Zur Anwendung des Logarithmus in der analytischen Zahlentheorie

T. Ebel und B.Z. Moroz

Zusammenfassung

In dieser Arbeit geht es um Details beim Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes, wie er sich etwa bei [2, Kap. 4] findet, nämlich um Definition und Verwendung des Logarithmus von L-Funktionen.

Diese kurze Arbeit verfolgt rein didaktische Ziele. Wir zeigen, wie sich die üblichen Lehrbuch-Beweise aus der analytischen Zahlentheorie unter der richtigen Verwendung des Logarithmus-Operators auf einem passenden Raum von holomorphen Funktionen formalisieren lassen.

Bezeichnungen 1. Es seien $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Ringe der ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen, und es sei $\mathbb{N} = \{\, n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \,\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Ferner bezeichne $\mathbb{R}_+ := \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0 \,\}$ die Menge der positiven Zahlen, $\mathbb{R}_- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ diejenige der nichtpositiven Zahlen, und für $r \in \mathbb{R}$ sei $\mathbb{C}_r := \{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > r \,\}$ die entsprechende offene komplexe Halbebene; wie üblich sind $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ der Realteil bzw. der Imaginärteil einer komplexen Zahl z. Mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnen wir den Ring der holomorphen Funktionen auf einer offenen Untermenge U von $\mathbb{C}$. Die multiplikative Gruppe eines kommutativen Rings (mit Eins) A sei mit A^* bezeichnet, die additive Gruppe mit A^+. Wie üblich bezeichne $f_1 \circ f_2 \colon A \to C$ die Komposition zweier Abbildungen $f_2 \colon A \to B$ und $f_1 \colon B \to C$, insbesondere gilt $(f_1 \circ f_2)(z) = f_1(f_2(z))$, $z \in \mathbb{C}$, für zwei komplexwertige Funktionen f_1 und f_2 auf $\mathbb{C}$. Schließlich bezeichne $\iota(A) \colon a \mapsto a$, $a \in A$, die identische Abbildung $\iota(A) \colon A \to A$ auf einer Menge A.

Nun beginnen wir, indem wir an die Isomorphismen $\log \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^+$ und $\exp \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$, $\exp \colon x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$, erinnern (hier ist $\mathbb{R}_+^* \cong \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$ die Gruppe der positiven reellen Zahlen); bekanntlich $\log \circ \exp = \iota(\mathbb{R})$ und $\exp \circ \log = \iota(\mathbb{R}_+)$.

Diese Abbildungen setzt man folgendermaßen fort:

$$\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \exp \colon z \mapsto e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

und

$$\log \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathfrak{S}_\pi, \quad \log \colon z \mapsto \log|z| + i\alpha(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

wobei $\alpha(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch $z = |z|\, e^{i\alpha(z)}$ und $-\pi < \alpha(z) \leq \pi$ definiert ist und $\mathfrak{S}_r$ für $r \in \mathbb{R}_+$ den horizontalen Streifen

$$\mathfrak{S}_r := \{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ -r < \operatorname{Im} z \leq r \,\}$$

bezeichnet, so daß $\exp \circ \log = \iota(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, $\exp \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und $\log \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$. Der Logarithmus log ist aber nicht stetig auf der Menge $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$; also ist die Funktion

$$\log \circ \exp \colon \mathbb{C} \to \mathfrak{S}_\pi$$

in den Punkten $\{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \,\}$ unstetig.

Es sei U eine offene Untermenge von $\mathbb{C}$. Wir definieren einen injektiven Homomorphismus $j \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(U)$ durch

$$j \colon n \mapsto f_n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei f_n die konstante Funktion auf U bezeichnet, die der Gleichung $f_n(z) = 2\pi i n$ für $z \in U$ genügt. Die Abbildung

$$\mathfrak{Exp} \colon \mathcal{O}(U)^+ \to \mathcal{O}(U)^*\,, \quad \mathfrak{Exp} \colon f \mapsto \exp \circ f \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{O}(U)\,,$$

ist ein Homomorphismus und es gilt

$$j(\mathbb{Z})^+ \subseteq \operatorname{Ker}(\mathfrak{Exp}).$$

Lemma 1. *Ist G eine offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Untermenge von $\mathbb{C}$, so ist die Folge Abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{O}(G)^+ \xrightarrow{\ \mathfrak{Exp}\ } \mathcal{O}(G)^* \longrightarrow 1$$

exakt, also gilt

$$\mathcal{O}(G)^+ / j(\mathbb{Z})^+ \cong \mathcal{O}(G)^*\,. \tag{1}$$

Beweis. Es folgt sofort, daß

$$j(\mathbb{Z})^+ = \operatorname{Ker}(\mathfrak{Exp}),$$

denn G zusammenhängend ist. Es sei $f \in \mathcal{O}(G)^*$, d.h. f sei eine holomorphe, nirgends verschwindende Funktion auf G. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist die Funktion

$$\mathfrak{log}(s_0, f) \colon s \mapsto \log f(s_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt, \quad s \in G, \tag{2}$$

für $s_0 \in G$ wohldefiniert und

$$\mathfrak{log}(s_0, f) \in \mathcal{O}(G)\,,$$

weil G eine einfach zusammenhängende Menge ist. Wir behaupten, daß

$$\mathfrak{Exp}(\mathfrak{log}(s_0, f)) = f. \tag{3}$$

Zur Abkürzung setzen wir $h := \mathfrak{log}(s_0, f)$; es sei

$$k(s) = f(s) e^{-h(s)}, \quad s \in G.$$

Dann gilt

$$k \in \mathcal{O}(G)^* \quad \text{und} \quad f'(s) = k'(s) e^{h(s)} + h'(s) f(s);$$

daher

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = h'(s) + \frac{k'(s)}{k(s)}.$$

Aus der Definition (2) folgt aber, daß

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = h'(s) \quad \text{und} \quad k(s_0) = 1;$$

deshalb $k(s) = 1$ für $s \in G$. Damit ist die Behauptung (3) und mithin das Lemma bewiesen.

Es bezeichne

$$\mathfrak{Log}\colon \mathcal{O}(G)^* \to \mathcal{O}(G)^+ / j(\mathbb{Z})^+$$

den Isomorphismus (1) aus Lemma 1. Für $f \in \mathcal{O}(G)^*$ ist $\mathfrak{Log}\, f$ eine Nebenklasse in $\mathcal{O}(G)^+$ modulo $j(\mathbb{Z})^+$, und es ist klar, daß $\mathfrak{log}(s_0, f) \in \mathfrak{Log}\, f$ für $s_0 \in G$.

Beispiel 1. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit dem Ring

$$K = \{\, f_z \mid z \in \mathbb{C},\ f_z(s) = z \text{ für } s \in G \,\}$$

der konstanten Funktionen in $\mathcal{O}(G)$ und bezeichnen mit Log die Einschränkung von $\mathfrak{Log}$ auf K^*, so ist Log der „mehrwertige" Logarithmus auf $\mathbb{C}^* (\cong K^*)$ und es gilt $\log \in \mathrm{Log}$.

Beispiel 2. Für $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gilt $\iota(G) \in \mathcal{O}(G)^*$ und $\mathfrak{log}(1, \iota(G)) = \log_{|G}$, wobei die rechte Seite die Einschränkung von log auf G bezeichne.

Beispiel 3. Es sei $G = \mathbb{C}$. Offenbar ist dann $\exp \in \mathcal{O}(G)^*$ und $\mathfrak{log}(0, \exp) = \iota(G)$, obgleich $\log \circ \exp \notin \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

An dieser Stelle verweisen wir für weitere Informationen auf das Lehrbuch [4], siehe insbesondere das „Äquivalenztheorem" in [4, Bd. 2, Kap. 8, §2.6].

Bezeichnungen 2. Für $\{a, b\} \subseteq \mathbb{Z}$ sei (a, b) der größte gemeinsame Teiler von a und b; es sei φ die Eulersche φ-Funktion, also ist $\varphi(n)$ die Kardinalität von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $X(n)$ die Gruppe der Dirichlet-Charaktere modulo n, d.h. der vollständig multiplikativen periodischen Funktionen

$$\chi\colon \mathbb{Z} \to S^1 \cup \{0\}$$

mit Periode n, welche die Bedingung

$$\chi^{-1}(S^1) = \{\, a \mid a \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1 \,\}$$

erfüllen; hierbei ist $S^1 := \{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \,\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Es sei $\chi_0^{(n)}$ das Einselement der Gruppe $X(n)$, so daß

$$\chi_0^{(n)}(a) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (a, n) = 1; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $a \in \mathbb{Z}$; wir setzen $X_1(n) := X(n) \setminus \{\chi_0^{(n)}\}$. Zuletzt sei $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} X(n)$. Ist $\chi \in X$ und $\chi(\mathbb{Z}) \subseteq \{-1, 0, 1\}$, so heißt χ ein reeller Dirichlet-Charakter. Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{Z}$, und es sei

$$\mathcal{P}_a^{(n)} := \{\, p \mid p \in \mathcal{P}, p \equiv a \pmod{n} \,\}$$

für $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Es sei $\chi \in X$. Wir betrachten die Dirichletsche L-Funktion

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1, \tag{4}$$

und setzen

$$L_\chi(s) = L(\chi, s) \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1 .$$

Es ist klar, daß

$$L_\chi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_1)^* \quad \text{für} \quad \chi \in X.$$

Insbesondere, im Fall $\chi = \chi_0^{(1)}$, ist

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1$$

die Riemannsche ζ-Funktion.

Es sei

$$(\mathfrak{log}\, L_\chi)(s) = \sum_{\substack{\ell=1\\ p\in\mathcal{P}}}^{\infty} \frac{\chi(p^\ell)}{\ell p^{\ell s}} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1\,. \tag{5}$$

Lemma 2. *Es gilt*

$$\mathfrak{log}\, L_\chi \in \mathfrak{Log}\, L_\chi \quad \textit{für} \quad \chi \in X. \tag{6}$$

Beweis. Es sei $\chi \in X$. Ist $s \in \mathbb{C}_2$, so ist $\operatorname{Re} L(\chi, s) > 0$; denn

$$|L(\chi, s) - 1| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_2;$$

also ist $\{\, L(\chi, s) \mid s \in \mathbb{C}_2 \,\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Aus (4) folgt daher, daß

$$\log(L(\chi, s)) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_{\substack{\ell=1\\ p\in\mathcal{P}}}^{\infty} \frac{\chi(p^\ell)}{\ell p^{\ell s}} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_2\,. \tag{7}$$

Nach (5) und (7) gilt also

$$\exp((\mathfrak{log}\, L_\chi)(s)) = L(\chi, s) \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_2\,.$$

Dann ist auch

$$\exp((\mathfrak{log}\, L_\chi)(s)) = L(\chi, s) \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1\,, \tag{8}$$

denn $\{L_\chi, \mathfrak{log}\, L_\chi\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C}_1)$. Die Bedingungen (6) und (8) sind aber äquivalent.

Bemerkung 1. Es gilt (vgl. [5, Thm. 11.6]):

$$\{\, \zeta(s) \mid s \in \mathbb{C}_1 \,\} = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

daher ist $\log \circ \zeta$ unstetig auf $\mathbb{C}_1$; woraus folgt $\log \circ \zeta \notin \mathfrak{Log}\, \zeta$ und mithin $\log \circ \zeta \neq \mathfrak{log}\, \zeta$.

Im folgenden sei die Zahl $m \in \mathbb{N}$ fest; es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $(a, m) = 1$.

Lemma 3. *Es gilt*

$$\frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi\in X(m)} \overline{\chi(a)} (\mathfrak{log}\, L_\chi)(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p^\ell \equiv a \quad (m)}} \frac{1}{\ell p^{\ell s}} \quad \textit{für} \quad s \in \mathbb{C}_1\,. \tag{9}$$

Beweis. Die Gleichung (9) folgt aus der Definition (5) wegen der Orthogonalitätsrelationen für Dirichlet-Charaktere (siehe, z.B., [1, Kap. 1, (1.56)]).

Folgerung 1. *Es gilt*

$$\prod_{\chi \in X(m)} L(\chi, s) \geq 1 \quad \textit{für} \quad s \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{R}. \tag{10}$$

Beweis. Die Gleichung (9) mit $a = 1$ ergibt:

$$\sum_{\chi \in X(m)} (\mathfrak{log}\, L_\chi)(s) = \varphi(m) \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p^\ell \equiv 1 \quad (m)}} \frac{1}{\ell p^{\ell s}} \geq 0$$

für $s \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{R}$; daraus folgern wir, Lemma 2 verwendend, daß

$$\prod_{\chi \in X(m)} L(\chi, s) = \exp\big(\sum_{\chi \in X(m)} (\mathfrak{log}\, L_\chi)(s)\big) \geq 1$$

für solche s.

Nun betrachten wir die Funktion

$$h_a(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}_a^{(m)}} \frac{1}{p^s} \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_1 \,. \tag{11}$$

Folgerung 2. *Für eine geeignete Funktion g_a gilt*

$$h_a = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \in X(m)} \overline{\chi(a)}\, \mathfrak{log}\, L_\chi + g_a \quad \textit{und} \quad g_a \in \mathcal{O}\Big(\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}\Big)\,.$$

Beweis. Diese Aussage folgt aus den Gleichungen (11) und (9), wenn man

$$g_a(s) = -\sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p^\ell \equiv a \quad (m)}} \frac{1}{\ell p^{\ell s}}$$

setzt, denn die Reihe in der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Untermenge von $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$.

Für $s \in \mathbb{C}_1$ sei es

$$L_0(s) = (s-1) L(s, \chi_0^{(m)})$$

und

$$(\mathfrak{log}\, L_0)(s) = (\mathfrak{log}\, L_{\chi_0^{(m)}})(s) + \log(s-1).$$

Aus der Definition (4) folgt, daß die Funktionen $\{\, L_0,\, L_\chi \mid \chi \in X_1(m) \,\}$ auf die Halbebene $\mathbb{C}_0$ analytisch fortsetzbar und dort holomorph sind; also

$$\{\, L_0,\, L_\chi \mid \chi \in X_1(m) \,\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C}_0)\,. \tag{12}$$

Es gilt auch

$$L_0(1) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid m}} \big(1 - \frac{1}{p}\big) > 0, \tag{13}$$

weil

$$L(\chi_0^{(m)}, s) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|m}} \big(1 - \frac{1}{p^s}\big) \quad \text{für} \quad s \in \mathbb{C}_0 .$$

Lemma 4. *Es gilt*

$$L(\chi, 1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad \chi \in X_1(m). \tag{14}$$

Beweis. Es sei zuerst $\chi \neq \overline{\chi}$. Aus der Gleichung $L(\chi, 1) = 0$ folgt, daß auch $L(\overline{\chi}, 1) = 0$ und daher

$$L(\chi, s) = (s-1)L_1(s), \quad L(\overline{\chi}, s) = (s-1)L_2(s), \quad \{L_1, L_2\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C}_0)$$

für geeignete Funktionen L_1 und L_2. Dann wäre aber

$$\prod_{\chi \in X(m)} L(\chi, s) = (s-1) \prod_{i=0}^{3} L_i(s), \quad L_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_0) \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq 3,$$

im Widerspruch zu (10), wobei wir zur Abkürzung

$$L_3(s) := \prod_{\chi \in X_1(m) \setminus \{\chi,\, \overline{\chi}\}} L(\chi, s)$$

gesetzt haben. Für den Fall, daß χ ein reeller Charakter ist, verweisen wir auf [2, Kap. 4] für einen einfachen Beweis der Ungleichung (14).

In [3, Kap. 3, §2] findet man einen elementaren, d.h. nichtfunktionentheoretischen, Beweis dieses Lemmas.

Satz. *Ist $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und $(a, m) = 1$, so ist*

$$h_a(s) = \frac{1}{\varphi(m)} \log \frac{1}{s-1} + O(1) \quad \textit{für } s \in \mathbb{R}, \quad 1 < s < 2. \tag{15}$$

Beweis. Es sei

$$I(\alpha, \beta) := \{\, x \mid x \in \mathbb{R},\ \alpha < x < \beta \,\} \quad \text{für } \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathbb{R}$$

und

$$D_\gamma := \mathbb{C}_1 \cup \{\, s \mid s \in \mathbb{C},\ |s-1| < \gamma \,\} \quad \text{für} \quad \gamma \in \mathbb{R}_+ .$$

Nach Folgerung 2 gilt

$$h_a(s) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \in X(m)} \overline{\chi(a)} (\mathfrak{log}\, L_\chi)(s) + O(1) \quad \text{für } s \in I(1, 2). \tag{16}$$

Aus den Ungleichungen (13) und (14) folgt, daß

$$\{\, L_0,\, L_\chi \mid \chi \in X_1(m) \,\} \subseteq \mathcal{O}(D_\delta)^*$$

für geeignete $\delta > 0$. Also sind die Funktionen $\{\, \mathfrak{log}\, L_0,\ \mathfrak{log}\, L_\chi \mid \chi \in X_1(m) \,\}$ holomorph fortsetzbar auf D_δ und mithin beschränkt auf jeder kompakten Untermenge von D_δ, deshalb

$$\sum_{\chi \in X_1(m)} \overline{\chi(a)} (\mathfrak{log}\, L_\chi)(s) = O(1),\ (\mathfrak{log}\, L_0)(s) = O(1) \quad \text{für } s \in I(1, 2). \tag{17}$$

Es ist klar, daß

$$L(\chi_0^{(m)}, s) > 0 \quad \text{für } s \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{R};$$

daher

$$(\mathfrak{log}\, L_{\chi_0^{(m)}})(s) = \log L(\chi_0^{(m)}, s) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{log}\, L_0)(s) = \log L_0(s) \quad \text{für } s \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{R}.$$

Damit gilt

$$(\mathfrak{log}\, L_{\chi_0^{(m)}})(s) = \log \frac{1}{s-1} + (\mathfrak{log}\, L_0)(s) \quad \text{für } s \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{R}. \tag{18}$$

Die asymptotische Formel (15) folgt unmittelbar aus (16), (17) und (18).

Der Dirichletsche Primzahlsatz [1, S. 36] folgt aus dem Satz.

Bemerkung 2. In [3, Kap. 3, §2] wird mit elementaren, d.h. nichtfunktionentheoretischen aber keineswegs einfachen, Methoden das (im Vergleich zu (15)) stärkere Resultat

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P}_a^{(m)} \\ p \le x}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(m)} \log x + O(1) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{C}_1$$

bewiesen.

Zum Schluß bedanken wir uns bei Herrn Y. Petridis für einen wichtigen Hinweis.

Literatur

[1] J. Brüdern: Einführung in die analytische Zahlentheorie. Berlin Heidelberg New York: Springer 1995

[2] H. Davenport: Multiplicative Number Theory, zweite Auflage. Berlin Heidelberg New York: Springer 1980

[3] A. O. Gel'fond und Yu. V. Linnik: Elementary Methods in the Analytic Theory of Numbers. Oxford: Pergamon Press 1966

[4] R. Remmert: Funktionentheorie, Bd.1,2. Berlin Heidelberg New York: Springer 1989, 1991

[5] E. C. Titchmarsh: The theory of the Riemann Zeta-function, zweite Auflage. Oxford: Clarendon Press 1986