Transformée de Mellin des intégrales- fibres de courbe espace associées aux singularités isolées d'intersection complète quasihomogènes

Susumu TANABÉ

ABSTRAIT. *La transformée de Mellin de l'intégrale -fibre est calculée pour certaines singularités isolées de courbe espace quasihomogènes (surtout singularités simples de la liste de Giusti). On discerne la propriété de la symétrie des spectres de Gauss-Manin (Théorème 3.1) et la structure de reseaux des pôles de la transformée de Mellin qui est exprimée au moyen des données topologiques des singularités (Corollaire 4.4, Théorème 5.2). Comme une application de ces résultats, on exprime le nombre de Hodge du fibre de Milnor en terme des spectres de Gauss-Manin.*

0 Introduction

Ici on calcule concrètement le système de Gauss-Manin de l'intégrale-fibre associée aux singularites isolées d'intersection complète (SIIC).

D'abord nous fixons la situation. Pour les deux variétés complexes $X = (\mathbf{C}^{n+k}, 0), S = (\mathbf{C}^k, 0)$, on regarde une application quasihomogène d'intersection complète,

$$f : X \to S \tag{0.1}$$

telle que $X_s := \{(x_1, \cdots, x_{n+k}); \in X; f_1(x) = s_1, \ldots, f_k(x) = s_k\}$. C'est à dire $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ sont les polynômes quasihomogènes par rapport à un poids et $dim X_0 = n \geq 0$. On suppose en plus que f possède une singularité isolée à l'origine i. e. $df(x) = 0$ pour $x \in X_0$ si et seulement si $x = 0$.

Dans ce travail, notre but est de décrire les solutions explicites du système de Gauss-Manin associé à SIIC quasihomogènes pour certains cas de courbe espace i.e. $n = 1, k = 2$. Ici nous nous servons de la transformée de Mellin des intégrales-fibres à fin de sa déscription à cause d'une possibilité remarquable de "visualiser" des propriétés importantes de singularités SIIC qui les caractérisent d'une façon distinguée. Cette situation incitait certains auteurs comme C.Sabbah [21], [22], D.Barlet[6], F.Loeser [16] à poursuivre ses recherches sur la transformée de Mellin des intégrales fibres qui etaient, entre autres, motivés par l'idée de P.Deligne.

Aperçons la structure du travail. Dans §1, selon Greuel et Hamm [12], on introduit les modules sur lesquels le système de Gauss-Manin associé à SIIC quasihomogène de dimension arbitraire sera défini et représenté au moyen des matrices implicitement définies. Les résultats de §2 montrent le calcul concret du système de Gauss-Manin associé aux singularités isolées simples d'intersection complète (SISIC) $S_\mu, U_\mu, T_\mu, W_\mu, Z_\mu$ $(\mu \geq 5)$ de la liste de M.Giusti [10]. Je tiens à noter que le calcul achevé par S.Guzev [13] sert à l'établissement de résultats de cette section.

AMS Subject Classification: 14M10, 32S25, 32S40.

Key words and phrases: Gauss-Manin connexion, complete intersection, Hodge structure.

[1] Travail réalisé par le soutien financier d'un homme d'affaires M.Mikhail S.Gavounas (Moscou, Russie) et de Max Planck Institut für Mathematik.

Dans §3, les spectres du système de Gauss-Manin associé à SISIC sont définis et la symétrie entre eux est établie. On note que la symétrie des spectres de la structure de Hodge mixte pour SIIC a été démontrée par W.Ebeling et J.Steenbrink [9]. Dans §4, la transformée de Mellin de l'intégrale- fibre est décrite au moyen des spectres mentionnés. Pour ce but, on résout l'équation de différences finies. L'interprétation de l'intégrale- fibre comme fonction hypergeometrique généralisée au sens de Mellin-Barnes-Pincherle est donnée. Les pôles de la transformée de Mellin donnent des informations sur $b-$ fonction en 2-variables introduite par Sabbah [21]. Dans §5, en vue du caractère assez universel des calculs pour SISIC, on généralise des résultats de §2 et §3 aux séries des singularités "non-resonantes" et unimodales. Dans §6, on exprime le nombre de Hodge du fibre de Milnor $h^{pq}(X_s)$ au moyen des spectres de Gauss-Manin obtenus dans §3, §5.

Je tiens à remercier D.Barlet, E.Brieskorn, J.H.Steenbrink et C.Sabbah de ses critiques utiles et V. P. Palamodov d'avoir rendu à ma disposition une copie de manuscrit [13].

1 Les espaces vectoriels V et F de Greuel-Hamm

1.1 La situation et les notations de §0 restent valide. Dans cette section, on prépare quelques lemmes sur l'intersection complète $X_s := \{(x_1, \cdots, x_m); \in X; f_1(x) = s_1, \dots, f_k(x) = s_k\}$, de dimension $n = m-k \geq 0$ qui est définie par une collection des polynômes quasihomogènes $f_1(x), \dots, f_k(x)$.

D'abord on commence par munir nos objets des poids quasihomogènes. Dès que $f_1, \cdots, f_k$ sont les polynômes quasihomogènes, on peut attribuer aux variables $x_1, \cdots, x_m$ des poids quasihomogènes. Notons les poids de ces variables par

$$w(x_1) = w_1, \cdots, w(x_m) = w_m, \tag{1.1.1}$$

où $w(x_1) = w_1, \cdots, w(x_m) = w_m$ sont les entièrs positifs tels que ils aient un pgdc = 1. On utilisera la notation $w(f_1) = p_1, \cdots, w(f_k) = p_k$, en sorte que $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$. Il est naturel de définir le champs d'Euler

$$E = w_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + w_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}, \tag{1.1.2}$$

de telle sorte que

$$E(f_j) = p_j f_j \quad \text{pour } j = 1, \cdots, k.$$

1.2 Pour calculer le système de Gauss-Manin associé aux singlarités notées ci-dessus, nous introduisons les deux espaces vectoriels V et F,

$$F := \frac{\Omega_X^{n+1}}{df_1 \wedge \Omega_X^n + \cdots + df_k \wedge \Omega_X^n + i_E(\Omega_X^{n+2})}, \tag{1.2.1}$$

où i_E signifie contraction avec le champs d'Euler E défini par (1.1.2).

$$V := \frac{\Omega_X^n}{df_1 \wedge \Omega_X^{n-1} + \cdots + df_k \wedge \Omega_X^{n-1} + d\Omega_X^{n-1} + f_1 \Omega_X^n + \cdots + f_k \Omega_X^n}. \tag{1.2.2}$$

L'espace V a été, par example, introduit par Greuel-Hamm [12]. Ils se servirent de V afin de calculer le nombre de Milnor μ et le polynôme caractéristique de la monodromie de Picard-Lefschetz pour f, une singularité isoleé d'intersection complète quasihomogène. Du lemme 3.6 de [12] on déduit que $rank_{\mathbf{C}} V$ est égal au nombre de Milnor μ de la singularité. Dans leur formule $P_V(1) = \mu$ pour le cas $n > 0$. Satz 3.1 de [12] donne la série de Poincaré $P_V(t)$,

$$P_V(t) = Res_{\tau=0} \frac{\tau^{-m+k-1}}{\tau+1} [\prod_{i=1}^{m} \frac{1+\tau t^{w_i}}{1-t^{w_i}} \prod_{j=1}^{k} \frac{1-t^{p_j}}{1+\tau t^{p_j}} + \tau]. \tag{1.2.3}$$

Quant à l'espace F, on doit sa définition essentiellement à S.Guzev [13].

1.3 Par les propositions suivantes, on voit l'utilité de l'espace F pour le calcul de Gauss-Manin. Introduisons un autre espace vectoriel Φ :

$$\Phi := \frac{\Omega_X^m}{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \Omega_X^n + f_1 \Omega_X^m + \cdots + f_k \Omega_X^m}.$$

Selon la construction de Brieskorn-Greuel [11], introduisons un module

$$"H = f_* \Omega_X^m / df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \cdot d(f_* \Omega_X^{n-1}) \cong \frac{\Omega_X^m}{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\Omega_X^{n-1}},$$

qui est identifié à un $\mathcal{O}_S-$ module du rang μ (Proposition 2.6 [11]). En fait,

Lemme 1.1 *Si $f_1, \cdots, f_k$ sont les polynômes quasihomogènes, l'espace vectoriel Φ est isomorphe à un autre espace $"H/(f_1, \cdots, f_k)$.*

Démonstration Prenons α qui peut être un élément non zero de $"H/(f_1, \cdots, f_k)$ en sorte qu'il admette la décomposition

$$\alpha = \omega + \sum_{i=1}^{k} f_i \wedge \varphi_i + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\psi,$$

avec $\psi \in \Omega_X^{n-1}, \varphi_i \in \Omega_X^m$, pour

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i \wedge \chi_i + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \phi,$$

avec $\phi \in \Omega_X^n, \chi_i \in \Omega_X^m$. 'énoncé du lemme se reduit à la nullité de α dans $"H/(f_1, \cdots, f_k)$. Alors,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} f_i(\varphi_i + \chi_i) + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge (d\psi + \phi).$$

On peut supposer la décomposition de la forme $\phi \in \Omega_X^n$ selon le poids quasihomogène

$$\phi = \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}(di_E + i_E d)(\phi_j) = \sum_{j=1}^{L} \phi_j$$

où $w(\phi_j) = \frac{c_1 j + c_0}{c}$ avec c, c_0, c_1, les entiers strictement positifs. Avec cette notation, la forme α s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} f_i \wedge (\varphi_i + \chi_i) + df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge [(d\psi + \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1}(di_E + i_E d)\phi_j]$$

$$\equiv df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge [d(\psi + \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1} i_E(\phi_j)) + i_E(\sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1} d\phi_j)] mod(f_1, \cdots, f_k)$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1} df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge i_E(d\phi_j) \quad \text{dans} \quad "H/(f_1, \cdots, f_k),$$

$$\equiv (-1)^{k+1} i_E[\sum_{j=1}^{L} w(\phi_j)^{-1} df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\phi_j] \quad \text{dans} \quad "H/(f_1, \cdots, f_k) \equiv 0,$$

car $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge d\phi_j \in \Omega_X^{m+1} \cong 0$. **Q.E.D.**

De ce lemme il suit que $rank_{\mathbf{C}}\Phi = \mu$. Nous notons les éléments de la base de Φ par $\phi_j(x)dx, 1 \leq j \leq \mu$. Ici et par la suite on utilise la notation $x = (x_1, \cdots, x_m), dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Notons aussi la base du module F par $\tilde{\omega_i}, 1 \leq i \leq \mu$.

Il vaut souligner ici le caractère d'invariance topologique des modules F et Φ.

1.4

Proposition 1.2 *Pour chaque $\tilde{\omega_i} \in F$, on a décomposition suivante*

$$\tilde{\omega_i} \wedge df_1 \wedge \cdots^{\vee \ell} \wedge df_k = \sum_{j=1}^{\mu} P_{ij}^{(\ell)} \phi_j dx \tag{1.4.1}$$

avec $P_{ij}^{(\ell)} \in \mathbf{C}[f_1, \cdots, f_k]$ et $\phi_j(x)dx \in \Phi$, pour $1 \leq i, j \leq \mu, 1 \leq \ell \leq k$ et $df_1 \wedge \cdots^{\vee \ell} \wedge df_k = \bigwedge_{i \neq \ell}^{k} df_i$.

Démonstration

Il existe une application injective naturelle entre les espaces vectoriels :

$$df_1 \wedge \cdots^{\vee \ell} \wedge df_k \wedge F :\hookrightarrow \frac{\Omega_X^m}{df_1 \wedge \cdots df_k \wedge \Omega_X^n} \cong \Phi \otimes \mathcal{O}_S,$$

pour $f_1, \cdots, f_k$ définissant l' intersection complète. En vue de l'somorphisme entre $''H/(f_1, \cdots, f_k)$ et Φ établi dans Lemme 1.1, la conclusion se déduit immédiatement. Q.E.D.

1.5.

Proposition 1.3 *Si on définit le champs d'Euler comme (1.1.2), l'application i_E donée par la contraction avec E,*

$$i_E : F \to V$$

induit un isomorphisme entre les deux modules F et V.

Démonstration

1) Surjectivité. Si on prend une forme quasihomogène $\omega \in V$, en vertu de la quasihomogeneiété de ω ,

$$w(\omega)\omega = i_E(d\omega) + d(i_E\omega).$$

Cela veut dire, pour $\frac{d\omega}{w(\omega)} \in F$,

$$i_E(\frac{d\omega}{w(\omega)}) \equiv \omega \text{ dans } V.$$

Ici on dénote le poids de la forme ω par $w(\omega)$.

2) Injectivité. Supposons pour $\omega \in F$,

$$i_E(\omega) = df_1 \wedge \phi_1 + \cdots + df_k \wedge \phi_k + d\psi + f_1\omega_1 + \cdots + f_k\omega_k,$$

avec $\phi_1, \cdots, \phi_k, \psi \in \Omega_X^{n-1}$, $\omega_1, \cdots, \omega_k \in \Omega_X^n$. Ça veut dire,

$$di_E(\omega) = df_1 \wedge (d\phi_1 + \omega_1) + \cdots + df_k \wedge (d\phi_k + \omega_k) + f_1 d\omega_1 + \cdots + f_k d\omega_k$$

$$= w(\omega)\omega - i_E(d\omega).$$

Ou bien

$$\omega \equiv \frac{1}{w(\omega)}(f_1 d\omega_1 + \cdots + f_k d\omega_k) \text{ dans } F. \tag{1.5.1}$$

D'autre part, puisque

$$p_1 f_1 d\omega_1 = i_E(df_1 \wedge d\omega_1) + df_1 \wedge i_E(d\omega_1),$$

on a

$$f_1 d\omega_1 \equiv 0 \quad \text{dans} \quad F.$$

d'une façon analogue,

$$f_i d\omega_i \equiv 0 \ \text{ dans } \ F, 2 \leq i \leq k.$$

En tenant compte du (1.5.1), ces dernières relations entrainent que $\omega \equiv 0$ dans F.

Q.E.D. Prop.

En vue de Proposition 1.3, nous notons la base de V par ω_i t.q. $\omega_i = i_E(\tilde{\omega}_i)$, $1 \leq i \leq \mu$.

1.6 Nous abordons calcul du système de Gauss-Manin à la manière de Greuel [11] pour $\omega_i \in V$. Nous notons d'ailleurs par ψ_i $n-$ forme meromorphe t.q.

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \psi_i = \phi_i(x)dx, \quad 1 \leq i \leq \mu.$$

Alors on peut déduire de la Proposition 1.2 la relation suivante,

$$d\omega_j = (di_E + i_E d)(\tilde{\omega}_j) \equiv \ell_j \tilde{\omega}_j$$

$$\equiv \ell_j(\sum_{q=1}^{\mu} P^{(1)}_{jq} df_1 \wedge \psi_q - \sum_{q=1}^{\mu} P^{(2)}_{jq} df_2 \wedge \psi_q + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{\mu} P^{(k)}_{jq} df_k \wedge \psi_q) \ mod((df_1, \cdots, df_k)\Omega^n_X, d\Omega^n_X). \tag{1.6.1}$$

Pour obtenir (1.6.1), on utilise la relation,

$$d\tilde{\omega}_j \equiv 0 \quad mod((df_1, \cdots, df_k)d\Omega^n_X, d\Omega^{n+1}_X),$$

et $\mathcal{L}_E(\tilde{\omega}_i) = \ell_i \tilde{\omega}_i$ pour $\mathcal{L}_E$, la dérivée de Lie de E avec $\ell_i := w(\tilde{\omega}_i)$, le poids de la forme. La relation (1.6.1) signifie la dérivée de la forme ω_i,

$$d\omega_j = df_1 \wedge \beta^{(1)}_j + df_2 \wedge \beta^{(2)}_j + \cdots + df_k \wedge \beta^{(k)}_j, \tag{1.6.2}$$

avec les formes meromorphes $\beta^{(i)}_j$ qui possèdent le pôle le long du lieu critique $Cr(f) = \{x \in \mathbf{C}^m; df_1(x) \wedge \cdots \wedge df_k(x) = 0\}$.

La relation (1.6.2) est une expression du système de Gauss-Manin à la Greuel p.249 [11] adoptée à notre situation. Pour voir cela, on remarque,

$$\beta^{(i)}_j \equiv (-1)^{j-1}\ell_j[\sum_{q=1}^{\mu} P^{(i)}_{jq}\psi_q] \quad mod((df_1, \cdots, df_k)d\Omega^n_X, d\Omega^{n+1}_X).$$

L'énoncé sur le pôle des formes $\beta^{(i)}_j$ est visible du fait que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \psi_q \in \Omega^m_{\mathbf{C^m}}$. Voir le lemme 1.12 et la discussion au p.249 de [11].

1.7 Dès que l'expression (1.6.1) ne donne que la relation entre $d\omega_j$ et ψ_j, elle est peu convenable pour le calcul concret du système de Gauss-Manin. Il est, donc, souhaitable d'établir la relation entre $d\psi_j$ et ψ_j, ou bien $d\omega_j$ et ω_j. Pour ce but, on va chercher des relations entre ω_j et ψ_j. Puisque

$$\tilde{\omega_j} = \sum_{q=1}^{\mu} P^{(1)}_{jq} df_1 \wedge \psi_q - \sum_{q=1}^{\mu} P^{(2)}_{jq} df_2 \wedge \psi_q + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{\mu} P^{(k)}_{jq} df_k \wedge \psi_q \qquad dans\ F,$$

on a

$$\omega_j = i_E(\tilde{\omega}_j) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}[p_i \sum_{q=1}^{\mu} P^{(i)}_{jq} f_i \psi_q - \sum_{j=1}^{\mu} P^{(i)}_{jq} df_i \wedge i_E(\psi_q)]. \tag{1.7.1}$$

Par consequence,

$$d\omega_j = \sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}(d(p_iP_{jq}^{(i)}f_i) - w(\psi_q)P_{jq}^{(i)}df_i)] \wedge \psi_q + \sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_iP_{jq}^{(i)}f_i] \wedge d\psi_q, \quad (1.7.2)$$

où $w(\psi_q)$, poids quasihomogène de forme ψ_q.

Si on compare l'expression (1.7.2) à (1.6.1), on obtient,

$$\sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_iP_{jq}^{(i)}f_i]d\psi_q = \sum_{i=1}^{k}[\sum_{q=1}^{\mu} A_{jq}^{(i)}df_i] \wedge \psi_q, \quad (1.7.3)$$

avec $A_{jq}^{(1)}, \cdots, A_{jq}^{(k)} \in \mathbf{C}[f_1, \cdots, f_k]$ qui sont des polynômes calculables en partant des relations ci-dessus.

1.8 L'expression (1.7.2)se simplifie si l'on fait transition à la relation entre des intégrales $\int_{\gamma(s)} \psi_q$, au lieu de celle entre des formes. On définit l'intégrale- fibre $I_{\phi_q,\gamma}$ prise le long d'un cycle évanescent γ dont l'ambiguité dans la homologie $H_n(X_s, \mathbf{C})$ ne sera precisée que ultérieurement (voir §4 Théorème 4.3),

$$\begin{aligned} I_{\phi_q,\gamma}(s) := \int_{\gamma(s)} \psi_q &= (\frac{1}{2\pi i})^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \psi_q}{(f_1 - s_1)\cdots(f_k - s_k)} \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\phi_q dx}{(f_1 - s_1)\cdots(f_k - s_k)}, \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

où $\partial\gamma(s)$ est un cycle obtenu à l'aide de ∂, l'opérateur du cobord de Leray. Quant à l'opération de Leray, on renvoie au livre de F.Pham [19], ou bien à celui de V.A.Vasiliev [25].

1.9 De (1.7.1) on déduit

$$\int_{\gamma(s)} \omega_j = \sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_is_iP_{jq}^{(i)}(s)]I_{\phi_q}(s). \quad (1.9.1)$$

Celui-ci est visible de la définition de l'intégrale- fibre (1.8.1),

$$\int_{\gamma(s)} df_1 \wedge i_E(\psi_j) = (\frac{1}{2\pi i})^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{(f_1 - s_1)\cdots(f_k - s_k)} \wedge df_1 \wedge i_E(\psi_j) = 0.$$

D'une façon analogue,

$$\int_{\gamma(s)} df_i \wedge i_E(\psi_j) = 0,\ 2 \leq i \leq k.$$

On fait comparaison entre la relation

$$d\int_{\gamma(s)} \omega_j = \ell_j \sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P_{jq}^{(i)}(s)ds_i]I_{\phi_q,\gamma}(s), \quad (1.9.2)$$

obtenue de (1.6.1) et de la relation (1.9.1). En résultat nous obtenons les équations suivantes entre $I_{\phi_q}(s)$ et $\frac{\partial}{\partial s_\ell}I_{\phi_q}$, $1 \leq \ell \leq k$

$$\sum_{q=1}^{\mu}[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_is_iP_{jq}^{(i)}]\frac{\partial}{\partial s_\ell}I_{\phi_q} = \sum_{q=1}^{\mu}((\ell_j - p_\ell)P_{jq}^{(\ell)} - p_\ell s_\ell\frac{\partial}{\partial s_\ell}P_{jq}^{(\ell)} + \sum_{i\neq\ell} p_is_i\frac{\partial}{\partial s_\ell}P_{jq}^{(i)})I_{\phi_q}, \quad 1 \leq j \leq \mu. \quad (1.9.3)$$

C'est un système des équations qui donnent la connexion (système) de Gauss-Manin.

1.10 Pour énoncer la proposition dans une forme plus simple, nous introduisons les notations suivantes: $\mathbf{I}_F = (\int_{\gamma(s)} \omega_1, \cdots, \int_{\gamma(s)} \omega_\mu)$, $\mathbf{I}_\Phi = (I_{\phi_1}(s), \cdots, I_{\phi_\mu}(s))$. On introduit les $\mu \times \mu$ matrices définies comme suivantes,

$$L_F = diag(\ell_1, \cdots, \ell_\mu)$$

avec $\ell_i = w(\omega_i)$, $P^{(1)}(s) = (P^{(1)}_{jq}(s)), \cdots, P^{(k)}(s) = (P^{(k)}_{jq}(s)), 1 \leq j, q \leq \mu$.

Théorème 1.4 *1. Pour l'application quasihomogène*

$$f : X \to S$$

aux singularités isolées d'intersection complète de dimension n, *le système de Gauss-Manin pour* $\mathbf{I}_\Phi$ *est décrit par les systèmes suivants:*

$$d[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)\mathbf{I}_\Phi] = L_F[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P^{(i)}(s)ds_i]\mathbf{I}_\Phi, \tag{1.10.1}$$

ou bien,

$$(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s))\frac{\partial}{\partial s_\ell}\mathbf{I}_\Phi = [L_F P^{(\ell)}(s) - \frac{\partial}{\partial s_\ell}(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s))]\mathbf{I}_\Phi, \tag{1.10.2}$$

$1 \leq \ell \leq k$.

2. Le discriminant $\Delta(s)$ *de déformation* X_s *est donné par*

$$\Delta(s) = det(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)). \tag{1.10.3}$$

Démonstration

1. Dans l'expression introduite, la démarche notée ci-dessus peut être interprétée comme suit. La relation (1.9.2) signifie

$$d\mathbf{I}_F = L_F(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}P^{(i)}(s)ds_i)\mathbf{I}_\Phi. \tag{1.10.4}$$

Par contre la relation (1.7.1) veut dire

$$\mathbf{I}_F = (\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s))\mathbf{I}_\Phi. \tag{1.10.5}$$

En prenant la dérivée de (1.10.5) et comparant celle-ci avec (1.10.3), on obtient la relation entre $\mathbf{I}_\Phi$ et $d\mathbf{I}_\Phi$ dont on peut déduire (1.10.1) et (1.10.2).

2. Il est établi par Greuel que le système de Gauss-Manin possède le pôle le long du discriminant de singularité. Par contre, il est claire que (1.10.1) et (1.10.2) s'écrivent comme les systèmes de Pfaff avec le pôle $\{s \in \mathbf{C}^k; det(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i s_i P^{(i)}(s)) = 0\}$. **Q.E.D.**

Il vaut remarquer ici que le système de Gauss-Manin est complètement déterminé par les matrices $P^{(i)}(s)$, $1 \leq i \leq k$ introduites dans Proposition 1.2.

2 Liste des systèmes de Gauss-Manin pour les singularités isolées simples d'intersection complète de courbe espace

Dans cette section, on calcule comme les cas importants des singularités isolées simples d'intersection complète, le système de Gauss-Manin associé au courbe espace i.e. $n = 1, k = 2, m = 3$. La forme normale des singularités isolées simples d'intersection complète (SISIC) a été obtenue par M.Giusti [10]. Par la suite, on établit une liste des notions nécessaires pour décrire le système de Gauss-Manin associé aux SISIC comme (1.10.1) et (1.10.2).

0. Polynômes f_1 et f_2,
1. Poids de variables, $w_1 := w(x_1), w_2 := w(x_2), w_3 := w(x_3), p_1 := w(f_1), p_2 := w(f_2)$,
2. Le module F,
3. Le module Φ,
4. Les matrices $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$,
5. Discriminant $\Delta(s)$ pour la déformation X_s.

Pour la déscription de la matrice $P^{(2)}(s)$ du 4. ci-dessus, on se sert d'une expression comme suit

$$P^{(2)}(s) = Q(s) \times V \times \Sigma,$$

où les matrices composantes sont de $GL(\mu, \mathbf{C}[s])$. Notamment, $Q(s)$: une matrice diagonale avec les éléments monomiaux en variables s_1, s_2, V = une matrice diagonale d'éléments rationels, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$.

Ici on a noté par $\sigma_k \in SL(\nu_k, \mathbf{Z}), 1 \leq k \leq m$ la matrice de permutation d'ordre ν_k,

$$\sigma_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

telle que $\sigma_k^{\nu_k} = id_{\nu_k}$. On verra, donc, les données $Q(s), V$ et $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ t.q. $\sum_{i=1}^m \nu_k = \mu$ en tant que celles de $P^{(2)}(s)$. Dans les cas ci-dessous, les matrices $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ sont toutes les deux diagonalisables. On a choisi la numérotation de la base de Φ en sorte que $P^{(1)}$ soit une matrice diagonale. Par la suite, nous notons tout simplement dx_1dx_2, dx_2dx_3 etc. au lieu de $dx_1 \wedge dx_2, dx_2 \wedge dx_3$ afin d'économiser les colonnes.

Le cas $S_{2m+3}, m \geq 1$.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2m} &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2x_3 &= 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = m, w(x_2) = m, w(x_3) = 1, p_1 := w(f_1) = 2m, p_2 := w(f_2) = m + 1.$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{x_3dx_1dx_2, \overbrace{x_3dx_3dx_1, x_3^3dx_3dx_1, \cdots, x_3^{2m-1}dx_3dx_1}^{m}, dx_1dx_2,$$
$$\overbrace{dx_3dx_1, x_3^2dx_3dx_1, \cdots, x_3^{2m-2}dx_3dx_1}^{m}, dx_2dx_3\}.$$

3.

$$\Phi = \phi_j = \{\overbrace{1, x_3^2, \cdots, x_3^{2m}}^{m+1}, x_2, \overbrace{x_3, x_3^3, \cdots, x_3^{2m-1}}^{m}, x_1\}.$$

$$w(\phi_j) = \{\overbrace{0, 2, \cdots, 2m}^{m+1}, m, \overbrace{1, 3, \cdots, 2m-1}^{m}, m\}.$$

4. $P^{(1)} = diag(s_2, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{2m+1}, 0)$
$Q = diag(1, \overbrace{s_2, \cdots, s_2}^{m}, 1, 1 \overbrace{s_2, \cdots, s_2}^{m-1}, 1), \nu_1 = \nu_2 = m+1, \nu_3 = 1.$
$V = diag(2m, \overbrace{2, \cdots, 2}^{m}, 2m, \overbrace{2, \cdots, 2}^{m+1})$
5.

$$\Delta(s) = s_2^2((\frac{-s_1}{m+1})^{m+1} - (\frac{s_2^2}{m})^m)^2.$$

Le cas $S_{2m+4}, m \geq 1$

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2m+1} &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 x_3 &= 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = 2m+1, w(x_2) = 2m+1, w(x_3) = 2, p_1 := w(f_1) = 2(2m+1), p_2 := w(f_2) = 2m+3.$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{x_3 dx_1 dx_2, \overbrace{x_3 dx_3 dx_1, x_3^3 dx_3 dx_1, \cdots, x_3^{2m-1} dx_3 dx_1}^{m},$$

$$dx_1 dx_2, \overbrace{dx_3 dx_1, x_3^2 dx_3 dx_1, \cdots, x_3^{2m} dx_3 dx_1}^{m+1}, dx_2 dx_3\}.$$

3.

$$\Phi = \phi_j = \{\overbrace{1, x_3^2, \cdots, x_3^{2m}}^{m+1}, x_2, \overbrace{x_3, x_3^3, \cdots, x_3^{2m+1}}^{m+1}, x_1\}.$$

$$w(\phi_j) = \{\overbrace{0, 4, \cdots, 4m}^{m+1}, 2m+1, \overbrace{2, 6, \cdots, 2(2m+1)}^{m+1}, 2m+1\}.$$

4. $P^{(1)} = diag(s_2, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{2m+2}, 0)$
$Q = diag(1, \overbrace{s_2, \cdots, s_2}^{m}, 1, 1, \overbrace{s_2, \cdots, s_2}^{m}, 1), \nu_1 = 2m+3, \nu_2 = 1.$
$V = diag(2m+1, \overbrace{2, \cdots, 2}^{m}, 2m+1, \overbrace{2, \cdots, 2}^{m+2}).$
5.

$$\Delta(s) = s_2^2((\frac{s_1}{2m+3})^{2m+3} + (\frac{s_2^2}{2m+1})^{2m+1}).$$

Le cas T_7.

0.
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &= & x_1^2+x_2^3+x_3^3 &= & 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= & x_2x_3 &= & 0 \end{cases}$$

1.
$$w(x_1)=3, w(x_2)=2, w(x_3)=2, p_1:=w(f_1)=6, p_2:=w(f_2)=4.$$

2.
$$F=\tilde{\omega_j}=\{x_3dx_1dx_2, x_3^2dx_3dx_1, dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1, x_2dx_1dx_2, dx_3dx_1, dx_2dx_3\}.$$

3.
$$\Phi=\phi_j=\{1,x_3^3,x_2,x_3^2,x_2^2,x_3,x_1\}.$$
$$w(\phi_j)=\{0,6,2,4,4,2,3\}.$$

4. $P^{(1)}=diag(s_2,1,1,1,1,1,0)$
$Q=diag(s_2^2,1,1,s_2,1,s_2,1,s_2,1), \nu_1=\nu_2=\nu_3=2, \nu_4=1$. $V=diag(3,3,3,3,3,3,2)$
5.
$$\Delta(s)=s_2^2(s_1^2-4s_2^3)^3.$$

Le cas T_8.

0.
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &= & x_1^2+x_2^3+x_3^4 &= & 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= & x_2x_3 &= & 0 \end{cases}$$

1.
$$w(x_1)=6, w(x_2)=4, w(x_3)=3, p_1:=w(f_1)=12, p_2:=w(f_2)=7.$$

2.
$$F=\tilde{\omega_j}=\{x_3dx_1dx_2, x_3^2dx_3dx_1, dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1, x_2dx_1dx_2, dx_3dx_1, x_3^3dx_3dx_1, dx_2dx_3\}.$$

3.
$$\Phi=\{1,x_3^3,x_2,x_3^2,x_2^2,x_3,x_3^4,x_1\}.$$
$$w(\phi_j)=\{0,9,4,6,8,3,12,6\}.$$

4.
$$P^{(1)}=diag(s_2,1,1,1,1,1,1,0)$$
$Q=diag(1,s_2^2,1,s_2,s_2,1,s_2^2,1), \nu_1=7, \nu_2=1$. $V=diag(4,3,4,3,4,3,3,1)$
5.
$$\Delta(s)=s_2^2(3^34^4s_1^7-7^7s_2^{12}).$$

Le cas T_9.

0.
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &= & x_1^2+x_2^3+x_3^5 &= & 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= & x_2x_3 &= & 0 \end{cases}$$

1.
$$w(x_1)=15, w(x_2)=10, w(x_3)=6, p_1:=w(f_1)=30, p_2:=w(f_2)=16.$$

2.
$$F=\tilde{\omega_j}=\{x_3dx_1dx_2, x_3^2dx_3dx_1, x_2dx_1dx_2, dx_3dx_1,$$
$$x_3^3dx_3dx_1, dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1, x_3^4dx_3dx_1, dx_2dx_3\}.$$

3.

$$\Phi = \{1, x_3^3, x_2^2, x_3, x_3^4, x_2, x_3^2, x_3^5, x_1\}.$$

$$w(\phi_j) = \{0, 18, 20, 6, 24, 10, 12, 30, 15\}.$$

4.

$$P^{(1)} = diag(s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$Q = diag(1, s_2^2, s_2, 1, s_2, 1, s_2, s_2^2, 1), \nu_1 = 8, \nu_2 = 1$. $V = diag(5, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 3, 2)$

5.

$$\Delta(s) = s_2(5^5 3^3 s_1^8 - 2^{24} s_2^{15}).$$

Le cas U_7.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2x_3 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_3^3 &= 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = 4, w(x_2) = 5, w(x_3) = 3, p_1 := w(f_1) = 8, p_2 := w(f_2) = 9, w(dx_1dx_2dx_3) = 12.$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{x_3dx_2dx_3 + x_1dx_3dx_1, x_3^2dx_3dx_1 + x_1dx_1dx_2,$$

$$x_3^2dx_2dx_3 + x_1x_3dx_3dx_1, dx_3dx_1, dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1\}.$$

3.

$$\Phi = \{1, x_1x_3^2, x_3, x_1, x_2, x_3^2, x_1x_3\}.$$

$$w(\phi_j) = \{0, 10, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

4.

$$P^{(1)} = diag(s_1, 1, s_1, 1, 1, 1, 1)$$

$Q = diag(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1), \nu_1 = 7$. $V = diag(3, \frac{1}{4}, 3, 1, 2, \frac{1}{3}, 1)$

5.

$$\Delta(s) = 2^{22}s_1^9 - 3^{15}s_2^8.$$

Le cas U_8.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 &= 0 \\ \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = 3, w(x_2) = 4, w(x_3) = 2, p_1 := w(f_1) = 6, p_2 := w(f_2) = 7, w(dx_1dx_2dx_3) = 9$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{x_1dx_2dx_3, x_1x_3dx_3dx_1 - \frac{x_1}{3}dx_1dx_2,$$

$$x_1x_3dx_2dx_3, dx_3dx_1, dx_2dx_3, x_3dx_3dx_1 - \frac{1}{3}dx_1dx_2, x_1dx_3dx_1, dx_1dx_2\}.$$

3.

$$\Phi = \{1, x_1^2x_3, x_3, x_1, x_2, x_1x_3, x_1^2, x_3^2\}.$$

$$w(\phi_j) = \{0, 8, 2, 3, 4, 5, 6, 4\}.$$

4.

$$P^{(1)} = diag(s_2, 1, s_2, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$Q = diag(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \nu_1 = 7, \nu_2 = 1.$ $V = diag(2, \frac{-1}{3}, 2, 1, 2, \frac{-1}{3}, 1, 3)$

5.

$$\Delta(s) = s_2^3(2^4 3^9 s_1^7 - 7^7 s_2^6).$$

Le cas U_9.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2 x_3 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_3^4 &= 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = 5, w(x_2) = 7, w(x_3) = 3, p_1 := w(f_1) = 10, p_2 := w(f_2) = 12, w(dx_1dx_2dx_3) = 12.$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{x_3dx_2dx_3 + x_1dx_3dx_1, x_3^3dx_3dx_1 + x_1dx_1dx_2,\ x_3^3dx_2dx_3 + x_1x_3^2dx_3dx_1,$$
$$x_3dx_3dx_1, dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_3^2dx_3dx_1, x_3^2dx_2dx_3 + x_1x_3dx_3dx_1, dx_3dx_1, \}.$$

3.

$$\Phi = \{1, x_1x_3^3, x_3^2, x_1x_3, x_2, x_3^3, x_1x_3^2, x_3, x_1\}.$$
$$w(\phi_j) = \{0, 14, 6, 8, 7, 9, 11, 3, 5\}.$$

4.

$$P^{(1)} = diag(s_1, 1, s_1, 1, 1, 1, s_1, 1)$$

$Q = diag(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \nu_1 = 4, \nu_2 = 5.$ $V = diag(3, \frac{1}{5}, 3, 1, 8, \frac{1}{4}, 1, 3, 1)$

5.

$$\Delta(s) = (5^5 s_1^6 - 2^4 3^6 s_2^5)^2.$$

Le cas W_8.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_2^2 + x_1 x_3 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_3^3 &= 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1) = 6, w(x_2) = 5, w(x_3) = 4, p_1 := w(f_1) = 10, p_2 := w(f_2) = 12, w(dx_1dx_2dx_3) = 15.$$

2.

$$F = \tilde{\omega_j} = \{3x_1dx_2dx_3 + 2x_3dx_1dx_2, x_3^2dx_2dx_3 + x_1dx_1dx_2,$$
$$3x_1x_3dx_2dx_3 + 2x_3^2dx_1dx_2, dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_3dx_2dx_3, dx_3dx_1, x_3dx_3dx_1\}.$$

3.

$$\Phi = \{1, x_1x_3^2, x_3, x_1, x_3^2, x_1x_3, x_2, x_2x_3\}.$$
$$w(\phi_j) = \{0, 14, 4, 6, 8, 10, 5, 9\}.$$

4.

$$P^{(1)} = diag(6s_2, 5, 6s_2, 1, 1, 2, 0, 0)$$

$Q = diag(1, s_2, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \nu_1 = 6, \nu_2 = \nu_3 = 1.$ $V = diag(5, 1, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 1, 2)$

5.

$$\Delta(s) = s_2^4(5^5 s_1^6 - 2^2 3^3 s_2^5).$$

Le cas W_9.
0.

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) & = & x_2^2+x_1x_3 & = & 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) & = & x_1^2+x_2x_3^2 & = & 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1)=5, w(x_2)=4, w(x_3)=3, p_1 := w(f_1)=8, p_2 := w(f_2)=10, w(dx_1dx_2dx_3)=12.$$

2.

$$F=\tilde{\omega_j}=\{x_1dx_2dx_3+x_3dx_1dx_2, x_2x_3dx_2dx_3+x_1dx_1dx_2, x_1x_2dx_2dx_3+x_2x_3dx_1dx_2,$$
$$dx_3dx_1, x_3dx_2dx_3, 2x_1dx_3dx_1+x_2dx_1dx_2, dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_2dx_2dx_3\}.$$

3.

$$\Phi=\{1, x_1x_2x_3, x_2, x_3^2, x_1x_3, x_3, x_1, x_2x_3, x_1x_2\}.$$
$$w(\phi_j)=\{0,12,4,6,8,3,5,7,9\}.$$

4.

$$P^{(1)}=diag(2s_2,4,2s_2,1,2,s_1,2,2,2)$$

$Q=diag(1,s_2,1,\cdots,1), \nu_1=5, \nu_2=4$. $V=diag(2,1,2,2,1,5,1,1,1)$
5.

$$\Delta(s)=s_2^3(2^{12}s_1^5-5^5s_2^4)^2.$$

Le cas Z_9.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) & = & x_1^2+x_2^2+x_3^3 & = & 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) & = & x_1x_2 & = & 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1)=3, w(x_2)=3, w(x_3)=2, p_1 := w(f_1)=6, p_2 := w(f_2)=6, w(dx_1dx_2dx_3)=8.$$

2.

$$F=\tilde{\omega_j}=\{x_1dx_2dx_3, x_1dx_3dx_1, dx_2dx_3, dx_3dx_1, x_1x_3dx_2dx_3,$$
$$x_1x_3dx_3dx_1, x_3dx_2dx_3, x_3dx_3dx_1, dx_1dx_2\}.$$

3.

$$\Phi=\{1, x_1^2, x_2, x_1, x_3, x_1^2x_3, x_2x_3, x_1x_3, x_3^2\}.$$
$$w(\phi_j)=\{0,6,3,3,2,8,5,5,4\}.$$

4.

$$P^{(1)}=diag(s_2,1,1,1,s_2,1,1,1,0)$$

$Q=diag(1,s_2,1,1,1,s_2,1,1,1), \nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=2, \nu_5=1$. $V=diag(2,2,2,2,2,2,2,2,1)$
5.

$$\Delta(s)=s_2^3(s_1^2-4s_2^2)^4.$$

Le cas Z_{10}.

0.

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &=& x_1^2+x_2x_3^2 &=& 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &=& x_2^2+x_3^3 &=& 0 \end{cases}$$

1.

$$w(x_1)=7, w(x_2)=6, w(x_3)=4, p_1:=w(f_1)=14, p_2:=w(f_2)=12, w(dx_1dx_2dx_3)=17.$$

2.

$$F=\tilde{\omega_j}=\{3x_2dx_3dx_1+2x_3dx_1dx_2, x_1dx_2dx_3+x_3dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1, dx_1dx_2, dx_3dx_1,$$

$$x_1x_2dx_2dx_3+x_2x_3dx_1dx_2, 3x_2x_3dx_3dx_1+2x_3^2dx_1dx_2, 2x_3^2dx_3dx_1+x_2dx_1dx_2, dx_2dx_3, x_3dx_2dx_3\}.$$

3.

$$\Phi=\{1, x_3^3, x_2x_3, x_3^2, x_2, x_2x_3^3, x_3, x_2x_3^2, x_1, x_1x_3\}.$$

$$w(\phi_j)=\{0,12,10,8,6,18,4,14,7,11\}.$$

4.

$$P^{(1)}=diag(6s_2,3,2,3,2,3,6s_2,7,0,0)$$

$Q=diag(1,s_1,1,1,1,s_1,1,s_2,1,1), \nu_1=8, \nu_2=\nu_3=1$. $V=diag(7,2,1,2,1,2,7,2,1,1)$

5.

$$\Delta(s)=s_1^2s_2^4(7^7s_1^6-2^83^3s_2^7).$$

3 Les spectres du système de Gauss-Manin

Pour les singularités simples SISIC, on peut discerner les informations topologiques sur la singularité à partir des systèmes (1.10.1) et (1.10.2). Nous formulons ce fait comme suivant.

3.1

Théorème 3.1 *1. Le système de Gauss-Manin pour* $\mathbf{I}_\Phi$ *associées aux singularités isolées simples d'intersection complète de courbe espace s'écrit comme suivant,*

$$P'^{(1)}(s_1)(s_1id_\mu\frac{\partial}{\partial s_1}-\frac{1}{p_1}L_\Phi)\mathbf{I}_\Phi=\frac{p_2}{p_1}s_2P'^{(2)}(s_2)\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_\Phi, \tag{3.1.1}$$

où $P'^{(1)}(s_1)$*, une matrice diagonale, et* $P'^{(2)}(s_2)$*, une matrice diagonalisable.*

$$\frac{1}{p_1}L_\Phi=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_\mu\}, \lambda_j=\frac{w(\psi_j)}{p_1}.$$

D'une façon analogue:

$$P'^{(2)}(s_2)(s_2id_\mu\frac{\partial}{\partial s_2}-\frac{1}{p_2}L_\Phi)\mathbf{I}_\Phi=\frac{p_1}{p_2}s_1P'^{(1)}(s_1)\frac{\partial}{\partial s_2}\mathbf{I}_\Phi. \tag{3.1.2}$$

2.(la symétrie des spectres). Si on range l'ensemble des rationnels $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_\mu\}$ *par l'ordre croissante c.à.d.* $\{\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_\mu\}$ *il existe certain* $\sigma\in\mathcal{S}_\mu$*, t.q.* $\tilde{\lambda}_i=\lambda_{\sigma(i)}$ *en sorte que* $\tilde{\lambda}_1\le\tilde{\lambda}_2\le\cdots\le\tilde{\lambda}_\mu$*, alors il existe un nombre rationel* $\tilde{\lambda}_0$ *tel que*

$$\tilde{\lambda}_0-\tilde{\lambda}_i=\tilde{\lambda}_{\mu-i}-\tilde{\lambda}_0, \quad 1\le i\le\mu.$$

Définition
Nous appelons les rationnels $\{\tilde{\lambda_1}, \cdots, \tilde{\lambda_\mu}\} \in \frac{1}{p_1}\mathbf{Z}_{\geq 0}$ les spectres du système de Gauss-Manin (3.1.1). D'une façon analogue, $\{\frac{p_1}{p_2}\tilde{\lambda_1}, \cdots, \frac{p_1}{p_2}\tilde{\lambda_\mu}\} \in \frac{1}{p_2}\mathbf{Z}_{\geq 0}$ les spectres du système (3.1.2).

Remarque 1 La propriété de symétrie des spectres de la structure de Hodge mixte a été démontrée par W.Ebeling et J.Steenbrink [9]. Les calculs concrèts ont été achevés par ce dernier pour les singularités isolées unimodales d'intersection complète [23].

3.2 Démonstration
1. D'abord on observe la possibilité d'étendre la connexion de Gauss-Manin sur un module plus grand que F. On se permet de regarder un module $F' = F[\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}]$ au lieu de F, et choisir sa base $\tilde{\omega_i}'$, $(1 \leq i \leq \mu)$ de telle sorte que la relation suivante analogue à (1.10.5) ait lieu pour $\mathbf{I}_{F'} = (\int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega}_1'), \cdots, \int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega}_\mu'))$,

$$\mathbf{I}_{F'} = (p_1 s_1 P'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P'^{(2)}(s_2))\mathbf{I}_\Phi. \tag{3.2.1}$$

Pour voir cela, on définit les formes $\tilde{\omega_i}'$, comme suivant:

$$\tilde{\omega_i}' \quad = \quad \frac{\tilde{\omega}_i}{f_1^{\eta_i} f_2^{\delta_i}} \;\text{ si }\; \frac{P_{i,i}^{(1)}(s)}{s_1^{\eta_i} s_2^{\delta_i}} \in \mathbf{C}[s_1, s_1^{-1}], \text{et } \frac{P_{i,j}'^{(2)}(s)}{s_1^{\eta_i} s_2^{\delta_i}} \in \mathbf{C}[s_2, s_2^{-1}], \eta_i, \delta_i = 0, 1, 2, \cdots.$$

Nous nous serverons de notations

$$P'^{(1)}(s_1) = diag(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \cdots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu}) \times P^{(1)}(s_1, s_2),$$

$$P'^{(2)}(s_2) = diag(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \cdots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu}) \times P^{(2)}(s_1, s_2).$$

Cette opération est faisable pour toutes les $P^{(1)}, P^{(2)}$ calculées dans §2. En bref, on arrive à l'expression (3.2.1), si on multiplie la matrice $diag(s_1^{-\eta_1} s_2^{-\delta_1}, \cdots, s_1^{-\eta_\mu} s_2^{-\delta_\mu})$ du côté gauche à (1.10.5). On obtient par une manière analogue à (1.6.1),

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_{F'} = L_{F'} P'^{(1)}(s_1)\mathbf{I}_\Phi, \tag{3.2.2}$$

où $L_{F'} = diag(\ell_1', \cdots, \ell_\mu')$.
D'autre part, ayant différentié l'expression (3.2.1), on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\int_{\gamma(s)} i_E(\tilde{\omega_i}') = \sum_{j=1}^{\mu}(p_1 P_{ij}'^{(1)} + p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} P_{ij}'^{(1)}) I_{\phi_j} + \sum_{j=1}^{\mu}(p_1 s_1 P_{ij}'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P_{ij}'^{(2)}(s_2))\frac{\partial}{\partial s_1} I_{\phi_j},$$

c'est à dire,

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_{F'} = (p_1 P'^{(1)}(s_1) + p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} P'^{(1)})\mathbf{I}_\Phi + (p_1 s_1 P'^{(1)}(s_1) - p_2 s_2 P'^{(2)}(s_2))\frac{\partial}{\partial s_1}\mathbf{I}_\Phi, \tag{3.2.3}$$

En suite, on remarque que la relation suivante

$$\tilde{\omega_i'} = \sum_{1 \leq i,j \leq \mu} P_{ij}'^{(1)} \wedge df_1(\frac{\phi_j dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{df_1 \wedge df_2}) - \sum_{1 \leq i,j \leq \mu} P_{ij}'^{(2)} \wedge df_2(\frac{\phi_j dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{df_1 \wedge df_2})$$

signifie la relation entre les éléments de matrices $L_\Phi, L_{F'}$ et $P'^{(1)}$

$$L_{F',i} = \frac{E_*(P_{ij}'^{(1)})}{P_{ij}'^{(1)}} + p_1 + L_{\Phi,j} = \frac{E_*(P_{ij}'^{(2)})}{P_{ij}'^{(2)}} + p_2 + L_{\Phi,j},$$

ici $E_* = p_1 s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + p_2 s_2 \frac{\partial}{\partial s_2}$, le champs d'Euler sur S. Ce dernièr entraîne

$$\sum_{j=1}^{\mu}(-L_{F',i} + p_1 + L_{\Phi,j})P'^{(\ell)}_{ij} + E_*(P'^{(\ell)}_{ij}) = 0, \ell = 1,2.$$

Autrement dit,

$$P'^{(1)}(L_\Phi - L_{F'} + p_1 \bullet id_\mu) + E_*(P'^{(1)}) = 0 \tag{3.2.4}$$

$$P'^{(2)}(L_\Phi - L_{F'} + p_2 \bullet id_\mu) + E_*(P'^{(2)}) = 0 \tag{3.2.5}$$

En somme, (3.2.2), (3.2.3), et (3.2.4) nous mènent à conclure (3.1.1).
La démonstration de (3.1.2) est parallèlle à celle de (3.1.1), en tenant compte de (3.2.5).
2. Nous introduisons ici la notation $|w| := w_1 + w_2 + w_3$ et $|p| = p_1 + p_2$. Puisque $\lambda_j = \frac{1}{p_1}(w(\phi_j) + |p| - |w|)$, il suffit de démontrer la symétrie entre les poids des éléments du module Φ.
On peut déduire de [3], [2], 3.4 que la série de Poincaré $P_\Phi(t)$ du module Φ s'écrit comme suivant:

$$P_\Phi(t) = t^{|p|-|w|} + (1 - t^{|p|-|w|})\frac{(1-t^{p_1})(1-t^{p_2})}{(1-t^{w_1})(1-t^{w_2})(1-t^{w_3})}. \tag{3.2.6}$$

Il est facile à voir que le polynôme $P_\Phi(t)$ a coefficients symétriquement posé avec le centre $t^{|p|-|w|}$.
Q.E.D. Theor.

4 L'expression explicite de la transformée de Mellin de l'intégrale -fibre

Dans cette section, nous essayons d'établir une expression explicite de la transformée de Mellin de l'intégrale - fibre au moyen des invariants topologiques de singularités.

4.1. L'EDF et ses solutions explicites

D'abord on établit les équations de différences finies (EDF) pour la transformée de Mellin $M_{\phi_j}(z_1, z_2)$ de $I_{\phi_j}(s_1, s_2)$:

$$M_j(z_1, z_2) = \int_\gamma I_j(s_1, s_2)(-s_1)^{-z_1}(-s_2)^{-z_2} ds_1 ds_2$$

pour certain γ qui évite les pôles de $I_j(s_1, s_2)$ (on va utiliser la notation $M_j(z)$ et $I_j(s)$ au lieu de $M_{\phi_j}(z_1, z_2)$, $I_{\phi_j}(s_1, s_2)$ pour alléger l'écriture). Il est évident que l'intégrale $M_j(z_1, z_2)$ est bien définie pour $\Re z_1, \Re z_2 >> 0, |\Im z_1|, |\Im z_2| >> 0$ en vue des singularités régulières à tous ses points singulières y compris l'infini de l'équation différentielle satisfaite par les intégrales $I_j(s_1, s_2)$ (voir Théorème 3.1). Cette démarche est bien formulée dans [16] §1, sous le terme de "transformation de Mellin algébrique".
On applique la transformation de Mellin à la relation (3.1.1). Alors l'EDF entre $M_j(z_1, z_2)$ s'en émergent . En terme des η_k, δ_k définis dans §3, 3.2 et ν_k introduit dans §2, elles s'expriment comme suivant:

$$(z_1 + \eta_k + \lambda_k + 1)M_k(z_1 + \eta_k, z_2) = v_k z_1 M_{[k-1]}(z_1 - 1, z_2 + 1 + \delta_k), \tag{4.1.1}$$

où $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \le k \le \nu_1 + \cdots + \nu_{m+1}$, et $[k-1] = k-1$ si $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m < k \le \nu_1 + \cdots + \nu_{m+1}$, et $[k-1] = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{m+1}$ si $k = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$.

L'équation (4.1.1) se déduit du fait que l'intégrale $I_k(s_1,s_2)$, s'attache à l'autre intégrale $I_{k'}(s_1,s_2)$, par une relation non-triviale si et seulement si $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \leq k, k' \leq \nu_1+\cdots+\nu_{m+1}$, i.e. ssi elles sont toutes les deux d'un bloc de taille ν_m. On va représenter par le signe $*$ l'une des singularités simples d'intersection complète de courbe espace i.e. $* = S_\mu, U_\mu, T_\mu, W_\mu, Z_\mu \ (\mu \geq 5)$. Pour chaque singularité $*$, on désigne par d_j la coordonnée du point d'intersection du diagramme de Newton du facteur irréductible du discriminant $\Delta(s)$ avec l'axe $z_j, j=1,2$.
Par récurrence, on obtient de (4.1.1), une EDF pour $M_k(z_1,z_2)$. Quant aux cas S_μ, nous renvoyons à [4].
Lemme 4.1 *Soit $*$ une des singularités de la liste de Giusti (i.e. SISIC courbe espace). Alors pour chaque singularité $*$, la transformée de Mellin $M_k(z_1,z_2)$ de l'intégrale -fibre $I_k(s_1,s_2)$ avec $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \leq k \leq \nu_1+\cdots+\nu_{m+1}$, satisfait à l'EDF suivante:*

$$M_k(z_1+d_1, z_2-d_2) = V_m \prod_{j=k}^{\nu_1+\cdots+\nu_{m+1}} \frac{1}{L(*,k,j;z_1)} \times$$

$$\times \prod_{j=\nu_1+\cdots+\nu_m}^{k-1} \frac{1}{\tilde{L}(*,k,j;z_1)} \times \prod_{j=1}^{\nu_{m+1}} (z_1+j) M_k(z_1,z_2), \tag{4.1.2}$$

où $V_m = \prod_{j=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m+\nu_{m+1}} v_j$, produit des éléments de la matrice diagonale $V = diag(v_1,\cdots,v_\mu)$ de la liste de §2.

$$L(*,k,j;z_1) = z_1+\lambda_j+(j-k)+\delta_{k,j}d_1, \quad k \leq j \leq \nu_1+\cdots+\nu_{m+1},$$

$$\tilde{L}(*,k,j;z_1) = z_1+\lambda_j+(j-k)+\nu+1, \quad \nu_1+\cdots+\nu_m \leq j \leq k-1,$$

avec $\delta_{k,j}$, delta de Kronecker. Les données λ_j, d_1, d_2 sont classées pour chaque singularité $*$ dans la liste de §2.

Pour résoudre l'équation (4.1.2), on prépare un lemme.

Lemme 4.2 *L'équation de différences finies*

$$M(z+\alpha) = c \bullet \prod_{j=1}^{\nu} \frac{(z+\beta_j)}{(z+\gamma_j)} M(z)$$

admet une solution comme suit:

$$M(z) = c^{\frac{z}{\alpha}} \bullet \prod_{j=1}^{\nu} \frac{\Gamma(-\frac{z}{\alpha}-\frac{\gamma_j}{\alpha})\Gamma(-\frac{\beta_j}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{z}{\alpha}-\frac{\beta_j}{\alpha})\Gamma(-\frac{\gamma_j}{\alpha})} g(z),$$

avec une fonction périodique $g(z) = g(z+\alpha)$.

A l'aide du lemme 4.2, on obtient une expression explicite de $M_k(z)$. Avant de formuler le théorème, introduisons la notation $M_{\phi_k,\gamma_q}(z), 1 \leq k, q \leq \mu$ qui correspond à la transformée de Mellin de l'intégrale $I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1,s_2)$ prise le long d'un cycle évanescent γ_q que l'on n'a pas precisé dans (1.8.1):

$$I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1,s_2) = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\partial\gamma_q(s)} \frac{\phi_k dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(f_1-s_1)(f_2-s_2)}.$$

Et

$$M_{\phi_k,\gamma_q}(z_1,z_2) = \int_\gamma I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1,s_2)(-s_1)^{-z_1}(-s_2)^{-z_2} ds_1 ds_2$$

pour certain γ qui évite les pôles de $I_{\phi_k,\gamma_q}(s)$.

Théorème 4.3 *Dans la situation décrite ci-dessus, pour $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \leq k \leq \nu_1+\cdots+\nu_{m+1}$, on a expression suivante:*

$$M_{\phi_k,\gamma_q}(z) = V_m^{\frac{z_1}{d_1}} \times \prod_{j=k}^{\nu_1+\cdots+\nu_{\mu+1}} \Gamma(-\frac{1}{d_1}L(*,k,j,;z_1))$$

$$\times \prod_{j=\nu_1+\cdots+\nu_\mu}^{k-1} \Gamma(-\frac{1}{d_1}\tilde{L}(*,k,j,;z_1)) \times \prod_{j=1}^{\nu_{m+1}} \Gamma(-\frac{1}{d_1}(z_1+j))^{-1} \times (\frac{z_2-\zeta_q}{d_2}+\frac{z_1}{d_1})^{-1} g(z_1), \tag{4.1.3}$$

avec $\zeta_q \geq 0, 1 \leq q \leq \mu$, et $\zeta_1 = 0$. Ici $g(z_1)$ est une fonction périodique telle que $g(z_1) = g(z_1+d_1)$.

Démonstration Il suffit d'appliquer lemme 4.2 à (4.1.2). Quant à ζ_q, ils sont déterminés par l'équation determinante pour les exposants caracteristiques à $s=0$ du système (1.10.1), (1.10.2) (la méthode de Frobenius) [5]. Il est facile à voir que la série des exposants cractéristiques ζ_q contient une série des entiers $\zeta_q = 0, 1, 2, \cdots$. **Q.E.D.**
Nous notons par $supp(M_{\phi_k,\gamma_q})(z_1,z_2)$ les points de $\frac{1}{d_2}\mathbf{Q}_{z_1} \times \frac{1}{d_1}\mathbf{Q}_{z_2}$ qui se representent les points de croisements des droites polaires

$$\frac{1}{d_1}L(*,k,j,;z_1), \frac{1}{d_1}\tilde{L}(*,k,j,;z_1), d_1z_2+d_2z_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

En liaison avec Thórème 3.1, nous remarquons que

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

C'est les points de $suppM_{\phi_k,\gamma_q}(z_1,z_2)$ qui vont éssentiellement contribuer à la transformation inverse de Mellin de $M_{\phi_k,\gamma_q}(z_1,z_2)$ qui nous permet de récupérer $I_{\phi_k,\gamma_q}(s_1,s_2)$. On discerne la propriété suivante de cet ensemble, si on fait attention à l'inégalité $\nu_j \leq d_1, j=1,2,...$

Corollaire 4.4 *Pour un cycle évanescent quelconque γ, l'ensemble $supp(M_{\phi_k,\gamma})(z_1,z_2)$ consiste des points de la forme*

$$(\lambda_i+a, \frac{d_2}{d_1}(\lambda_i+b)), \;\; 1 \leq i \leq \mu, \; (a,b) \in \mathbf{Z}^2_{\geq 0}$$

qui sont contenus dans un cône Γ_k

$$\Gamma_k = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2; z_1 \geq -\lambda_k - d_1, \frac{z_1}{d_1}+\frac{z_2}{d_2} \geq 0\}$$

avec le sommet $(-\lambda_k - d_1, \frac{d_2}{d_1}(\lambda_k+d_1))$.

Si on regarde plus précisement la projection $proj_{z_1}(M_{\phi_1,\gamma}(z_1,z_2))$ sur z_1-axe de $supp(M_{\phi_k,\gamma})(z_1,z_2)$, les suites suivantes s'obtiennent:

$$proj_{z_1}(M_{\phi_1,\gamma}(z_1,z_2)) = \{-\lambda_1-d_1, -\lambda_2-1, -\lambda_3-2, \cdots, 1-\nu_1-\lambda_{\nu_1}\} + d_1\mathbf{Z}_{\geq 0},$$

$$proj_{z_1}(M_{\phi_2,\gamma}(z_1,z_2)) = \{-\lambda_2-d_1, -\lambda_3-1, -\lambda_4-2, \cdots, 1-\nu_1-\lambda_1\} + d_1\mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

$\vdots$

$$proj_{z_1}(M_{\phi_k,\gamma}(z_1,z_2)) = \{-\lambda_k-d_1, -\lambda_{k+1}-1, -\lambda_{k+2}-2, \cdots, 1-\nu_m-\lambda_{[k-1]}\} + d_1\mathbf{Z}_{\geq 0},$$

pour k t.q. $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \leq k \leq \nu_1+\cdots+\nu_{m+1}$. La notation $[k-1]$ est la reprise de celle au début de la section.

Remarque 2 Il est propice d'évoquer ici le travail [24] de A.N.Varchenko qui a défini, dans le cas des singularités isolées d'hypersurface associées au germe $f : (\mathbf{C}^n_x, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, le poids d'une forme holomorphe ω de la façon suivante:

$$\alpha(\omega) = inf\{\alpha \in \mathbf{Q}; \frac{1}{t^\alpha}(\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}) \to 0 \text{ lorsque } t \to 0\}$$

$$= min\{\alpha \in \mathbf{Q}; \text{il existe tel } \ 0 \leq k \leq n-1 \text{ que } A_{k,\alpha} \neq 0$$

$$\text{du développement asymptotique } \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\alpha \in L(\lambda)} \sum_{0 \leq k \leq n-1} A_{k,\alpha} t^\alpha (\log\ t)^k\},$$

où $\gamma(t)$, un cycle evanescent lorsque $t \to 0$, $L(\lambda) = \{\beta > -1; exp(-2\pi i \beta) = \lambda\}$,
$\Lambda = \{$ les valeurs propres λ de la monodromie de Picard-Lefschetz de la singularité $f(x) = 0$ $\}$.
Il est facile à voir que dans notre situation le bord du cône Γ_k introduit dans Corollaire 4.4 correspond à $\alpha(\omega)$ de Varchenko.
A juste titre, on pourrait donner une autre définition des spectres du système de Gauss-Manin au lieu de celle de §3.

Définition
Les spectres du sytème (3.1.1) consistent des données suivantes: la partie de l'ensemble des droites $\{z_1 = -\lambda_k - d_1, z_2 = \frac{d_2}{d_1}(\lambda_k + d_1), d_1 z_2 + d_2 z_1 = 0\}$ contenue dans le bord de Γ_k.

Remarque 3 Il vaut remarquer que les reseaux de l'ensemble $supp(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$ donnent naissance, à quelques details près, à la bonne κ-filtration (κ =2) introduite par C.Sabbah [20], [21]. Donc il suffit d'appliquer sa Proposition 1.2. de [21] à cette bonne filtration, pour voir l'existence de l'ensemble $\mathcal{L}_1$ de formes linéaires et d'un polynôme à une variable $b_{L,1}$ tels que

$$[\prod_{L \in \mathcal{L}_1} b_{L,1}(L(s))] f_1^{s_1} f_2^{s_2} = P_1(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, s_1, s_2) f_1^{s_1+1} f_2^{s_2},$$

pour les polynômes f_1, f_2 traités dans cet article. Ici nous avons comme l'ensemble $\mathcal{L}_1$,
$\mathcal{L}_1 = \{s_1 + \lambda_k + d_1 - \alpha, d_1 s_2 + d_2 s_1 - \gamma\}$, avec certains $\alpha, \gamma \in \mathbf{Z}_{\geq \mathbf{0}}$, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu$ les spectres du système de Gauss-Manin. Il est naturel de considérer le polynôme $\prod_{L \in \mathcal{L}_1} b_{L,1}(L(s))$ ci-dessus comme une $b-$fonction en 2-variables.
Quant à l'EDF correspondant aux décalages en s_2, elle s'obtient d'une façon analogue en partant du système (3.1.2).

$$[\prod_{L \in \mathcal{L}_2} b_{L,2}(L(s))] f_1^{s_1} f_2^{s_2} = P_2(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, s_1, s_2) f_1^{s_1} f_2^{s_2+1},$$

où $\mathcal{L}_2 = \{s_2 - \frac{d_2}{d_1}\lambda_k - \beta, d_1 s_2 + d_2 s_1 - \gamma\}$, avec certains$\beta, \gamma \in \mathbf{Z}_{\geq \mathbf{0}}$. Les notations reprises celles de $\mathcal{L}_1$.

4.2. L'intégrale- fibre en tant qu'une fonction hypergeometrique généralisée
D'ailleurs il serait utile de voir le résultat du Théorème 4.3 en liaison avec la notion des fonctions hypergeometriques généralisées au sens de Mellin-Barnes-Pincherle [5], [18]. Par cette formulation FHG de Gauss s'exprime par l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 - i\infty}^{z_0 + i\infty} (-s)^z \frac{\Gamma(z+\alpha)\Gamma(z+\beta)\Gamma(-z)}{\Gamma(z+\gamma)} dz, \ \ -\Re\alpha, -\Re\beta < z_0.$$

Pour assurer la convergence de la transformée de Mellin inverse de $M_{\phi_k,\gamma}(z)$ de (4.1.3):

$$\int_{\Pi}(-s_1)^{z_1}(-s_2)^{z_2}M_{\phi_k,\gamma}(z)dz_1dz_2, \tag{4.2.1}$$

on vérifie que l'EDF (4.1.2) admet la solution $M_{\phi_k}(z)$ telle que pour certain $\epsilon > 0$,

$$\mid M_{\phi_k}(z) \mid < C_k exp(-\epsilon \mid Im\ z \mid) \text{ lorsque } Im\ z \to \infty, \text{ dans un secteur d'ouverture } < 2\pi.$$

Pour voir l'existence d'une solution d'EDF avec la décroissance exponentielle, on parcourt à une astuce selon Nörlund [18]. Son technique consiste en choix du facteur $g(z_1)$ de (4.1.3) qui doit être une fonction rationelle avec le périod d_1. Si on note $z = -\frac{z_1}{d_1}$, notre analyse de (4.2.1) est reduite à l'étude de l'intégrale

$$\int_{z_0-i\infty}^{z_0+i\infty}(-s)^z g(z)\prod_{j=1}^{\nu}\frac{\Gamma(z+\alpha_j)}{\Gamma(z+\rho_j)}dz. \tag{4.2.2}$$

Lemme 4.5 *Si on choit une des fonctions suivantes $g^+(z)$ (resp. $g^-(z)$) en tant que $g(z)$, alors l'intégrand de (4.2.2) est de décroissance exponentielle lorsque $Im\ z$ tend vers ∞ dans le secteur $0 \le arg\ z < 2\pi$, (resp. $-\pi \le arg\ z < \pi$.)*

$$g^{\pm}(z) = 1 + e^{\pm 2\pi i\beta_\nu}\prod_{j=1}^{\nu}\frac{sin 2\pi(z+\alpha_j)}{sin 2\pi(z+\rho_j)},$$

avec $\beta_\nu = -1 + \sum_{j=1}^{\nu}(\rho_j - \alpha_j)$

Démonstration
Il suffit de se rappeler

$$\prod_{j=1}^{\nu}\frac{\Gamma(x+iy+\alpha_j)}{\Gamma(x+iy+\rho_j)} \to const. \mid y \mid^{-(\beta_\nu+1)}$$

lorsque $y \to \pm\infty$. Ici, on se sert de la formule de Binet:

$$log\Gamma(z+a) = \log\Gamma(z) + a\log z - \frac{a-a^2}{2z} + \mathcal{O}(\mid z \mid^{-2})$$

si $\mid z \mid >> 1$, (Whittaker-Watson, Chapter XII, Example 44). Le facteur $\mid s^{-(x+iy)} \mid = r^{-x}e^{\theta y}$, pour $s = re^{i\theta}$ donne la contribution exponentiellement décroissante dans chaque occasion. **Q.E.D.**
Ainsi on a démontré la convergence de l'expression (4.2.1) pour certain Π qui est obtenu comme un produit du chemin d'intégration dans $\mathbf{C}_{z_1}$ et celui dans $\mathbf{C}_{z_2}$.

Proposition 4.6 *L'intgrale- fibre $I_{\phi_k,\gamma_q}(z)$ des SISIC prise le long d'un cycle évanescent γ_q est une fonction hypergeometrique generalisée au sens de Mellin-Barnes-Pincherle définie par l'expression suivante*

$$\int_{\Pi}(-s_1)^{z_1}(-s_2)^{z_2}M_{\phi_k,\gamma_q}(z)dz_1dz_2,$$

pour $M_{\phi_k,\gamma_q}(z)$ de (4.1.3) avec $g(z_1) = g^+(-\frac{z_1}{d_1})$ introduit dans Lemme 4.5

5 Des cas unimodaux et des autres cas accessibles

Malgré le caractère restrictif de calculs faits dans les sections précedentes, nos démarches s'appliquent aux autres cas qui contiennent des séries infinies.

5.1. Le cas non-résonant.

On regarde l'application quasihomogène suivante,

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^{q_1}+x_2^{q_2}+x_3^{q_3} &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2 &= 0 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où on impose la condition que les poids w_i et w_j ($1 \leq i,j \leq 3$) soient premiers entre eux. Nous l'appelons le cas non-résonant. Selon la notation de §2, $p_1 = q_1w_1 = q_2w_2 = q_3w_3, p_2 = w_1+w_2$. Pour voir l'analogie de cas (5.1.1) avec les cas de singularités isolées simples de courbe espace, on établit l'enoncé suivant:

Lemme 5.1 *Pour (f_1,f_2) de (5.1.1) sous l'hypothèse sur les poids w_1,w_2,w_3 comme ci-dessus, les matrices $P^{(1)},P^{(2)}$ définies dans Proposition 1.2 sont diagonalisables. Plus précisement, pour chaque $1 \leq j \leq \mu$, il existe au plus unique j_1 et j_2 t.q.*

$$\tilde{\omega_j} \wedge df_2 = P^{(1)}_{jj_2}\phi_{j_2}dx_1\wedge dx_2 \wedge dx_3 \tag{5.1.2}$$

$$\tilde{\omega_j} \wedge df_1 = P^{(2)}_{jj_1}\phi_{j_1}dx_1\wedge dx_2 \wedge dx_3 \tag{5.1.3}$$

avec $P^{(1)}_{jj_2} \neq 0, P^{(2)}_{jj_1} \neq 0$.

Démonstration

Nous faisons comparaison entre les poids des termes. On démontre le cas (5.1.2), puisque le cas (5.1.3) est démontré d'une pareille manière.

S'il existe un autre terme à part de ϕ_{j_2} (disons $\phi_{j'_2}$),qui participe à la décomposition (5.1.2), leurs poids satisfont aux relations suivantes.

$$\begin{aligned} \ell_j + p_2 &= w(P^{(1)}_{jj_2}) + w(\phi_{j_2}) + w_1+w_2+w_3 \\ &= w(P^{(1)}_{jj'_2}) + w(\phi_{j'_2}) + w_1+w_2+w_3. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

A remarquer que $w(P^{(1)}_{jj_2}), w(P^{(1)}_{jj'_2}) \in p_1\mathbf{Z}_{\geq 0}+p_2\mathbf{Z}_{\geq 0}$. Donc la différence des poids de deux formes $w(\phi_{j_2})$ et $w(\phi_{j'_2})$ doit appartenir au reseau des entiers $p_1\mathbf{Z}+p_2\mathbf{Z}$.

Maintenant on se souvient de la formule de la série de Poincaré du module Φ, (3.2.6). Pour le cas (5.1.1), elle devient,

$$P_\Phi(t) =$$

$$= t^{(q_3-1)w_3} + (1+t^{w_3}+\cdots+t^{(q_3-2)w_3})(1+t^{w_2}+\cdots+t^{q_2w_2}+1+t^{w_1}+\cdots+t^{(q_1-1)w_1}). \tag{5.1.5}$$

De la formule (5.1.5), il est facile à voir que

$w(\phi_{j_2}) - w(\phi_{j'_2}) \notin p_1\mathbf{Z}_{\geq 0}+p_2\mathbf{Z}_{>0} = q_iw_i\mathbf{Z}_{\geq 0}+(w_1+w_2)\mathbf{Z}_{>0}$. Cela veut dire que $\frac{P^{(1)}_{jj_2}}{P^{(1)}_{jj'_2}} \notin s_2\mathbf{C}[s]$ si non $P^{(1)}_{jj'_2} = 0$. Autrement dit, si on trouve deux indices j_2, j'_2 pour lesquelles (5.1.4) tiennent, alors elles sont forcément de la forme

$$w(\phi_{j_2}) = kw_3+p_1, w(\phi_{j'_2}) = kw_3, 0 \leq k \leq q_3-1,$$

en vue de (5.1.5). Cette relation entraine que $P^{(1)}_{jj_2} = cf_1 P^{(1)}_{jj'_2}$ pour certain constant c.

$$\begin{aligned}\tilde{\omega_j} \wedge df_2 &= (P^{(1)}_{jj'_2}\phi_{j'_2} + P^{(1)}_{jj_2}\phi_{j_2})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= P^{(1)}_{jj'_2}(\phi_{j'_2} + cf_1\phi_{j_2})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Il vaut remarquer ici que le terme gauche est un monôme pour les singularités définies par (5.1.1), par contre le terme droit doit être essentiellement polynomial si non $c = 0$. Donc il faut qu'un seul terme $P^{(1)}_{jj'_2}\phi_{j'_2}$ prenne part à la décomposition (5.1.6). Cela achève la démonstration de la validité de (5.1.2).**Q.E.D. Lemm.**

A remarquer ici que la condition de non-résonance a été essentiellement utilisée pour que le terme gauche de (5.1.6) soit monomial.

5. 2. La liste de Wall et d'Aleksandrov

Pour les singularités d'intersection complète pas nécessairement simples, les résultats analogues aux Théorèmes 3.1, 4.3 et 4.4 tiennent. Notamment la série des singularités unimodales de la liste de Wall [26]:

$P_{k,\ell}, k \geq \ell \geq 2, \mu = k + \ell + 1,$

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} f_1(x_1,x_2,x_3) &=& x_1^k + x_2^\ell + x_3^2 &=& 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &=& x_1x_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

$G_{2m+6}, m \geq 3$

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} f_1(x_1,x_2,x_3) &=& x_1^2 + x_2x_3^m &=& 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &=& x_2^2 + x_3^3 &=& 0 \end{array} \right.$$

$G_{2m+3}, m \geq 3$

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} f_1(x_1,x_2,x_3) &=& x_1^2 + x_3^m &=& 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &=& x_2^2 + x_3^3 &=& 0 \end{array} \right.$$

On discerne la structure du module Φ analogue à celle de cas S_μ, T_μ (pour $P_{k,\ell}$) et de cas Z_{10} (G_{2m+3} et G_{2m+6}). C'est à dire:

$P_{k,\ell}$

$$F = \tilde{\omega_j} = \{dx_1dx_2, 2\ell x_1dx_2dx_3 + 2kx_2dx_3dx_1 + k\ell x_3dx_1dx_2,$$

$$\overbrace{dx_2dx_3, x_2dx_2dx_3, \cdots, x_3^{\ell-2}dx_2dx_3}^{\ell-1}, \overbrace{dx_3dx_1, x_1dx_3dx_1, \cdots, x_1^{k-1}dx_3dx_1}^{k}\}.$$

$$w_1 = 2\ell, w_2 = 2k, w_3 = k\ell, p_1 = 2k\ell, p_2 = 2(k+\ell)w.$$

$$\Phi = \{1, x_1, \cdots, x_1^{k-1}, x_2, \cdots, x_2^\ell, x_3\}.$$

$$w(\phi_j) = \{0, 2\ell, \cdots, 2(k-1)\ell, 2k, \cdots, 2k\ell, k\ell\}.$$

G_{2m+6}

$$F = \tilde{\omega_j} = \{dx_2dx_3, x_3dx_2dx_3, dx_3dx_1, dx_1dx_2, x_3dx_3dx_1,$$

$$\overbrace{3x_2dx_3dx_1 + 2x_3dx_1dx_2, x_3(3x_2dx_3dx_1 + 2x_3dx_1dx_2), \cdots, x_3^{m-2}(3x_2dx_3dx_1 + 2x_3dx_1dx_2)}^{m-1},$$

$$\overbrace{x_2(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2), x_2x_3(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2), \cdots, x_2x_3^{m-2}(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2)}^{m-1},$$

$$mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2, x_3(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2), mx_3^2dx_3dx_1+x_2dx_1dx_2\}.$$

$$w_1 = 2m+3, w_2 = 6, w_3 = 4, p_1 = 2(2m+3), p_2 = 12.$$

$$\Phi = \{1, x_3, x_3^2, \cdots, x_3^{m+1}, x_2, x_2x_3 \cdots, x_2x_3^{m+1}, x_1, x_1x_3\}.$$

$$w(\phi_j) = \{4i, 6+4i\ (0 \le i \le m+1), 2m+3, 2m+7\}.$$

G_{2m+3}

$$F = \tilde{\omega_j} = \{dx_2dx_3, x_3dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_3dx_1dx_2, x_3^2dx_1dx_2, \overbrace{dx_3dx_1, x_3dx_3dx_1, \cdots, x_3^{m-2}dx_3dx_1}^{m-1},$$

$$\overbrace{mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2, x_3(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2), \cdots, x_3^{m-2}(mx_1dx_2dx_3+2x_3dx_1dx_2)}^{m-1}\}.$$

$$w_1 = m, w_2 = 3, w_3 = 2, p_1 = 2m, p_2 = 6.$$

$$\Phi = \{1, x_3, x_3^2, \cdots, x_3^{m+1}, x_2, x_2x_3 \cdots, x_2x_3^{m-2}, x_1, x_1x_3\}.$$

$$w(\phi_j) = \{2i\ (0 \le i \le m+1), 3+2j\ (0 \le j \le m-2), m, m+2\}.$$

On trouve chez A.G.Aleksandrov[1] une série des singularités U_{2m+1} dont le système de Gauss-Manin peut être calculé d'une façon analogue au cas U_7, U_9 :

$U_{2m+1}, m \ge 5$

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2 + x_3^m &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$F = \tilde{\omega_j} = \{dx_2dx_3, dx_1dx_2, x_3^{m-1}dx_3dx_1 + x_1dx_1dx_2, \overbrace{dx_3dx_1, x_3dx_3dx_1, \cdots, x_3^{m-2}dx_3dx_1}^{m-1},$$

$$\overbrace{x_3dx_2dx_3+x_1dx_3dx_1, x_3(x_3dx_2dx_3+x_1dx_3dx_1), \cdots, x_3^{m-2}(x_3dx_2dx_3+x_1dx_3dx_1)}^{m-1}\}.$$

$$w_1 = m+1, w_2 = 2m-1, w_3 = 3, p_1 = 3m, p_2 = 2m+2.$$

$$\Phi = \{1, x_3, x_3^2, \cdots, x_3^{m-1}, x_1, x_1x_3 \cdots, x_1x_3^{m-1}, x_2\}.$$

$$w(\phi_j) = \{3i, m+1+3i\ (0 \le i \le m-1), 2m-1\}.$$

Par un calcul pareil à celui des §2, §3, on obtient une analogie aux théorèmes 3.1 et 4.4. On reprend la notation

$$I_{\phi_k,\gamma}(s) = (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\partial\gamma(s)} \frac{\phi_k dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(f_1-s_1)(f_2-s_2)}.$$

$$M_{\phi_k,\gamma}(z_1,z_2) = \int_{\Pi} I_{\phi_k,\gamma}(s_1,s_2)(-s_1)^{-z_1}(-s_2)^{-z_2} ds_1 ds_2$$

pour certain Π qui évite les pôles de $I_{\phi_k,\gamma}(s)$, et $\mathbf{I}_\Phi = (I_{\phi_1,\gamma}(s_1,s_2), \cdots, I_{\phi_\mu,\gamma}(s_1,s_2))$. En somme, le calcul des cas traités dans 5.1 et 5.2 donne le suivant.

Théorème 5.2 *1. Le système de Gauss-Manin pour $\mathbf{I}_\Phi$ associées aux singularités isolées d'intersection complète de courbe espace des cas non-résonants (5.1.1), $P_{k,\ell}, G_{2m+6}, G_{2m+3}$ de la liste de Wall et U_{2m+1} de la liste d'Aleksandrov s'écrit comme suivant:*

$$P'^{(1)}(s_1)(s_1 id_\mu \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{1}{p_1} L_\Phi)\mathbf{I}_\Phi = \frac{p_2}{p_1} s_2 P'^{(2)}(s_2) \frac{\partial}{\partial s_1} \mathbf{I}_\Phi, \tag{5.2.1}$$

où $P'^{(1)}(s_1)$: une matrice diagonale, et $P'^{(2)}(s_2)$: une matrice diagonalisable.

$$\frac{1}{p_1} L_\Phi = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu\}, \lambda_j = \frac{w(\phi_j) + w_1 + w_2 + w_3 - p_1 - p_2}{p_1}.$$

D'une façon analogue:

$$P'^{(2)}(s_2)(s_2 id_\mu \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{1}{p_2} L_\Phi)\mathbf{I}_\Phi = \frac{p_1}{p_2} s_1 P'^{(1)}(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \mathbf{I}_\Phi, \tag{5.2.2}$$

avec les spectres $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_\mu\}$ possédant la propriété de symétrie.
2. Pour un cycle évanescent quelconque γ des singularités ci-dessus l'ensemble $supp(M_{\phi_k,\gamma})(z_1, z_2)$ consiste des points de la forme

$$(\lambda_i + a, \frac{d_2}{d_1}(\lambda_i + b)), \;\; 1 \leq i \leq \mu, \; (a, b) \in \mathbf{Z}^2_{\geq 0}$$

qui sont contenus dans un cône Γ_k

$$\Gamma_k = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; z_1 \geq -\lambda_k - d_1, \frac{z_1}{d_1} + \frac{z_2}{d_2} \geq 0\}$$

avec le sommet $(-\lambda_k - d_1, \frac{d_2}{d_1}(\lambda_k + d_1))$.

Démonstration On se rappelle que l'argument de la démonstration du Théorème 3.1 s'appuyait sur (**a**) les éléments des matrices $P^{(1)}, P^{(2)}$ sont monomiaux,(**b**) la possibilité de diagonaliser les matrices $P^{(1)}, P^{(2)}$ qui ont été définies par (1.4.1). Donc pour obtenir l'énoncé 1, il suffit de prouver (**a**) et (**b**). L'énoncé 2 se déduit de l'énoncé 1 en retraçant l'argument de §4.
(**a**) D'abord on se souvient de la série de Poincaré $P_F(t)$, (1.2.3) au cas $n = 1, k = 2, m = 3$,

$$P_F(t) = (1 - t^{p_1})(1 - t^{p_2}) \frac{(t^{w_1} + t^{w_2} + t^{w_3} - t^{p_1} - t^{p_2} - 1)}{(1 - t^{w_1})(1 - t^{w_2})(1 - t^{w_3})} + 1. \tag{5.2.3}$$

Cela et la relation (1.4.1) veulent dire

$$w(P^{(1)}_{ij}(s)) = p_2 + w(\tilde{\omega_i}) - w(\phi_j) - |w| \leq 2(|p| - |w|) - w(\phi_j). \tag{5.2.4}$$

D'autre part, pour que $P^{(1)}_{ij}(s)$ consiste de plusiers monômes, il faut qu'il existe telles paires des vecteurs entiers $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') \in \mathbf{Z}^2_{\geq 0}$ que

$$w(P^{(1)}_{ij}(s)) = \alpha p_1 + \beta p_2 = \alpha' p_1 + \beta' p_2.$$

Pour les singularités de 5.1, 5.2 ci-dessus, il est impossible de trouver telles paires des vecteurs entiers positifs en vue de (5.2.4). Quant à la matrice $P^{(2)}$ l'argument pareil marche.
(**b**). Le lemme 5.1 a déjà démontré la possibilité de diagonaliser les matrices $P^{(1)}, P^{(2)}$ aux cas non-resonants. Afin de la prouver aux cas unimodaux de 5.2, on retrace l'argument du lemme 5.1.

Plus précisement, il suffit de démontrer la validité de la décomposition comme (5.1.1) à laquelle en fait un seul terme prend part.
Si

$$\tilde{\omega_j} \wedge df_2 = (P^{(1)}_{jj_2}\phi_{j_2} + P^{(1)}_{jj'_2}\phi_{j'_2})dx, \tag{5.2.5}$$

alors il est evident qu'il n'y aurait que au plus deux termes à droite de (5.2.5), car $\tilde{\omega_j}$ consiste de deux termes exceptés la forme $2\ell x_1 dx_2 dx_3 + 2k x_2 dx_3 dx_1 + k\ell x_3 dx_1 dx_2$ dont la multiplication avec df_2 est égal à $f_2 dx$. On peut classifier les formes $\tilde{\omega_j}$ de F en 3 catégories. , (1) monômes, (2) binômes en séries, i.e. il existe une forme $\tilde{\omega} \in F$ t.q. $x_3\tilde{\omega}, \cdots, x_3^{N-2}\tilde{\omega} \in F$ où $N = m$ des singularités $G_{2m+3}, G_{2m+6}, U_{2m+1}$, $N = k$ soit $= \ell$ des singularités $P_{k,\ell}$, (3) binômes hors séries. Il est evident que la droite de (5.2.5) ne contient qu'un terme au cas (1). Quant au cas (2), si $\tilde{\omega} \in F$ et (5.2.5) se décompose en binômes, alors $w(\phi_{j_2}) = w(\phi_{j'_2})$ et $P^{(1)}_{jj_2}, P^{(1)}_{jj_2} \in \mathbf{C}$, car sinon $P^{(1)}_{jj'_2}$ dependrait soit de f_1 soit de f_2 qui conduirait à l'existence de plus que trois monômes à droite de (5.2.5). Puisque $\tilde{\omega}$ est la base d'une série, (5.2.5) donne naissance aux relations,

$$x_3^i\tilde{\omega_j} \wedge df_2 = (P^{(1)}_{jj_2}x_3^i\phi_{j_2} + P^{(1)}_{jj'_2}x_3^i\phi_{j'_2})dx, 1 \leq i \leq N-2$$

qui signifie que $x_3^i\phi_{j_2}$ ainsi que $x_3^i\phi_{j'_2}$ est un élément de l'espace Φ. Un regard fugace sur les poids de Φ nous convaincs qu'il n'existe pas de telles paires chez Φ. Quant au cas (3) assez rare (G_{2m+6}, U_{2m+1} possédent tel élément unique), il est possible de la verifier comme cas individu. Q.E.D.

6 Nombre de Hodge des fibres de Milnor

On revient à la situation de §0 et §1. Soit X_s un fibre de Milnor de SIIC courbe espace pour $(s_1, s_2) \in S$ hors son discriminant. On regarde une variété projective $\bar{X}_s \subset \mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1)$ associée à X_s :

$$\bar{X}_s := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1); f_1(x_1, x_2, x_3) = s_1 u^{p_1}, f_2(x_1, x_2, x_3) = s_2 u^{p_2}\}.$$

C'est un clôture de $\bar{X}_s$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}(w_1, w_2, w_3, 1)$ avec des poids comme (1.1.1). On prend le poids de variable u égal à 1. A consulter [8], [7] pour la projectivisation d'une SIIC.
On note avec $p_g(\bar{X}_s)$ le genre geométrique de courbe $\bar{X}_s$ qui doit égaler au rang du groupe de cohomologie $H^1(\bar{X}_s, \mathcal{O}_{\bar{X}_s})$. Le genre geométrique du fibre de Milnor est un des invariants importants de la singularités X_0. On a une expression assez simple de cet invariant au moyen des spectres du système de Gauss-Manin.
Nous nous rappelons ici que les nombres de Hodge $h^{pq}(X_s) = Gr^p_F Gr^W_{p+q} H^n(X_s)$ (et sa série de Poincaré) eux même ont été calculés par F.Hirzebruch pour le cas de SIIC homogène [15], §22 et par H.Hamm pour le cas de SIIC quasihomogène de dimension positive quelconque [14].
Théorème 6.1 *Pour les singularités traitées dans* §3 *et* §5, *on a les formules suivantes*

$$h^{01}(X_s) = h^{10}(X_s) = p_g(\bar{X}_s) = \sharp\{i; \lambda_i < 0\} \tag{6.1}$$

$$h^{11}(X_s) = p_g(X_0) = \sharp\{i; \lambda_i = 0\} \tag{6.2}$$

où $\lambda_i, 1 \leq i \leq \mu$ *sont les spectres du système de Gauss-Manin (3.1.1), (5.2.1).*

Démonstration i) Démonstration de (6.1). Tout d'abord, définissons deux $\mathbf{C}-$modules $A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$ des polynômes sur X_0 et $\bar{X}_s$ comme suivants,

$$A_{X_0} := \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]/(f_1, f_2), A_{\bar{X}_s} = \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3, u]/(f_1 - s_1 u^{p_1}, f_2 - s_2 u^{p_2}).$$

Ces deux modules $A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$ sont fournis de graduation naturelle mis en accord avec le poids $w(g)$ de $g \in A_{X_0}, A_{\bar{X}_s}$. Ici

$$(E + u\frac{\partial}{\partial u})g(x_1, x_2, x_3, u) = w(g)g(x_1, x_2, x_3, u)$$

avec le champs de Euler introduit par (1.1.2). On peut regarder les séries de Poincaré $P_{A_{X_0}}(t), P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$ définies par une graduation de poids :

$$P_{A_{X_0}}(t) = \sum_{a_d = \sharp\{g(x_1,x_2,x_3) \in A_{X_0}; w(g)=d\}} a_d t^d,$$

$$P_{A_{\bar{X}_s}}(t) = \sum_{a_d = \sharp\{h(x_1,x_2,x_3,u) \in A_{\bar{X}_s}; w(h)=d\}} a_d t^d.$$

Selon Dolgachev [8] 3.4.4, elles satisfont à la relation suivante,

$$P_{A_{X_0}}(t) = (1-t)P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$$

où $P_{A_{X_0}}(t) = \frac{(1-t^{p_1})(1-t^{p_2})}{(1-t^{w_1})(1-t^{w_2})(1-t^{w_3})}$. Par contre on a

$$P_\Phi(t) = t^{|p|-|w|} + (1 - t^{|p|-|w|})P_{A_{X_0}}(t) \tag{6.3}$$

d'après la formule d'Aleksandrov (3.4.6). Ici $|w| = w_1 + w_2 + w_3$ et $|p| = p_1 + p_2$. En somme

$$P_{A_{\bar{X}_s}}(t) = \frac{P_\Phi(t) - t^{|p|-|w|}}{(1-t)(1-t^{|p|-|w|})} = (P_\Phi(t) - t^{|p|-|w|})(\sum_{j\geq 0} t^j)(\sum_{k \geq 0} t^{k(|p|-|w|)}). \tag{6.4}$$

Le théorème de Dolgachev cité en haut implique que le coefficient devant $t^{|p|-|w|-1}$ de $P_{A_{\bar{X}_s}}(t)$ donne le genre geométrique $p_g(\bar{X}_s)$. Si on écrit le developpement de $P_\Phi(t)$ par

$$P_\Phi(t) = \sum_{j\geq 0} \phi_j t^j,$$

on déduit de la relation (6.4),

$$\begin{aligned} p_g(\bar{X}_s) &= 2\phi_0 + \phi_1 + \cdots \phi_{|p|-|w|-1} - 1, \\ &= \sharp\{\text{polynomes de } \Phi \text{ avec poids} \leq |p| - |w| - 1\} \\ &= \sharp\{\text{polynomes de } \Phi \text{ avec poids} < |p| - |w|\}. \end{aligned}$$

Unicité d'élement avec le poids 0 dans Φ entraine la première égalite. La dernière egalité signifie (6.1) en vue des Théorèmes 3.1 et 5.2.

ii) Démonstration de (6.2). Quant à la seconde égalité, on retrace l'argument bien utilisé depuis Steenbrink. Voir [7], [2], (5.4). Soit $Y = \bar{X}_s \setminus X_s$. A partir de la suite exacte

$$\cdots \to H^{n-2}(Y)(-1) \to H^n(\bar{X}_s) \to H^n(X_s) \to H^{n-1}(Y)(-1) \to H^{n+1}(\bar{X}_s) \to \cdots,$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \to P^n(\bar{X}_s) \to H^n(X_s) \to P^{n-1}(Y) \to 0, \tag{6.5}$$

où

$$P^n(\bar{X}_s) = coker(H^{n-2}(Y) \to H^n(\bar{X}_s))$$

$$P^{n-1}(Y) = ker(H^{n-1}(Y) \to H^{n+1}(\bar{X}_s))$$

qui s'appellent la partie primitive de la cohomologie correspondente. De (6.5), on obtient

$$h^{p,n+1-p}(X_s) = Gr_F^p Gr_{n+1}^W H^n(X_s) = Gr_F^p P^{n-1}(Y) = h_0^{p-1,n-p}(Y).$$

Le dernier est calculé par Théorème 4.4, 3) de [2] qui dit que

$$h_0^{0,0}(Y) = \text{ coefficient devant } t^{|p|-|w|} \text{ de } \mathrm{P}_{\mathrm{A_{X_0}}}(\mathrm{t}),$$

qui est égal à son tour à coefficient devant $t^{|p|-|w|}$ de $\mathrm{P}_\Phi(\mathrm{t})$, en vue de (6.3). La démonstration s'achève si on se souvient de la définition des spectres λ_i des Théorèmes 3.1 et 5.2. **Q.E.D.**

References

[1] A.G.ALEKSANDROV, *Normal forms of one dimensional quasihomogeneous complete intersections,* USSR Mat.Sbornik **117 (159)**, (1982), pp.3-31.

[2] A.G.ALEKSANDROV, *Cohomology of quasihomogeneous complete intersections,* Math.USSR, Izv.**26**, (1986), pp. 437- 477.

[3] A.G.ALEKSANDROV, *Duality and de Rham complex on singular varieties,* Contemporary Mathematics **161**, (1994), pp. 81- 93.

[4] A.G.ALEKSANDROV and S.TANABÉ *Computing Gauss-Manin systems for complete intersection singularities S_μ,* Georgian Math. Journal **3**,no.5,(1996), 401-421.

[5] P.APPELL and J.KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergeometriques et hypersphériques,* Paris, 1926.

[6] D.BARLET et H.M.MAIRE *Asymptotiques des intégrales fibres,* Ann. Inst.Fourier **43**,no.5, (1993), 1267-1299.

[7] A.DIMCA, *Monodromy and Betti numbers of weighted complete intersections,* Topology **24**, no.3, (1985), pp. 369- 374

[8] I.DOLGACHEV, *Weighted projective varieties* , Lecture Notes in Math. **956**, pp. 34- 71. Springer Verlag, 1982.

[9] W.EBELING et J.H.M.STEENBRINK, *Spectral pairs for isolated complete intersection singularities,* J. Algebraic Geometry,pp. 55-76, (1996).

[10] M.GIUSTI, *Classification des singularités isolées simples d'intersections completès,* In: Singularities, Proc. Symp. Pure Math. **40**, Pt.1, pp. 457-494. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[11] G.-M.GREUEL, *Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten,* Math. Ann. **214**, no.3, (1975), pp. 235-266.

[12] G.-M.GREUEL, H.A.HAMM, *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitten,* Invent.Math. **49** (1978), pp. 67- 86.

[13] S.GUZEV, *Manuscrit inédit* ,Moscou,1983.

[14] H.A.HAMM, *The genus χ_y of quasihomogeneous complete intersections* , Functional Anal.Appl. **11** (1977), pp. 86- 87.

[15] F.Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry* , 3rd Edition, Springer Verlag, 1978.

[16] F.Loeser, C.Sabbah, *Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes* , Comment.Math.Helvetici **66** (1991), pp. 458- 503.

[17] I.Naruki, *Some remarks on isolated singularity and their application to algebraic manifolds,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **13**, (1977), pp. 17-46.

[18] I.Nörlund, *Hypergeometric functions,* Acta Math. **94**, (1955/56), pp.289-349.

[19] F.Pham, *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau,* Gauthier-Villars, 1967.

[20] C.Sabbah, *Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module* , Compositio Math. **62** (1987), pp. 283- 328.

[21] C.Sabbah, *Proximité évanescente, II. Equations fonctionelles pour plusieurs fonctions analytiques* , Compositio Math. **64** (1987), pp. 213- 241.

[22] C.Sabbah, *Lieu des pôles d'un système holonome d'equations aux différences finies* , Bull.Soc.Math.France **120** (1992), pp. 371- 396.

[23] J.H.M.Steenbrink, *Spectra of $\mathcal{K}$- unimodal isolated singularities of complete intersections* , Preprint, (1996).

[24] A.N.Varchenko, *Asymptotic Hodge Structure in the Vanishing cohomology* , Math.USSR Izvestiya **18** (1982),No.3, pp. 471- 512.

[25] V.A.Vasiliev, *Ramified integrals, singularities and Lacunas,*Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[26] C.T.C.Wall , *Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections,* In: Singularities, Proc. Symp. Pure Math. **40**, Pt.2, pp. 625-640. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

Institute of Control Sciences
Russian Academy of Sciences,
Profsojunaja ul. 65,
GSP-7, MOSCOW, 117806,
Russia
E-mails: tanabe@ipu.rssi.ru