$+ \frac{2r^2\pi^s |\mathrm{Nrd}(M)|^s}{\mathrm{vol}(Q)\ \Gamma(s)} \sum_{\tilde{\omega}\in\tilde{L}-\{0\}} \Bigg[\sum_{(c,d)\in R_0} \frac{e^{2\pi i\langle\tilde{\omega},c^{-1}d\rangle}}{\mathrm{Nrd}(c)^s} \sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}^{\,s-2} K_{s-2}(2\pi\sqrt{\mathrm{Nrd}(\tilde{\omega})}\ r) \Bigg]$$

$$\cdot\ e^{2\pi i\langle\tilde{\omega},z\rangle} .$$

Dabei bezeichnet Q ein Fundamentalparallelotop für L in $\mathbb{H}$, R_0 ein Repräsentantensystem für $\{(c,d) \in (M \times M)\beta^{-1} \mid c \neq 0\}/\beta\, SL_2(\mathcal{O})'_\eta\, \beta^{-1}$.

Die Summation über das Repräsentantensystem R_0 läßt sich analog [3] §4 vereinfachen:

6.2. Lemma: $\{d \in \mathfrak{K} \mid (0,d) \in (M \times M)\,\beta^{-1}\} = Mu_\beta^{-1}$.

6.3. Lemma: $L = (u_\beta v_\beta)^{-1}$.

(Die Beweise sind offensichtliche Rechnungen.)

Es gilt $(M \times M)\,\beta^{-1} \subseteq Mv_\beta \times Mh_\beta$. Für jedes $\hat{c} \in Mv_\beta$ definieren wir $(\hat{c},\cdot) = \{(\hat{c},d) \mid (\hat{c},d) \in (M \times M)\,\beta^{-1}\}$. Aus der Definition von v_β, u_β ergibt sich unmittelbar

6.4. Lemma: a) $(\hat{c},\cdot) \neq \emptyset$ _für alle_ $\hat{c} \in Mv_\beta$.

b) _Für_ $(\hat{c},\hat{d}) \in (M \times M)\,\beta^{-1}$ _ist_ $(\hat{c},\cdot) = (\hat{c},\hat{d}+Mu_\beta^{-1})$.

Aus Lemma 6.3 und 6.4 b) ergibt sich

6.5. Lemma: _Sei_ $(\hat{c},\hat{d}) \in (M \times M)\,\beta^{-1}$.
Dann ist die Abbildung

$$
\begin{aligned}
(\hat{c},\cdot)/\beta\, SL_2(\mathcal{O})'_\eta\, \beta^{-1} &\longrightarrow Mu_\beta^{-1}/\hat{c}(u_\beta v_\beta)^{-1} \\
(\hat{c},d)\, \beta\, SL_2(\mathcal{O})'_\eta\, \beta^{-1} &\longmapsto (d-\hat{d}) + \hat{c}(u_\beta v_\beta)^{-1}
\end{aligned}
$$

bijektiv.

6.6. Korollar (aus Lemma 6.2 bis 6.5): _Für_ $s \in \mathbb{C}$ _mit_ $\operatorname{Re} s > 4$ _ist_

$$|\mathrm{Nrd}(M)|^s \sum_{(0,d)\in(M\times M)\beta^{-1}-\{0\}} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(d)^s} = |\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^s\, \zeta(Mu_\beta^{-1},\tfrac{s}{2}$$

$$\frac{|\mathrm{Nrd}(M)|^s}{\mathrm{vol}(Q)} \sum_{(c,d)\in R_0} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^s} = \frac{4\,|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^2}{d_{red}|\mathrm{Nrd}(v_\beta)|^{s-2}} \cdot \zeta(Mv_\beta,\tfrac{s-2}{2})$$

Zur weiteren Berechnung der höheren Fourierkoeffizienten folgende Betrachtungen:

6.7. Lemma: <u>Für</u> $\tilde{\omega} \in \tilde{L} - \{0\}$, $\hat{c} \in Mv_\beta - \{0\}$ <u>sei</u>

$$S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) := \sum_{(\hat{c},d)\in R_0} e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}d>}.$$

<u>Sei</u> $(\hat{c},\hat{d}) \in (M\times M)\beta^{-1}$, <u>dann gilt</u>:

$$S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) = \begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{Nrd}(\hat{c})}{|\mathrm{Nrd}(M)|\cdot|\mathrm{Nrd}(v_\beta)|}\right]^2 \cdot e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}\hat{d}>} & \underline{\text{für}}\ \overline{\hat{c}^{-1}\tilde{\omega}} \in \widetilde{Mu_\beta^{-1}} \\ 0 & \underline{\text{für}}\ \overline{\hat{c}^{-1}\tilde{\omega}} \notin \widetilde{Mu_\beta^{-1}} \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

Sei $\tilde{\omega} \in \tilde{L} - \{0\}$, $\hat{c} \in Mv_\beta - \{0\}$; dann gilt:

$$\overline{\hat{c}^{-1}\tilde{\omega}} \in \widetilde{Mu_\beta^{-1}} \Leftrightarrow \forall a \in Mu_\beta^{-1}: e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}a>} = 1.$$

Damit folgt (nach Lemma 6.5):

a) Für $\overline{\hat{c}^{-1}\tilde{\omega}} \in \widetilde{Mu_\beta^{-1}}$ ist

$$S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) = \left[\sum_{(d-\hat{d})+\hat{c}(u_\beta v_\beta)^{-1}\in Mu_\beta^{-1}/\hat{c}(u_\beta v_\beta)^{-1}} e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}(d-\hat{d})>}\right] \cdot e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}\hat{d}>}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{Nrd}(\hat{c})}{|\mathrm{Nrd}(M)|\cdot|\mathrm{Nrd}(v_\beta)|}\right]^2 \cdot e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}\hat{d}>}.$$

b) Für $\overline{\hat{c}^{-1}\tilde{\omega}} \notin \widetilde{Mu_\beta^{-1}}$ gibt es $a \in Mu_\beta^{-1}$ mit $e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}a>} \neq 1$. Da mit $(\hat{c},d)$ auch $(\hat{c},d+a)$ ein Repräsentantensystem für $(\hat{c},\cdot)/\beta\ SL_2(\mathcal{O})'_\eta\ \beta^{-1}$ durchläuft, erhält man

$$S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) = \sum_{(\hat{c},d)\in R_0} e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}(d+a)>}$$

$$= e^{2\pi i<\tilde{\omega},\hat{c}^{-1}a>} \cdot S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) .$$

Somit ist $S_{\tilde{\omega}}(\hat{c}) = 0$. ∎

6.8. Korollar: <u>Ist</u> $u_\beta = h_\beta^{-1}$, <u>so gilt für</u> $s \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $\mathrm{Re}\ s > 4$ <u>und</u> $\tilde{\omega} \in \tilde{L} - \{0\}$:

$$\frac{|\mathrm{Nrd}(M)|^s}{\mathrm{vol}(Q)} \sum_{(c,d)\in R_0} \frac{e^{2\pi i\langle\tilde{\omega},c^{-1}d\rangle}}{\mathrm{Nrd}(c)^s}$$

$$= \frac{4\cdot|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^2\cdot|\mathrm{Nrd}(M)|^{s-2}}{d_{red}} \cdot \sum_{\substack{c\in Mv_\beta-\{0\} \\ \overline{c^{-1}\ \tilde{\omega}\in Mu_\beta^{-1}}}} \frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^{s-2}} .$$

Zuletzt ein Lemma über den Zusammenhang von u_β und h_β^{-1}:

6.9. Lemma: Für $M_1,\ldots,M_4 \subseteq \mathcal{K}$ bezeichne

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathcal{K}) \,\middle|\, m_i \in M_i \text{ für } 1 \le i \le 4 \right\} .$$

a) Für $\alpha \in SL_2(\mathcal{K})$ gilt:

$$\begin{bmatrix} o_\alpha & o_\alpha \\ u_\alpha & u_\alpha \end{bmatrix} / \alpha\, M_2(\mathcal{O}) \cong (o_\alpha/v_\alpha^{-1})^{(2)} \cong (u_\alpha/h_\alpha^{-1})^{(2)}$$

als Rechts-$M_2(\mathcal{O})$-Moduln.

b) Für $\alpha \in SL_2(\mathcal{K})$ ist $\mathrm{Nrd}(u_\alpha) = \mathrm{Nrd}(v_\alpha)$.

c) Für $\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} \in {}^t(\mathcal{K}\times\mathcal{K}) - \{0\}$ gibt es ein $\alpha \in SL_2(\mathcal{K})$ mit

$u_\alpha = h_\alpha^{-1}$ und $\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \alpha^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

6.10. Satz: Sei nun $\beta \in SL_2(\mathcal{K})$ mit $u_\beta = h_\beta^{-1}$.

Für $P = (z,r) \in T$, $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 4$ ist

$$\hat{E}_M(\beta^{-1}P,s) = r^s|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^s\,\zeta(Mu_\beta^{-1},\tfrac{s}{2})$$

$$+ r^{4-s}\frac{4\pi^2|\mathrm{Nrd}(v_\beta)|^{4-s}}{d_{red}(s-2)(s-1)}\,\zeta(Mv_\beta,\tfrac{s-2}{2})$$

$$+ \frac{2^{1+s}\pi^s r^2|\mathrm{Nrd}(u_\beta)|^2|\mathrm{Nrd}(M)|^{s-2}}{d_{red}\,\Gamma(s)}$$

$$\cdot \sum_{\omega\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}v_\beta-\{0\}}\left[\sum_{\substack{c\in Mv_\beta-\{0\}\\ \omega c^{-1}\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}}}\frac{1}{\mathrm{Nrd}(c)^{s-2}}\cdot\right.$$

$$\left.\sqrt{\mathrm{Nrd}(\omega)}^{\,s-2}\,K_{s-2}(4\pi\sqrt{\mathrm{Nrd}(\omega)}\,r)\right]\cdot e^{4\pi i\langle\bar{\omega},z\rangle}.$$

Als Korollar aus der Fourierentwicklung erhalten wir die Fortsetzung und Funktionalgleichung von $\hat{E}_M(P,\cdot)$ unabhängig von der Integraldarstellung in §5:

Sei $P \in T$.

a) <u>Meromorphe Fortsetzbarkeit von $s \mapsto \hat{E}_M(P,s)$ nach $\mathbb{C}$</u>

Die meromorphe Fortsetzbarkeit des 0. Fouriersummanden ergibt sich aus der der ζ-Funktion; die höheren Fouriersummanden definieren sogar holomorphe Funktionen in $s \in \mathbb{C}$.

Aus Lang [9], p. 271 entnehmen wir: Für $x_0 \in \mathbb{R}^{>0}$, $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}$ gibt es ein $C \in \mathbb{R}^{>0}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq x_0$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma_0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq \sigma_1$ gilt: $|K_s(x)| \leq C \cdot e^{-2x}$.

Damit folgt für jedes $s \in \mathbb{C}$ die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe ohne den 0. Fouriersummanden.

b) <u>Funktionalgleichung</u>

Die Funktionalgleichung $\psi(\frac{s}{2})\ \hat{E}_M(P,s) = \psi(\frac{4-s}{2})\ \hat{E}_{\tilde{M}}(s_{P_0}(P),4-s)$ (wobei $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ s \mapsto (2\pi)^{-2s}\ d_{red}^{s}\ \Gamma(2s))$ gilt koeffizientenweise für die Fourierentwicklung in der Spitze $\eta = \beta^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathcal{K})$ von $SL_2(\mathcal{O})$.

Die Fourierentwicklung von $z \mapsto \hat{E}_{\tilde{M}}(s_{P_0}(\beta^{-1}(z,r)),s)$ (Re $s > 4$

ergibt sich wie folgt:

Es gilt $s_{P_0}(\beta^{-1}(z,r)) = \sigma(\beta^{-1})\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}(-\bar{z},r)$.

Sei $\gamma = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}H_\beta{}^{-1}$,

$$z \mapsto \hat{E}_{\tilde{M}}(\gamma^{-1}(z,r),s) =: \sum_{\tilde{\omega}\in\tilde{L}_0} a(\tilde{\omega})e^{2\pi i<\tilde{\omega},z>} \quad ,$$

also ist $z \mapsto \hat{E}_{\tilde{M}}(\gamma^{-1}(-\bar{z},r),s) =: \sum_{\tilde{\omega}\in\bar{\tilde{L}}_0} a(-\bar{\tilde{\omega}})e^{2\pi i<\tilde{\omega},z>}$ mit

$L_0 = (u_\gamma v_\gamma)^{-1}$. Die $a(\tilde{\omega})$ $(\tilde{\omega} \in \tilde{L}_0)$ berechnen wir nach Satz 6.1C (man beachte, daß nach Lemma 6.9 a) mit $u_\beta = h_\beta^{-1}$ auch $u_\gamma = \bar{v}_\beta = \bar{o}_\beta^{-1} = h_\gamma^{-1}$).

Die Funktionalgleichung für den nullten Fourierkoeffizienten ergibt sich damit aus der der ζ-Funktion (cf. §4 Exkurs) und die Funktionalgleichung für die höheren Fourierkoeffizienten aus der der Besselfunktion: $K_s(x) = K_{-s}(x)$ für $s \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^{>0}$.

§ 7 Einige Anwendungen der Fourierentwicklung

In diesem Paragraphen sei $\beta \in SL_2(\mathfrak{K})$ mit $u_\beta = h_\beta^{-1}$ und $|Nrd(u_\beta)| = 1$ (nach dem globalen Normsatz (cf. [13]) und Lemma 6.9 c) bedeutet dies keine Einschränkung für $\eta = \beta^{-1}\infty \in \mathbb{P}^1(\mathfrak{K})$); für ein $\mathbb{Z}$-Gitter N in $\mathfrak{K}$ mit $O_r(N)$ maximal sei $\tau_0(N) := \lim\limits_{s\to 1} \left[\frac{d_{red}}{2\pi^2}\zeta(N,s) - \frac{1}{s-1}\right]$. M sei ein Rechts-$\mathcal{O}$-Ideal.

Aus der Fourierentwicklung in Satz 6.10 erhalten wir durch Laurententwicklung des nullten Fourierkoeffizienten (betrachtet als meromorphe Funktion in $s \in \mathbb{C}$) um $s = 2$ (wie in [3]) den

7.1. Satz: <u>Für</u> $P = (z,r) \in T$ <u>ist</u>

$$\hat{E}_M(\beta^{-1}P,2) = \frac{8\pi^2 r^2}{d_{red}} \left[\log(r) + \log\left[\frac{\sqrt{d_{red}}}{2\pi}\right] + 1 - \gamma\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\tau_0(M) + \tau_0(v_\beta^{-1}\mathfrak{D}^{-1}M^{-1})\right)$$

$$+ \sum_{\omega\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}v_\beta - \{0\}} \#\{c \in Mv_\beta - \{0\} \mid \omega c^{-1} \in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}\}$$

$$\left. K_0(4\pi\sqrt{Nrd(\omega)}\, r)\, e^{4\pi i\langle\bar{\omega}, z\rangle}\right] .$$

<u>Dabei</u> <u>ist</u> $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log(n)\right]$.

Wie in [3] und Asai [1] notieren wir ein Analogon zu Kroneckers erster Grenzformel:

7.2. Satz: Für $P = (z,r) \in T$ ist

$$\lim_{s \to 4} \left[\hat{E}_M(\beta^{-1}P,s) - \frac{8\pi^4}{3d_{red}^2} \frac{1}{s-4} \right]$$

$$= r^4 \zeta(Mu_\beta^{-1},2) + \frac{8\pi^4}{3d_{red}^2} \left(\tau_0(Mv_\beta) - \frac{5}{6} - \log(r)\right)$$

$$+ \frac{(2\pi)^4 r^2 |Nrd(M)|^2}{3d_{red}} \sum_{\omega \in u_\beta \mathfrak{D}^{-1} v_\beta - \{0\}} \left[\sum_{\substack{c \in Mv_\beta - \{0\} \\ \omega c^{-1} \in u_\beta \mathfrak{D}^{-1} M^{-1}}} \frac{1}{Nrd(c)^2} \right.$$

$$\left. Nrd(\omega) K_2(4\pi\sqrt{Nrd(\omega)}\, r) \right] e^{4\pi i \langle \bar{\omega}, z \rangle} .$$

Ammerkung:

Entsprechend Lang [9], chap. 21 § 1, können wir $\zeta(M,\cdot)$ durch Eisensteinreihen zum 3-dimensionalen hyperbolischen Raum T_3 beschreiben.

7.3. Satz: Sei K ein maximaler (also imaginär quadratischer) Unterkörper von $\mathfrak{X}$, so daß $K \cap \mathcal{O} =: S$ der Ring der ganzen Zahlen in K ist.

Dann gibt es ein gebrochenes S-Ideal I_0 in K und $P \in T_3$, so daß gilt:

$$\zeta(M,s) = \left[\frac{d_K}{d_{red}}\right]^s \hat{E}_{I_0}(P,2s-1) ,$$

wobei d_K ein positives Erzeugendes des Diskriminantenideals von

S über $\mathbb{Z}$ und $\hat{E}_{I_0}$ die in [3] definierte Eisensteinreihe zu $SL_2(S)$ bezeichnet.

Beweis:

$\mathfrak{X}$ ist ein K-Vektorraum durch Multiplikation mit K von links.

a) Seien I_1, I_2 gebrochene S-Ideale mit $I_2 = M \cap K$ und $I_1 \cong M/M \cap K$ als S-Moduln. Wegen der Projektivität gebrochener S-Ideale gibt es ein $h \in \mathfrak{X}^*$ mit $M = I_1h + I_2$.

b) Nach dem Satz von Eichler ([13], [5]) durchläuft $\mathrm{Hom}_S(S\times S, I\times I)$ ein Repräsentantensystem der Links-$M_2(S)$-Idealklassen, wenn I ein Repräsentantensystem der S-Idealklassen durchläuft. Also gibt es ein gebrochenes S-Ideal I_0 und $\alpha \in GL_2(K)$ mit $(I_1\times I_2)\alpha = (I_0\times I_0)$ (vergleiche den Beweis von Satz 2.2). Im weiteren nehmen wir $\alpha \in SL_2(K)$ an, was sich durch geeignete Wahl von I_1 und h in a) erreichen läßt.

c) Für alle $k \in K$ ist $\mathrm{char.pol.}_{K/\mathbb{Q}}(k) = \mathrm{red.char.pol.}_{\mathfrak{X}}(k)$. Daraus ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\zeta(M,s) = \left[\frac{d_K}{d_{red}}\right]^s |N_{K/\mathbb{Q}}(I_1)N_{K/\mathbb{Q}}(I_2)|^s$$

$$\cdot \sum_{(c,d)\in I_1\times I_2-\{0\}} \left[\frac{r}{N_{K\mathbb{R}/\mathbb{R}}(cz+d)+r^2N_{K\mathbb{R}/\mathbb{R}}(c)}\right]^{2s},$$

wobei $z \in K\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $j \in \mathbb{H}$ so gewählt seien, daß $h = z + rj$, $j^2 = -1$ und $\mathrm{Trd}(\bar{k}j) = 0$ für alle $k \in K\cdot\mathbb{R}$.

d) $SL_2(K\mathbb{R})$ operiere auf $T_3 = K\mathbb{R} + \mathbb{R}^{>0}j$ wie in [3]; $\tau: T_3 \to \mathbb{R}^{>0}$ sei die Projektion. Damit ist

$$\zeta(M,s) = \left[\frac{d_K}{d_{red}}\right]^s |N_{K/\mathbb{Q}}(I_0)|^{2s}$$

$$\cdot \sum_{(c,d)\in I_0\times I_0-\{0\}} \eta\left[\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d\end{bmatrix} \alpha^{-1}(z,r)\right]^{2s} . \quad \blacksquare$$

$\tau_0(M)$ berechnet man nach vorstehendem Satz mit der Kronecker-Grenzformel für $\hat{E}_{I_0}$ aus [3].

<u>Beispiel</u>: Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \equiv 3 \bmod 4$. Der $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$-Vektorraum $\mathfrak{X}$ mit Basis $\{u_0,u_1\}$ trage die zyklische $\mathbb{Q}$-Algebra-Struktur $(\mathbb{Q}(\sqrt{-p})/\mathbb{Q},\sigma,-1)$, wobei σ $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-p})/\mathbb{Q})$ erzeuge. Es ist $d_{red} = p$. Wir identifizieren $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ mit seine Bild in $\mathfrak{X}$ unter $x \mapsto xu_0$.

Sei $S = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-p}}{2}\right]$. Dann ist $\mathcal{O} = Su_1 + S$ eine maximale $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathfrak{X}$. Nach vorstehendem Satz ist

$$\zeta(\mathcal{O},s) = \left[\frac{d_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}}{d_{red}}\right]^s \cdot \hat{E}_S((0,1),2s-1)$$

und nach [3] Theorem 5.3

$$\lim_{s\to 1} \left[\zeta(\mathcal{O},s) - \frac{2\pi^2}{d_{red}}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= \zeta(S,2) + \frac{4\pi^2}{p}\left[2\gamma-1-\log(p)-4\log\left[\left|\eta\left[\frac{1+\sqrt{-p}}{2}\right]\right|\right]\right.$$

$$\left. + 2\sum_{\omega\in S-\{0\}} \sqrt{N(\omega)} \sum_{\substack{c\in S-\{0\}\\ c^{-1}\omega\in S}} \frac{1}{N(c)} K_1\left[\frac{4\pi\sqrt{N(\omega)}}{\sqrt{p}}\right]\right]$$

(dabei ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ $\zeta(S,s) = \sum_{x \in S-\{0\}} \frac{1}{N(x)^s}$, η die Dedekind-η-Funktion).

Gemäß Maaß [10], [11] erhält man die zu einer Wellenform assoziierte Dirichlet-Reihe durch Mellintransformation des unendlichen Teils der Fourierentwicklung:

7.4. Satz: <u>Für</u> $t \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C}$ <u>gilt</u>:

$$\int_0^\infty \Big[\hat{E}_M(\beta^{-1}(0,r),t) - r^t\, \zeta(Mu_\beta^{-1},\tfrac{t}{2}) - r^{4-t}\, \frac{4\pi^2}{d_{red}(t-1)(t-2)}\, \zeta(Mv_\beta,\tfrac{t-2}{2})\Big]\, r^{2s-2}\, \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{1}{2\psi(\frac{t}{2})}\, Z(u_\beta \mathfrak{D}^{-1} M^{-1}, \tfrac{2s-t+2}{4}) \cdot Z(Mv_\beta, \tfrac{2s+t-2}{4})$$

<u>mit</u> $\psi(s) = (2\pi)^{-2s} d_{red}^s \Gamma(2s)$ <u>wie zuvor und</u> $Z(M,s) = \psi(s)\zeta(M,s)$.

<u>Beweis:</u> Die Existenz des Integrals $\int_1^\infty \ldots$ ergibt sich aus dem asymptotischen Verhalten von $K_s(x)$ für $x \to \infty$ (cf. Lang [9], p. 271). Zum Nachweis der Existenz des Integrals $\int_0^1 \ldots$ verwendet man das Transformationsverhalten von $\hat{E}_M(\beta^{-1}(\cdot),t)$ unter $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (cf. Maaß [11]). Nach [12] p. 91 ist für $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $s, t \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}|\mathrm{Re}\, t|$:

$$\int_0^\infty r^{2s-1}K_t(2ar)\,dr = \frac{1}{4}\, a^{-2s}\Gamma(s-\tfrac{t}{2})\Gamma(s+\tfrac{t}{2}).$$

Also gilt für $s, t \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s$ groß genug:

$$4\int_0^\infty \sum_{\omega\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}v_\beta-\{0\}} \Bigg[\sum_{\substack{c\in Mv_\beta-\{0\}\\ \omega c^{-1}\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}}} \left[\frac{1}{\operatorname{Nrd}(c)}\right]^{t-2}$$

$$\cdot \sqrt{\operatorname{Nrd}(\omega)}^{\,t-2} K_{t-2}(4\pi\sqrt{\operatorname{Nrd}(\omega)}\; r)\Bigg] \cdot r^{2s}\,\frac{dr}{r}$$

$$= \sum_{\omega\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}v_\beta-\{0\}} \left[\frac{1}{\operatorname{Nrd}(\omega)}\right]^{s-(t-2)/2} \sum_{\substack{c\in Mv_\beta-\{0\}\\ \omega c^{-1}\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}}} \left[\frac{1}{\operatorname{Nrd}(c)}\right]^{t-2}$$

$$\cdot\ (2\pi)^{-2s}\ \Gamma(s-\tfrac{t-2}{2})\Gamma(s+\tfrac{t-2}{2})$$

$$= \sum_{d\in u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1}-\{0\}} \left[\frac{1}{\operatorname{Nrd}(d)}\right]^{s-(t-2)/2} \sum_{c\in Mv_\beta-\{0\}} \left[\frac{1}{\operatorname{Nrd}(c)}\right]^{s+(t-2)/2}$$

$$\cdot\ (2\pi)^{-2s}\ \Gamma(s-\tfrac{t-2}{2})\Gamma(s+\tfrac{t-2}{2}) \quad . \quad \blacksquare$$

Aus der Funktionalgleichung $Z(M,s) = Z(\mathfrak{D}^{-1}M^{-1},1-s)$ erhält man für die meromorphe Funktion

$$F_\beta:\ s \mapsto \frac{1}{2\cdot\psi(\frac{t}{2})}\ Z(u_\beta\mathfrak{D}^{-1}M^{-1},\tfrac{2s-t+2}{4})\ \cdot\ Z(Mv_\beta,\tfrac{2s+t-2}{4})$$

die Funktionalgleichung

$$F_\beta(s) = F_{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\beta}(2-s) \quad .$$

Diese Funktionalgleichung folgt nach Hecke [7], Maass [11] auch aus dem Satz 7.4 (mit dem Argument aus dem Beweis der Existenz des Mellinintegrals).

Wie in [1] und [3] gewinnen wir aus der Kronecker-Grenzformel für $\hat{E}_M$ ein Analogon von $\log|\eta|$ (η bezeichnet die Dedekind-η-Funktion):

7.5. Satz: <u>Für</u> $P = (z,r) \in T$ <u>ist</u>

$$g(P) := \frac{3d_{red}^2}{8\pi^4} \lim_{s\to 4} \left[\hat{E}_M(\beta^{-1}P,s) - r^{4-s} \frac{4\pi^2}{d_{red}(s-1)(s-2)} \zeta(Mv_\beta, \tfrac{s-2}{2})\right]$$

<u>harmonisch für den hyperbolischen Laplace-Beltrami-Operator</u> Δ <u>und erfüllt die Transformationsformel</u>

$$g(P) = g(\gamma P) + \log(\mathrm{Nrd}(cz+d) + r^2\,\mathrm{Nrd}(c))$$

<u>für alle</u> $\gamma = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in \beta\, SL_2(\mathcal{O})\beta^{-1}$.

<u>Beweis:</u>

Aus der Rechnung für die Kronecker-Grenzformel ergibt sich

$$g(P) = \lim_{s\to 4} \left[\frac{3d_{red}^2}{8\pi^4} \hat{E}_M(\beta^{-1}P,s) - \frac{1}{s-4}\right] - \tau_0(Mv_\beta) + \frac{5}{6} + \log(r). \quad \blacksquare$$

Die Mellintransformierte des unendlichen Teils der Fourierentwicklung von g haben wir als $\frac{1}{2}\, Z(u_\beta \mathfrak{D}^{-1} M^{-1}, \frac{s-1}{2}) \cdot Z(M v_\beta, \frac{s+1}{2})$ berechnet. Auch dies ist analog zu $\log |\eta|$ (cf. Lang [9], [3]).

Literaturverzeichnis

[1] Asai, T.: On a certain function analogous to $\log|\eta(z)|$; Nagoya Math. J. 40 (1970), 193-211.

[2] Borel, A.: Introduction aux groupes arithmétiques; Hermann, Paris 1969.

[3] Elstrodt, J.; Grunewald, F.; Mennicke, J.: Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space and imaginary quadratic number fields; J. reine angew. Math. 360 (1985), 16o-213.

[4] Epstein, P.: Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen; Math. Ann. 63 (1907), 205-216.

[5] Fröhlich, A.: Locally free modules over arithmetic orders; J. reine angew. Math. 274 (1975), 112-124.

[6] Godement, R.; Jacquet, J.: Zeta functions of simple algebras; LNM 260 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[7] Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung; Math. Ann. 112 (1936), 664-699.

[8] Kubota, T.: Elementary theory of Eisenstein series; Kodanska Ltd., Tokyo 1973.

[9] Lang, S.: Elliptic functions; Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. etc. 1973.

[10] Maaß, H.: Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen; Math. Ann. 121 (1949), 141-183.

[11] Maaß, H.: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 (1949), 72-100.

[12] Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R.P.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, 3rd ed.; Grundlehren math. Wiss. 52; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[13] Reiner, I.: Maximal orders; Academic Press, London-New York-San Francisco 1975.

[14] Shimizu, H.: On zeta functions of quaternion algebras; Annals of Math. 81 (1965), 166-193.

[15] Tamagawa, T.: On the zeta functions of a division algebra; Annals of Math. 77 (1963), 387-405.

[16] Vignéras, M.F.: Arithmétique des algèbres de quaternions; LNM 800, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[17] Weil, A.: Basic number theory, 3rd ed.; Grundlehren math. Wiss. 144, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.