Démonstration d'une conjecture de Neumann sur l'entrelacs à l'infini d'une courbe plane algebrique

Lê-Văn-Thành

Institute of Mathematics
P. O. Box 631-10000
Hanoi

Vietnam

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

MPI / 91-66

DEMONSTRATION D'UNE CONJECTURE DE NEUMANN SUR L'ENTRELACS À L'INFINI D'UNE COURBE PLANE ALGEBRIQUE.

Lê văn Thành
Institut de Mathématiques
Hanoi-Vietnam

En utilisant les invariants polaires on montre qu'une courbe plane algebrique est réguliere á l'infini si (et seulement si) le diagramme d'Eisenbud-Neumann de son l'entrelacs à l'infini est régulier. C'est une conjecture de Neumann dans [N] et résolu par [H] de façon analytique en utilisant les nombres de Lojasiewicz à l'infini, tout-à-fait differente d'ici.

Ce travail été fait en durant mon séjour au Bonn invité par le Max-Planck-Institut für Mathematik. Je lui remercie beaucoup pour sa hospitalité. Mes remerciements vont aussi au J.Steenbrink, W.D. Neumann et C.Sabbah pour les fructueuses discussions.

Mots-clés: Régularité à l'infini, invariant polair, diagramme d' Eisenbud-Neumann de l'entrelacs (RPI splice diagramm) à l'infini, satellisation, (+k) Dehn Surgery.

1. RAPPELS ET L'ÉNOCÉ DU RÉSULTAT:

1.1 Soit $P: C^2 \to C$ un polynome et $V = P^{-1}(o)$. On considère l'intersection de V avec une sphère S de rayon R et de centre à l'origine. Pour R assez grand, le type d'isotopie de cette intersection ne dépend pas de R. On note $L(V,\infty) =: (S, S \cap V)$ et l'appelle l'entrelacs à l'infini de V dans S. Les entrelacs que l'on obtient de cette facon sont des entrelacs toriques itérés.

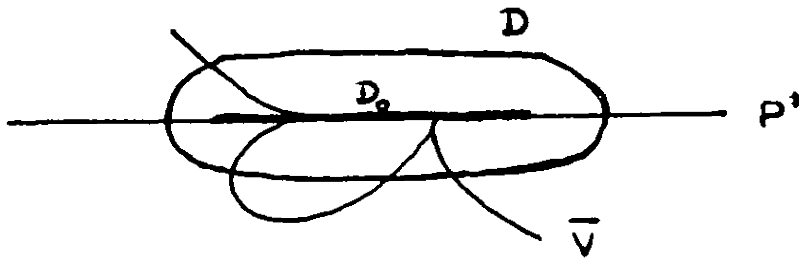
On dit que V (et son l'entrelacs à l'infini) est régulière à l'infini si le polynome P qui lui definit donne une fibration triviale dans une voisinage de V à l'infini.

Dans [N] Neumann a construit le diagramme $\Omega = \Omega(L(V,\infty))$ représenté $L(V,\infty)$ de facon suivante : En considerant une compactification $\overline{V}$ de V on a

$$V = \overline{V} - (\overline{V} \cap \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^2 - \mathbb{P}^1 = C^2.$$

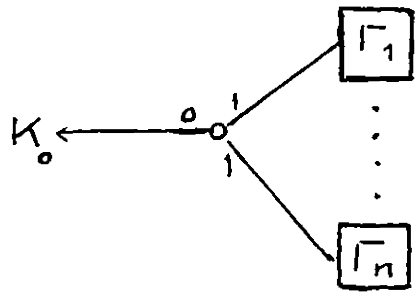
On peut supposer que " la droite de l'infini " $\mathbb{P}^1$ n'est pas une composante de $\overline{V}$, donc elle coupe $\overline{V}$ en finit des points, dit $Y_1, \dots Y_n$

Soit $D_o \subset \mathbb{P}^1$ une disque assez petite qui contient $\overline{V} \cap \mathbb{P}^1$, et D une 2-disque voisinage de D_o dans $\mathbb{P}^2$ telle que son bord $S = \partial D$ coupe transversalement $\overline{V} \cup \mathbb{P}^1$.



Alors $L_o = (S, (\mathbb{P}^1 \cup \bar{V}) \cap S)$ est un entrelacs que on peut le rép résenter par le diagramme (Γ) suivant (cf. N) :

(Γ)

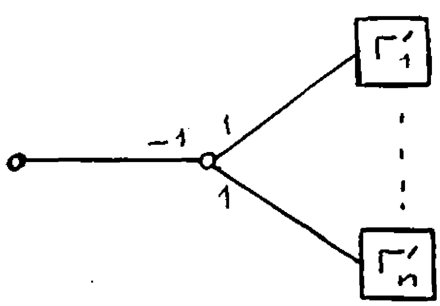


Ici, K_o est la composante $\mathbb{P}^1 \cap S$ et chaque $\leftarrow\boxed{\Gamma_i}$ est le diagramme qui représenté l'entrelacs local de $\mathbb{P}^1 \cup \bar{V}$ en le point Y_i et les nombres indiques (les poids) soient les coefficients d'enlacement entre les deux composantes correspondantes. Donc (Γ) c'est le diagramme qui représente la satellisation des $\leftarrow\boxed{\Gamma_i}$ $(i = 1, \cdots n)$ lelong de K_o.

Soit NP^1 un voisinage tubulaire fermé de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ tel que son bord $S = \partial (NP^1)$ est une " SPHÈRE à L'infini " et $L' = (S, S \cap V)$ est l'entrelacs qui nous interesé.

Parceque NP^1 est obtenu de D par en ajoutant une 2-cylindre lelong de $K_o \subset S = \partial D$,alors L' est obtenu de L_o par (+1)Dehn Surgery sur K_o (cf. [N])et donc L' est représenté par le diagramme :

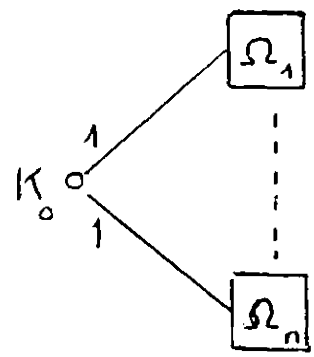
(Γ')



où (Γ_i') n'est autre que (Γ_i) en remplacant les poids loins β_v (en vue de K_0) par $\beta_v - \lambda_v^2 \alpha_v$ avec α_v est le produit des poids proches au sommet v et λ_v est le produit des poids adjacents au (mais non sur) chemin géodésique qui part de v et qui aboutit à K_o.

Finalement , pour voir de l'infini on inversent tous les poids loins de (Γ') et pour simplicité on oublient l'arête plus gauche (ca veut dire que on identifie les origines K_i avec K_o).En résultat on a le diagramme Ω de $L(V,\infty)$ comme suivant :

$$\Omega = \Omega(L(V,\infty))$$



avec le sommet plus gauche comme " sommet original ".

Pour chaque sommet $v \in \Omega$ on note δ_v le nombre d'arêtes qui s'attachent à v et l'appelle la valance de v . On a trois types de sommet : les flèches (qui correspondent aux composantes irrêductibles à l'infini de la courbe donnee),les feuilles (qui ne sont pas des flèches et ont les valances 1) , et les noeuds (qui ont les valances plus grand que 1).

Pour chaque flèche v on note S_v la composanteirréductible de l' entrelacs $L(V,\infty)$ qui lui correspondente, et pour chaque noeud (resp. feuille) on prende S_v- une fibre typique (resp. la fibre exceptionnelle) de la structure de Seifert de l'entrelacs local correspondent et l'appelle une composante virtuelle de l'entrelacs $L(V,\infty)$ (cf. [N] p. 460).

Pour tout pair de sommets differents u , $v \in \Omega$ on note $l(u,v)$ le coefficient d'enlacement de u et v. En particulier nous appelons $b_v = l(S_v;K_o)$ la " braid index " de v, $l_v = l(S_v,L)$ (somme des coefficient d'enlacement de S_v avec toutes les composantes de L) le coefficient d'enlacement (total) de v, et si $v \in \Omega_i$, $l_v^{loc} =: l(S_v,L_i)$ le coefficient d'enlacement local de v . Par exemple, si $v = K_o$ alors l_{K_o} est le dégré du polynome donné.Dans le cas local d'une singularité,ce dégré c'est la multiplicité de la singularité.

1.2 Définition [N].

On dit que le diagramme $\Omega = \Omega(L(V,\infty))$ est régulier si $l_v \geq o$ pour tous les sommets $v \in \Omega$ qui ne sont pas des flèches.

Dans [N] Neumann a démontré que si V est régulière à l'infini alors le diagramme $\Omega(L(V,\infty))$ est régulier. Il a aussi conjecturé que l'inverse est vrai. Dans cette note nous démontrons cette conjecture:

1.3 Théorème.

Une courbe plane algébrique $V = P^{-1}(o)$ est régulière à l'infini si (Et seulement si) le diagramme d'Eisenbud-Neumann $\Omega(L(V,\infty))$ de son l'entrelacs à l'infini $L(V,\infty)$ est régulier, c'est-à-dire $l_v \geq o$ pour tous $v \in \Omega$ qui ne sont pas des flèches.

2. DÉMONSTRATION:

2.1 Lemme:

Soit $v \in \Omega_{i_o} \subset \Omega(L(V,\infty))$. On a

$$\frac{l_v}{b_v} = d - \frac{l_v^{loc}}{b_v}$$

Preuve:

Par définition on a

$$l_v = l_\Omega(S_v, K_o) \sum_{i \neq i_c} l_\Omega(L_i, K_o) + \sum_{w \in \vec{\Omega}_{i_o}} l_\Omega(S_v, w)$$

où $l_\Omega(A,B)$ est le coefficient d'enlacement de A et B dans Ω ; $\vec{\Omega}_{i_c}$ est l'ensemble des flèches du diagramme Ω_{i_o} de l'entrelacs local L_{i_o} au point Y_{i_o} à l'infini.

D'après le lemme 3.2 de [N] ,le coefficient d'enlacement de deux composantes est égal au produit des tous les poids adjacents au (mais non sur) le chemin géodésique qui joint ces composantes, on a

$$l_\Omega(S_{v_1}, S_{v_2}) = - l_\Gamma(S_{v_1}, S_{v_2}) + l_\Gamma(S_{v_1}, K_o) l_\Gamma(S_{v_2}, K_o)$$

pour tous $v_1, v_2 \neq K_o$ et

$$l_\Omega(K_o, S_v) = l_\Gamma(K_o, S_v) \text{ pour tout } v \neq K_o .$$

(par (+1)Dehn Surgery sur K_o et par inversement des signes des poids loins). Donc ,

$$\begin{aligned} l_v &= l_\Gamma(S_v, K_o) \sum_{i \neq i_o} l_\Gamma(L_i, K_o) - \sum_{w \in \vec{\Omega}_{i_o}} l_\Gamma(S_v, w) + l_\Gamma(S_v, K_o) \sum_{w \in \vec{\Omega}_{i_o}} l_\Gamma(w, K_o) \\ &= l_\Gamma(S_v, K_o) \sum_{i \neq i_o} l_\Gamma(L_i, K_o) - l_v^{loc} + l_\Gamma(S_v, K_o) l_\Gamma(L_i, K_o) \\ &= l_\Gamma(S_v, K_o).d - l_v^{loc} \quad . \end{aligned}$$

où $d = \sum_{\forall i} l_\Gamma(L_i, K_o)$ est le dégré du polynome dans les coordonnées qui donnent la représetation de $\Omega(L(V,\infty))$.Le lemme est démontré .

2.2 Remarque :

Comme une corollaire de (2.1), pour obtenir le théorème (1.3) il suffit de montrer ceci : lorsque $P^{-1}(o)$ est irrégulière à l'infini il existe des coordonnées (x,y) telles que dans le diagramme de l'entrelacs à l'infini de $P^{-1}(o)$ (dans ces coordonnées) il y a au moins un sommet non flèche $v \in \Omega$ lel que $l_v^{loc} > d.b_v$.

2.3 Lemme :

Si la courbe $P^{-1}(o) \subset C^2$ est irrégulière à l'infini, alors il existe au moins une composante γ de la courbe polaire telle que

$$v_\gamma^\infty (P|_\gamma) < 0 .$$

où $v_\gamma^\infty(.)$ est la valuation naturelle (à l'infini) des fonctions holomorphes sur la partie non compacte de γ .

Preuve :

Supposons par contrait que pour tous les composantes γ de la courbe polaire $\mathcal{P} = \left\{\alpha\frac{\partial P}{\partial x} + \beta\frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \alpha,\beta \text{ assez general}\right\}$ on a $v_\gamma^\infty(P|_\gamma) \geq 0$.

Cette dernière condition signifie que pour tous γ , $P(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma}$ n'est pas vers à zéro quand (x,y) vers à l'infini, donc il existe $\delta_o > 0$ tel que pour R assez grand on a

$$P^{-1}(\Delta_{\delta_o}) \cap (C^2 - B_R) \cap \mathcal{P} = \emptyset$$

où $\Delta_{\delta_o} = \{ t \in C : |t| < \delta_o \}$

$B_R = \{ z \in C^2 : |z| < R \}$.

Maintenant le lemme (2.3) est evident parceque la champ de vecteurs

$$W = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} \right) . \left(\alpha\frac{\partial P}{\partial x} + \beta\frac{\partial P}{\partial y} \right)^{-1}$$

nous donne une trivialisation de la

$$P^{-1}(\Delta_{\delta_o}) \cap (C^2 - B_R) ,$$

un voisinage à l'infini de $V = P^{-1}(0)$.

2.4 Fin de la démonstration du théoreme.

On peut supposer que les coordonnées sont choisies telles que la courbe polaire est donnée par:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x,y) \in C^2 : \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0 \right\}$$

et par ailleurs, la composante $\gamma \subset \mathcal{P}$ définie par le lemme (2.3) est écrite sous la forme:

$$\gamma =: \{ y = y_\gamma(x) \}$$

où $y_\gamma(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q},\alpha\leq 1} a_\alpha x^\alpha$ et $P_y(x,y_\gamma(x)) \equiv 0$.

On a $v_\gamma^\infty(P|_\gamma) = v_x^\infty(P(x,y_\gamma(x)))$.

D'autre part, soit $\bar{P}(z,y) = z^d.P(\frac{1}{z},\frac{y}{z})$ alors on a

$$v_x^\infty(P(x,y_\gamma(x))) = d - v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z)))$$

où $Y_{\bar{\gamma}}(z) =: z.y_\gamma(\frac{1}{z})$ satifait $P_y(z,Y_{\bar{\gamma}}(z)) = P_y(z,zy_\gamma(\frac{1}{z})) \equiv 0$. Ça veut dire que $\bar{\gamma} =: \{ y = z.y_\gamma(1/z) =: Y_{\bar{\gamma}}(z) \}$ est la compactification de γ et est une composante de la courbe polaire locale relativement à $1 = z$ de la germe de courbe $\bar{P}^{-1}(o)$ au point z=Y=O. Mais dans la situation locale , on sait que

$$v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z))) = \frac{(\bar{\gamma}.\bar{P}^{-1}(o))}{(\bar{\gamma}.(z=o))}$$

autrement dit $v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z)))$ est une "quotient polaire relative " de $\bar{P}^{-1}(o)$. Alors d'après [LMW] (modifait un peu du théorème C pour le cas $1 = z$ n'est supposée pas générique,il ne faut que remplacer les multiplicités en question par les nombres d'intersection avec $1 = z = O$). On a: $v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z)))$ c'est ou bien $((z=o).\bar{P}^{-1}(o))$, ou bien $l_v^{loc} / l_\Gamma(S_v,K_o)$ pour quel que v de l'entrelacs local au point z=Y=o à l'infini.

Mais d'après (2.3) $v_x^\infty(P(x,y_\gamma(x))) < 0$ on a $v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z)))$ plus grand que d, donc on a toujours que

$$v_z^o(\bar{P}(z,Y_{\bar{\gamma}}(z))) = l_v^{loc} / b_v$$

et le théorème (1.3) sera résulte directement du lemme (2.1).

2.5 Corollaires.

(i) Si V irrégulière à l'infini,alors en chaque point à l'infini le cône tangent de la compactification $\bar{V}$ de V n'a pas exactement de deux droites distinctes.

(ii) V est régulière à l'infini si et seulement si pour tous les composantes à l'infini γ de la courbe polaire on a $v_\gamma^\infty(P|_\gamma) \geq o$.

Preuve:

(i) D'après [LMW]si 2.5(i) n'est pas vrais il existe une quotient polaire égale à la multiplicité d'intersection de $\bar{P}^{-1}(o)$ avec l=o ce qu'il ne faut pas comme dans la démonstration précédante.

(ii) Dans la démonstration précédante nous avons:

Ω régulier $\Rightarrow v_\gamma^\infty(P|_\gamma) \geq 0 \; \forall\gamma \Rightarrow P^{-1}(o)$ régulière à L'infini D'autre part, d'après [N],si $P^{-1}(o)$ régulière à l'infini alors Ω est régulier. Donc on a (ii).

REFERENCE

[H] Ha huy Vui: (manuscript)

[LMW] Le D.T,F.Michel,C.Weber:Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.t.24,1991.

[N] W.D.Neumann;Invent.Math.98,1989.