ÜBER GERADE UNIMODULARE GITTER DER DIMENSION 32, III

von

Helmut Koch*) und Boris B. Venkov**)

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
D – 5300 Bonn 3

*) Karl–Weierstraß–Institut
für Mathematik
der Akademie der
Wissenschaften der DDR
Mohrenstr. 39
DDR – 1086 Berlin

**) Leningrader Abteilung
des Steklov–Instituts für
Mathematik der Akademie der
Wissenschaften der UdSSR
Malaja Fontanka 27
SU – 191011 Leningrad

MPI/89 – 85

Berechnungsschema für die Höhe des Erziehungsgeldes ab dem 7. Lebensmonat des Kindes

Volles Erziehungsgeld mtl. DM **600**

	Beispiel
Feststellung der Einkommensgrenze	
Grundbetrag	29 400
(für nicht dauernd getrennt lebende Ehegatten 29 400 DM; für andere Berechtigte 23 700 DM)	
zuzüglich Erhöhungsbetrag für jedes <u>weitere</u> Kind (jeweils 4 200 DM x)	4200 x 1
Einkommensgrenze insgesamt	33 600
Einkommensberechnung	
(Soll die Berechnung als Entscheidungshilfe für den Erziehungsurlaub ab dem 7. Lebensmonat dienen, muß das frühere Erwerbseinkommen des Erziehungsgeld-berechtigten einschließlich der absetzbaren Steuerbeträge etc. außer Ansatz bleiben)	
Summe der positiven Einkünfte	44 750
abzüglich Summe der abzusetzenden Einkommens-, Lohn- und Kirchensteuer, Vorsorgeaufwendungen und Unterhaltsleistungen	10 100
Jahres-Nettoeinkommen	34 650
(liegt das Jahres-Nettoeinkommen **unter** der oben festgelegten Einkommensgrenze, steht das volle Erziehungsgeld zu; die weitere Berechnung ist dann nicht mehr notwendig).	
Übersteigender Betrag	1 050
geteilt durch 30 =	35
minus	
verbleibendes Erziehungsgeld mtl. DM	565

Beträge von weniger als 40 DM monatlich werden nicht ausgezahlt!

ÜBER GERADE UNIMODULARE GITTER DER DIMENSION 32, III

von

Helmut Koch und Boris B. Venkov

In den Arbeiten [6], [7] hat der zweite Verfasser eine Untersuchung der geraden unimodularen Gitter in euklidischen Räumen der Dimension 32 begonnen, die in der vorliegenden Arbeit fortgesetzt wird. Dabei knüpfen wir auch an Gedankengänge aus [3] und [4] an.

Wir betrachten hauptsächlich gerade unimodulare Gitter Λ in $\mathbb{R}^{32}$, die keine Wurzeln, d.h. keine Vektoren der Quadratlänge 2, enthalten. Zu jedem Vektor v aus Λ der Quadratlänge 8 betrachten wir die Modifikation Λ_v des Gitters Λ. Sei $\gamma(\Lambda_v)$ die Dimension des Wurzelsystems von Λ_v und $f_\Lambda(i)$ für $i = 1, \dots, 32$ die Anzahl der v mit $i = \gamma(\Lambda_v)$. Für eine beliebige Wurzel w in Λ_v gilt $\Lambda_v = \Lambda_{2w}$. Daher ist $g_\Lambda(i) := f_\Lambda(i)/2i$ eine ganze Zahl. Nach [4], 2., ist $g_\Lambda(i) = 0$ für $i = 19,21,22,23,25, \dots, 31$.

Die Funktion g_Λ ist eine sehr feine Invariante von Λ. Wir bezeichnen den Träger von g_Λ als Spektrum $\mathrm{Sp}(\Lambda)$ des Gitters Λ. Als weitere Vergröberung von g_Λ ist das Maximum $N(\Lambda)$ von $\mathrm{Sp}(\Lambda)$ von Bedeutung, das im folgenden als Nachbareffekt bezeichnet wird.

Mit Hilfe der in [6] eingeführten Grundgleichungen eines Gitters beweisen wir in § 1 die folgenden drei Gleichungen für die Funktion g_Λ :

$$\sum_{i=1}^{32} i g_\Lambda(i) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 733 ,$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^2 g_\Lambda(i) = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 17^2 ,$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^3 g_\Lambda(i) = 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17 .$$

Es schließen sich einige allgemeine Betrachtungen über die Automorphismen der Gitter Λ an.

Zum weiteren Studium der Funktionen g_Λ werden in § 2 und § 3 die fünf Gitter $\Lambda(C)$ mit Nachbareffekt 32 betrachtet. Sie entstehen aus den fünf selbst–dualen doppelt–geraden extremalen Codes C in der gleichen Weise wie das Leechsche Gitter aus dem Golay–Code.

In § 2 bestimmen wir die Automorphismengruppen dieser Gitter. Für den Reed–Muller–Code $RM = RM(5,2)$ wurde dies bereits von Broué und Enguehard in [1] durchgeführt*. Wir geben hier für diesen Code eine unabhängige Darstellung soweit sie sich in das allgemeine Schema für alle fünf Codes einordnet.

---

* Die Verfasser danken Herrn A.J. Hahn, University of Notre Dame, für den Hinweis, daß die Ergebnisse von Broué und Enguehard schon früher in den folgenden beiden Arbeiten bewiesen wurden:
E.S. Barnes, G.E. Wall, Some extreme forms defined in terms of Abelian groups. J. Austr. Math. Soc. 1, 47–63 (1959).
G.E. Wall, On the Clifford collineations, transform and similarity groups (IV), an application to quadratic forms. Nagoya Math. J. 22, 199–222 (1963).

Conway und Pless, [2], haben drei der fünf genannten Codes, die wir hier mit F,U,G bezeichnen, entdeckt. Die beiden anderen, der Reed–Muller–Code RM und der erweiterte Quadratische–Rest–Code QR zur Primzahl 31, und deren Automorphismengruppen sind seit längerer Zeit bekannt (siehe 2.2 für die genaue Definition der fünf Codes).

Bezüglich der Automorphismengruppen der Gitter $\Lambda(C)$ erhält man folgendes. Sei $\mathfrak{A}(C)$ die Menge der Wurzelsysteme benachbarter Gitter $\Lambda(C)_v$ mit $\gamma(\Lambda(C)_v) = 32$. Dann ist $|\mathfrak{A}(C)| = g_{\Lambda(C)}(32)$. Es gilt $|\mathfrak{A}(RM)| = 2295, |\mathfrak{A}(F)| = 135$, $|\mathfrak{A}(U)| = 3$, $|\mathfrak{A}(QR)| = 1$, $|\mathfrak{A}(G)| = 1$. $\mathrm{Aut}(\Lambda(C))$ operiert transitiv auf $\mathfrak{A}(C)$. Sei $A(C)$ der Normalteiler von $\mathrm{Aut}(\Lambda(C))$, der aus den Automorphism von $\Lambda(C)$ besteht, die alle Wurzelsysteme von $\mathfrak{A}(C)$ in sich überführen. Dann ist nach [1] $\mathrm{Aut}(\Lambda(RM))/A(RM)$ die einfache Gruppe vom Chevalley–Typ $D_5(\mathbb{F}_2)$. In ähnlicher Weise findet man, daß $\mathrm{Aut}(\Lambda(F))/A(F)$ zu $D_4(\mathbb{F}_2)$ isomorph ist. Die Gruppen $A(RM)$ und $A(F)$ sind auflösbar. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(\Lambda(U))/A(U)$ ist isomorph zu S_3. Die Gruppen $A(U)$, $A(QR)$ bzw. $A(G)$ sind isomorph zum halbdirekten Produkt einer elementarabelschen Gruppe mit $\mathrm{Aut}(U)$, $\mathrm{Aut}(QR)$ bzw. $\mathrm{Aut}(G)$.

In § 3 berechnen wir die Funktionen g_Λ für $\Lambda = \Lambda(C)$. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle 1 dargestellt. Für die fehlenden Zahlen
$i = 7,9,11,13,14,15,17,18,19,21,22,23,25, \ldots ,31$ gilt $g_\Lambda(i) = 0$.

i \ C	RM	F	U	QR	G
1	0	$2^{18}\cdot 2025$	$2^{19}\cdot 1329$	$2^{15}\cdot 21855$	$2^{16}\cdot 10755$
2	$2^{14}\cdot 71145$	$2^{16}\cdot 10665$	$2^{13}\cdot 61125$	$2^{12}\cdot 114979$	$2^{11}\cdot 230123$
3	0	0	$2^{20}\cdot 91$	$2^{18}\cdot 465$	$2^{18}\cdot 525$
4	0	$2^{10}\cdot 115425$	$2^{10}\cdot 99657$	$2^{4}\cdot 5298675$	$2^{6}\cdot 1178985$
5	0	0	0	$2^{18}\cdot 31$	$2^{17}\cdot 43$
6	0	0	$2^{14}\cdot 189$	$2^{13}\cdot 155$	$2^{12}\cdot 855$
8	$2^{5}\cdot 355725$	$2^{5}\cdot 77625$	$2^{4}\cdot 84909$	$2^{4}\cdot 87575$	$2^{3}\cdot 166155$
10	0	0	0	0	$2^{11}\cdot 15$
12	0	0	$2^{9}\cdot 21$	$2^{5}\cdot 155$	$2^{7}\cdot 45$
16	0	$2^{5}\cdot 2025$	$2^{3}\cdot 1029$	$2^{2}\cdot 465$	$2^{2}\cdot 1335$
20	0	0	0	$2^{4}\cdot 31$	$2^{6}\cdot 5$
24	0	0	$2^{4}\cdot 7$	0	$2^{3}\cdot 15$
32	2295	135	3	1	1

Tabelle 1. $g_{\Lambda(C)}$

Frau C. Golisch hat Anzahlberechnungen für die Codes C durchgeführt, die zur Aufstellung von Tabelle 1 notwendig waren. Die Verfasser danken ihr herzlich.

Die vorliegende Arbeit entstand zu einem großen Teil während eines gemeinsamen Gastaufenthaltes der Verfasser am Max–Planck–Institut für Mathematik in Bonn im Frühjahr 1989. Sie bedanken sich herzlich für die genossene Gastfreundschaft. Weiter danken wir Frau Wolf–Gazo für ihre exzellente Arbeit bei der Maschinenschrift unseres Manuskripts.

§ 1. Die Funktionen g_Λ für Gitter Λ ohne Wurzeln

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen von [4]. Λ bezeichnet immer ein gerades unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^{32}$, das keine Wurzeln enthält. Die Menge der Vektoren von Λ mit Quadratlänge s wird mit Λ_s bezeichnet.

Für $v \in \Lambda$ mit $(v,v) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$ bezeichnet Λ_v das Nachbargitter

$$\Lambda_v := \Lambda^v \cup (\tfrac{v}{2} + \Lambda^v)\ ,\ \ \Lambda^v := \{x \in \Lambda \mid (x,v) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}\ .$$

1.1. Sei v ein Vektor von Λ der Quadratlänge 8. Nach [4], Satz 7, ist das Wurzelsystem von Λ_v vom Typ $(1 + h(v)/2)A_1$, wobei $h(v)$ die Anzahl der Vektoren $x \in \Lambda_4$ mit $(x,v) = 4$ ist. Wir setzen

$$\gamma(\Lambda_v) := 1 + h(v)/2$$

und definieren $f_\Lambda(i)$ als die Anzahl der Vektoren $v \in \Lambda_8$ mit $i = \gamma(\Lambda_v)$. Entsprechend dieser Definition ist f_Λ als Funktion mit dem Argumentbereich $\{1,2, \ldots ,32\}$ zu betrachten. Nach [4], Satz 4, gilt $f_\Lambda(i) = 0$ für $i = 19,21,22,23,25, \ldots ,31$. In [4] haben wir den Defekt $\delta(\Lambda_v)$ definiert. Es gilt $\delta(\Lambda_v) = 32 - \gamma(\Lambda_v)$.

<u>Satz 1.1</u>. Seien v und v' zwei Vektoren aus Λ mit $\frac{v}{2} \notin \Lambda$, $\frac{v'}{2} \notin \Lambda$ und $(v,v) \equiv (v',v') \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$. Dann ist $\Lambda_v = \Lambda_{v'}$ äquivalent zu $v \equiv v' (\mathrm{mod}\ 2\Lambda)$.

Für $v \in \Lambda_8$ ist $|(v + 2\Lambda) \cap \Lambda_8| = 2\gamma(\Lambda_v)$ gleich der Anzahl der Wurzeln im Gitter Λ_v.

<u>Beweis</u>. Sei $v \equiv v' (\mathrm{mod}\ 2\Lambda)$ und dem entsprechend $v' = v + 2y$. Dann ist $(y,v) + (y,y) = 0$ also $y \in \Lambda^v$ und daher $\Lambda_v = \Lambda_{v'}$. Die Umkehrung ist offensicht-

lich. Die Zuordnung $v' \longrightarrow \frac{v'}{2}$ liefert eine Bijektion von $(v + 2\Lambda) \cap \Lambda_8$ auf das Wurzelsystem von Λ_v. Daraus folgt die zweite Behauptung.

Nach Satz 1.1 ist die Nachbarbildung eine Angelegenheit der Klassen von $\Lambda/2\Lambda$. Dementsprechend definieren wir $g_\Lambda(i)$ als die Anzahl der Klassen in $\Lambda/2\Lambda$, die einen Vertreter $v \in \Lambda_8$ mit $\gamma(\Lambda_v) = i$ enthalten. Dann ist $g_\Lambda(i) = f_\Lambda(i)/2i$.

1.2. Die Thetareihe

$$\vartheta_\Lambda(z) := \sum_{x \in \Lambda} q^{(x,x)/2}, \quad q = e^{2\pi i z},$$

ist eine Modulform vom Gewicht 16 zur vollen Modulgruppe und hat mit den Bezeichnungen von [5], Chap. 4, daher die Form

$$\vartheta_\Lambda(z) = E_8 + c\Delta E_2,$$

wobei die Konstante c dadurch gegeben ist, daß $\vartheta_\Lambda(z)$ für ein Gitter ohne Wurzeln den Koeffizienten 0 bei q hat. Hieraus findet man

$$|\Lambda_4| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17, \quad |\Lambda_6| = 2^{13} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31, \quad |\Lambda_8| = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 733, \ \dots\ .$$

Insbesondere ist

$$\sum_{i=1}^{32} f_\Lambda(i) = |\Lambda_8| = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 733 \,,$$

$$\sum_{i=1}^{32} i g_\Lambda(i) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 733 \,. \tag{1.1}$$

Durch Heranziehung gewichteter Thetareihen kann man auch $\sum_{i=1}^{32} i^\nu g_\Lambda(i)$ für $\nu = 2,3$ berechnen. Dabei benutzen wir die Ergebnisse von [6]:

Sei für $x,z \in \Lambda_4$

$$n_i(x) := |\{y \in \Lambda_4 \,|\, (x,y) = i\}|$$

und

$$n_{ij}(x,z) := |\{y \in \Lambda_4 \,|\, (x,y) = i, (z,y) = j\}| \,.$$

Dann gilt

$$n_2(x) = n_{-2}(x) = 2^3 \cdot 5 \cdot 31 \,,$$

$$n_1(x) = n_{-1}(x) = 2^{10} \cdot 31 \,,$$

$$n_0(x) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 \,.$$

Für $(x,z) = k \neq 0$ ist $n_{ij}(x,z)$ nur von i,j,k abhängig. Z.B. ist $n_{02}(x,z) = n_{20}(x,z) = 3^2 \cdot 19$ für $(x,z) = 2$. Dagegen hängt $n_{ij}(x,z)$ für $(x,z) = 0$ von der Wahl von x,z ab. Es gilt

$$n_{22}(x,z) = h(x+z) - 2 .$$

Wir kommen nun zu der Berechnung von $\sum_{i=1}^{32} if_\Lambda(i)$: es gilt

$$\sum_{v\in\Lambda_8} h(v) = |\{v,x \mid v \in \Lambda_8, x \in \Lambda_4, (v,x) = 4\}| =$$

$$= |\{x_1,x_2 \mid x_1 \in \Lambda_4, x_2 \in \Lambda_4, (x_1,x_2) = 0\}| = |\Lambda_4|\, n_0(x_1) =$$

$$= 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = v - x$. Wegen $\gamma(\Lambda_v) = 1 + h(v)/2$ wird weiter

$$\sum_{i=1}^{32} if_\Lambda(i) = \sum_{v\in\Lambda_8} \gamma(\Lambda_v) = |\Lambda_8| + 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31 = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 17^2 ,$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^2 g_\Lambda(i) = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 17^2 . \tag{1.2}$$

Zur Berechnung von $\sum_{i=1}^{32} i^2 f_\Lambda(i)$ bemerken wir zunächst, daß

$$h^2(v) = |\{x_1,x_2 \mid x_1,x_2 \in \Lambda_4, (x_1,v) = (x_2,v) = 4\}|$$

ist. Wir setzen $x_3 = v - x_1$. Dann wird

$$\sum_{v\in\Lambda_8} h^2(v) = |\{x_1,x_2,x_3 \in \Lambda_4^3 | (x_1,x_3) = 0, (x_2,x_3) + (x_2,x_1) = 4\}| =$$

$$= \sum_{i=0}^{4} |\{x_1,x_2,x_3 \in \Lambda_4^3 | (x_1,x_3) = 0, (x_1,x_2) = i, (x_2,x_3) = 4-i\}| \ .$$

Der Summand ist für $i = 1,3$ gleich 0 und für $i = 0,4$ gleich $\sum_{v\in\Lambda_8} h(v)$. Für $i = 2$ gilt

$$|\{x_1,x_2,x_3 \in \Lambda_4^3 | (x_1,x_3) = 0, (x_1,x_2) = 2, (x_2,x_3) = 2\}| =$$

$$= |\Lambda_4| n_2(x_1) n_{02}(x_1,x_2) \ .$$

Daher wird

$$\sum_{v\in\Lambda_8} h^2(v) = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 67 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^2 f_\Lambda(i) = \sum_{v\in\Lambda_8} \gamma(\Lambda_v)^2 = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17$$

und

$$\sum_{i=1}^{32} i^3 g_\Lambda(i) = 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17 . \tag{1.3}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 1.2. Sei Λ ein gerades, unimodulares Gitter der Dimension 32 ohne Wurzeln und sei $\gamma(\Lambda_v)$ für ein $v \in \Lambda_8$ gleich der halben Anzahl der Wurzeln von Λ_v. Dann gilt

$$\sum_{v \in \Lambda_8} \gamma(\Lambda_v) = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 17^2 ,$$

$$\sum_{v \in \Lambda_8} \gamma(\Lambda_v)^2 = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17 .$$

Hieraus ergibt sich als mittlerer Wert von $\gamma(\Lambda_v)$ und $\gamma(\Lambda_v)^2$:

$$\frac{1}{|\Lambda_8|} \sum_{v \in \Lambda_8} \gamma(\Lambda_v) = 2{,}22 \ldots ,$$

$$\frac{1}{|\Lambda_8|} \sum_{v \in \Lambda_8} \gamma(\Lambda_v)^2 = 6{,}28 \ldots .$$

Demnach wäre es denkbar, daß es Gitter Λ mit $\gamma(\Lambda_v) \leq 3$ für alle $v \in \Lambda_8$ gibt. Das ist jedoch nicht möglich, da in diesem Falle die Gleichungen (1.1) – (1.3) einen negativen Wert für $g_\Lambda(2)$ liefern. Es gilt daher das folgende Korollar zu Satz 1.2.

Korollar. $\max\{ \gamma(\Lambda_v) \mid v \in \Lambda_8\} \geq 4$.

Unter der Annahme $g_\Lambda(i) = 0$ für $i > 4$ erhält man $g_\Lambda(1)$, $g_\Lambda(2)$, $g_\Lambda(3)$ als lineare Funktion von $g_\Lambda(4)$:

$$\begin{aligned}
g_\Lambda(1) &= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 47 - 2^2 g_\Lambda(4) \\
g_\Lambda(2) &= -2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31 + 2 \cdot 3 g_\Lambda(4)\,, \\
g_\Lambda(3) &= 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 - 2^2 g_\Lambda(4)\,, \\
g_\Lambda(1) &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 17^2 + g_\Lambda(3)\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $g_\Lambda(1) \neq 0$.

1.3. Wir wollen einige Aussagen über Automorphismen von Λ machen.

Sei $v \in \Lambda_8$ und $a_1, \dots, a_s$, $s := \mathfrak{r}(\Lambda_v)$, ein maximales System orthogonaler Wurzeln in Λ_v. Dann ist Λ_v ein Code $C_v \subset \mathbb{F}_2^s$ zugeordnet:

$$C_v = \{c \in \mathbb{F}_2^s \mid \tfrac{1}{2} \sum_{i \in c} a_i \in \Lambda_v\}\,,$$

wobei c als Menge der Stellen zu verstehen ist, in denen der Vektor $c = (c_1, \dots, c_s)$ die Komponente 1 hat. Weiter setzen wir für $h \in \mathbb{F}_2^s$

$$\varepsilon_h(i) := \begin{cases} -1 & \text{für } i \in h \\ +1 & \text{für } i \notin h\,. \end{cases}$$

Dann ist durch

$$\psi_h(a_i) = \varepsilon_h(i)a_i \ , \ i = 1, \dots ,s \ ,$$

$$\psi_h(x) = x \quad \text{für} \quad (x,a_i) = 0 \ , \ i = 1, \dots ,s \ ,$$

ein Automorphismus $\psi_h = \psi_{h,v}$ von Λ_v gegeben.

Satz 1.3. ψ_h ist genau dann ein Automorphismus von Λ, wenn h zu C_v gehört.

Beweis. Sei $w \in \Lambda_v$ mit $\Lambda = (\Lambda_v)_w$. Dann hat w die Form

$$w = \frac{1}{2}(\beta_1 a_1 + \dots + \beta_s a_s) + w' \ ,$$

wobei $\beta_1, \dots ,\beta_s$ ganze Zahlen sind und w' aus dem orthogonalen Komplement V von $a_1, \dots ,a_s$ ist. Nach Voraussetzung ist $(w,a_i) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ und daher β_i ungerade für $i = 1, \dots ,s$.

Unter der Voraussetzung, daß ψ_h Automorphismus von Λ ist, gilt $\frac{1}{2}w - \psi_h(\frac{1}{2}w) = \frac{1}{2}\sum_{i\in h} \beta_i a_i \in (\Lambda_v)^w$ und daher $h \in C_v$.

Ein $y \in \Lambda$ läßt sich in der Form

$$y = \alpha\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \gamma_i a_i + y' \ , \ \alpha \in \{0,1\} \ , \ \gamma_i \in \mathbb{Z} \ , \ y' \in V \ ,$$

schreiben. Es folgt

$$y - \psi_h(y) = \frac{\alpha}{2}\sum_{i\in h} \beta_i a_i + \sum_{i\in h} \gamma_i a_i \ .$$

Unter der Voraussetzung, daß $h \in C_v$ ist, gilt

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \gamma_i a_i + y', \frac{1}{2}\sum_{i\in h} a_i\right) \in \mathbb{Z},$$

d.h.

$$\sum_{i\in h} \gamma_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Folglich liegt $\sum_{i\in h} \gamma_i a_i$ in Λ. Weiter ist

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i\in h} \beta_i a_i, w\right) = \frac{1}{2}\sum_{i\in h} \beta_i^2 \equiv \frac{1}{2}\,|h| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Folglich liegt $\frac{1}{2}\sum_{i\in h} \beta_i a_i$ in Λ, q.e.d.

Im allgemeinen können für $v, v' \in \Lambda_8$, $\Lambda_v \not\equiv \Lambda_{v'}$, und $h \in C_v$, $h' \in C_{v'}$, die Automorphismen $\psi_{h,v}$, $\psi_{h',v'}$ gleich sein. Z.B. sei das zu v gehörige maximale System orthogonaler Wurzeln in Λ_v gleich $\{a_1, \dots, a_8\}$ und $h \in c_v$ habe das Gewicht 8. Dann ist für $v = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ein zugehöriges maximales System orthogonaler Wurzeln in $\Lambda_{v'}$ gleich

$$\left\{a_i' = \tfrac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4) - a_i,\ a_j' = \tfrac{1}{2}(a_5+a_6+a_7+a_8) - a_j \,\middle|\, i=1,2,3,4,\ j=5,6,7,8\right\}$$

und es gilt

$$\frac{1}{2}(a_1' + \dots + a_8') = \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_8) .$$

Es folgt $\psi_{h,v} = \psi_{h,v'}$.

Jedoch gilt der folgende Satz.

<u>Satz 1.4</u>. Sei $v,v' \in \Lambda_8$, $\Lambda_v \neq \Lambda_{v'}$, und sei $h \in C_v$ ein Wort vom Gewicht 12. Dann gilt $\psi_{h,v} \neq \psi_{h',v'}$ für alle $h' \in C_{v'}$.

<u>Beweis</u>. Sei $\psi_{h,v} = \psi_{h',v'}$ für ein $h' \in C_{v'}$. Weiter sei $\{a_1, \dots ,a_{12}\}$ bzw. $\{a_1', \dots ,a_8'\}$ das zu h bzw. h' gehörige System orthogonaler Wurzeln. Dann ist

$$\dim\{x \in R^{32} \mid \psi_{h',v'}\, x = x\} = 32 - |h'|$$

und daher $|h| = |h'| = 12$. Der Vektor $2a_1'$ hat die Form

$$2a_1' = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{12} a_{12} \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{Q} ,\ i = 1, \dots ,12 .$$

Wegen $2a_1' \in \Lambda$ gilt $4\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $2\alpha_i \pm 2\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Wenn es ein α_i mit $4\alpha_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ gibt, ist $4\alpha_j \equiv 4\alpha_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ für alle $j = 1, \dots ,12$. Es folgt

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{12} a_{12}, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{12} a_{12}) = 2(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{12}^2) \notin \mathbb{Z} .$$

Daher gilt $2\alpha_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \dots ,12$. Da es kein $c \in C_v$ mit $c \neq \phi$, $c \not\subseteq h$ gibt , folgt aus $2\alpha_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ für ein i wieder $2\alpha_j \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ für $j = 1, \dots ,12$ und

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{12} a_{12}, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{12} a_{12}) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4) .$$

Daher gilt $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \dots, 12$. Aus $a_1' = a_j$ für ein $j = 1, \dots, 12$ folgt $\Lambda_v = \Lambda_{v'}$. Es bleibt daher für $2a_1'$ nur noch die Möglichkeit

$$2a_1' = \pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm a_{i_3} \pm a_{i_4} .$$

In diesem Fall müßte es jedoch ein a_j' mit

$$2a_j' = \pm a_{i_5} \pm a_{i_6} \pm a_{i_7} \pm a_{i_8} , \{i_1, i_2, \dots, i_8\} \in C_{v'} ,$$

geben. Das ist jedoch unmöglich, weil $\{i_1, \dots, i_8\}$ nicht in h' liegen kann, q.e.d.

Eine genauere Untersuchung der Gitter $\Lambda_v^\perp \cap \Lambda_v$, wobei $\Lambda_v^\perp$ das orthogonale Komplement von Λ_v in $\mathbb{R}^{32}$ bezeichnet, liefert Existenzsätze für Automorphismen von Λ . Wir führen hier entsprechend [4], Satz 4, nur die einfachsten Fälle an.

<u>Satz 1.5</u>. Sei $\gamma(\Lambda_v) \geq 17$. Dann ist $\dim C_v = \gamma(\Lambda_v) - 16$.

<u>Bemerkung</u>. Nach [4], Satz 4, sind nur die Fälle $\gamma(\Lambda_v) = 17,18,20,24,32$ möglich.

<u>Beweis von Satz 1.5</u>. Sei $\{a_1, \dots, a_s\}$ ein maximales System orthogonaler Wurzeln in Λ_v , und sei

$$U := (a_1, \dots, a_s)_R \cap \Lambda_v , \quad V := (a_1, \dots, a_s)_R \cap \Lambda_v .$$

Dann gilt

$$U^*/U = C_v^\perp/C_v = V^*/V \ ,$$

wobei $*$ das duale Gitter bezeichnet. In den Fällen $\gamma(\Lambda_v) = 17,18,20,24,32$ ist $V = \sqrt{2}W$, wobei W das bis auf Äquivalenz eindeutige ganzzahlige unimodulare Gitter mit dem Wurzelsystem A_{15} , $2E_7$, D_{12} , E_8 , ϕ ist. Es folgt

$$\dim C_v^\perp/C_v = \gamma(\Lambda_v) - 2\dim C_v = \dim V^*/V = 32 - \gamma(\Lambda_v)$$

und daher $\dim C_v = \gamma(\Lambda_v) - 16$, q.e.d.

§ 2. Die Automorphismengruppen der Gitter mit maximalem Nachbareffekt

In der Einleitung haben wir den Nachbareffekt $N(\Lambda)$ durch

$$N(\Lambda) := \max\{ \gamma(\Lambda_v) \mid v \in \Lambda_8\}$$

definiert. In diesem Paragraphen wollen wir die Automorphismengruppen der Gitter mit Nachbareffekt 32 bestimmen.

2.1. Sei C ein binärer linearer selbst–dualer doppelt–gerader Code der Länge 32 mit Minimalgewicht 8. Nach Conway und Pless [2] gibt es bis auf Äquivalenz genau fünf solche Codes. Wir bezeichnen sie, [3] folgend, im weiteren mit RM, F, U, QR und G. Wir erinnern zunächst an die Konstruktion dieser Codes.

a) Die Stellenmenge von RM ist $\mathbb{F}_2^5$. Der Code RM besteht aus den Abbildungen φ von $\mathbb{F}_2^5$ in $\mathbb{F}_2$, die als Polynome vom Grad höchstens 2 geschrieben werden können.

b) Die Stellenmenge von F ist die disjunkte Vereinigung $V_1 \cup V_2$ von zwei Exemplaren V_1, V_2 von $\mathbb{F}_2^4$. Der Code F besteht aus Paaren (φ_1,φ_2) von Abbildungen von $\mathbb{F}_2^4$ in $\mathbb{F}_2$. Als linearer Code wird F durch die folgende Basis erzeugt:

$$(x_i x_j, x_k x_\ell)\ ,\ i < j, k < \ell\ ,\ \{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}\ ,$$

$$(x_i,0)\ ,\ (0,x_i)\ ,\ I = 1,2,3,4\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,1)\ .$$

c) Die Stellenmenge von U besteht aus acht Exemplaren $V_\infty, V_0, V_1, \dots, V_6$ der Menge $\{1,2,3,4\}$. Wir schreiben eine Stelle von U als Paar (α,β) mit $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$, $\beta \in \{1,2,3,4\}$. Der Grundraum von U hat daher die Form $\bigoplus_{i\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)} \mathbb{F}_2^4$. Die Elemente von $\bigoplus_{i\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)} \mathbb{F}_2^4$ werden in der Form $h_\infty h_0 \dots h_6$ mit $h_i \subseteq \{1,2,3,4\}$ geschrieben. Weiter bezeichnet $(h_0 h_1 \dots h_6)$ die Menge der zyklischen Vertauschungen von $h_0, h_1, \dots, h_6$. Wir setzen

$$x := \{1,2\}\ ,\ \bar{x} := \{3,4\}\ ,\ y := \{1,3\}\ ,\ \bar{y} := \{2,4\}\ ,\ z := \{1,4\}\ ,$$

$$\bar{z} := \{2,3\}\ ,\ 0 := \phi\ ,\ 1 := \{1,2,3,4\}\ .$$

Mit diesen Bezeichnungen wird U von den Wörtern

$$x(00yxy00)\ ,\ y0z0y0z0\ ,\ 1(1000000)\ ,\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}$$

erzeugt.

d) Die Stellenmenge von QR ist $\{\infty\} \cup \mathbb{F}_{31}$. Der Code QR wird als linearer Code von den Funktionen φ_i, $i = 0,1, \dots, 15$, erzeugt, deren Träger die Form $\{\infty, i + x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{31}^x\}$ haben.

e) Die Stellenmenge von G besteht aus 32 Punkten der Ebene, die in zwei Quadraten zu jeweils 4×4 Punkten angeordnet sind. Wir sprechen im folgenden vom linken und rechten Quadrat. Der Code G wird erzeugt durch die Teilmengen, die aus dem linken Quadrat einen Punkt enthalten und im rechten Quadrat die 7 Punkte enthalten, die auf der waagerechten oder senkrechten Geraden durch den Punkt, der dem Punkt im linken Quadrat entspricht, liegen.Z.B.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & + & + & + \end{array}$$

2.2. Wir ordnen jetzt den in 2.1 betrachteten Codes C gerade unimodulare Gitter $\Lambda(C)$ in $\mathbb{R}^{32}$ zu, die keine Wurzeln haben.

Sei $a_1, \ldots, a_{32}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^{32}$ mit $(a_i,a_i) = 2$, $i = 1, \ldots, 32$. Dann bezeichnet $\phi(C)$ das gerade unimodulare Gitter, das von $a_1, \ldots, a_{32}$ und den Vektoren $\frac{1}{2}\sum_{i\in c} a_i$ für $c \in C$ erzeugt wird. Die Gitter Λ mit $N(\Lambda) = 32$ haben die Form $\Lambda = \Lambda(C) = \phi(C)_w$ mit $w = \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_{32})$ ([4]).

Wir bestimmen zunächst die Nachbarn Λ_v von Λ mit $\gamma(\Lambda_v) = 32$. Dies wurde im wesentlichen in [4], 2.3, durchgeführt. Danach gibt es drei Arten von solchen Nachbarn:

a) $v = 2a_1$, $\Lambda_{2a_1} = \phi(C)$.

b) Es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{L} = \{c_1, \ldots, c_8\}$ mit $c_i \in \mathbb{F}_2^{32}$, $c_1 + \ldots + c_8 = 1$, $|c_i| = 4$, $c_i + c_j \in C$ für alle $i,j \in \{1, \ldots, 8\}$. Eine solche Zerlegung nennen wir im folgenden eine Viererzerlegung in C.

b_1) $v = \sum_{i\in c_1} a_i$, $\qquad$ b_2) $v = (\sum_{i\in c_1} a_i) - 2a_j$ mit $j \in c_1$.

c) In C gibt es ein Wort c mit $|c| = 16$ und $|C_c| = 2^5$. Dabei ist

$$C_c := \{x \in C \mid x \subseteq c\} .$$

$v = \psi_g(\frac{1}{2} \sum_{i \in c} a_i)$, wobei $g \in C$ und ψ_g wie in 1.3 definiert ist.

Die Wurzelsysteme der Gitter Λ_v bestehen aus den folgenden Vektoren:

a) $\pm a_i$, $i = 1, \dots ,32$.

b_1 $\frac{1}{2} \sum_{i \in c_j} \psi_u(a_i)$, $j = 1, \dots ,8$, $u \subseteq c_j$, $|u| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

b_2) $\frac{1}{2} \sum_{i \in c_j} \psi_u(a_i)$, $j = 1, \dots ,8$, $u \subseteq c_j$, $|u| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$.

c) $\psi_g (\frac{1}{4} \sum_{i \in c} \psi_h(a_i))$, $h \in C_c$, $\psi_g (\frac{1}{4} \sum_{i \in 1+c} \psi_h(a_i))$, $h \in C_{1+c}$.

Nach Tabelle 1 in [3] und [3], 2., tritt der Fall b) nur für die Codes RM , F und U und der Fall c) nur für die Codes RM und F auf.

2.3. In diesem Abschnitt bestimmen wir gewisse Automorphismen von Λ , von denen wir in den folgenden Abschnitten zeigen, daß sie $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ erzeugen.

A) Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$. Dann ist ein Automorphismus τ_σ durch

$$\tau_\sigma(a_i) = a_{\sigma(i)} , \ i = 1, \dots ,32 ,$$

gegeben.

B) Sei $c \in C$. Nach 1.3 ist ψ_c ein Automorphismus von Λ.

C) Sei $\mathfrak{L}$ eine Viererzerlegung in C. Wir definieren einen Automorphismus $\eta_{\mathfrak{L}}$ von Λ durch

$$\eta_{\mathfrak{L}}(a_i) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k \in c_j} a_k\Big) - a_i\ , \quad i = 1, \ldots ,32\ ,$$

wobei j durch $i \in c_j$ bestimmt ist.

Es gelten folgende Vertauschungsregeln:

1)
$$\tau_\sigma\, \eta_{\mathfrak{L}}\, \tau_{\sigma^{-1}} = \eta_{\sigma\mathfrak{L}}\ . \tag{2.1}$$

2) Sei $h \in C$ und $\mathfrak{L}$ eine Viererzerlegung in C mit $|h \cap c_j| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ für $c_j \in \mathfrak{L}$. Dann definieren wir einen Automorphismus $\sigma(\mathfrak{L},h)$ von C durch

$$\sigma(\mathfrak{L},h)\big|_{c_j} = \mathrm{id} \quad \text{falls} \quad |h \cap c_j| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$$

$$\sigma(\mathfrak{L},h)\big|_{c_j} = (j_1 j_2)(j_3 j_4) \quad \text{falls} \quad |h \cap c_j| = 2\ ,$$

wobei $c_j = \{j_1,j_2,j_3,j_4\}$ und $h \cap c_j = \{j_1,j_2\}$.

Weiter sei $c(\mathfrak{L},h)$ das Wort in C mit

$$c(\mathfrak{L},h) := h + \Sigma\, c_i ,$$

wobei die Summe über alle $c_i \in \mathfrak{L}$ mit $|h \cap c_i| = 2$ zu erstrecken ist.
Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\eta_{\mathfrak{L}}\, \psi_h\, \eta_{\mathfrak{L}} = \psi_{c(\mathfrak{L},h)} \tau_{\sigma(\mathfrak{L},h)} . \tag{2.2}$$

3) Sei $h \in C$ und $\mathfrak{L}$ eine Viererzerlegung in C mit $|h \cap c_j| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ für $c_j \in \mathfrak{L}$. Sei $u(\mathfrak{L},h) = h + \Sigma\, c_i$, wobei die Summe über alle i mit $|c_i \cap h| = 1$ zu erstrecken ist. Dann gilt

$$\psi_h \eta_{\mathfrak{L}} \psi_h \eta_{\mathfrak{L}} = \eta_{\mathfrak{L}} \psi_{u(\mathfrak{L},h)} . \tag{2.3}$$

4) Seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ zwei Viererzerlegungen in C mit $|c_1 \cap c_1'| = 2$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $c_2 \in \mathfrak{L}$ und $c_2' \in \mathfrak{L}'$ mit

$$c_2 \neq c_1 ,\quad |c_2 \cap c_1'| = 2 ,\quad c_2' \neq c_1' ,\quad |c_2' \cap c_1| = 2$$

und daher $c_1 + c_2 = c_1' + c_2'$. Weiter ist $|c_2 \cap c_2'| = 2$ und $c_1 \cap c_2'$ definiert eine Viererzerlegung $\mathfrak{L}''$. Die Viererzerlegungen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ bewirken eine Zerlegung von 1 in 16 Paare $\{i_1,j_1\}, \dots ,\{i_{16},j_{16}\}$. Sei $\sigma(\mathfrak{L},\mathfrak{L}')$ der Automorphismus $(i_1,j_1) \dots (i_{16},j_{16})$ von C. Dann gilt

$$\eta_{\mathfrak{L}} \eta_{\mathfrak{L}'} = \eta_{\mathfrak{L}''} \tau_{\sigma(\mathfrak{L},\mathfrak{L}')} . \tag{2.4}$$

5) Seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ zwei Viererzerlegungen in C mit $|c_1 \cap c_1'| = 1$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Tripel $c_2,c_3,c_4 \in \mathfrak{L}$ und $c_2',c_3',c_4' \in \mathfrak{L}'$ mit $|c_i \cap c_j'| = 1$. Sei

$$c := c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = c_1' + c_2' + c_3' + c_4' .$$

Für $i \in c$ gibt es genau ein Paar $C(i) \in \mathfrak{L}$, $c(i)' \in \mathfrak{L}'$ mit $c(i) \cap c(i)' = \{i\}$. Es gilt

$$\eta_{\mathfrak{L}}\eta_{\mathfrak{L}'}(a_i) = \psi_u(\tfrac{1}{4} \sum_{j \in c} (a_j)) \text{ mit } u := c(i) + c(i)' . \tag{2.5}$$

Entsprechendes gilt für $i \in c + 1$.

2.4. Die Automorphismen von $\phi(C)$ führen das Wurzelsystem $\{\pm a_1, \ldots, \pm a_{32}\}$ in sich über und sind daher von der Form $\tau_\sigma \psi_u$ mit $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$, $u \in \mathbb{F}_2^{32}$. $\tau_\sigma\psi_u$ ist Automorphismus von Λ genau dann, wenn u in C liegt.

Da die zu den Codes G und QR gehörigen Gitter Λ nur $\phi(C)$ als benachbartes Gitter Λ_v mit $\mathfrak{F}(\Lambda_v) = 32$ haben, gilt der folgende Satz.

Satz 2.1. Die Automorphismengruppe von $\Lambda(C)$ ist für $C = G$ und $C = QR$ gleich dem halbdirektem Produkt von $\mathrm{Aut}(C)$ mit dem Normalteiler $\{\{\psi_c | c \in C\}$. Dabei operiert $\mathrm{Aut}(C)$ entsprechend 2.3. A) auf $\Lambda(C)$.

Nach [2] hat $\mathrm{Aut}(G)$ folgende Struktur. Sei B die Untergruppe der Automorphismen, die das linke Quadrat (in der Bezeichnung von 2.1.e)) in sich überführen, und sei σ der Automorphismus, der entsprechende Punkte des linken und rechten Quadrate miteinander vertauscht. Dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ das direkte Produkt von B und $\{1,\sigma\}$. Die

Gruppe B ist das halbdirekte Produkt von S_6 mit einem 2–elementaren Normalteiler der Ordnung 2^4.

Aut(QR) ist isomorph zu $PSL_2(\mathbb{F}_{31})$.

Sei jetzt C gleich einem der Codes RM , F , U . Dann gibt es Viererzerlegungen $\mathcal{L}$ in C .

Hilfssatz. Zu jedem $\mathcal{L}$ gibt es ein $h \in C$ mit $|h \cap c_j| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ für $c_j \in \mathcal{L}$.

Beweis. Wir benutzen das Balanceprinzip ([3] , S. 66):

Sei $c \subset \mathbb{F}_2^n$ ein selbst–dualer linearer Code und b_1 ein beliebiges Wort in $\mathbb{F}_2^n$. Wir setzen $b_2 := 1 + b_1$ und $C_{b_1} := \{c \in C \mid c \subseteq b_1\}$. Dann gilt

$$|b_1|/2 - \dim C_{b_1} = |b_2|/2 - \dim C_{b_2} . \tag{2.6}$$

Die Projektion von C auf b_1 ist gleich $C_{b_1}^{\perp}$.

Danach gibt es zu zwei beliebig vorgegebenen Stellen i_1, i_2 in $c_1 + c_2$ ein Wort $h \in C$ mit $(c_1 + c_2) \cap h = \{i_1, i_2\}$. Das Wort h leistet das verlangte, wenn wir $i_1 \in c_1$, $i_2 \in c_2$ wählen, q.e.d.

Der Automorphismus ψ_h führt das zu $\mathcal{L}$ gehörige Wurzelsystem vom Typ b_1) in das zu $\mathcal{L}$ gehörige Wurzelsystem vom Typ b_2) über. Weiter führt $\eta_{\mathcal{L}}$ das zu $\mathcal{L}$ gehörige Wurzelsystem vom Typ b_2) in das Wurzelsystem $\{\pm a_1, \ldots, \pm a_{32}\}$ über.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir die drei Codes RM , F , U im einzelnen.

2.5. Wir beginnen mit dem Reed–Muller–Code RM . Ein Wort φ in RM hat genau dann das Gewicht 8, wenn es Produkt von zwei linearen Polynomen ist, d.h. wenn der Träger von φ eine affine Menge der Dimension 3 ist. Zu drei beliebigen Stellen A , B , C gibt es genau eine Stelle $D := A + B + C$, so daß A , B , C , D eine affine Menge der Dimension 2 ist. Es gibt genau 7 affine Mengen der Dimension 3, die A , B , C , D enthalten. Hieraus ist ersichtlich, daß es zu jeder affinen Menge A , B , C , D eine Vierererzerlegung in RM gibt. Umgekehrt ist jede Vierererzerlegung in dieser Weise durch eine affine Menge der Dimension 2 gegeben.

Nach Definition von RM ist klar, daß die affine Gruppe $\mathrm{Aff}_5(\mathbb{F}_2)$ von $\mathbb{F}_2^5$ zu Aut(RM) gehört. Sei andererseits σ ein beliebiger Automorphismus von RM . O.B.d.A. können wir annehmen, daß σ drei vorgegebene Stellen A , B , C fest läßt. Da σ Vierererzerlegungen in Vierererzerlegungen überführt, folgt $\sigma(A + B + C) = A + B + C$, d.h. σ gehört zu $\mathrm{Aff}_5(\mathbb{F}_2)$. Damit ist der wohlbekannte Satz, daß Aut(RM) gleich $\mathrm{Aff}_5(\mathbb{F}_2)$ ist, bewiesen.

Unsere Diskussion zeigt weiter, daß zwei Vierererzerlegungen durch einen Automorphismus von RM in einander übergeführt werden. Die Anzahl der Wurzelsysteme vom Typ b) ist das Doppelte der Anzahl der Vierererzerlegungen, d.h. gleich 310.

Wir betrachten jetzt die Wörter c in RM , die zu einem Wurzelsystem vom Typ c) führen, d.h. $|c| = 16$, $|RM_c| = 32$. Wie man leicht sieht, zerfallen die Wörter vom Gewicht 16 bezüglich Aut(RM) in drei Bahnen, die durch die Polynome x_1 , $x_1x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5$ repräsentiert werden. Nur die Wörter c der ersten Bahn haben die gewünschte Eigenschaft $|RM_c| = 32$, d.h. die Wurzelsysteme vom Typ c) sind durch lineare Polynome gegeben. Ihre Anzahl ist daher gleich $31 \cdot 64$. Für die Anzahl aller Wurzelsysteme erhält man $2295 = 3^3 \cdot 5 \cdot 17$.

Aus der Formel (2.5) sieht man nun, daß die von den in 2.3 definierten Automorphismen erzeugte Gruppe G die Wurzelsysteme transitiv permutiert. G enthält außerdem alle Automorphismen von A , die $\{\pm a_1, \dots, \pm a_{32}\}$ in sich überführen, d. h. es gilt $G = \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Die Ordnung von $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ ergibt sich zu

$$|\mathrm{Aut}(\Lambda)| = |C| \cdot |\mathrm{Aut}(C)| \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17 = 2^{29} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31 .$$

Der in der Einleitung definierte Normalteiler $A = A(\Lambda)$ wird von den Automorphismen ψ_φ mit $\deg \varphi \le 1$ und den Translationen von $\mathbb{F}_2^5$ erzeugt. Für die genauere Strukturbestimmung von G/A verweisen wir auf [1]. G/A ist eine einfache Gruppe vom Chevalley–Typ $D_5(\mathbb{F}_2)$.

2.6. Wir kommen zur Betrachtung des Codes F und bestimmen zunächst die Automorphismengruppe von F . Wir haben folgende Typen von Automorphismen:

a) Seien τ_1 , τ_2 Translationen von $\mathbb{F}_2^4$. Dann ist (τ_1,τ_2) ein Automorphismus von F .

b) Sei $\alpha \in GL_4(\mathbb{F}_2)$ und $\alpha^* = (\alpha^T)^{-1}$ die kontragrediente Matrix. Dann ist (α,α^*) ein Automorphismus von F .

c) Sei $\chi(P_1,P_2) = (P_2,P_1)$ für $P_1,P_2 \in \mathbb{F}_2^4$. Dann ist χ ein Automorphismus von F .

Sei G die Gruppe, die von den Automorphismen a), b), c) erzeugt wird. Dann operiert G auf der Menge der Tripel $\{P_1,P_2,P_3\}$ von Stellen von F in zwei Bahnen H_1 und H_2 . Ein Tripel liegt in H_1 , wenn P_1,P_2,P_3 zur gleichen Komponente von $V_1 \cup V_2$ gehören und zu H_2 , wenn dies nicht der Fall ist. Sei andererseits σ ein beliebiger Automorphismus von F . Nach Tabelle 1 in [3] führt σ die Bahnen H_1 und H_2 in sich über. Nach eventueller Multiplikation mit χ führt σ daher die beiden

Komponenten V_1 und V_2 in sich über. Wie in 2.5 sieht man, daß σ auf V_1 und V_2 als affine Transformationen operiert. Nach Multiplikation mit einem Automorphismus von G können wir annehmen, daß $\sigma|_{V_1} = \mathrm{id}$ und $\sigma|_{V_2} \in GL_4(F_2)$ ist. Da $\sigma|_{V_2}$ auf dem Faktorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 nach den Polynomen vom Grad ≤ 1 trivial operiert, folgt leicht, daß $\sigma|_{V_2}$ und damit σ die Identität ist, d.h. wir haben $G = \mathrm{Aut}(F)$ gezeigt.

Die Viererzerlegungen von F sind durch affine Teilmengen der Dimension 2 in V_1 gegeben. Ihre Anzahl ist gleich 35. Weiter sieht man leicht, daß die einzigen Wörter $c \in F$ mit $|c| = 16$, $|F_c| = 32$ die Form $c = (1,0)$ oder $c = (0,1)$ haben. Hieraus ergibt sich die Anzahl der Wurzelsysteme der Dimension 32 zu $135 = 3^3 \cdot 5$. Die Automorphismen in 2.3 permutieren diese Wurzelsysteme transitiv und erzeugen daher die Automorphismengruppe von Λ. Die Ordnung von $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ ist

$$|\mathrm{Aut}(\Lambda)| = 2^{16} \cdot |\mathrm{Aut}(F)| \cdot 3^3 \cdot 5 = 2^{31} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 .$$

Die Automorphismen von Λ, die den von $\{a_i \mid i \in V_1\}$ erzeugten Vektorraum E_1 in sich überführen, bilden einen Normalteiler N_1 vom Index 2 in $\mathrm{Aut}(\Lambda)$. Die Beschränkung von N_1 auf E_1 liefert eine Faktorgruppe N_2 von N_1 nach dem Normalteiler, der von den Translationen auf V_2 und von den Automorphismen ψ_c mit $c \in F$, $c \subseteq V_2$ erzeugt wird, d.h.

$$|N_2| = 2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 .$$

Sei F_1 die Projektion von F auf V_1. Dann ist N_2 die Automorphismengruppe des Gitters $\phi(F_1)_w$, $w = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} a_i$, in E_1. Die von den Automorphismen ψ_φ mit $\dim \varphi \leq 1$ und den Translationen von V_1 erzeugte Gruppe ist ein Normalteiler von

N_2. Die Faktorgruppe von N_2 nach diesem Normalteiler ist nach [1] eine einfache Gruppe vom Chevalley–Typ $D_4(\mathbb{F}_2)$.

2.7. Wir betrachten jetzt den Code U. Zunächst wollen wir uns einen Überblick über die Wörter von U verschaffen.

Nach dem in 2.2, c) gesagten haben wir eine Untergruppe S in U der Ordnung 2^8, die von der Menge

$$1(1000000) \cup \{\{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\ \{1\}\}$$

erzeugt wird. In jeder Klasse von U/S gibt es genau ein Wort, dessen Komponenten die Form 0, x, y oder z haben. Die folgende Tabelle enthält die 2^8 Wörter dieser Form

00000000		
0(0yx0xy0)	0(zy000yz)	0(z0x0x0z)
x(00yxy00)	y(0z0y0z0)	z(x00z00x)
0(yyzxz0x)	0(yyx0zxz)	0(xzy0yzx)
0(yzz0zzy)	0(yxy0yxy)	0(xxz0zxx)
x(z0zxz0z)	y(0xxyxx0)	z(yy0z0yy)
x(yx0x0xy)	y(x0yyy0x)	z(0zyzyz0)
x(xz0x0zx)	y(y0zyz0y)	z(0xzzzx0)
x(0yzxzy0)	y(zx0y0xz)	z(y0xzx0y)
x(zzy0yx0)	y(00xzxyz)	z(xx0y0zy)
x(zz0xy0y)	y(00zyxzx)	z(xxyz0y0)
x(zyyxyyz)	y(xyzyzyx)	z(xyxzxyx)
x(yzxxxzy)	y(zzxyxzz)	z(zxyzyxz)
xxxxxxxx	yyyyyyyy	zzzzzzzz

Tabelle 2

An Hand von Tabelle 2 können wir uns leicht einen Überblick über die Wörter vom Gewicht 8 in U verschaffen: In jeder Klasse von U/S liegt genau ein Wort, das aus jedem V_i, $i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$, eine Ziffer enthält. In der Klasse von 00000000 liegen 28 Wörter vom Gewicht 8, die der durch 1(1000000) gegebenen Viererzerlegung entsprechen. Jedes der 42 Wörter $h_\infty \dots h_6$ in Tabelle 2 vom Gewicht 8 führt zu 8 Wörtern vom Gewicht 8 durch Übergang von h_i zu $\bar{h}_i$ falls $h_i \neq 0$. Insgesamt haben wir 620, d.h. alle, Wörter vom Gewicht 8 gefunden.

Wir bestimmen jetzt die Automorphismengruppe von U .

Jedem der 256 Wörter $h = h_\infty h_0 \dots h_6$ mit Komponenten in $\{0,x,y,z\}$ ordnen wir einen Automorphismus σ_h zu, der alle V_i in sich überführt: $\sigma_h | V_i$ ist die Identität, wenn $h_i = 0$ ist, $\sigma_h | V_i$ vertauscht die Ziffern von h_i und $\bar{h}_i$, wenn $h_i \neq 0$ ist .

Wir bezeichnen die Gruppe der Automorphismen von U , welche $V_\infty, \dots, V_6$ in sich überführen mit G_2 . Aus Tabelle 2 liest man ab, daß jedes $\sigma \in G_2$ die Komponenten x,y,z in sich oder in die dualen $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ überführt. Das wird nur von den Permutationen (1), (12) (34), (13) (24), (14) (23) geleistet. Weiter liegt
$w := \{1\} \dots \{1\} + \sigma\{1\} \dots \{1\}$ in U und ist gleich einem der Wörter in Tabelle 2. Es folgt $\sigma = \sigma_w$.

Weiter untersuchen wir, welche Permutationen von $V_\infty, V_0, \dots, V_6$ zu Automorphismen von U führen. Die Gruppe dieser Automorphismen bezeichnen wir mit G und setzen $G_1 := G/G_2$. Die Stellen von U bezeichnen wir im folgenden durch Paare (α,β) mit $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$, $\beta \in \{1,2,,3,4\}$. Nach Konstruktion von U ist klar, daß die zyklische Vertauschung von $V_0, \dots V_6$ einen Automorphismus liefert, der in Zyklendarstellung wie folgt zu schreiben ist:

$$\{((0,\beta)(1,\beta)(2,\beta)(3,\beta)(4,\beta)(5,\beta)(6,\beta)) \mid \beta \in \{1,2,3,4\}\} .$$

Wie man leicht nachrechnet, ist auch

$$((\infty,1)(0,1)(6,1)(3,1)(4,1)(5,1)(2,1)(1,1))$$
$$((\infty,2)(0,2)(6,2)(3,3)(4,4)(5,3)(2,2)(1,2))$$
$$((\infty,3)(0,4)(6,4)(3,2)(4,3)(5,2)(2,4)(1,4))$$
$$((\infty,4)(0,3)(6,3)(3,4)(4,2)(5,4)(2,3)(1,3))$$

ein Automorphismus von U . Wir bezeichnen die Elemente von G_1 als Permutationen der Menge $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$ und haben

$$\gamma := (01 \dots 6)\ ,\ \delta := (\infty\ 0634521) \in G_1\ .$$

Es gilt

$$\gamma(t) = t + 1\ ,\ \delta(t) = \frac{1}{t-1}\ \text{für}\ t \in \{\infty, 0, \dots, 6\}\ .$$

γ und δ erzeugen daher die Gruppe G_1' aller gebrochen linearen Transformationen $\frac{at+b}{ct+d}$ von $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$ mit $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm 1$, d.h. $G_1' = PGL_2(\mathbb{F}_7)$. Sei jetzt σ ein beliebiges Element von G_1 . Da G_1' dreifach transitiv ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß σ drei Stellen fest läßt. Ein Blick auf Tabelle 2 zeigt, daß dies nur für die Identität möglich ist, d.h. wir haben $G_1 = G_1'$.

G operiert auf den Tripeln von Stellen in drei Bahnen je nach dem, ob die drei Stellen in einer, zwei oder drei der Mengen $V_\infty, \dots, V_6$ liegen. Diese drei Bahnen gehören zu drei verschiedenen Konfigurationen in Tabelle 1 von [3]. Der erste Fall führt zu Viererzerlegungen, d.h. es gibt nur die eine durch $V_\infty, \dots, V_6$ gegebene Viererzerlegung in U . Sei jetzt σ ein beliebiger Automorphismus von U . Dann ist $\sigma V_\infty, \dots, \sigma V_6$ eine Viererzerlegung, d.h. eine Permutation von $V_\infty, \dots, V_6$ und σ gehört zu G . Es folgt

$$|\mathrm{Aut}(U)| = 256 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2^{12} \cdot 3 \cdot 7\ . \tag{2.7}$$

(2.7) findet sich ebenso wie Berechnung der Ordnungen der Automorphismengruppen der übrigen Codes C aus 2.1 in [2].

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ über. Es gibt drei Wurzelsysteme der Dimension 32. Daher ist

$$|\mathrm{Aut}(\Lambda)| = 2^{16} \cdot |\mathrm{Aut}(U)| \cdot 3 = 2^{28} \cdot 3^2 \cdot 7 .$$

Der Normalteiler $A(\Lambda)$ von $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, der alle drei Wurzelsysteme in sich transformiert, hat den Index 6. Daher ist $\mathrm{Aut}(\Lambda)/A(\Lambda)$ die symmetrische Gruppe vom Grad 3. $A(\Lambda)$ ist das halbdirekte Produkt von der Untergruppe von U, die aus den Wörtern besteht, die in jedem V_i eine gerade Anzahl von Stellen hat, mit der Gruppe $\mathrm{Aut}(U)$.

§ 3. Die Funktion g_Λ für Gitter mit maximalem Nachbardefekt

In diesem Paragraphen wollen wir die Funktion g_Λ für die Gitter $\Lambda = \phi(C)_w$, $w = \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_{32})$ berechnen.

3.1. Wir verschaffen uns zunächst einen Überblick über die Vektoren der Quadratlängen 4 und 8 in Λ. Es gibt drei Typen von Vektoren der Quadratlänge 4:

a) $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2}$, $\{i_1,i_2\} \subset \{1, \dots, 32\}$,

b) $\frac{1}{2} \sum\limits_{i \in h} \varepsilon_u(i) a_i$ für $h \in C_8$, $u \subseteq h$, $|u| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$,

c) $\frac{1}{4} \sum\limits_{i=1}^{32} \varepsilon_c(i) a_i$ für $c \in C$.

Es gibt acht Typen von Vektoren der Quadratlänge 8:

a) $\pm 2a_i$, $i = 1, \dots, 32$,

b) $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm a_{i_3} + a_{i_4}$, $\{i_1,i_2,i_3,i_4\} \subset \{1,2, \dots, 32\}$,

c) $\frac{1}{2} \sum\limits_{i \in h} \varepsilon_u(i) a_i$ für $h \in C_{16}$, $u \subseteq h$, $|u| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$,

d) $\pm a_j + \sum\limits_{i \in h} \varepsilon_u(i) a_i$ für $h \in C_{12}$, $u \subseteq h$, $|u| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, $j \in 1 + h$,

e) $\varepsilon_u(j)a_j + \frac{1}{2} \sum_{i \in h} \varepsilon_u(i)a_i$ für $h \in C_8$, $u \subseteq h$, $|u| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, $j \in h$,

f) $\pm a_{j_1} \pm a_{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{i \in h} \varepsilon_u(i)a_i$ für $h \in C_8$, $u \subseteq h$, $|u| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $j_1, j_2 \in 1 + h$,

g) $\varepsilon_c(j_1)a_{j_1} - \varepsilon_c(j_2)a_{j_2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} \varepsilon_c(i)a_i$ für $c \in C$, $\{j_1, j_2\} \subset \{1,2, \ldots ,32\}$,

h) $-\varepsilon_c(j_1)a_{j_1} - \ldots - \varepsilon_c(j_4)a_{j_4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} \varepsilon_c(i)a_i$
für $c \in C$, $\{j_1, j_2, j_3, j_4\} \subset \{1,2, \ldots ,32\}$.

3.2. Wir berechnen nun $h(v)$ für $v \in \Lambda_8$ und stellen die Anzahl der v mit festem $h(v)$ fest. Durch Anwendung eines Automorphismus vom Typ ψ_c für $c \in C$ transformieren wir v auf eine Normalform. Dabei benutzen wir das Balanceprinzip (2.6). Danach lassen sich in den Fällen a), b), d) – h) die auftretenden Vorzeichen fixieren. Wir zeigen das im Falle d): Sei $g := \{j\} \cup h$. Dann ist nach dem Balanceprinzip die Projektion von C in $C_g^{\perp}$ surjektiv. Wegen $C_g = \{1,h\}$ gibt es zu jedem $u' \subseteq g$, $|u' \cap h| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ ein $c \in C$ mit $c \cap g = u'$. Dann leistet $\psi_{u'}$ das verlangte. Wir erhalten folgende Normalformen:

a) $2a_i$, $i = 1, \ldots ,32$,

b) $a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + a_{i_4}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subset \{1,2, \ldots ,32\}$,

d) $a_{j_1} - a_{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{i \in h} a_i$ für $h \in C_{12}$, $j_1 \in 1+h$, $j_2 \in h$,

e) $a_{j_1} - a_{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{i \in h} a_i$ für $h \in C_8$, $\{j_1,j_2\} \subset h$,

f) $a_{j_1} + a_{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{i \in h} a_i$ für $h \in C_8$, $\{j_1,j_2\} \subset 1+h$,

g) $a_{j_1} - a_{j_2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} a_i$ für $\{j_1,j_2\} \subset \{1,2, \dots ,32\}$,

h) $-a_{j_1} - \dots - a_{j_4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} a_i$ für $\{j_1, \dots ,j_4\} \subset \{1,2, \dots ,32\}$.

Im Falle c) ist jedoch im allgemeinen $\dim C_h \neq 1$, und es gibt $u \subset h$ mit $|u| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ und $u \not\subset C_h^{\perp}$.

Wir berechnen jetzt die Anzahl $A(n)$ der $v \in \Lambda_8$ mit gegebenem Wert von $n = h(v)$ in den Fällen a) – h). Sei M_v die Menge der $x \in \Lambda_4$ mit $(x,v) = 4$.

a) $M_v = \{a_i \pm a_j \mid j \neq i\}$, $h(v) = 62$, $A_a(62) = 64$

b) Sei $\mathscr{H}(i_1,i_2,i_3,i_4) := \{x \in C_8 \mid \{i_1,i_2,i_3,i_4\} \subset x\}$,
$H(i_1,i_2,i_3,i_4) := |\mathscr{H}(i_1,i_2,i_3,i_4)|$.

Dann ist

$$M_v = \{a_{i_\kappa} + a_{i_\lambda} \mid \{\kappa,\lambda\} \subset \{1,2,,3,4\}\} \cup \{\tfrac{1}{2} \sum_{i \in x} \varepsilon_u(i) a_i \mid x \in \mathscr{H}(i_1,i_2,i_3,i_4) \,,$$

$$u \subset x - \{i_1,i_2,i_3,i_4\} \,,\ |u| = 2\}$$

und daher

$$h(v) = |M_v| = 6 + 8H(i_1,i_2,i_3,i_4) \,.$$

Sei $B_1(H)$ die Anzahl der (ungeordneten) Quadrupel $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}$ mit $H(i_1,i_2,i_3,i_4) = H$. Dann ist

$$A_b(6 + 8H) = 2^4 \cdot B_1(H) \,.$$

c) Sei $H(c) = \dim C_h$ und $B_2(H)$ die Anzahl der $h \in C_{16}$ mit $H(c) = H$. Wir betrachten zunächst den Fall $u \in C_h^{\perp}$. Sei o.B.d.A. $v = \frac{1}{2} \sum\limits_{i \in h} a_i$. Dann besteht M_v aus den Vektoren

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i \in x} a_i \,,\ x \in C_{h,8} \,,\ \text{ und } \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} \varepsilon_y(i) a_i \,,\ y \in C_{1+h} \,.$$

Daher wird nach dem Balanceprinzip

$$h(v) = 2^{H(c)+1} - 2$$

und

$$A_c(2^{H+1}-2) = 2^{16-H}B_2(H) .$$

Sei jetzt $u \notin C_h^{\perp}$. Dann gibt es ein $x \in C_{h,8}$ mit $|u \cap x| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. M_v besteht aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\sum_{i \in x} \varepsilon_u(i)a_i \quad \text{mit} \quad x \in C_{h,8} , \quad |u \cap x| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) .$$

Daher gilt

$$h(v) = 2^{H(c)-1} - 2$$

und

$$A_{c'}(2^{H-1}-2) = 2^{16-H}(2^{H-1}-1)B_2(H) .$$

d) Sei $\mathscr{H}(h,j) := \{x \in C_8 \mid |h \cap x| = 6 , \ j \in x\}$, $H(h,j) := |\mathscr{H}(h,j)|$ und $B_3(H)$ die Anzahl der Paare $h \in C_{12}$, $j \in 1 + h$ mit $H(h,j) = H$. Wir schreiben v in der Form $v = \frac{1}{2}\left[-a_{i_1} + \dots + a_{i_{12}}\right] + a_j$ mit $\{i_1, \dots, i_{12}\} = h$. Dann besteht M_v aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\sum_{i \in x} \varepsilon_y(i)a_i , \quad x \in \mathscr{H}(h,j) , \quad y = \{i_1\} \cup (x - h - \{j\}) .$$

Daher gilt

$$h(v) = H(h,j)$$

und

$$A_d(H) = 2^{12} B_3(H) .$$

e) $v = \frac{1}{2}(3a_{i_1} - a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_8})$, $\{i_1, \dots, i_8\} = h$. M_v besteht aus den Vektoren $a_{i_1} - a_{i_2}$, $a_{i_1} + a_{i_k}$, $\frac{1}{2}(a_{i_1} + \dots + a_{i_8})$, $\frac{1}{2}(a_{i_1} + \dots + a_{i_8}) - a_{i_2} - a_{i_k}$, $k = 3, \dots, 8$. Daher gilt $h(v) = 14$, $A_e(14) = 2^{10} \cdot 620$.

f) Sei $\mathscr{K}(h,j_1,j_2) := \{x \in C_8 \,\big|\, |h \cap x| = 4, j_1, j_2 \in x\}$. $H(h,j_1,j_2) := |\mathscr{K}(h,j_1,j_2)|$ und $B_4(H)$ die Anzahl der Tripel h,j_1,j_2 mit $H(h,j_1,j_2) = H$. Dann besteht M_v aus den Vektoren

$$a_{j_1} + a_{j_2} , \frac{1}{2}\sum_{i \in h} a_i , \frac{1}{2}\sum_{i \in x} \varepsilon_y(i) a_i , x \in \mathscr{K}(h,j_1,j_2) , y \subset x - h - \{j_1,j_2\} , |y| \in \{0,2\} .$$

Daher gilt

$$h(v) = 2H(h,j_1,j_2)$$

und

$$A_f(2H + 2) = 2^9 B_4(H) .$$

g) $M_v = (a_{j_1} - a_{j_2}, \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} a_i)$, $h(v) = 2$,

$$A_g(2) = 2^{21} \cdot 31 .$$

h) Wir verwenden die Bezeichnungen von b). M_v besteht aus den Vektoren

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in x} \varepsilon_y(i) a_i \, , \quad y = \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \, ,$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{32} \varepsilon_x(i) a_i \, , \quad x \in \mathscr{H}(i_1, i_2, i_3, i_4) \, .$$

Daher gilt

$$h(v) = 2H(i_1, i_2, i_3, i_4)$$

und

$$A_h(2H) = 2^{16} B_1(H) .$$

3.3. Es bleibt die Berechnung der Funktionen $B_i(H)$ durchzuführen. Dies wurde von Frau C. Golisch mit Hilfe eines Personal–Computers geleistet. Das Ergebnis lautet wie folgt:

H\C	RM	F	U	QR	G
0	0	$2^9 \cdot 15$	$2^9 \cdot 21$	$2^3 \cdot 1395$	$2^5 \cdot 345$
1	$2^5 \cdot 1085$	$2^5 \cdot 665$	$2^4 \cdot 861$	$2^4 \cdot 775$	$2^3 \cdot 1515$
2	0	0	$2^8 \cdot 21$	$2^4 \cdot 465$	$2^6 \cdot 135$
3	0	$2^6 \cdot 105$	$2^4 \cdot 357$	$2^3 \cdot 465$	$2^3 \cdot 375$
4	0	0	0	$2^3 \cdot 155$	$2^5 \cdot 25$
5	0	0	$2^4 \cdot 21$	0	$2^3 \cdot 45$
6	0	0	0	0	0
7	$2^3 \cdot 155$	$2^3 \cdot 35$	2^3	0	0

Tabelle 3

Werte von B_1

H\C	RM	F	U	QR	G
1	$2^7 \cdot 217$	$2^{11} \cdot 7$	$2^6 \cdot 217$	$2^6 \cdot 217$	$2^7 \cdot 111$
2	0	$2^5 \cdot 645$	$2^6 \cdot 321$	$2^2 \cdot 5115$	$2^3 \cdot 2505$
3	$2^3 \cdot 1085$	$2^5 \cdot 35$	$2^2 \cdot 511$	$2 \cdot 1085$	$2^6 \cdot 35$
4	0	$2^2 \cdot 105$	$2 \cdot 21$	0	$2 \cdot 15$
5	$2 \cdot 31$	2	0	0	0

Tabelle 4

Werte von B_2

H\C	RM	F	U	QR	G
0	0	$2^9 \cdot 105$	$2^{12} \cdot 21$	$2^6 \cdot 1395$	$2^6 \cdot 1365$
2	$2^8 \cdot 1085$	$2^9 \cdot 385$	$2^{10} \cdot 119$	$2^5 \cdot 3565$	$2^6 \cdot 1805$
4	0	0	$2^9 \cdot 105$	$2^7 \cdot 465$	$2^7 \cdot 495$
6	0	$2^8 \cdot 105$	$2^8 \cdot 63$	$2^5 \cdot 465$	$2^6 \cdot 165$
8	0	0	0	0	$2^6 \cdot 15$

Tabelle 5

Werte von B_3

H\C	RM	F	U	QR	G
0	$2^8 \cdot 465$	$2^{12} \cdot 15$	$2^9 \cdot 117$	$2^7 \cdot 465$	$2^4 \cdot 3915$
2	0	$2^6 \cdot 1365$	$2^4 \cdot 4641$	$2^5 \cdot 2325$	$2^7 \cdot 525$
4	0	0	$2^7 \cdot 231$	$2^6 \cdot 465$	$2^5 \cdot 1125$
6	$2^4 \cdot 3255$	$2^4 \cdot 1365$	$2^4 \cdot 441$	$2^4 \cdot 465$	$2^4 \cdot 255$
8	0	0	0	0	$2^4 \cdot 75$
10	0	0	$2^4 \cdot 21$	0	0
12	0	0	0	0	0
14	0	$2^5 \cdot 15$	0	0	0

Tabelle 6

Werte von B_4

Hieraus ergeben sich die Funktionen g_Λ entsprechend Tabelle 1.

Literaturverzeichnis

[1] M. Broué, M. Enguehard, Une famille infinie de formes quadratiques; leurs groupes d'automorphismes, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 6, 17–52 (1973)

[2] J.H. Conway, V. Pless, On the enumeration of self–dual codes. J. combinatorial theory, Series A, 28, 26–53 (1980)

[3] H. Koch, On self–dual doubly even codes of length 32, J. combinatorial theory, Series A, 51, 63–76 (1989)

[4] H. Koch, B.B. Venkov, Ganzzahlige unimodulare Gitter in euklidischen Räumen. J. reine angew. Math. 398, 144–168 (1989)

[5] J–P. Serre, Cours d'Arithmétique. Presses Univ. France, Paris 1970

[6] B.B. Venkov, Gerade unimodulare Gitter der Dimension 32, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 116, 44–55 (1982) (russisch)

[7] B.B. Venkov, Gerade unimodulare Gitter der Dimension 32, II. Zap. Nauchn. Sem. LOMI 134, 34–58 (1984) (russisch)