Le Spectre d'une Singularité d'un germe de courbe plane

Le Van Thanh and J.H.M. Steenbrink

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
5300 Bonn 3

MPI/88-33

Le Spectre d'une Singularité d'un germe de courbe plane

Le Van Thanh
Institute of Mathematics
P.O. Box 631 Boho
10000 Hanoi, Vietnam

J.H.M. Steenbrink
Mathematical Institute
Catholic University
Toernooiveld
6525 ED Nijmegen, The Netherlands

Résumé

Comme application de la théorie des Structures de Hodge Mixtes (SHM) on donne dans cette note un algorithme pour calculer le spectre d'une singularité d'un germe de courbe plane.

§0. Introduction

Le spectre d'une singularité isolée d'hypersurface complexe est une suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ de nombres rationnels qui est reliée au polynôme caractéristique de la monodromie de la fibration de Milnor par la formule $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp 2\pi i \alpha_j)$, voir [S]. Le spectre peut être construit comme une suite d'exposants "caractéristiques" dans le développement asymptotique de certaines intégrales oscillantes [V], [M]. Il est en relation avec les racines de certains polynômes de Bernstein [M], [Y] et avec les pôles de certaines séries de Dirichlet-Mellin [C].

Il est donc intéressant d'avoir un algorithme pour calculer le spectre. Ce problème a été résolu pour les cas non-dégénérés ou quasi-homogènes dans [V] (en dimension 1) et [S] (en toute dimension, voir [Sa 2] et [KV]) et dans [Sa 1] pour le cas des courbes irréductibles.
Dans cette note on donne une formule pour le spectre dans le cas d'un germe de courbe plane quelconque réduit.

Les auteurs remercient le Max-Planck-Institut für Mathematik à Bonn pour son hospitalité. Ils remercient aussi E. Brieskorn qui sait créer dans son séminaire un libre échange d'ideées.

§1. Notations et formulation du résultat

1.1. Soit V un espace C-vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante finie $F^{\cdot}$. Soit γ un automorphisme de V d'ordre fini compatible avec la filtration F, i.e. $\gamma(F^p) = F^p$ pour tout p. On note aussi γ l'automorphisme induit sur le quotient $F^p/F^{p+1} = Gr_F^p$ et $s_p = \dim Gr_F^p$. Alors pour tout entier n il existe des nombres rationnels α_{pj}, $1 \leq j \leq s_p$, $n-p-1 < \alpha_{pj} \leq n-p$ tel que

$$\det(t \cdot Id - \gamma; Gr_F^p) = \prod_{j=1}(t - \exp(-2\pi i \alpha_{pj})).$$

Nous définissons

$$Sp_n(V, F, \gamma) := \sum_p \sum_j (\alpha_{pj})$$

que nous interprétons comme élément du groupe abélien libre engendré par $\mathbf{Q}$. Si $n_\alpha := \#\{(j,p) | \alpha_{pj} = \alpha\}$, alors par définition $Sp_n(V, F, \gamma) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} n_\alpha(\alpha)$.

1.2. Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ le germe en 0 d'une fonction analytique sans facteurs carrés. On note encore f un représentant convenable de ce germe défini sur un voisinage ouvert assez petit B de $0 \in C^2$ tel que, pour tout $\eta > 0$ assez petit par rapport à B, la fonction f induit sur $B \cap f^{-1}(\partial \Delta_\eta)$ une fibration C^∞-localement triviale - la *fibration de Milnor* [Mi] - qui est encore dénotée par f. Ici on dénote par Δ_η le disque de rayon η de centre $0 \in \mathbf{C}$ et par $\partial \Delta_\eta$ son bord. On dénote par B_∞ la fibre de cette fibration appelée *fibre de Milnor*. La cohomologie des fibres de la fibration de Milnor définit un fibré vectoriel complexe sur $\partial \Delta_\eta$ qui est un système local, appelé la *fibration de Milnor cohomologique* de f. La monodromie M de cette fibration cohomologique est appelée aussi la *monodromie* de f.

1.3. Rappelons [S] que $H^1(B_\infty)$ porte une structure de Hodge mixte. On définit

$$Sp(f) = Sp_1(H^1(B_\infty, \mathbf{C}), F, M_s)$$

où M_s est la partie semi-simple de M, qui agit comme un automorphisme de la SHM sur $H^1(B_\infty)$. On appelle $Sp(f)$ le *spectre* de f. Remarquons que cette définition coincide avec celle de [V].

1.4. Soit $\pi_1 : Z \to B$ la bonne résolution minimale du germe f. Par définition, le diviseur exceptionnel de π_1 est l'ensemble $\pi_1^{-1}(0)$ qui a pour composantes irréductibles des droites projectives complexes $E_1, \ldots, E_m$ qui se coupent normalement et où E_1 est la composante provenant du premier éclatement. Le transformé strict E_0 de $f^{-1}(0)$ dans Z est l'adhérence dans Z de $(f \circ \pi_1)^{-1}(0) \setminus \bigcup_{\nu > 0} E_\nu$. Il est constitué de r courbes disjointes $E_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, r$ qui sont lisses et intersectent $E' = \bigcup_{\nu > 0} E_\nu$ transversalement en des points réguliers. On note $E = \bigcup_{\nu=0}^{m} E_\nu$ et on dit que E_ν et E_μ sont *voisines* si $\nu \neq \mu$ et $E_\nu \cap E_\mu \neq \emptyset$. Pour chaque composante E_ν, $\nu > 0$, on note γ_ν le nombre des voisins de E_ν et on l'appelle la *valence* de E_ν. La composante E_ν est appelée une *composante de rupture* si $\gamma_\nu \geq 3$.

Une *chaine* dans E est une suite $\{E_{\nu(j)}\}$ de composantes de E tel que $\nu = \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ soit injectif et $E_{\nu(i)}$ et $E_{\nu(i+1)}$ soient voisins pour $i = 1, \ldots, k-1$. Pour chaque $\nu > 1$ il existe une seule composante $E_{p(\nu)}$, appelée son *prédécesseur* telle que E_ν et $E_{p(\nu)}$ soient voisins et que la chaine (unique) de E_1 vers E_ν passe par $E_{p(\nu)}$. A chaque branche f_k de f on associe une chaîne unique qui part de

E_1 et aboutit à $E_0^{(k)}$. Ces chaines son appelées les *chaînes géodésiques*. Une chaîne maximale située à l'extérieur des chaînes géodésiques est appelée une *chaîne morte*. Une chaîne morte a comme extrémités une composante de rupture et une composante E_ν, $\nu > 1$, avec $\gamma_\nu = 1$, qui s'appelle une *extremité morte*. On note

$$G^* = \{\nu \in \{1, \dots, m\} | \nu = 1 \text{ ou } E_\nu \text{ est une composante de rupture}\}$$

Nous démontrerons le

1.5. Théorème. Posons $d_\nu = ord_{E_\nu}(f)$, $\delta_\nu = pgcd(d_\nu, d_{p(\nu)})$ $(\nu > 1)$. Pour chaque $\nu \in G^*$ et $i = 1, \dots, d_\nu - 1$ notons

(i) $m_{i\nu} = -1 + \sum_\mu \{\frac{id_\mu}{d_\nu}\}$

où on somme sur les μ tels que E_μ soit voisin de E_ν (les composantes de E_0 inclues) et où $\{\alpha\}$ est la partie non-entière de α, définie par $\alpha - \{\alpha\} \in \mathbf{Z}$ et $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

(ii) Pour $0 < \alpha < 1$ posons

- $n'_\alpha = \#\{\nu \in G^* | \nu > 1 \text{ et } \delta_\nu \alpha \in \mathbf{Z}\}$;
- $n''_\alpha = \sum^{(\alpha)} m_{i\nu}$ où dans $\sum^{(\alpha)}$ on somme sur les (ν, i) avec $\nu \in G^*$, $i \in \mathbf{Z}$ avec $i/d_\nu = 1 - \alpha$;
- $n_\alpha = n'_\alpha + n''_\alpha$.

Finalement soit $n_0 = r - 1$. Alors on a

$$\boxed{Sp(f) = n_0(0) + \sum_{0<\alpha<1} n_\alpha \cdot ((\alpha) + (-\alpha))}$$

§2. Rappels sur la structure de Hodge mixte de la cohomologie de la fibre de Milnor

2.1. Nous exposons ici l'essentiel des notations et des résultats de [S] pour le cas des courbes planes. La SHM sur la cohomologie de la fibre de Milnor B_∞ de f est constituée de deux filtrations: une filtration croissante W (filtration par le poids) sur $H^1(B_\infty, \mathbf{Q})$ et une filtration décroissante F (filtration de Hodge) sur $H^1(B_\infty, \mathbf{C})$ qui, pour chaque $s \in \mathbf{Z}$, induit une structure de Hodge de poids s sur le quotient $Gr_s^W = W_s / W_{s-1}$.

Pour avoir une SHM "utile", il faut construire ces filtrations de manière fonctorielle et canonique. L'idée essentielle de Deligne [D] est la suivante: on construit un espace X avec un complexe de faisceaux bifiltré (K, W, F) tels que $\mathbf{H}^k(X, K^\cdot) \cong H^k(B_\infty, \mathbf{C})$ et tels que F induise une structure de Hodge pure de poids $k + r$ sur $\mathbf{H}^k(X, Gr_r^W K^\cdot)$. Pour réaliser cette construction dans notre cas, il faut résoudre les singularités et définir le complexe $K^\cdot$ associé aux cycles évanescents.

2.2. Nous reprenons les notations du §1. Nous supposons pour simplifier que $\eta = 1$, donc nous avons

$$E = \pi^{-1}(0) \subset Z \xrightarrow{\pi_1} B \xrightarrow{f} \Delta$$

avec $\pi = f \circ \pi_1$ et Δ le disque unité.

Soient $d = ppcm\{d_1, \ldots, d_m\}$, $\tilde{\Delta}$ une copie de Δ et $\sigma : \tilde{\Delta} \to \Delta$ le revêtement ramifié défini par $\sigma(t) = t^d$. Notons $\tilde{Z}$ la normalisation du produit fibré $Z \times_\Delta \tilde{\Delta}$ et $n : \tilde{Z} \to Z$, $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \to \tilde{\Delta}$ les applications naturelles. Alors $D = \tilde{\pi}^{-1}(0)$ est réduit (cf [S]) et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} D & \subset & \tilde{Z} & \xrightarrow{n} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ 0 & \in & \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\sigma} & \Delta \end{array}$$

Posons $D_\nu = n^{-1}(E_\nu)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$. Alors $D_\nu \to E_\nu$ est un recouvrement cyclique ramifié de degré d_ν.

L'espace $\tilde{Z}$ n'est pas lisse: en général il a des singularités quotients cycliques.

2.3. Remarque. Le groupe μ_d des racines d-ièmes d'unité agit sur $\tilde{\Delta}$ par $(\zeta, z) \mapsto \zeta z$. Cette action se relève en une action sur $\tilde{Z}$ qui permute les fibres de n. Notons γ l'action du générateur $\exp 2\pi i/d$ de μ_d sur $\tilde{Z}$ et D.

2.4. Définition. Pour $Y \subset Z$ l'inclusion d'un diviseur Y dans une variété lisse Z on définit le faisceau $\Omega^p_Z(\log Y)$ des germes de p-formes ω méromorphes sur Z qui sont holomorphes sur $Z \backslash Y$ et tel que ω et $d\omega$ aient au plus un pôle simple le long de Y.

2.5. Définition. Soit $\tilde{Z}^0$ la partie régulière de $\tilde{Z}$ et $i : \tilde{Z}^0 \to \tilde{Z}$ l'inclusion. On pose $\Omega^1_{\tilde{Z}/\tilde{\Delta}}(\log D) = i_*[\Omega^1_{\tilde{Z}^0}(\log D)/\tilde{\pi}^*\Omega^1_{\tilde{\Delta}}(\log 0)]$. On dispose d'une différentielle

$$d : O_{\tilde{Z}} \to \Omega^1_{\tilde{Z}/\tilde{\Delta}}(\log D).$$

2.6. Définition. On pose $D' = \bigcup_{\nu>0} D_\nu$, $E' = \bigcup_{\nu>0} E_\nu$, $K^0 = n_* O_{D'}$, $K^1 = n_*[\Omega^1_{\tilde{Z}/\tilde{\Delta}}(\log D) \otimes O_{D'}]$ $d : K^0 \to K^1$ la différentielle induite.

2.7. Théorème. ([S]).

(i) $H^k(B_\infty, \mathbf{C}) \cong \mathbf{H}^k(E', K^\cdot)$;

(ii) $Gr^0_F H^k(B_\infty, \mathbf{C}) \cong H^k(E', K^0)$ et
$Gr^1_F H^k(B_\infty, \mathbf{C}) \cong H^{k-1}(E', K^1)$;

(iii) l'action de la partie semisimple M_s de la monodromie coïncide avec l'action γ du générateur de μ_d.

3. Démonstration du Théorème 1.5.

3.1. Observons que si $Sp(f) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot (\alpha)$, alors $\lambda_\alpha = 0$ si $|\alpha| \geq 1$. De plus, $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha}$. Il s'en suit que λ_0 est égal à la multiplicité de la valeur propre 1 de M, donc à $r-1$ où r est le nombre de branches de f en 0. De plus,

$$\det(tI - M_s,\ Gr_F^0 H^1(B_\infty, \mathbf{C}) = \prod_{0<\alpha<1} (t - e(-\alpha))^{\lambda_\alpha}$$

donc la connaissance de ce polynôme et de r implique celle de $Sp(f)$.

3.2. Notons $P_\nu = n^{-1}(E_\nu \cap E_{p(\nu)})$, $\nu > 1$. C'est un ensemble de δ_ν points. Notons $n_\nu : D_\nu \to E_\nu$. Alors on a une suite exacte de type Mayer-Vietoris

$$0 \to K^0 \to \bigoplus_{\nu=1}^{m} n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu} \to \bigoplus_{\nu=2}^{m} n_* \mathcal{O}_{P_\nu} \to 0$$

donnant une suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(E', K^0) \to \bigoplus_{\nu=1}^{m} H^0(E_\nu, n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu}) \to \bigoplus_{\nu=2}^{m} \mathbf{C}^{P_\nu} \to H^1(E', K^0) \to \bigoplus_{\nu=1}^{m} H^1(E_\nu, n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu}) \to 0$$

qui est équivariante pour l'action de $\gamma = M_s$.

3.3. D'après [S] (lemma 3.14) on a:

$$n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu} = \bigoplus_{i=0}^{d_\nu - 1} \mathcal{O}_{E_\nu}(-1 - m_{i\nu})$$

et γ agit sur (les sections de) $\mathcal{O}_{E_\nu}(-1 - m_{i\nu})$ par multiplication avec $e(i/d_\nu)$

Posons

$$Q_\nu(t) = \det(tI - \gamma;\ H^1(E_\nu, n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu}))\det(tI - \gamma;\ H^0(E_\nu, n_{\nu *}\mathcal{O}_{D_\nu}))^{-1}$$

$$R_\nu(t) = \det(tI - \gamma;\ \mathbf{C}^{P_\nu}) \qquad (\nu \neq 1);$$

$$R_1(t) = 1.$$

Alors on obtient

$$\det(tI - M_s,\ Gr_F^0 H^1(B_\infty, \mathbf{C})) = (t-1)\prod_{\nu=1}^{m} Q_\nu(t) R_\nu(t)$$

parce que $\gamma = I$ sur $H^0(E', K^0) \cong \mathbf{C}$.

3.4. D'après [S], γ induit une permutation cyclique des points dans les fibres de n. Donc

$$R_\nu(t) = t^{\delta_\nu} - 1, \qquad \nu = 2, \ldots, m.$$

De plus, 3.3 implique que

$$Q_\nu(t) = \prod_{i=0}^{d_\nu - 1} (t - e(i/d_\nu))^{-\chi_{\nu,i}}$$

où $\chi_{\nu,i}$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{O}_{E_\nu}(-1-m_{i\nu})$. Parce que $E_\nu \cong \mathbf{P}^1$, on obtient $\chi_{\nu,i} = -m_{i\nu}$, donc

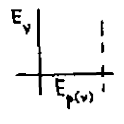
$$Q_\nu(t) = \prod_{i=0}^{d_\nu - 1} (t - e(i/d_\nu))^{m_{i,\nu}}.$$

3.5. Pour continuer la démonstration de 1.5, on vérifie que les contributions des $\nu \notin G^*$ sont négligeables, c'est à dire

Lemme. Pour $\nu \notin G^*$, on a $Q_\nu(t)R_\nu(t) = 1$.

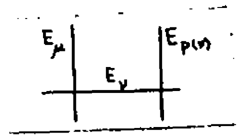
Preuve. Si $\nu \notin G^*$ alors on a les deux cas suivants:

(i)



E_ν est une extrémité morte. Alors $d_\nu | d_{p(\nu)}$, parce que le diviseur $E = E_0 + \sum_{\nu=1}^m d_\nu E_\nu$ satisfait $E \cdot E_\nu = 0$, donc $d_\nu \cdot E_\nu^2 + d_{p(\nu)} = 0$. On a $m_{i\nu} = -1$ pour $i = 0, \ldots, d_\nu - 1$ et $\delta_\nu = d_\nu$ donc $R_\nu(t) = t^{d_\nu} - 1 = Q_\nu(t)^{-1}$.

(ii)



La valence de E_ν est égale à deux. Alors les voisins de E_ν sont $E_{p(\nu)}$ et E_μ avec $\nu = p(\mu)$. (Parce que la résolution de f est minimale, il est impossible que E_ν intersecte E_0 dans ce cas.) On a $d_\nu E_\nu^2 + d_{p(\nu)} + d_\mu = 0$. Donc $\delta_\nu = \delta_\mu$ et $m_{i\nu} = -1$ si i divise d_μ/δ_μ et 0 sinon. On encore obtient $Q_\nu(t)R_\nu(t) = 1$.

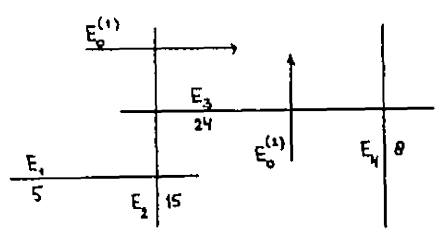
3.6. Corollaire. $\det(tI - M_*, Gr_F^0 H^1(B_\infty, \mathbf{C})) = (t-1) \prod_{\nu \in G^*} Q_\nu(t) R_\nu(t)$.

3.7. Il s'ensuit que pour $0 < \alpha < 1$, la multiplicité n_α de α dans $Sp(f)$ est égale à

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \sum \{m_{i\nu} \mid \nu \in G^*,\ i \in \{1, \ldots, d_\nu - 1\} \text{ avec } 1 - \alpha = i/d_\nu\} \\ &\quad + \#\{\nu \in G^* \backslash \{1\} \mid \exists j \in \{1, \ldots \delta_\nu\} \text{ avec } 1 - \alpha = j/\delta_\nu\} \\ &= n''_\alpha + n'_\alpha. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.5.

3.8. Example. $f = (x^2 - y^2)(x^5 - y^3) : \mu = 27,\ r = 2.$



On a $G^* = \{1, 2, 3\}$.

$E_1 : d_1 = 5, m_{i1} = -1, i = 0,1,2,3,4;$

$E_2 : d_2 = 15, \;\; \delta_2 = 5, \;\; m_{i2} = 0 \qquad \forall i \neq 8, 11.13.14$

$\qquad\qquad\qquad\qquad m_{i2} = 1 \qquad i = 9,11,13,14.$

$E_3 : d_3 = 24, \delta_3 = 3, m_{i3} = 1, i = 11,14,17,19,20,22,23$ et $m_{i3} = 0$ sinon.

Donc le spectre de f est

$$0, \pm\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{4}{24}, \frac{4}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{10}{24}, \frac{13}{24}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15}\right)$$

où chaque nombre a la multiplicité 1.

Bibliographie

[C] Cassou-Noguès,P. Théorie des nombres et singularités (à paraitre)

[D] Deligne, P. Théorie de Hodge III. Publ. Math. I.H.E.S. 44(1975) 5-77.

[KV] Khovanskii, A.G. et A.N. Varchenko. Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron. Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 122-127.

[M] Malgrange, B. Intégrales asymptotiques et monodromie. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (4)7(1974), 405-430.

[Mi] Milnor, J. Singular points of complex hypersurfaces. Annals of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press 1968.

[Sa 1] Saito, M. Exponents of a reduced and irreducible plane curve singularity. Preprint Univ. Grenoble 1982.

[Sa 2] Saito, M. Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities. To appear.

[S] Steenbrink, J.H.M. Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. In: Real and Complex Singularities, Oslo 1976. P. Holm ed., pp 525-563. Sijthoff-Noordhoff, Alphen a/d Rijn 1977.

[T] L.V. Thanh. Quelques remarques sur le spectre d'une singularité d'un germe de courbe plane. "Singularities". Banach Center Publications Vol. 20. PWN, Polish Scientific Publishers. Warsaw 1987, pp 449-457.

[V] Varchenko, A.N. Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology. Math. USSR Izvestija 18(1982), 469-512.

[Y] Yano, T. Exponents of singularities of plane irreducible curves. Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. A 10(1982).