Eine Bemerkung zur Summation von Eisenstein–Reihen

von B.Z. Moroz, R. Sczech

Dem Andenken von
Prof. V.G. Sprindžuk

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

Dept. of Mathematics
Rutgers University
Newark, NJ 07102
USA

MPI/88-54

Eine Bemerkung zur Summation von Eisenstein–Reihen

von B.Z. Moroz, R. Sczech

(Dem Andenken von Prof. V.G. Sprindžuk)

1. Gegenstand unserer Note sind die Eisensteinschen Reihen

$$E_k(x) = \sum_{\omega \in L+x}{}^{\!\!\prime}{}_e \frac{1}{\omega^k} \quad , \quad k = 1,2$$

zu einem Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Basisdeterminante $D(L) = \omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2 \neq 0$. Diese Reihen sind zuerst von Eisenstein in einer grundlegenden Arbeit (vgl. [4]) untersucht worden, wo u.a. gezeigt wird, daß absolute Konvergenz für $k > 2$ vorliegt, der Wert der Reihen aber von der Anordnung der Glieder abhängt, falls $k = 1,2$ ist. Um den Reihen einen Wert beizulegen im Falle $k = 1,2$, benutzte Eisenstein den Summationsprozess

$$\sum_{\omega \in L+x}{}_e := \lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \right] , \quad \omega = m\omega_1 + n\omega_2 + x \ ,$$

der von der Wahl einer $\mathbb{Z}$–Basis für L abhängig ist. Ein von solcher Wahl freies Verfahren zur Summation der Eisenstein–Reihen wurde später von Hecke eingeführt. Er betrachtete die in einer rechten s–Halbebene absolut konvergente Reihe

$$H_k(x,s) = \sum_{\omega \in L+x}{}' \frac{1}{\omega^k |\omega|^s}$$

und zeigte, daß $H_k(x,s)$ eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe s–Ebene besitzt. Als Eisenstein–Reihen vom Gewicht $k = 1,2$ definierte er dann

$$H_k(x) := H_k(x,0) ,$$

und bewies die Relationen [1, s. 412, 451, 475]

$$H_1(x) = E_1(x) + \left| \frac{2\pi i}{D(L)} \right| \frac{x\bar{\omega}_2 - \bar{x}\omega_2}{\omega_2} ,$$

$$H_2(x) = E_2(x) - \left| \frac{2\pi i}{D(L)} \right| \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2} .$$

Im folgenden wollen wir eine neue und elementare Summation der Eisenstein–Reihen vorstellen, die das Ergebnis von Hecke impliziert. Dazu betrachten wir die für positive t endliche Summe

$$S(t) := \sum_{\substack{\omega \in L+x \\ |\omega| < t}}{}' \frac{1}{\omega^k} .$$

Satz 1: $G_k(x) := \lim_{t \to \infty} S(t)$ existiert für $k \geq 1$, und es ist

$$G_1(x) = E_1(x) + \left| \frac{2\pi i}{D(L)} \right| \frac{x\bar{\omega}_2 - \bar{x}\omega_2}{\omega_2} ,$$

$$G_2(x) = E_2(x) - \left| \frac{2\pi i}{D(L)} \right| \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_2} , \quad G_k(x) = E_k(x) \text{ für } k > 2 .$$

Es handelt sich hier also um die Summation der Eisensteinschen Reihen nach wachsenden Normen der Glieder. Aus der Existenz der Grenzwerte $G_k(x)$ folgt bekanntlich

$$G_k(x) = \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{s\to 0} H_k(x,s) = H_k(x) .$$

Damit ist das Heckesche Ergebnis in unserem Resultat mitenthalten.

2. Für $k > 2$ ist nichts zu beweisen da absolute Konvergenz vorliegt, und der Fall $k = 2$ ist bereits in einer früheren Arbeit [3, Satz 10] ausführlich untersucht worden, so daß wir uns hier auf den Fall $k = 1$ beschränken können. Wir betrachten die Weierstraß'sche Zetafunktion

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} + \sum_{m\in L\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m} + \frac{x}{m^2} \right] .$$

Diese Reihe konvergiert absolut. Anwendung der Eisenstein–Summation $\sum_e$ ergibt

$$\zeta(x) = E_1(x) + x\, E_2(0) , \tag{1}$$

während die Summation nach wachsenden Normen

$$\zeta(x) = G_1(x) + x\,G_2(0) - \lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\}\\ |m+x|<t}} \frac{1}{m} \tag{2}$$

liefert. Dabei haben wir die elementare Tatsache benutzt, daß

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\}\\ |m+x|<t}} \frac{1}{m^2} = \lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\}\\ |m|<t}} \frac{1}{m^2}$$

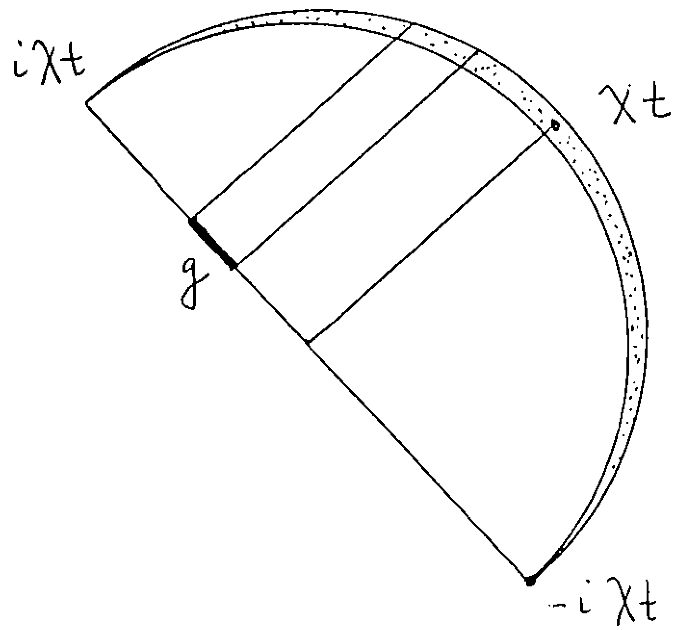
ist, vgl. [3]. Der Vergleich von Satz 1 mit (1) und (2) ergibt, daß alles darauf hinausläuft, die folgende Grenzformel zu beweisen,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\}\\ |m+x|<t}} \frac{1}{m} = -\left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \bar{x}\ ,$$

wobei wir ohne Einschränkung $x \neq 0$ annehmen können. In dieser Reihe tragen Glieder mit $|m+x| < t$ und $|-m+x| < t$ zur Summe nichts bei. Daher genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{|m-x|<t\leq|m+x|} \frac{1}{m} = \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \bar{x}\ .$$

Geometrisch gesprochen, läuft hier die Summe



(bei festem t) über alle Gitterpunkte $m \in L \setminus \{0\}$, die zwischen zwei (in Richtung von $\chi := x/|x|$ parallelverschobenen) Kreisen vom Radius t liegen, s. Zeichnung. Die Fläche dieses kreisförmigen Streifens ist $|4\,x\,t|$. Nach dem bekannten Satz von van der Corput [2, Satz 565], ist die Anzahl der darin enthaltenen Gitterpunkte gleich

$$\left|\frac{8x}{D(L)}\right| t + O(t^{\gamma}) \quad \text{für} \quad t \longrightarrow \infty$$

mit $\gamma < 1$ (sogar $\gamma \leq 2/3$, doch brauchen wir das im folgenden nicht). Genauer gilt sogar, daß die Projektion dieser Gitterpunkte in Richtung von χ gleichmäßig verteilt ist auf der Verbindungsgeraden von $-i\chi t$ nach $i\chi t$, d.h., die Anzahl der bei dieser Projektion in ein Geradenstück g fallenden Punkte ist

$$\left|\frac{4x}{D(L)}\right| \ell + O(t^{\gamma}) \quad \text{für} \quad \ell \longrightarrow \infty ,$$

ℓ = Länge von g . Nach dem Gesagten ist jetzt klar, daß

$$\left|\frac{D(L)}{8x}\right| \frac{2\chi i}{t} \sum_{\frac{1}{t}|\omega-x| < | \leq \frac{1}{t}|\omega+x|} \frac{t}{\omega}$$

eine Riemannsche Summe ist, die für $t \longrightarrow \infty$ gegen das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{d(i\chi y)}{\chi(\sqrt{1-y^2}+iy)} = i\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}+iy} = 2i\int_{0}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{\pi i}{2}$$

konvergiert. Damit ist alles bewiesen.

Abschließend ist noch zu bemerken, daß der Satz von van der Corput nur zum Beweis von Satz 1 im Falle $k = 1$ benötigt wird, nicht jedoch im Falle $k = 2$, wo ein völlig elementares Argument zum Ziel führt.

Literatur

[1] Hecke, E.: Mathematische Werke, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.

[2] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. II, Leipzig 1927.

[3] Sczech, R.: Zur Summation von L–Reihen, Bonner Mathematische Schriften Nr. 141, Bonn, 1982.

[4] Weil, A.: Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Berlin–Heidelberg–New York, Springer 1976.