PÉRIODES P-ADIQUES ET LOIS DE RÉCIPROCITÉ EXPLICITES

Denis Bonois

Max-Planck-Arbeitsgruppe
„Algebraische Geometrie und
Zahlentheorie"
an der Humboldt Universität zu Berlin
Jägerstraße 10-11
10117 Berlin
GERMANY

Université Pédagogique
Département de Mathématiques
Mojka 48
191 186 Saint-Petersbourg

RUSSIE

MPI 96-22

PÉRIODES P-ADIQUES ET LOIS DE RÉCIPROCITÉ EXPLICITES

DENIS BENOIS

INTRODUCTION

Soit L un corps local de caractéristique 0, à corps résiduel de caractéristique p. On note $\bar{L}$ une clôture algébrique de L et on pose $G_L = \mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. Soit μ_{p^n} le groupe des racines de l'unité d'ordre divisible par p^n. Si L contient μ_{p^n}, on définit le symbole de Hilbert comme étant l'accouplement

$$(\, , \,)_{p^n} \, : \, L^* \times L^* \longrightarrow \mu_{p^n} \, ,$$

$$(\alpha, \beta)_{p^n} = \sqrt[p^n]{\beta}^{\,\rho_L(\alpha)} / \sqrt[p^n]{\beta} \, ,$$

où $\rho_L \, : \, L^* \to G_L^{ab}$ est l'application de réciprocité.

Les lois de réciprocité classiques donnent l'expression de ce symbole en termes du corps L. Des résultats généraux dans cette direction ont été démontrés par H. Brückner [Br], S.V. Vostokov [V] et S. Sen [S] . Rappelons le résultat de S. Sen.

Notons O_L l'anneau des entiers de L et choisissons une uniformisante π de O_L. Soit Ω_L le O_L-module des $\mathbf{Z}_p$-différentielles de l'anneau O_L et soit $d \, : \, O_L \to \Omega_L$ l'application canonique. On sait que Ω_L est engendré par $d\pi$ et que son annulateur est la différente $\mathfrak{D}_L$ de l'extension $L/\mathbf{Q}_p$. Si $\alpha \in O_L$ et si $d\alpha = a \, d\pi$, on voit que a est bien défini modulo $\mathfrak{D}_L$. On pose $\frac{d\alpha}{d\pi} = a$ et $D\log(\alpha) = \alpha^{-1} \frac{d\alpha}{d\pi}$.

Fixons un générateur ζ_{p^n} de μ_{p^n}. Soit $v_p \, : \, L^* \to \mathbf{R}$ la valuation de L normalisée par $v_p(p) = 1$.

Théorème (S. SEN). *Soient $\alpha, \beta \in L^*$ et supposons que $v_p(\beta - 1) > \frac{2}{p-1}$. Alors on a*

$$(\alpha, \beta)_{p^n} = \zeta_{p^n}^{\frac{1}{p^n} \mathrm{Tr} \left(\frac{D\log(\alpha)}{D\log(\zeta_{p^n})} \log(\beta) \right)} \, ,$$

où Tr *désigne la trace de L sur $\mathbf{Q}_p$.*

Remarquons aussi que R. F. Coleman [Col] a donné une formule complète pour le symbole dans les corps cyclotomiques. Cette formule implique la loi de S. Sen pour $L = \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$.

Soit maintenant F un groupe formel de dimension d et de hauteur finie h défini sur l'anneau des entiers d'un corps local K. Soit $E_{F,n}$ le groupe de p^n-torsion de F et soit L/K une extension finie qui contient les coordonnées des éléments de $E_{F,n}$. On note $\mathfrak{M}_L$ l'ideal maximal de O_L et $F(\mathfrak{M}_L)$ le groupe des $\mathfrak{M}_L$-points de F. On définit l'analogue du symbole de Hilbert comme étant l'accouplement:

$$(\, , \,)_{F,n} : L^* \times F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow E_{F,n} \, ,$$

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \gamma^{\rho_L(\alpha)} -_F \gamma \, ,$$

où γ est une racine de l'équation $[p^n](x) = \beta$. Si F est le groupe multiplicatif, cet accouplement coincide avec le symbole de Hilbert. A. Wiles [W] et F. Destrempes [D] ont donné la loi de réciprocité explicite pour les groupes formels de Lubin-Tate, généralisant ainsi les résultats d'Iwasawa et de Sen. L'approche de R. F. Coleman à ce contexte a été développée par E. de Shalit [dSh]. V.A. Kolyvagin [Ko] a relié les formules explicites à certains invariants galoisiens.

Le but de cet article est de démontrer une généralisation des formules de S. Sen pour tout les groupes formels p-divisibles. Soit M_F le module de Dieudonné de la fibre spéciale de F. On associe à F un module filtré (D_F, D_F^1), où $D_F = M_F \otimes K$ et où $D_F^1 \subset D_F$ s'identifie à l'espace des formes différentielles F-invariantes (cf. [F], [C]). On peut donner une interprétation élémentaire de D_F: il s'identifie au quotient de l'espace des F-formes différentielles de seconde espèce par celui des formes exactes.

Choisissons une base $\omega_1, ..., \omega_h$ de D_F de sorte que $\omega_1, ..., \omega_d$ forment une base de $D_F^1(O_K)$ et posons $\lambda_{\omega_i} = \int \omega_i$. On voit que les séries $\lambda_{\omega_1}, ..., \lambda_{\omega_d}$ sont des logarithmes de F. Le groupe $E_{F,n}$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^h$. Fixons une base $\xi_1 = (\xi_1^{(1)}, ..., \xi_1^{(d)}), ..., \xi_h = (\xi_h^{(1)}, ..., \xi_h^{(d)})$ de $E_{F,n}$ et posons

$$\lambda'_{\omega_i}(\xi_j)\frac{d\xi_j}{d\pi} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \lambda_{\omega_i}}{\partial x_k}(\xi_j)\,\frac{d\xi_j^{(k)}}{d\pi}$$

Introduisons la matrice suivante

$$\Theta_{L,n} = p^n \begin{pmatrix} \lambda'_{\omega_1}(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda'_{\omega_1}(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \cdots & \lambda'_{\omega_1}(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda'_{\omega_d}(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda'_{\omega_d}(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \cdots & \lambda'_{\omega_d}(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_1) & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_2) & \cdots & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{\omega_h}(\xi_1) & \lambda_{\omega_h}(\xi_2) & \cdots & \lambda_{\omega_h}(\xi_h) \end{pmatrix}.$$

Posons $X_{L,n} = (X_{ij}) = \Theta_{L,n}^{-1}$. Nous obtenons le résultat suivant (cf. théorème 2.5.1).

Théorème. *Il existe une constante $c(F)$ telle que, si $v_p(\beta) = \min\{v_p(\beta_1), ..., v_p(\beta_d)\} > c(F)$, alors*

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{d} [\mathrm{Tr}\,(X_{ij}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\pi}\lambda_{\omega_j}(\beta))](\xi_i).$$

Remarquons que $c(F)$ ne dépend pas de n. Si K est non ramifié , on a $c(F) = \frac{4}{p-1}$.

Dans le cas multiplicatif (de Lubin-Tate) cette formule coincide avec la loi de S. Sen (de A. Wiles [W] et F. Destrempes [D]). Elle donne aussi une forme explicite des invariants de V.A. Kolyvagin.

Dans [BK] , S. Bloch et K. Kato ont démontré le théorème de comparaison entre l'application de Coates-Wiles et celle de Fontaine-Messing. Leur résultat peut être vu comme la loi de réciprocité pour les motifs $\mathbf{Z}(r)$ (si $r = 1$, on retrouve le cas multiplicatif). K. Kato [K] a donné la loi de réciprocité pour $T_F^{\otimes r}$ généralisant le résultat de A. Wiles dans cette direction.

La méthode de cet article est proche de celle de K. Kato [K]. Au lieu des cohomologies cristallines nous utilisons les constructions explicites des périodes p-adiques [Co2], [F4], [C]. On peut utiliser cette métode pour traiter le cas des variétés abéliennes.

Remarquons aussi que la structure des formules de Brückner-Vostokov est absolument différentes (mais cf. [Ku]). V.A. Abrashkin m'a communiqué qu'il a généralisé leur résultat aux groupes formels sur un corps non ramifié [A2] (cf. aussi [A1]). Dans son travail la construction des périodes joue aussi un rôle essentiel.

Ce travail a été fait pendant un séjour à l'Université Bordeaux I. Je voudrais remercier le département de mathématiques et informatique de l'université et CIES pour leur hospitalité et soutien financier.[1] Une partie de cet article a été écrite pendant un séjour au "Arbeitsgruppe AG und Zahlentheorie "(MPG, Berlin) que je remercie également. Je voudrais remercier aussi S.V. Vostokov pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Notations principales.

K - un corps local de caractéristique 0,
π_0 -une uniformisante de K,
$\bar{K}$ - la clôture algébrique de K,
C - le complété de $\bar{K}$,
v_p - la valuation discrète sur C telle que $v_p(p) = 1$,
O_M - l' anneau des entiers du corps de valuation discrète M ($M = K, L, C$),
M_0 - la sous-extension maximale non-ramifiée de M,
$\mathfrak{M}_M$ - l'ideal maximal de O_M,
$\mathfrak{D}_M$ - la différente de $M/\mathbf{Q}_p$,
G_M - le groupe de Galois absolu de M,
$a = \frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{D}_K)$,
μ_{p^n} - le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité,
ζ_{p^n} - une racine primitive p^n-ième de l'unité,
χ_M - le caractère cyclotomique de M,
L - une extension finie de K,
π - une uniformisante de L,
r=max$\{k \mid \mu_{p^k} \subset L\}$,
Tr - la trace de L sur $\mathbf{Q}_p$,
F - un groupe formel p-divisible sur O_K,
T_F - le module de Tate de F,
t_F - l'espace tangent de F.

1. Préliminaires

1.1. Symboles locaux (cf.[Se], ch.14). Dans ce paragraphe L est un corps local à corps résiduel fini de caractéristique p, $\bar{L}$ est une clôture séparable de L et $G_L = \mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. Si M est un G_L-module, on note $H^i(G_L, M)$, $i \in \mathbf{N}$ les groupes de cohomologie de G_L à coefficients dans M. On sait que $H^0(G_L, \bar{L}^*) = L^*$ et que $H^1(G_L, \bar{L}^*) = 0$. Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(L) = H^2(G_L, \bar{L}^*)$ s'identifie à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

On note μ_m le groupe des racines m-ièmes de l'unité de $\bar{L}$. Si $\mathrm{car}(L) \nmid m$, on a une suite exacte

$$0 \to \mu_m \to \bar{L}^* \xrightarrow{m} \bar{L}^* \to 0. \tag{1.1}$$

Elle induit une suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^2(G_L, \mu_m) \to \mathrm{Br}(L) \xrightarrow{m} \mathrm{Br}(L) \to 0,$$

[1]Pendant le travail sur cet article j'ai bénéficié aussi de l'aide financière de Volkswagen Forschung et de RFFI.

d'où $H^2(G_L, \mu_m) \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Rappelons la définition du symbole local. La suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

induit un homomorphisme

$$\delta : H^1(G_L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(G_L, \mathbf{Z}).$$

En composant δ avec le produit cohomologique

$$H^0(G_L, \bar{L}^*) \times H^2(G_L, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{cup}} H^2(G_L, \bar{L}^*) \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

on obtient l'accouplement

$$(\,,\,) : L^* \times H^1(G_L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On peut considérer cet accouplement comme un système d'accouplement modulo m :

$$(\,,\,)_m \ : L^* \times H^1(G_L, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Les applications $(\,,\,)_{p^n}$ induisent, par passage à la limite, un accouplement

$$(\,,\,)_{p^\infty} \ : L^* \times H^1_c(G_L, \mathbf{Z}_p) \longrightarrow \mathbf{Z}_p,$$

où $H^1_c(G_L, \mathbf{Z}_p)$ désigne le groupe des caractères continus de G_L. On peut donner une interprétation du $(\,,\,)_m$ en termes de la théorie du corps de classes. Soit

$$\rho_L : L^* \longrightarrow G_L^{ab}.$$

l'application de réciprocité. Le résultat suivant est bien connu (cf. [Se], chap. 14, prop. 3).

Proposition 1.1.1. *Si $\alpha \in L^*$ et $\psi \in H^1(G_L, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ on a*

$$(\alpha, \psi)_m = \psi(\rho_L(\alpha)).$$

Supposons L de caractéristique 0. Alors, pour tout m, la suite (1.1) induit un homomorphisme

$$\delta_m \ : L^* = H^0(G_L, \bar{L}^*) \longrightarrow H^1(G_L, \mu_m).$$

En composant δ_m avec le produit

$$H^1(G_L, \mu_m) \times H^1(G_L, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(G_L, \mu_m) \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$$

on obtient un homomorphisme

$$L^* \times H^1(G_L, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

On sait qu'il coincide avec le symbole $(\,,\,)_m$.

On note O_L l'anneau des entiers de L, et U_L le groupe des unités de O_L. On note $\mathfrak{M}_L$ l'ideal maximal de O_L et on pose

$$\mathfrak{M}_{L,1} = \{x \in \mathfrak{M}_L \mid v_p(x) > \frac{1}{p-1}\}.$$

On sait que pour tout $x \in \mathfrak{M}_{L,1}$ la série

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

converge vers un élément de U_L. L'application

$$\exp : \mathfrak{M}_{L,1} \longrightarrow U_L$$

ainsi définie est un homomorphisme.

Soit

$$\chi_L : G_L \longrightarrow \mathbf{Z}_p^*$$

le caractère qui donne l'action de G_L sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p (le caractère cyclotomique). Posons $r = \max\{k \,|\mu_{p^k} \subset L\}$. On dispose d'un caractère additif:

$$\kappa_L = \frac{\log \chi_L}{p^r} : G_L \longrightarrow \mathbf{Z}_p\,.$$

Notons $\kappa_{L,n}$ la reduction de κ_L modulo p^n.

Proposition 1.1.2. *Si $\alpha \in \mathfrak{M}_{L,1}$, on a*

$$(\exp(\alpha), \kappa_{L,n})_{p^n} = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}(\alpha) \pmod{p^n}\,.$$

Remarque. Comme $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^r}) \subset L$, on a $v_p(\mathfrak{D}_L) \geqslant v_p(\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^r})}) = r - \frac{1}{p-1}$. On obtient maintenant que $\frac{\alpha}{p^r} \in \mathfrak{D}_L^{-1}$ d'où $\frac{\mathrm{Tr}(\alpha)}{p^r} \in \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. Proposition 1.1.1 montre que

$$(\exp(\alpha), \kappa_{L,n})_{p^n} = \frac{1}{p^r} \log \chi_L(\rho_L(\exp(\alpha))) \pmod{p^n}\,.$$

En utilisant le fait que ${\zeta_{p^n}}^{\rho_{\mathbf{Q}_p}(x)} = {\zeta_{p^n}}^{x^{-1}}$, on vérifie facilement que

$$\zeta_{p^n}^{\rho_L(\exp(\alpha))^{-1}} = \zeta_{p^n}^{\exp(-\mathrm{Tr}(\alpha))}\,.$$

On a alors,

$$\chi_L(\rho_L(\exp(\alpha))) = \exp(-\mathrm{Tr}(\alpha))\,,$$

d'où la proposition.

Corollaire 1.1.3. *Si $\alpha \in \mathfrak{M}_{L,1}$, on a*

$$(\exp(\alpha), \kappa_L)_{p^\infty} = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}(\alpha).$$

1.2. Le cas de caractéristique p. Soient K un corps local de caractéristique p, $\bar{K}$ sa clôture séparable, $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\mathbf{Rep}(G_K)$ la catégorie de $\mathbf{F}_p$-représentations de G_K. On montre ici qu'il existe un analogue du symbole d'Artin-Schreier pour tout $V \in \mathbf{Rep}(G_K)$.

L'endomorphisme de Frobenius ϕ opère sur $\bar{K}$:

$$\phi : \bar{K} \longrightarrow \bar{K},$$

$$\lambda \longmapsto \lambda^p .$$

On appele ϕ-module sur K la donnée d'un K-espace vectoriel M muni d'une application ϕ-semi-lineaire :

$$\phi : M \longrightarrow M,$$

$$\phi(\lambda x) = \phi(\lambda)\phi(x), \lambda \in K .$$

Soit $M_\phi = K \otimes_\phi M$ l'espace déduit de M par l'extension des scalaires $\phi : K \longrightarrow K$. Alors l'application semi-linéaire induit une application linéaire

$$\Phi : M_\phi \longrightarrow M,$$

$$\Phi(\lambda \otimes x) \longmapsto \lambda\,\phi(x) .$$

On dit que M est ϕ-étale si Φ est bijective et si M est de la dimension finie.

On note $\mathbf{\Phi M}^{\text{ét}}$ la catégorie des modules ϕ-étales.

Proposition 1.2.1. *i) Le foncteur*

$$\mathbf{D} : \mathbf{Rep}(G_K) \longrightarrow \mathbf{\Phi M}^{\text{ét}}$$

$$V \longmapsto (V \otimes K^{sép})^{G_K}$$

induit une $\otimes$- équivalence de catégories.

ii) Le foncteur

$$\mathbf{V} : \mathbf{\Phi M}^{\text{ét}} \longrightarrow \mathbf{Rep}(G_K),$$

$$M \longmapsto (M \otimes K^{sép})_{\phi=1}$$

est un quasi-inverse de $\mathbf{D}$.

C'est un cas particulier de la Proposition 1.2.6 de [F5].

Soient M un module ϕ-étale et $V = \mathbf{V}(M)$.

Lemme 1.2.2. *La suite*

$$0 \to V \to M \otimes_K \bar{K} \xrightarrow{\phi-1} M \otimes_K \bar{K} \to 0 \tag{1.2}$$

est exacte.

Démonstration. On sait que la suite

$$0 \to \mathbf{F}_p \to \bar{K} \xrightarrow{\phi-1} \bar{K} \to 0$$

est exacte. En prenant le produit tensoriel de cette suite avec V on obtient la suite exacte

$$0 \to V \to V \otimes \bar{K} \xrightarrow{\phi-1} V \otimes \bar{K} \to 0 .$$

On a aussi $M \otimes_K \bar{K} \simeq V \otimes \bar{K}$, d'où le lemme.

Soit L/K une extension finie séparable. La suite (1.2) induit un homomorphisme

$$\delta_{M,L} : M \otimes_K L = H^0(G_L, M \otimes_K \bar{K}) \longrightarrow H^1(G_L, V) .$$

Si G_L opère trivialement sur V, on a $V = \oplus_{i=1}^h \mathbf{F}_p e_i$ et

$$H^1(G_L, V) \simeq \oplus_{i=1}^h H^1(G_L, \mathbf{F}_p) e_i \simeq H^1(G_L, \mathbf{F}_p) \otimes V .$$

En composant $\delta_{M,L}$ avec le symbole

$$(\, , \,)_p : L^* \times H^1(G_L, \mathbf{F}_p) \longrightarrow \mathbf{F}_p$$

on obtient l'accouplement

$$(\, , \,]_{M,L} : L^* \times (M \otimes_K L) \longrightarrow V .$$

Lemme 1.2.3. *Si $\alpha \in L^*$ et $\beta \in M \otimes_K L$, on a*

$$(\alpha, \beta]_{M,L} = c^{\rho_L(\alpha)} - c ,$$

où c est une racine de l'équation $(\phi - 1)(x) = \beta$.

Démonstration. On voit que $\delta_{M,L}(\beta)$ a comme représentant le cocycle

$$f : g \longmapsto c^g - c ,$$

où $(\phi - 1)(c) = \beta$. D'après la proposition 1.1.1 on a

$$(\alpha, \beta]_{M,L} = f(\delta_{M,L}(\beta)) = c^{\rho_L(\alpha)} - c .$$

Remarque. Si $M_0 = K$ est si $\phi : M_0 \to M_0$ l'application naturelle $\lambda \longmapsto \lambda^p$, on a $\mathrm{V}(M) = \mathbf{F}_p$ et le symbole $(\, , \,]_{M_0,L}$ coincide avec le symbole d'Artin-Schreier. On sait que

$$(\alpha, \beta]_{M_0,L} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{res}(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \beta) ,$$

où Tr est la trace de L sur $\mathbf{F}_p$ (cf. [Se], ch.14, prop.15).

On fixe une base $m_1, ..., m_h$ de M et on note A la matrice de ϕ sur cette base. Soit B une solution de l'équation $AB^{\phi} = B$ et soit

$$(v_1, ..., v_h) = (m_1, ..., m_h) B .$$

On voit facilement que $v_1, ..., v_h$ forment une base de V. Posons $X = B^{-1}$. La proposition suivante est presque évidente.

Proposition 1.2.4. *Soit $\beta = \sum_{j=1}^{h} \beta_j m_j$. Alors*

$$(\alpha, \beta]_{M,L} = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Tr}\ \mathrm{res}\,(\frac{d\alpha}{\alpha} \sum_{j=1}^{h} \beta_j X_{ij})\, v_i$$

où Tr est la trace du corps résiduel de L sur $\mathbf{F}_p$.

Démonstration. Notons $(\,,\,]_{M_0,L}$ le symbole d'Artin-Schreier. Puisque

$$\beta = \sum_{j=1}^{h} \beta_j\, (\sum_{i=1}^{h} v_i X_{ij}) = \sum_{i=1}^{h} (\sum_{j=1}^{h} \beta_j X_{ij})\, v_i\,,$$

et $v_i^{\phi} = v_i$, on a

$$(\alpha, \beta]_{M,L} = \sum_{i=1}^{h} (\alpha, \sum_{j=1}^{h} \beta_j X_{ij}]_{M_0,L}\, v_i = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{res}\,(\frac{d\alpha}{\alpha} \sum_{j=1}^{h} \beta_j X_{ij}))\, v_i\,.$$

1.3. Le cas de caractéristique 0. Dans toute la suite de cet article on suppose K de caractéristique 0. On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Soit F un groupe formel commutatif défini sur O_K de dimension $d = \dim(F)$ et de hauteur finie $h = \mathrm{ht}(F)$. On note $E_{F,n}$ le groupe de p^n-torsion de F, $T_F = \varprojlim_n E_{F,n}$ le module de Tate et si $n \in \mathbf{N}$ on note $[n]$ l'endomorphisme multiplication par n de F. On a $E_{F,n} \simeq T_F / p^n T_F$. Soit L/K une extension finie. La suite exacte courte

$$0 \to E_{F,n} \to F(\mathfrak{M}_{\bar{K}}) \xrightarrow{[p^n]} F(\mathfrak{M}_{\bar{K}}) \to 0$$

induit un homomorphisme

$$\delta_{F,n} : F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow H^1(G_L, E_{F,n})\,.$$

Proposition 1.3.1. *Le composé de $\delta_{F,n}$ avec le symbole $(\,,\,)_{p^n}$ donne l'accouplement*

$$(\,,\,)_{F,n} : L^* \times F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow H^2(G_L, E_{F,n} \otimes \mu_{p^n}) \simeq E_{F,n}\,.$$

Si $\alpha \in L^*$ et $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$, on a

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \gamma^{\rho_L(\alpha)} -_F \gamma\,,$$

où $\gamma \in F(\mathfrak{M}_{\bar{K}})$ est une solution de l'équation $[p^n](x) = \beta$.

Démonstration. Nous répétons les arguments du lemme 1.2.3. On a

$$H^2(G_L, E_{F,n} \otimes \mu_{p^n}) \simeq H^2(G_L, \mu_{p^n}) \otimes E_{F,n} \simeq E_{F,n}\,.$$

On voit que $\delta_{F,n}(\beta)$ a comme représentant le cocycle $g \longmapsto \gamma^g -_F \gamma$. On a alors,

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \gamma^{\rho_L(\alpha)} -_F \gamma\,.$$

On appele cet accouplement le symbole de Hilbert attaché au groupe F. Le but de cet article est de trouver une formule explicite pour ce symbole.

1.4. Formes différentielles sur F (cf. [F1], [C]). Soit F un groupe formel sur O_K, $d = \dim(F)$, et $h = \mathrm{ht}(F)$. Posons $X = (x_1, ..., x_d)$, $Y = (y_1, ..., y_d)$ pour simplifier les notations. Une forme différentielle $\omega = g(X)\,dX$ sera dite de seconde espèce, si

i) Il existe $\lambda_\omega \in K[[X]]$ tel que $d\lambda_\omega = \omega$.

ii) Il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que

$$p^r\lambda_\omega(F(X,Y)) \equiv p^r\lambda_\omega(X) + p^r\lambda_\omega(Y) \,(\mathrm{mod}\, O_K[[X,Y]]).$$

On dit que ω est exacte si elle est de seconde espèce et si il existe r tel que $p^r\lambda_\omega \in O_K[[X]]$. Posons

$$D_F = \{\text{formes de seconde espèce}\}/\{\text{formes exactes}\}.$$

On dit que ω est F-invariante si $\omega(F(X,Y)) = \omega(X)$. L'espace D_F^1 de ces formes est un sous-espace de D_F. Il est clair, que si ω est invariante, on a

$$\lambda_\omega(F(X,Y)) = \lambda_\omega(X) + \lambda_\omega(Y)\,,$$

donc λ_ω est un logarithme de F.

Notons aussi que $D_F \simeq K \otimes_{K_0} M_F$, où M_F est le module de Dieudonné de la fibre speciale de F. On identifie D_F^1 à l'espace cotangent $t'_F(K)$ de F et D_F/D_F^1 à l'espace tangent $t_{F^*}(K)$ du groupe dual. Les modules $t'_F(O_K)$ et $t_{F^*}(O_K)$ sont des réseaux de D_F^1 et de D_F/D_F^1.

Rappelons maintenant la définition de l'application exponentielle. Soit $D_F^1(O_K) \simeq t'_F(O_K)$ le sous-O_K-module des différentielles invariantes à coefficients entiers. Soient L une extension finie de K et $\mathfrak{M}_{L,1} = \{x \in L | v_p(x) > \frac{1}{p-1}\}$. On sait que si $\alpha \in F(\mathfrak{M}_{L,1})$ et $\omega \in D_F^1(O_K)$, la série $\lambda_\omega(\alpha)$ converge vers un élément de $\mathfrak{M}_{L,1}$. Soit

$$l_F \,:\, F(\mathfrak{M}_{L,1}) \longrightarrow t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \simeq \mathrm{Hom}_{O_K}(D_F^1(O_K), \mathfrak{M}_{L,1})\,,$$

l'application définie par

$$l_F(\alpha)(\omega) = \lambda_\omega(\alpha)\,.$$

On sait que l_F est un isomorphisme et on note

$$e_F \,:\, t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \longrightarrow F(\mathfrak{M}_{L,1})$$

l'application inverse. En composant e_F avec $\delta_{F,n} \,:\, F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow H^1(G_L, E_{F,n})$ on obtient l'application exponentielle:

$$\exp_{F,n} \,:\, t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \longrightarrow H^1(G_L, E_{F,n})\,.$$

Supposons que G_L opère trivialement sur $E_{F,n}$. Notons

$$(\,,\,]_{F,n} \,:\, L^* \times t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \longrightarrow E_{F,n}\,.$$

le composé de e_F avec le symbole de Hilbert $(\,,\,)_{F,n} \,:\, L^* \times F(\mathfrak{M}_L) \longrightarrow E_{F,n}$.

Lemme 1.4.1. *Si $\alpha \in L^*$ et $\beta \in F(\mathfrak{M}_{L,1})$, on a*

$$(\alpha, l_F(\beta)]_{F,n} = (\alpha,\beta)_{F,n}.$$

La démonstration est évidente.

Fixons $\xi_1,\ldots,\xi_h$ une base de $E_{F,n}$ et $\omega_1,\ldots,\omega_d$ une base de $t'_F(O_K)$. Soit $\omega'_1,\ldots,\omega'_d$ la base duale à $\omega_1,\ldots,\omega_d$.

Alors, si $\alpha \in L^*$ et $\beta = \sum_{j=1}^d \beta_j\omega'_j \in t_F(\mathfrak{M}_{L,1})$, on a

$$(\alpha,\beta]_{F,n} = \sum_{j=1}^{d}(\alpha,\beta_j\omega'_j]_{F,n} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{h}(\alpha,\beta_j]^{j,i}_{F,n}(\xi_i)\,,$$

où

$$(\,,\,]^{j,i}_{F,n} \,:\, L^* \times \mathfrak{M}_{L,1}\omega'_j \longrightarrow \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

sont "les coordonnées" de $(\,,\,]_{F,n}$. On peut écrire le lemme 1.4.1 sous la forme suivante

$$(\alpha,\beta)_{F,n} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{h}(\alpha, \lambda_{\omega_j}(\beta)]^{j,i}_{F,n}(\xi_i)\,.$$

1.5. Anneau B_{dR} (cf. [F2]). Dans ce no. K est un corps local de caractéristique 0. On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et C le complété de $\bar{K}$. On choisit une uniformisante π_0 de K. Rappelons brièvement la construction des anneaux des périodes p-adiques. La limite projective

$$R = \varprojlim_n (O_C/pO_C)$$

(la flèche est l'élévation à la puissance p-ième) est munie d'une structure naturelle d'anneau. Si $x = (x_0, x_1, \ldots) \in R$ on definit les éléments $x^{(n)}$ comme $\lim_{x\to\infty} \widehat{x}^{p^m}_{n+m}$, où $\widehat{x}_k$ est un relèvement de x_k dans O_C. On a $x^{(n+1)p} = x^{(n)}$. Muni de la valuation $v(x) = v_p(x^{(0)})$, R est un anneau de valuation complet et de caractéristique p. Le corps résiduel correspondant est isomorphe à la clôture séparable $k^{sép}$ de k.

Soit $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R. Pour tout $x \in R$ on note $[x] = (x, 0, \ldots)$ son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. L'application

$$\theta : W(R) \longrightarrow O_C$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[x_n]p^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(0)}\, p^n$$

est un homomorphisme des anneaux.

Posons $W_K(R) = K \otimes_{O_{K_0}} W(R)$. On a, alors, un homomorphisme

$$\theta_K : W_K(R) \longrightarrow C$$

$$\sum_{n>>-\infty} [x_n]\,\pi_0^n \longmapsto \sum_{n>>-\infty} x_n^{(0)}\,\pi_0^n$$

déduit de θ par extension des scalaires. Son noyau J_K est un idéal principal, engendré par un élément $\gamma = \pi_0 + u$, $u \in W(R)$, tel que $\theta(u) = -\pi_0$.

On pose

$$B^+_{dR/K} = \varprojlim_n W_K(R)/J^n_K$$

Alors $B^1_{dR/K} = \gamma B^+_{dR/K}$ est un ideal maximal de $B^+_{dR/K}$, le corps résiduel est isomorphe à C. L'anneau B^+_{dR} est ainsi muni d'une valuation discrète.

Notons

$$B_{dR/K} = \mathrm{Frac}(B^+_{dR/K}),$$

$$B^i_{dR/K} = \gamma^i B^+_{dR/K}\,.$$

Soit $1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \ldots$ une suite des racines de l'unité telle que $\zeta^p_{p^n} = \zeta_{p^{n-1}}$. Soit $\epsilon \in R$ tel que $\epsilon^{(n)} = \zeta_{p^n}$. La série

$$t = \log[\epsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon]-1)^n}{n}$$

converge dans $B^+_{dR/K}$ vers un générateur de $B^1_{dR/K}$. Le groupe G_K opère sur t à l'aide du caractère cyclotomique: $t^g = \chi_K(g)t$. On a l'isomorphisme canonique

$$B^i_{dR/K}/B^{i+1}_{dR/K} = t^i(B^+_{dR/K}/B^1_{dR/K}) = t^i C \simeq C(i)$$

Le corps $B_{dR/K}$ ne dépend pas du choix de K : si $K \subset L$ le plongement $B_{dR/K} \subset B_{dR/L}$ est un isomorphisme. On note, ainsi, $B_{dR} = B_{dR/K}$ pour K quelconque.

Sur la topologie de B_{dR} cf. [F2]. Posons $J_{O_K} = J_K \cap (O_K \otimes_{O_{K_0}} W(R))$.

Lemme 1.5.1. *Soient L/K une extension finie totalement ramifiée, π une uniformisante de L et $u \in W(R)$ tel que $\theta(u) = -\pi$; donc $\pi + u$ est un générateur de J_{O_L}. Alors l'élément*

$$\prod_{g \in \mathrm{Gal}(L/K)} (\pi^g + u)$$

est un générateur de J_{O_K}.

Démonstration. cf. [F2], 2.10.

Corollaire 1.5.2. *Soit $f(x)$ un polynôme minimal de π sur K. Alors $(\pi + u)f'(\pi)$ est un générateur de $J_{O_K}/J^2_{O_K}$.*

Démonstration. Comme

$$\prod_{g \in \mathrm{Gal}(L/K)} (\pi^g + u) \equiv (\pi + u) f'(\pi) (\mathrm{mod} J^2_K)$$

cela résulte du lemme 1.5.1.

Corollaire 1.5.3. *L'image du plongement canonique $J_{O_K}/J_{O_K}^2$ dans $B_{dR}^1/B_{dR}^2 \simeq C(1)$ est égal à $p^{-a}O_C(1)$,où $a = \frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{D}_K)$*

Démonstration. On sait que $t = \log[\epsilon] \equiv c\gamma_0 (\operatorname{mod} B_{dR}^2)$ où γ_0 est un générateur de $\ker(\theta)$ et $v_p(c) = \frac{1}{p-1}$. Soit $\pi_0 + u$ un générateur de J_{O_K}. Si $f(x)$ désigne un polynôme minimal de π_0 sur $\mathbf{Q}_p$, on a $v_p(\mathfrak{D}_K) = v_p(f'(\pi_0))$, d'où le corollaire.

1.6. L'anneau B_{cris} et la suite exacte de Bloch et Kato (cf.[F3], [BK]). Soit γ_0 un générateur de $\ker\theta \subset W(R)$. On pose

$$A_{cris}^+ = W(R)\,[[\frac{\gamma_0^2}{2!}, \frac{\gamma_0^3}{3!}, ...]].$$

C'est un sous-anneau de B_{dR}, muni de la filtration induite et d'une action du Frobenius ϕ. On note

$$B_{cris}^+ = A_{cris} \otimes \mathbf{Q}.$$

$$B_{cris} = B_{cris}^+[\frac{1}{t}].$$

On a la suite exacte de Bloch et Kato

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to B_{cris}^{\phi=1} \xrightarrow{f} B_{dR}/B_{dR}^+ \to 0\,, \tag{1.3}$$

où $f(x) = x (\operatorname{mod} B_{dR}^+)$. Elle induit une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to (B_{cris}^{-1})^{\phi=1} \xrightarrow{f} B_{dR}^{-1}/B_{dR}^+ \to 0\,, \tag{1.4}$$

Nous avons besoin d'une version intégrale de cette suite. Le résultat suivant est bien connu.

Lemme 1.6.1. *Si x est un élément de $pA_{cris}^+ + A_{cris}^1$, la série*

$$\log(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m}$$

converge vers un élément de $pA_{cris}^+ + A_{cris}^1$.

Démonstration. La convergence de $\log(1+x)$ vers un élément de B_{dR}^+ résulte de la description de la topologie de B_{dR} (cf.[F2]). Soit $x = p\alpha + \beta$, où $\alpha \in A_{cris}^+$ et $\beta \in A_{cris}^1$. On a

$$\frac{x^m}{m} = \frac{(p\alpha+\beta)^m}{m} = \frac{p^m}{m}\alpha^m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{C_m^k}{m} p^k \alpha^k \beta^{m-k} + \frac{\beta^m}{m}.$$

Comme $\frac{\beta^m}{m} \in A_{cris}^1$, $\frac{p^m}{m} \in p\mathbf{Z}_p$ et $\frac{C_m^k}{m} \in \mathbf{Z}$ pour $k \neq 0, m$, on voit que $\frac{x^m}{m} \in pA_{cris}^+ + A_{cris}^1$, d'où $\log(1+x) \in pA_{cris}^+ + A_{cris}^1$.

Soit $\mathfrak{M}_{C,1} = \{x \in C \mid v_p(x) > 1/(p-1)\}$. On pose maintenant

$$A_{cris}^{-1} = \{b + \sum_i \frac{\log[a_i]}{pt} b_i \mid b, b_i \in A_{cris}^+\,,\ a_i^{(0)} \in 1 + p\mathfrak{M}_{C,1}\,\}.$$

Il est facile de voir que A_{cris}^{-1} est un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de B_{cris}^{-1}. L'application $f\,:\,B_{cris}^{-1} \longrightarrow B_{cris}^{-1}/B_{cris}^+ = C(-1)$ induit une flèche $A_{cris}^{-1} \longrightarrow C(-1)$.

Proposition 1.6.2. *La suite*

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to (A_{cris}^{-1})^{\phi=1} \xrightarrow{f} \mathfrak{M}_{C,1}(-1) \to 0 \tag{1.5}$$

est exacte.

Démonstration. Si $x \in B_{dR}^+$, on a $f(x/t) = \theta(x)$ où on considère $\theta(x)$ comme un élément de $C(-1)$. On voit donc que $f(\log[a]/pt) = \log a^{(0)}/p$. Comme $\log : 1 + p\,\mathfrak{M}_{C,1} \longrightarrow p\,\mathfrak{M}_{C,1}$ est une bijection et $\log[a]/pt \in (A_{cris}^{-1})^{\phi=1}$ l'application f est surjective.

Montrons maintenant que $\ker f = \mathbf{Z}_p$. On sait que $B_{cris}^{\phi=1} \cap B_{dR}^+ = \mathbf{Q}_p$, donc il suffit de vérifier que $\mathbf{Q}_p \cap A_{cris}^{-1} = \mathbf{Z}_p$.

Lemme 1.6.3. *Soit a un élément de R. On suppose que $a^{(0)} \in 1 + p\,\mathfrak{M}_{C,1}$. Il existe, alors, $\gamma, \delta \in \ker\theta \subset W(R)$ et $[z], \alpha \in W(R)$ tels que $[a] = 1 + p\alpha + [z]\delta + \gamma^p$ et $\theta(\alpha), z^{(0)} \in \mathfrak{M}_{C,1}$.*

Démonstration du lemme. Si $c = \sqrt[p]{a} \in R$, on a $\theta([c]) = c^{(0)} \in 1 + \mathfrak{M}_{C,1}$. Il existe , donc, $z \in R$ et $\gamma \in \ker\theta$ tels que $[c] = 1 + [z] + \gamma$ et $z^{(0)} \in \mathfrak{M}_{C,1}$. Alors

$$[a] = (1 + [z] + \gamma_1)^p \equiv 1 + [z^p] + \gamma^p \,(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Comme $\theta([z]^{p-1}) \in p\,\mathfrak{M}_C$, il existe $\delta \in \ker\theta$ tel que $[z^{p-1}] = \delta + p[x]$. On en déduit que

$$[a] \equiv 1 + \gamma^p + [z]\delta \,(\mathrm{mod}\, p)\,,$$

d'où le lemme.

Démonstration da la proposition (suite). Supposons que $b + \sum_i \frac{\log[a_i]}{pt} b_i \in \mathbf{Q}_p$. Il résulte du lemme 1.6.3 qu'on peut écrire les éléments $[a_i]$ sous la forme $[a_i] = 1 + p\alpha_i + [z_i]\delta_i + {\gamma_i}^p$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\log[a_i]}{pt} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(p\alpha_i + [z_i]\delta_i + {\gamma_i}^p)^m}{pmt} \\ &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{p^m {\alpha_i}^m + mp^{m-1}{\alpha_i}^{m-1}[z_i]\delta_i}{pmt} \,(\mathrm{mod}\, B_{dR}^1)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\log[a_i]}{pt} = \frac{A_i}{t} + \frac{B_i\delta_i[z_i]}{pt},$$

où

$$A_i = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{p^{m-1}{\alpha_i}^m}{m} \in W(R)\,, B_i = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} p^{m-1} {\alpha_i}^{m-1} \in W(R).$$

On a, donc,

$$b + \sum_i \frac{\log[a_i]}{pt} b_i \equiv \sum_i \frac{A_i b_i}{t} + \sum_i \frac{B_i b_i \delta_i [z_i]}{pt} + b \,(\mathrm{mod}\, B_{dR}^1)\,.$$

Comme $\delta_i \in B_{cris}^1$, on a $\sum_i \frac{B_i b_i \delta_i [z_i]}{pt} \in B_{dR}^+$, d'où $\sum_i \frac{A_i b_i}{t} \in B_{dR}^+$. Il résulte maintenant du corrolaire 1.5.3 que $\theta(\sum_i \frac{A_i b_i}{t}) \in p^{-1/(p-1)}\, O_C$ et que $\theta(\frac{\delta_i}{t}) \in p^{-1/(p-1)}\, O_C$. Comme $z_i^{(0)} \in \mathfrak{M}_{C,1}$, on a $\theta(\frac{B_i b_i \delta_i [z_i]}{pt}) \in p^{-1}\,\mathfrak{M}_C$, donc $\theta(b + \sum_i \frac{\log[a_i]}{pt} b_i) \in p^{-1}\,\mathfrak{M}_C$. Il en résulte que $b + \sum_i \frac{\log[a_i]}{pt} b_i \in \mathbf{Z}_p$.

1.7.Cohomologie continue (cf. [T1], [T2]). Soit M un $\mathbf{Z}_p$-module topologique muni d'une action linéaire et continue de G_L. On note $C(G_L, M)$ le complexe des cochaînes continues à valeurs dans M. On peut définir le groupe des cocycles $Z_c^i(G_L, M)$ et le groupe des cobords $B_c^i(G_L, M)$ par les formules usuelles. On note $H_c^i(G_L, M) = Z_c^i(G_L, M)/B_c^i(G_L, M)$ les groupes de cohomologie continue. Soit C le complété de $\bar{L}$.

Proposition 1.7.1 (Tate). *On a $H_c^0(G_L, C) = L$. L'homomorphisme $L^* \to H_c^1(G_L, C)$ qui envoie a sur* class$(a\kappa_L)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. cf. [T1], n.3

La suite exacte de Bloch et Kato

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to B_{cris}^{\phi=1} \xrightarrow{f} B_{dR}/B_{dR}^+ \to 0$$

donne une suite exacte tordue

$$0 \to \mathbf{Q}_p(1) \to B_{cris}^{\phi=1}(1) \to B_{dR}/B_{dR}^+(1) \to 0\,.$$

On voit que $(B_{dR}^{-1}/B_{dR}^+)(1) \simeq C$ et que l'application $\nu\, :\, (B_{cris}^{-1})^{\phi=1}(1) \to (B_{cris}^+)^{\phi=p}$, $\nu(x) = xt$ est un isomorphisme. On obtient donc la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p(1) \to (B_{cris}^+)^{\phi=p} \xrightarrow{\theta} C \to 0\,.$$

Elle induit un homomorphisme

$$\tau_c\, :\, L = H_c^1(G_L, C) \longrightarrow H_c^2(G_L, \mathbf{Q}_p(1)) \simeq \mathbf{Q}_p\,.$$

Proposition 1.7.2. *Si $a \in L$, on a*

$$\tau_c(a) = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}(a)\,.$$

Rappelons la démonstration(cf. aussi [K], chap. 2). On vérifie facilement que l'application τ_c est $\mathbf{Q}_p$-linéaire. Il suffit donc démontrer la proposition pour $a \in pO_C$. Soit $\tilde{a}$ un élément de R tel que $\tilde{a}^{(0)} = \exp(a)$. Il est clair que $\theta(\log[\tilde{a}]) = a$. Alors $\tau_c(a)$ a comme représentant le 2-cocycle

$$(h, g) \to (\log[\tilde{a}]^h - \log[\tilde{a}])\kappa_L(g) = \log[\frac{\tilde{a}^h}{\tilde{a}}]\,\kappa_L(g) = \log[\frac{\tilde{a}^h}{\tilde{a}}] \cup \kappa_L(g)\,.$$

Rappelons que la suite exacte courte

$$0 \to \mu_{p^n} \to \bar{L}^* \xrightarrow{p^n} \bar{L}^* \to 0$$

donne l'application $\delta_{p^n}\, :\, L^* \to H^1(G_L, \mu_{p^n})$. En passant à la limite projective on obtient δ_{p^∞} : $L^* \to H_c^1(G_L, \mathbf{Z}_p(1))$. On voit que l'image du cocycle $h \to \log[\frac{\tilde{a}^h}{\tilde{a}}]$ dans $H_c^1(G_L, \mathbf{Z}_p(1))$ coincide avec $\delta_{p^\infty}(\exp(a))$. On obtient maintenant de la proposition 1.1.2 que

$$\log[\frac{\tilde{a}^h}{\tilde{a}}] \cup \kappa_L(g) = \delta_{p^\infty}(\exp(a)) \cup \kappa_L(g) = (\exp(a), \kappa_L(g))_{p^\infty} = -\frac{\mathrm{Tr(a)}}{p^r}\,.$$

La suite exacte (1.5) induit une suite tordue

$$0 \to \mathbf{Z}_p(1) \to (A^{-1}_{cris})^{\phi=1}(1) \to (A^{-1}_{cris}/A^{+}_{cris})(1) \to 0\,.$$

Il est facile de voir que l'application $\bar\nu\ :\ (A^{-1}_{cris}/A^{+}_{cris})(1) \to \mathfrak{M}_{C,1}$, $\bar\nu(x) = xt (\mathrm{mod}\, A^{1}_{cris})$ est un isomorphisme. Soit $\bar A_{cris}$ l'image de l'injection $\nu\ :\ (A^{-1}_{cris})^{\phi=1}(1) \to (A^{+}_{cris})^{\phi=p}$, $\nu(x) = xt$. On a donc la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_p\, t \to \bar A_{cris} \to \mathfrak{M}_{C,1} \to 0\,.$$

En particulier, on a une suite modulo p^n:

$$0 \to \mu_{p^n} \to \bar A_{cris}/p^n \bar A_{cris} \to \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1} \to 0\,. \tag{1.6}$$

Elle induit une application

$$\tau\ :\ H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1}) \longrightarrow H^2(G_L, \mu_{p^n}) \simeq \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\,. \tag{1.7}$$

Corollaire 1.7.3. *Soit* $i\ :\ H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1}) \to H^1(G_L, C/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1})$ *l'homomorphisme naturel. Alors, si* $i(f) = \mathrm{class}(a\,\kappa_{L,m})$, *on a*

$$\tau(f) = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}(a)\,(\mathrm{mod}\, p^n)\,.$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{p^n} \arrow[r] \arrow[d] & \bar A_{cris}/p^n \bar A_{cris} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathbf{Q}_p/p^n\mathbf{Z}_p)(1) \arrow[r] & (B^{+}_{cris})^{\phi=p}/p^n \bar A_{cris} \arrow[r] & C/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1} \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

d'où on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & H^2(G_L, \mu_{p^n}) \simeq \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \arrow[d] \\
H^1(G_L, C/p^n\,\mathfrak{M}_{C,1}) \arrow[r, "\tau_c(\mathrm{mod}\ p^n\,\mathfrak{M}_{C,1})"] & H^2(G_L, (\mathbf{Q}_p/p^n\mathbf{Z}_p)(1)) \simeq \mathbf{Q}_p/p^n\mathbf{Z}_p
\end{tikzcd}$$

Il résulte de la proposition 1.7.2 que $\tau_c(i(f)) = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}(a)\,(\mathrm{mod}\, p^n)$, d'où le corollaire.

Remarque. On peut donner une interpretation de l'application τ en termes des invariants de Sen-Tate. Pour $\epsilon > 0$ soit

$$i_\epsilon : H^1(G_L, O_C/p^{n+\frac{1}{p-1}}) \longrightarrow H^1(G_L, C/p^{n+\frac{1}{p-1}-\epsilon})$$

l'homomorphisme naturel. Posons $\Delta = \mathfrak{D}_L p^{-r+\frac{1}{p-1}}$. Alors pour tout $f \in H^1(L, O_C/p^{n+\frac{1}{p-1}})$ il existe un élément unique $\mathrm{inv}(f) \in p^r\mathfrak{D}_L^{-1}/p^{n+\frac{1}{p-1}}\Delta^{-1}\pi^{-1}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$i_\epsilon(f) = \mathrm{inv}(f)\kappa_L.$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $c \in C$ tel que

$$f(g) \equiv \mathrm{inv}(f)\frac{\log\chi_L(g)}{p^r} + c^g - c\,(\mathrm{mod}\, p^{n+\frac{1}{p-1}-\epsilon})$$

(cf. [S], prop.1, et [T1]). Alors , si $a \in \mathfrak{M}_{L,1}$, on a $\tau(af) = -\frac{1}{p^r}\mathrm{Tr}\,(a\,\mathrm{inv}(f))$.

1.8. Périodes p-adiques des groupes formels et la décomposition de Hodge-Tate (cf. [F4], [C], [T1]). On conserve les notations du $n^0 1.4$. On pose $a = \frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{D}_K)$ où $\mathfrak{D}_K$ est la différente de $K/\mathbb{Q}_p$.

Soit F un groupe formel p-divisible sur O_K, $d = \dim(F)$, $h = \mathrm{ht}(F)$. Soit $T_F = \varprojlim_n E_{F,n}$ le module de Tate de F. Soit $\omega \in D_F$ et soit $v = (\xi^{(k)}) \in T_F, [p](\xi^{(k+1)}) = \xi^{(k)}$. Choisissons les relèvements $\widehat{\xi^{(k)}} \in (O_K \otimes_{O_{K_0}} W(R))^d$ des éléments $\xi^{(k)}$ par rapport à l'application θ_K : $O_K \otimes_{O_{K_0}} W(R) \longrightarrow O_C$. On définit l'application des périodes comme

$$<,>: D_F \times T_F \longrightarrow B_{dR}^+,$$

$$<\omega, v> = -\lim_{k\to\infty} p^k \lambda_\omega(\widehat{\xi^{(k)}}).$$

C'est un accouplement bilinéaire qui respecte les filtrations de D_F et de B_{dR}^+ et commute à l'action de G_K. En passant aux facteurs de ces filtrations on retrouve les périodes de J.-M. Fontaine et de R. Coleman.

Périodes de Fontaine. On les définit comme la restriction de $<,>$ à D_F^1:

$$<,>_{Fo}: D_F^1 \times T_F \longrightarrow B_{dR}^1/B_{dR}^2 \simeq C(1).$$

(voir [F4] pour la construction remarquable de ces périodes).

Périodes de Coleman. On les définit par la formule suivante

$$<,>_{Co}: D_F/D_F^1 \times T_F \longrightarrow B_{dR}^+/B_{dR}^1 \simeq C,$$

$$<\bar\omega, v>_{Co} = \theta(<\omega, v>) = -\lim_{m\to\infty} p^m \lambda_\omega(\xi_m),$$

où $\bar\omega = \omega (\mathrm{mod} D_F^1)$. Fixons une base $\omega_1, ..., \omega_d$ du module $t'_F(O_K) \subset D_F^1$ et une base $\bar\omega_{d+1} = \omega_{d+1}(\mathrm{mod} D_F^1), ..., \bar\omega_h = \omega_h(\mathrm{mod} D_F^1)$ de $t_{F^*}(O_K) \subset D_F/D_F^1$. Alors (cf. [F4]), $<\omega_i, v>_{Fo} \in p^{-a}O_C(1)$ et $<\bar\omega_i, v>_{Co} \in O_C$. Fixons maintenant une base $v_1, ..., v_h$ de T_F et posons

$$A = \begin{pmatrix} <\omega_1, v_1>_{Fo} & <\omega_1, v_2>_{Fo} & \dots & <\omega_1, v_h>_{Fo} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <\omega_d, v_1>_{Fo} & <\omega_d, v_2>_{Fo} & \dots & <\omega_d, v_h>_{Fo} \\ <\bar\omega_{d+1}, v_1>_{Co} & <\bar\omega_{d+1}, v_2>_{Co} & \dots & <\bar\omega_{d+1}, v_h>_{Co} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <\bar\omega_h, v_1>_{Co} & <\bar\omega_h, v_2>_{Co} & \dots & <\bar\omega_h, v_h>_{Co} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Les périodes de Fontaine et Coleman induisent les applications

$$\eta_{Fo} : T_F \longrightarrow t_F(O_K) \otimes p^{-a}O_C(1),$$

$$\eta_{Co} : T_F \longrightarrow \mathrm{Hom}(t_{F^*}(O_K), O_C)$$

(nous utilisons les isomorphismes $t'_F(K) \simeq D_F^1$ et $t_{F^*}(K) \simeq D_F/D_F^1$).

Ces applications nous donnent un homomorphisme injectif

$$\eta = \eta_{F_o} \oplus \eta_{C_o} : T_F \otimes O_C \longrightarrow t_F(p^{-a} O_C(1)) \oplus t'_{F^*}(O_C).$$

On sait (cf. [F4]) que coker η est tué par p^a . Donc, modulo p^{n-a} , le noyau et le conoyau de

$$\eta_n : (T_F \otimes O_C)/p^n \longrightarrow t_F(p^{-a} O_C(1)/p^{n-a}) \oplus t'_{F^*}(O_C/p^{n-a})$$

sont tués par p^a.

Soient $\omega_1, ...\omega_d$ une base de $t'_F(O_K)$ et $\bar{\omega}_{d+1}, ..., \bar{\omega}_h$ une base de $t_{F^*}(O_K)$; notons $\omega'_1, ..., \omega'_d$ et $\omega'_{d+1}, ..., \omega'_h$ les bases duales. On a

$$\eta(v_1, ..., v_h) = (\omega'_1, ...\omega'_h) A,$$

En applicant cette procédure au groupe dual p-divisible F^*, on obtient les applications duales:

$$\eta^*_{F_o} : T_{F^*} \otimes O_C \longrightarrow t_{F^*}(p^{-a} O_C(1)),$$

$$\eta^*_{C_o} : T_{F^*} \otimes O_C \longrightarrow t'_F(O_C),$$

$$\eta^* : T_{F^*} \otimes O_C \longrightarrow t_{F^*}(p^{-a} O_C(1)) \oplus t'_F(O_C) \quad .$$

La dualité $T_{F^*} \simeq \mathrm{Hom}(T_F, \mathbf{Z}_p(1))$ donne la base $v_1^*, ..., v_h^*$ de T_{F^*} , duale à $v_1, ...v_h$. On a , ainsi,

$$\eta^* (v_1^*, ..., v_h^*) = (\omega_1, ..., \omega_h) A^*,$$

où A^* est la matrice A du groupe dual. En passant aux espaces duaux, on obtient

$$\eta^{*\prime} : t'_{F_*}(p^a O_C) \otimes t_F(O_C(1)) \longrightarrow T_F \otimes O_C$$

et

$$\eta^{*\prime}(\omega'_1, ..., \omega'_h) = (v_1, ..., v_h) A^{*T}(-1).$$

Proposition 1.8.1. *Les applications η et $\eta^{*\prime}$ sont réciproques , donc $A\, A^{*T}(-1) = I_h$.*

Démonstration. C'est un résultat de J.-M. Fontaine (cf. [F4]).

Corollaire 1.8.2. *Les matrices $p^a\, A$ et $p^a\, A^{-1}$ sont à coefficients entiers.*

Démonstration. On sait déjà que $p^a\, A$ est à coefficients entiers. On a $p^a\, A^{-1} = p^a\, A^{*T}(-1)$, d'où $p^a\, A^{-1}$ est à coefficients entiers.

Posons $Y = (Y_{ij}) = A^{*T}(-1)$. L'application $\eta^{*\prime}$ induit l'injection

$$\eta_0 : t_F(O_L) \longrightarrow H^0_c(L, T_F \otimes O_C(-1)),$$

$$\omega_j{}' \longmapsto \sum_{i=1}^{h} v_i Y_{ij}. \tag{1.8}$$

Rappelons la description de l'application exponentielle en termes cristallines (Bloch-Kato). Le produit tensoriel de la suite (1.5) avec T_F induit un homomorphisme $H^0_c(G_L, T_F \otimes \mathfrak{M}_{C,1}) \to H^1_c(G_L, T_F)$. Considérons l'application composée

$$t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \xrightarrow{s} H^0_c(G_L, T_F \otimes \mathfrak{M}_{C,1}(-1)) \to H^1(G_L, E_{F,n}). \tag{1.9}$$

Proposition 1.8.3. *L'application (1.9) coincide avec l'application* $\exp_{F,n}$.

Démonstration. S. Bloch et K. Kato ont démontré le résultat suivant. Le produit tensoriel de la suite (1.4) avec T_F donne un homomorphisme $t_F(L) \simeq H^0_c(G_L, T_F \otimes C(-1)) \to H^1_c(G_L, T_F \otimes \mathbf{Q}_p)$, qui coincide avec $\exp_F \otimes \mathbf{Q}_p$. En perephrasant leur démonstration on obtient la proposition.

2. Lois de réciprocité explicites

2.1. Une suite exacte. On conserve les notations du paragraphe précédent. On note $\Omega_{L/K}$ le module des différentielles de O_L sur O_K et $d_{L/K} : O_L \longrightarrow \Omega_{L/K}$ la dérivation canonique. On pose (cf. 1.1) $W_{O_L}(R) = O_L \otimes_{O_{L_0}} W(R)$ et $J_{O_L} = J_L \cap W_{O_L}(R)$. Soit

$$D_{L/K} : W_{O_L}(R) \longrightarrow O_{\bar{K}} \otimes_{O_K} \Omega_{L/K} \quad ,$$

l'application définie par

$$a \otimes x \longmapsto \theta\,(x) \otimes da \quad .$$

Lemme 2.1.1. *L'application $D_{L/K}$ est une dérivation, i.e.*

$$D_{L/K}(xy) = \theta_L(x) D_{L/K}(y) + \theta_L(y) D_{L/K}(x).$$

Lemme 2.1.2. *i) La dérivation $D_{L/K}$ et triviale sur $J_{O_L}^2$.*
ii) La restriction de $D_{L/K}$ sur J_{O_L} est surjective.

Démonstration. Soit u un élément de $W(R)$ tel que $\theta(u) = \pi$. Alors on peut écrire un élément $y \in J_{O_L}^2$ sous la forme $y = (\pi - u)^2 y_1$, d'où

$$D_{L/K}(y) = D_{L/K}((\pi - u)^2)\theta_L(y_1) = 0.$$

La deuxième assertion suit du fait que

$$D_{L/K}([x](\pi - u)) = \theta([x]) \otimes d\pi \quad ,$$

et de ce que l'application θ est surjective.

La dérivation $D_{L/K}$ induit, ainsi, l'homomorphisme surjectif $J_{O_L}/J_{O_L}^2 \longrightarrow O_{\bar{K}} \otimes_{O_K} \Omega_{L/K}$, que nous noterons aussi par $D_{L/K}$.

Rappelons, que $J_{O_L}/J_{O_L}^2$ est un O_C-module libre, engendré par l'image de $\pi - u$. Le plongement $K \subset L$ induit le plongement de $J_{O_K}/J_{O_K}^2$ dans $J_{O_L}/J_{O_L}^2$.

Lemme 2.1.3. *La suite*

$$0 \to J_{O_K}/J_{O_K}^2 \to J_{O_L}/J_{O_L}^2 \xrightarrow{D_{L/K}} O_{\bar{K}} \otimes \Omega_{L/K} \to 0 \tag{2.1}$$

est exacte.

Démonstration. Soit $D_{L/K}(c(\pi - u)) = c \otimes d\pi = 0$. On a alors, $c = f'(\pi)b$, où $f(x)$ est un polynôme minimal de π sur K. Le corollaire 1.5.2 montre maintenant, que $f'(\pi)(\pi - u)$ est congru au générateur de J_K modulo B_{dR}^2, d'où

$$c(\pi - u) = b(\pi_0 - v) \in J_{O_K}/J_{O_K}^2$$

(ici $v \in W(R)$ est tel que $\theta(v) = \pi_0$).

Rappelons, que l'isomorphisme $B_{dR}^1/B_{dR}^2 \simeq C(1)$ identifie $J_{O_K}/J_{O_K}^2$ à $p^{-a}O_C(1)$ où $a = \frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{D}_K)$. Il identifie aussi $J_{O_L}/J_{O_L}^2$ à $p^{-a}\mathfrak{D}_{L/K}^{-1}O_C(1)$. On a, donc, une suite exacte

$$0 \to p^{-a}O_C(1) \to p^{-a}\mathfrak{D}_{L/K}^{-1}O_C(1) \to O_{\bar{K}} \otimes \Omega_{L/K} \to 0\,. \tag{2.2}$$

2.2. Un diagramme commutatif. On construit ici un diagramme qui lie les suites (2.1) et (2.2) a l'application exponentielle.

Soit F un groupe formel p-divisible sur O_K et soit T_F son module de Tate. Posons

$$\overline{F(\mathfrak{M})} = \varprojlim_m F(\mathfrak{M}_R),$$

où la flèche est la multiplication par $[p]$ dans le module formel. Les éléments $x = (x_0, x_1, ...) \in \overline{F(\mathfrak{M})}$ tels que $x_0 \in F(\mathfrak{M}_L)$, forment un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\overline{F(\mathfrak{M})}$; nous noterons ce module par $\overline{F(\mathfrak{M})}_L$. On a une suite exacte

$$0 \to T_F \to \overline{F(\mathfrak{M})}_L \to F(\mathfrak{M}_L) \to 0.$$

Construisons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_F \otimes D_F^1(O_K) & \longrightarrow & \overline{F(\mathfrak{M})}_L \otimes D_F^1(O_K) & \longrightarrow & F(\mathfrak{M}_L) \otimes D_F^1(O_K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle <,>_{F_0}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle DL} & & \\
0 & \longrightarrow & J_{O_K}/J_{O_K}^2 & \longrightarrow & J_{O_L}/J_{O_L}^2 & \longrightarrow & O_{\bar{K}} \otimes \Omega_{L/K} & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (2.3)$$

Ici $<,>_{F_0}$ désigne les périodes de Fontaine et les autres flèches sont données par les formules suivantes:

$$DL : \alpha \otimes \omega \longmapsto \lambda'_\omega(\alpha)\, d\alpha,$$

$$g : \bar{\alpha} \otimes \omega \longmapsto - \lim_{m\to\infty} p^m \lambda_\omega(\hat{\alpha}_m -_F \alpha_m)$$

où $\hat{\alpha}_m \in O_K \otimes W(R)$ est un relèvement de α_m. Comme

$$\theta_L(\lambda_\omega(\hat{\alpha}_m -_F \alpha_m)) = \lambda_\omega(\theta_L(\hat{\alpha}_m -_F \alpha_m)) = 0,$$

on a $\lambda_\omega(\hat{\alpha}_m -_F \alpha_m) \in J_{O_K, cris}$. Pour démontrer la convergence nous répétons les arguments de P. Colmez ([C], proposition 3.1). On a

$$p^{m+1}\lambda_\omega(\hat{\alpha}_{m+1} -_F \alpha_{m+1}) - p^m\lambda_\omega(\hat{\alpha}_m -_F \alpha_m) = p^m\lambda_\omega([p](\hat{\alpha}_{m+1}) -_F \hat{\alpha}_m).$$

Comme $[p](\hat{\alpha}_{m+1}) -_F \hat{\alpha}_m \in J_{O_K}$, le lemme 3.2 de [C] montre que

$$\lambda_\omega([p](\hat{\alpha}_{m+1}) -_F \hat{\alpha}_m) \in \pi_0{}^{-s} J_{O_K, cris}$$

où s ne dépend que de K. Donc notre suite converge.

Lemme 2.2.1. *Le diagramme* (2.3) *est commutatif.*

La démonstration est evidente.

Le diagramme (2.3) induit, ainsi, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
F(\mathfrak{M}_L) \otimes D_F^1(O_K) & \xrightarrow{\exp} & H^1(L, T_F) \otimes D_F^1(O_K) \\
{\scriptstyle DL}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\
\Omega_{L/K} & \xrightarrow{\Delta_{L/K}} & H^1(L, p^{-a}O_C(1)).
\end{array} \qquad (2.4)$$

Si $F = \hat{\mathbf{G}}_m$ est le groupe multiplicatif, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_L & \xrightarrow{\delta} & H^1_c(G_L, \mathbf{Z}_p(1)) \\ {\scriptstyle -d\log}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Omega_L & \xrightarrow{\Delta_L} & H^1_c(G_L, p^{-\frac{1}{p-1}} O_C(1)) , \end{array} \tag{2.5}$$

où $d\log(\alpha) = \frac{d\alpha}{\alpha}$ et où $\Omega_L = \Omega_{L/\mathbf{Q}_p}$.

Remarque. Pour le groupe multiplicatif le diagramme similaire a été construit par K.Kato [K] à l'aide des cohomologies cristallines.

2.3. L'application Δ_L. On conserve les notations du no. précédent. Nous démontrerons ici un résultat sur l'homomorphisme Δ_L. Soit $\theta(u) = \pi$. Identifions C à B^+_{dR}/B^1_{dR} et posons $b = \min\{v_p(\frac{u-u^g}{\pi-u} \bmod B^1_{dR}) \,|\, g \in G_L\}$. Soit $i : H^1(G_L, O_C/p^{2b}O_C) \to H^1(G_L, C/p^{2b}O_C)$ l'application naturelle.

Proposition 2.3.1. *i) L'application*

$$\psi_L : G_L \longrightarrow O_C/p^{2b}O_C ,$$

$$g \longmapsto \frac{(\pi - u)^g}{\pi - u} - 1 \,(\mathrm{mod}\,(B^1_{dR} + p^{2b}W(R))) ,$$

est un cocycle à valeurs dans $\mathfrak{D}_L O_C$.

ii) $i(\psi_L) = \mathrm{class}\,(p^r \kappa_L)$.

Remarque. D'après le corollaire 1.5.3 on a $(u - u^g)(\mathrm{mod} B^1_{dR}) \in p^{-\frac{1}{p-1}} O_C(1)$ et

$$(\pi - u)^{-1}(\mathrm{mod} B^+_{dR}) \in \mathfrak{D}_L p^{\frac{1}{p-1}} O_C(-1) .$$

On en déduit que $b \geqslant v_p(\mathfrak{D}_L)$, donc $p^{2b} \in \mathfrak{D}_L^2$.

Démonstration. i) Comme

$$(\pi - u)^g - (\pi - u) = u - u^g \in \mathfrak{D}_L(\pi - u) \,(\mathrm{mod}\, B^2_{dR}) ,$$

on a

$$\frac{(\pi - u)^g}{\pi - u} - 1 = \frac{u - u^g}{\pi - u} \in \mathfrak{D}_L(\pi - u) \,(\mathrm{mod}\, B^1_{dR}) ,$$

donc l'application ψ_L prend les valeurs dans $\mathfrak{D}_L$.

On a

$$\psi_L(gh) \equiv \frac{(\pi - u)^{gh}}{\pi - u} - 1 \equiv \frac{(\pi - u)^{gh}}{(\pi - u)^h} \frac{(\pi - u)^h}{\pi - u} - 1 \equiv$$

$$(\psi_L(g) + 1)^h(\psi_L(h) + 1) - 1 \equiv \psi_L(g)^h + \psi_L(h) + \frac{(u - u^g)^h(u - u^h)}{(\pi - u)^h(\pi - u)} \,(\mathrm{mod}\, B^1_{dR}) .$$

Comme $v_p(\frac{(u-u^g)^h(u-u^h)}{(\pi-u)^h(\pi-u)}) \geqslant 2b$, on en déduit que ψ_L est un cocycle.

ii) Soit $c \in R$ tel que

$$[\epsilon] - 1 \equiv [c]\,(\pi - u)\,(\bmod B_{dR}^2).$$

Alors

$$\psi_L(g) + 1 \equiv \frac{([\epsilon]-1)^g\,[c]}{([\epsilon]-1)\,[c]^g} \equiv \chi_L(g)\frac{c^{(0)}}{c^{(0)\,g}}\,(\bmod\,(B_{dR}^1 + p^{2b}W(R))).$$

En passant aux logarithmes, on obtient

$$\psi_L(g) \equiv \log\chi_L(g) + \log\frac{c^{(0)}}{c^{(0)\,g}}\,(\bmod\, p^{2b}O_C).$$

On voit facilement qu'il existe $c_1 \in \bar{L}$ tel que

$$\log\frac{c^{(0)}}{c^{(0)\,g}} \equiv \log\frac{c_1}{c_1^g}\,(\bmod\, p^{2b}O_C).$$

L'application $g \longmapsto \log\frac{c_1}{c_1^g}$ est un cocycle additif à valeurs dans $\bar{L}$. Comme $H^1(G_L, \bar{L}) = 0$, il existe $c_2 \in \bar{L}$ tel que

$$c_2^g - c_2 = \log\frac{c_1}{c_1^g} \equiv \log\frac{c}{c^g}\,(\bmod\, p^{2b}O_C\,).$$

On obtient, donc,

$$\psi_L(g) \equiv \log\chi_L(g) + (c_2 - c_2^g)\,(\bmod\, p^{2b}O_C\,),$$

d'où la proposition.

Posons $\mathfrak{M}_{C,2} = \mathfrak{M}_{C,1}^2$. Le composé du cup-produit

$$H_c^1(G_L, p^{-\frac{1}{p-1}}O_C(1)) \times H^0(G_L, (\mathfrak{M}_{C,2}/p^n\mathfrak{M}_{C,2})(-1)) \longrightarrow H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1})$$

avec l'application $\Delta_L : \Omega_L \to H_c^1(G_L, p^{-\frac{1}{p-1}}O_C(1))$ donne l'accouplement

$$\Omega_L \times H^0(G_L, (\mathfrak{M}_{C,2}/p^n\mathfrak{M}_{C,2})(-1)) \longrightarrow H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1})\,.$$

Soit $\tau : H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1}) \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ l'application définie au n.1.7. Identifions $C(-1)$ et B_{dR}^{-1}/B_{dR}^+.

Proposition 2.3.2. *Soit* $\widetilde{\frac{x}{\pi-u}} = \frac{x}{\pi-u}(\bmod(B_{dR}^+ + p^n\mathfrak{M}_{C,2}t^{-1}))$ *un élément de* $H^0(G_L, (\mathfrak{M}_{C,2}/p^n\mathfrak{M}_{C,2})(-1))$*. Supposons que* $x \in \mathfrak{D}_L^{-1}\mathfrak{M}_{L,1}$*. Alors*

$$\tau(\Delta_L(d\pi) \cup \widetilde{\frac{x}{\pi - u}}) = -\mathrm{Tr}\,(x)(\bmod\, p^n)\,.$$

Démonstration. On a

$$(\frac{x}{\pi - u})^g - (\frac{x}{\pi - u}) = \frac{x(u - u^g)}{(\pi - u)^g(\pi - u)} \equiv 0\,(\bmod\,(p^n\mathfrak{M}_{C,2}t^{-1} + B_{dR}^+))\,.$$

On voit que $\Delta_L(d\pi)$ a comme représentant le cocycle

$$g \to (\pi - u)^g - (\pi - u) = u - u^g,$$

donc on a

$$\Delta_L(d\pi) \cup \widetilde{\frac{x}{\pi - u}} : g \to x(\frac{(\pi - u)^g}{\pi - u} - 1) \,(\mathrm{mod}\, p^n \mathfrak{M}_{C,1}).$$

Mais on a

$$v_p(x) + 2b = \min\{v_p(x\frac{(u-u^g)}{(\pi-u)^g}\frac{(u-u^h)}{(\pi-u)}) \,|g,h \in G_L\} \geqslant$$

$$\min\{v_p(x\frac{(u-u^g)}{(\pi-u)^g(\pi-u)}\,|g \in G_L\} - \frac{1}{p-1} > n + \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p-1} = n + \frac{1}{p-1},$$

d'où

$$\Delta_L(d\pi) \cup \widetilde{\frac{x}{\pi - u}} = x\psi_L \,(\mathrm{mod}\, p^n \mathfrak{M}_{C,1}).$$

On déduit maintenant de la proposition 2.3.1 et du corollaire 1.7.3 que

$$\tau(\Delta_L(d\pi) \cup \widetilde{\frac{x}{\pi - u}}) = \tau(x\psi_L) \equiv \tau_c(xp^r\kappa_L) \equiv -\mathrm{Tr}\,(x)\,(\mathrm{mod}\, p^n).$$

2.4. Périodes p-adiques modulo p^n. Soit F un groupe formel p-divisible sur O_K. On fixe $n \geqslant 1$ et on suppose que L contient les coordonnées des points de p^n-torsion de F. Si $\xi^{(n)} \in E_{F,n}$, on note $\xi^{(n,i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ les coordonnées de $\xi^{(n)}$. Rappelons que π désigne une uniformisante de L. Choisissons $u \in W(R)$ tel que $\theta(u) = \pi$. Soit ω une forme de seconde espèce. Pour simplifier les notations, on écrira $\lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi}$ pour $\sum_{i=1}^d \frac{\partial\lambda_\omega}{\partial x_i}(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n,i)}}{d\pi}$.

Lemme 2.4.1. *Si $\omega \in D_F^1(O_K)$ et si $v = (\xi^{(m)}) \in T_F$, on a*

$$< \omega, v >_{F^o} \equiv p^n \lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi}(\pi - u)\,(\mathrm{mod}\,(B_{dR}^2, p^{n-a}t)).$$

Démonstration. Soit $\hat{\xi}^{(n)} \in W(R)^d$ un relèvement de $\xi^{(n)}$. Effectuons un développement de $\lambda_\omega(\hat{\xi}^{(n)})$ au voisinage de $\xi^{(n)}$. Comme $\lambda_\omega(\xi^{(n)}) = 0$, on obtient

$$p^n\lambda_\omega(\hat{\xi}^{(n)}) \equiv p^n\lambda'_\omega(\xi^{(n)})(\hat{\xi}^{(n)} - \xi^{(n)})\,(\mathrm{mod}\, B_{dR}^2).$$

Comme

$$D_{L/K}(\lambda'_\omega(\xi^{(n)})(\hat{\xi}^{(n)} - \xi^{(n)})) = -\lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi} = -D_{L/K}(\lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi}(\pi - u)),$$

on obtient, en utilisant le lemme 2.1.3, que

$$-\lambda'_\omega(\xi^{(n)})(\hat{\xi}^{(n)} - \xi^{(n)}) \equiv \lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi}(\pi - u)\,(\mathrm{mod}\, p^{-a}t).$$

On a, donc,

$$-p^n\lambda_\omega(\hat{\xi}^{(n)}) \equiv p^n\lambda'_\omega(\xi^{(n)})\frac{d\xi^{(n)}}{d\pi}(\pi - u)\,(\mathrm{mod}\,(B_{dR}^2, p^{n-a}t)).$$

On peut montrer (cf. [C], lemme 3.2), que $p^n\lambda_\omega(\hat{\xi}^{(n)}) \equiv p^{n+1}\lambda_\omega(\hat{\xi}^{(n+1)})\,(\mathrm{mod}\,(B_{dR}^2, p^{n-a}t))$, d'où le lemme.

Passons maintenant aux périodes de R.Coleman. Soit $\tilde{t}_F \subset D_F/D_F^1$ l'ensemble des éléments $\omega(\mathrm{mod} D_F^1)$ tels que

1. $\omega \in O_K[[X]]dX$.
2. $\lambda_\omega(F(X,Y)) - \lambda_\omega(X) - \lambda_\omega(Y) \in O_K[[X,Y]]$.

Lemme 2.4.2. *$\tilde{t}_F$ est un réseau de D_F/D_F^1.*

Démonstration. Il est claire que $\tilde{t}_F$ est un O_K-module sans torsion, donc il est libre. Pour tout $\omega \in D_F$ il existe r tel que $p^r\omega \,(\mathrm{mod}\, D_F^1) \in \tilde{t}_F$ (cf.1.4), d'où le lemme.

Lemme 2.4.3. *Si $\omega \in \tilde{t}_F$ et si $v = (\xi^{(m)}) \in T_F$, on a*

$$< \omega, v >_{Co} \equiv -p^n \lambda_\omega(\xi^{(n)}) (\mathrm{mod}\, p^n)\,.$$

Démonstration. On a

$$p^n\lambda_\omega(\xi^{(n)}) - p^{n+1}\lambda_\omega(\xi^{(n+1)}) = p^n(\lambda_\omega(\xi^{(n)} - p\lambda_\omega(\xi^{(n+1)})) = p^n(\lambda_\omega([p](\xi^{(n+1)})) - p\lambda_\omega(\xi^{(n+1)}))\,.$$

La condition 2 implique que $\lambda_\omega([p](\xi^{(n+1)})) - p\lambda_\omega(\xi^{(n+1)}) \in O_K$, d'où

$$p^n\lambda_\omega(\xi^{(n)}) \equiv p^{n+1}\lambda_\omega(\xi^{(n+1)}) (\mathrm{mod}\, p^n)\,.$$

Comme $< \omega, v >_{Co} = -\lim_{m\to\infty} p^m \lambda_\omega(\xi^{(m)})$, le lemme est démontré.

Rappelons que π_0 désigne une uniformisante de K. Posons

$$r(F) = \frac{1}{e(K:\mathbb{Q}_p)} \min\{k \,|\pi_0^k t_{F^*}(O_K) \subset \tilde{t}_F\}. \tag{2.6}$$

Lemme 2.4.4. *Si $\omega \in t_{F^*}(O_K)$, on a*

$$< \omega, v >_{Co} \equiv -p^n\lambda_\omega(\xi^{(n)}) (\mathrm{mod}\, p^{n-r(F)})\,.$$

Soit $s(F) = \max\{r(F), a\}$, où $a = \frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{D}_K)$. Fixons une base $\omega_1, ..., \omega_d$ du module $t'_F(O_K) \subset D_F^1$ et une base $\bar{\omega}_{d+1} = \omega_{d+1}(\mathrm{mod} D_F^1), ..., \bar{\omega}_h = \omega_h(\mathrm{mod} D_F^1)$ de $t'_{F^*}(O_K) \subset D_F/D_F^1$. Alors (cf.1.8), $< \omega_i, v >_{Fo} \in p^{-a}O_C(1)$ et $< \bar{\omega}_i, v >_{Co} \in O_C$. Fixons maintenant une base $v_1, ..., v_h$ de T_F et introduisons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} < \omega_1, v_1 >_{Fo} & < \omega_1, v_2 >_{Fo} & \dots & < \omega_1, v_h >_{Fo} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < \omega_d, v_1 >_{Fo} & < \omega_d, v_2 >_{Fo} & \dots & < \omega_d, v_h >_{Fo} \\ < \bar{\omega}_{d+1}, v_1 >_{Co} & < \bar{\omega}_{d+1}, v_2 >_{Co} & \dots & < \bar{\omega}_{d+1}, v_h >_{Co} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < \bar{\omega}_h, v_1 >_{Co} & < \bar{\omega}_h, v_2 >_{Co} & \dots & < \bar{\omega}_h, v_h >_{Co} \end{pmatrix}$$

et $A_n = A \,(\mathrm{mod}\, p^{n-s(F)})$.

Notons $\xi_1, ..., \xi_h$ une base de $E_{F,n}$ telle que $\xi_i = v_i \,(\mathrm{mod}\, p^n)$ et posons

$$\Theta_{L,n} = p^n \begin{pmatrix} \lambda'_{\omega_1}(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda'_{\omega_1}(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \dots & \lambda'_{\omega_1}(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda'_{\omega_d}(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda'_{\omega_d}(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \dots & \lambda'_{\omega_d}(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_1) & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_2) & \dots & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{\omega_h}(\xi_1) & \lambda_{\omega_h}(\xi_2) & \dots & \lambda_{\omega_h}(\xi_h) \end{pmatrix}$$

Il résulte des lemmes 2.4.1 et 2.4.4 que la matrice $\Theta_{L,n}$ est bien définie modulo $p^{n-s(F)}$.

Lemme 2.4.5. *Soit $n > s(F) + 2a$. Alors la matrice A_n^{-1} est bien définie modulo $p^{n-s(F)-2a}$.*

Démonstration. Soit $\hat{A}_n$ un relèvement de A_n, donc $A_n = \hat{A}_n (\operatorname{mod} p^{n-s(F)})$. Alors $A = \hat{A}_n + p^{n-s(F)}B$, où $B \in \mathrm{M}_h(O_C)$. On a

$$\hat{A}_n^{-1} = (A - p^{n-s(F)}B)^{-1} = A^{-1}(1 - p^{n-s(F)}BA^{-1})^{-1} =$$

$$A^{-1}(1 + p^{n-s(F)}BA^{-1} + p^{2(n-s(F))}(BA^{-1})^2 + \ldots).$$

Comme (cf. Corollaire 1.8.2) $p^{am}A^{-m} \in \mathrm{M}_h(O_C)$, on a $\hat{A}_n^{-1} \equiv A^{-1} (\operatorname{mod} p^{n-s(F)-2a})$, d'où le lemme.

Nous identifions t au générateur canonique de $O_C(1)$. Posons $Y = (Y_{ij}) = A^{*T}(-1)$ et $X_{L,n} = (X_{ij}) = \Theta_{L,n}^{-1}$.

Proposition 2.4.6. *Si $j \leqslant d$, l'élément $X_{ij} \in p^{-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{D}_L^{-1}$ est bien défini modulo $p^{n-s(F)-2a-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{D}_L^{-1}$.*

Démonstration. Il résulte du lemme 2.4.1 et du lemme 2.4.4 que les premières d colonnes de la matrice $\frac{X_{L,n}}{\pi - u} (\operatorname{mod} B_{dR}^+)$ coincident avec les colonnes correspondantes de la matrice $A_n^{-1} = Y (\operatorname{mod} p^{n-s(F)-2a})$. Comme $Y_{ij} =< \omega_j', v_i^* >_{C_o} t^{-1} \in O_C t^{-1} \subset B_{dR}^{-1}/B_{dR}^+$ et $t \in p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{D}_L(\pi - u)(\operatorname{mod} B_{dR}^2)$, la proposition résulte du lemme précédent.

2.5. La formule explicite pour le symbole de Hilbert. On conserve les conventions du no. précédent. On note (D_F, D_F^1) le module filtré associé à F est Tr la trace de L sur $\mathbf{Q}_p$. On fixe une base $\xi_1, ..., \xi_n$ de $E_{F,n} = T_F/p^n T_F$, une base $\omega_1, ..., \omega_d$ de l'espace cotangent $t_F(O_K)' \simeq D_F^1(O_K)$ et une base $\bar{\omega}_{d+1} = \omega_{d+1} (\operatorname{mod} D_F^1), ..., \bar{\omega}_h = \omega_h (\operatorname{mod} D_F^1)$ de D_F/D_F^1. Soit $\lambda_{\omega_i} = \int \omega_i$. On pose

$$\Theta_{L,n} = p^n \begin{pmatrix} \lambda_{\omega_1}'(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda_{\omega_1}'(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \ldots & \lambda_{\omega_1}'(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{\omega_d}'(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda_{\omega_d}'(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \ldots & \lambda_{\omega_d}'(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_1) & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_2) & \ldots & \lambda_{\omega_{d+1}}(\xi_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{\omega_h}(\xi_1) & \lambda_{\omega_h}(\xi_2) & \ldots & \lambda_{\omega_h}(\xi_h) \end{pmatrix}$$

et $X_{L,n} = (X_{ij}) = \Theta_{L,n}^{-1}$. On voit facilement que les éléments X_{ij}, $j \leqslant d$ ne dépendent pas du choix des $\omega_{d+1}, ..., \omega_h$. Il résulte donc de la proposition 2.4.6 que ces éléments appartiennent à $p^{-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{D}_L^{-1}$. Ils sont bien définis modulo $p^{n-s(F)-2a-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{D}_L^{-1}$. On pose $c(F) = s(F) + 2a + \frac{2}{p-1}$. Soit

$$(\,,\,)_{F,n} : L^* \times F(\mathfrak{M}_L) \to E_{F,n}$$

le symbole de Hilbert.

Théorème 2.5.1. *Soient $\alpha \in L^*$ et $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$ et supposons que $v_p(\beta) > c(F)$. Alors on a*

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{d} [\operatorname{Tr}(X_{ij}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\pi}\lambda_{\omega_j}(\beta))](\xi_i).$$

Démonstration. Soit

$$(\,,\,]_{F,n}\ :\ L^* \times t_F(\mathfrak{M}_{L,1}) \to E_{F,n}$$

l'application définie au no. 1.4 et soit $\omega_1',...,\omega_d'$ la base de $t_F(O_K)$ duale à $\omega_1,...,\omega_d$. On voit que démontrer le théorème revient à vérifier que si $\beta = \sum_{j=1}^d \beta_j\omega_j' \in t_F(O_K)$, $v_p(\beta_j) > c(F)$, on a

$$(\alpha,\beta]_{F,n} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{d}[\,\mathrm{Tr}\,(X_{ij}\,\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\pi}\beta_j)\,](\xi_i).$$

Soit $\delta_{p^n}\ :\ L^* \to H^1(G_L,\mu_{p^n})$ l'application induite par la suite exacte de Kummer (1.1) . Posons $\mathfrak{M}_{C,2} = \mathfrak{M}_{C,1}^2$ et $\mathfrak{M}_{L,2} = (\mathfrak{M}_{C,2})^{G_L}$. Soit $\tau\ :\ H^1(G_L,\mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1}) \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ l'application (1.7) et soit $\bar{\tau}$ son composé avec l'application naturelle

$$H^1(G_L,\mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,2}) \to H^1(G_L,\mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1})\,.$$

Rappelons (cf. 1.8) que la décomposition de Hodge-Tate induit l'homomorphisme

$$\eta_0\ :\ t_F(O_L) \to H^0(G_L,T_F\otimes O_C(-1))\,.$$

On note $\bar{\eta}_0$ le composé

$$t_F(\mathfrak{M}_{L,2}) \xrightarrow{\eta_0} H^0(G_L,T_F\otimes\mathfrak{M}_{C,2}(-1)) \to H^0(G_L,\mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1))\otimes E_{F,n}\,.$$

Lemme 2.5.2. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
L^*\times t_F(\mathfrak{M}_{L,2}) & \xrightarrow{(\,,\,]_{F,n}} & E_{F,n} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \delta_{p^n}\times\bar{\eta}_0} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \bar{\tau}\times \mathrm{id}} \\
H^1(G_L,\mu_{p^n})\times H^0(G_L,\mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1)\otimes E_{F,n}) & \xrightarrow{\mathrm{cup}} & H^1(G_L,\mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,2})\otimes E_{F,n}
\end{array}$$

Démonstration du lemme. Soit

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to (A_{cris}^{-1})^{\phi=1} \to \mathfrak{M}_{C,1}(-1) \to 0$$

la suite exacte (1.5). En prenant le produit de cette suite avec T_F et avec $T_F(1)$ on obtient des applications $\tau_F^0\ :\ H_c^0(G_L,T_F\otimes\mathfrak{M}_{C,1}(-1)) \to H_c^1(G_L,T_F)$ et $\tau_F\ :\ H_c^1(G_L,T_F\otimes\mathfrak{M}_{C,1}) \to H_c^2(G_L,T_F(1))$. Les arguments d'algèbre homologique montrent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H_c^1(G_L,\mathbf{Z}_p(1))\times H_c^0(G_L,T_F\otimes\mathfrak{M}_{C,1}(-1)) & \xrightarrow{\mathrm{cup}} & H_c^1(G_L,T_F\otimes\mathfrak{M}_{C,1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\tau_F^0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau_F} \\
H_c^1(G_L,\mathbf{Z}_p(1))\times H_c^1(G_L,T_F) & \xrightarrow{\mathrm{cup}} & H_c^2(G_L,T_F(1))
\end{array}$$

est commutatif.

Comme G_L opère trivialement sur $E_{F,n}$ on voit que

$$H^1(G_L, (T_F \otimes \mathfrak{M}_{C,2})/p^n T_F \otimes \mathfrak{M}_{C,2}) \simeq H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,2}/p^n \mathfrak{M}_{C,2}) \otimes E_{F,n}$$

et que $\tau_F(\operatorname{mod} p^n) = \tau \otimes \mathrm{id}$. D'après le lemme 1.4.1 on a

$$(\alpha, \beta]_{F,n} = (\alpha, e_F(\beta))_{F,n} = \delta_{p^n}(\alpha) \cup \delta_{F,n}(e_F(\beta)) = \delta_{p^n}(\alpha) \cup \exp_{F,n}(\beta).$$

La proposition 1.8.3 montre que $\exp_{F,n}(\beta) = \tau_F^0(\bar{\eta}_0(\beta))$. On en déduit en utilisant le diagramme précédent que

$$(\alpha, \beta]_{F,n} = \delta_{p^n}(\alpha) \cup \tau_F^0(\bar{\eta}_0(\beta)) = \tau_F(\delta_{p^n}(\alpha) \cup \bar{\eta}_0(\beta)) = (\bar{\tau} \otimes \mathrm{id})(\delta_{p^n}(\alpha) \cup \bar{\eta}_0(\beta)) \,(\operatorname{mod} p^n),$$

d'où le lemme.

Démonstration du théorème (suite). Le diagramme (2.5) donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
U_L \times H^0(G_L, \mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1)) & \xrightarrow{\delta_{p^n} \times \mathrm{id}} & H^1(G_L, \mu_{p^n}) \times H^0(G_L, \mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle -d\log \times \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cup}} \\
\Omega_L \times H^0(G_L, \mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1)) & \xrightarrow{f} & H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1}),
\end{array}$$

où $f(a, b) = \Delta_L(a) \cup b$. En composant ce diagramme avec le diagramme du lemme précédent on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
U_L \times t_F(\mathfrak{M}_{L,2}) & \xrightarrow{(\,,\,]_{F,n}} & E_{F,n} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle -d\log \times \bar{\eta}_0} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \tau \times \mathrm{id}} \\
\Omega_L \times H^0(G_L, \mathfrak{M}_{C,2}(-1)/p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1) \otimes E_{F,n}) & \xrightarrow{f} & H^1(G_L, \mathfrak{M}_{C,1}/p^n\mathfrak{M}_{C,1}) \otimes E_{F,n}
\end{array}$$

Soient $\alpha \in U_L$ et $\beta \in t_F(\mathfrak{M}_{L,2})$. D'après (1.8) on a

$$\bar{\eta}_0(\beta) = \sum_{i=1}^{h} [\sum_{j=1}^{d} Y_{ij}\beta_j] (\xi_i),$$

où $Y = (Y_{ij}) = A^{*T}(-1)$. Le lemme 2.4.5 et la proposition 2.4.6 montrent que si $v_p(\beta_j) > c(F)$, on a

$$\bar{\eta}_0(\beta) \equiv \sum_{i=1}^{h} \frac{X_{ij}\beta_j}{\pi - u} \;(\operatorname{mod}\,(p^n\mathfrak{M}_{C,2}(-1), B_{dR}^+)).$$

En utilisant la proposition 2.3.2 on obtient maintenant que

$$(\alpha, \beta]_{F,n} = [-\sum_{i=1}^{h} \tau(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\pi} d\pi \cup \sum_{j=1}^{d} \widetilde{\frac{X_{ij}\beta_j}{\pi - u}})] (\xi_i) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{d} [\mathrm{Tr}(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\pi} X_{ij}\beta_j)](\xi_i).$$

Le théorème est démontré pour $\alpha \in U_L$. Pour $\alpha = \pi$ la démonstration est analogue (il faut prendre la suite (2.2) , divisée par π).

Remarques. i) Posons $L_m = K(E_{F,m})$ et soit

$$(\, , \,)_{F,m} \, : \, L_m^* \times F(\mathfrak{M}_{L_m}) \to E_{F,m}$$

le symbole de Hilbert, associé à L_m. Si $\beta \in F(\mathfrak{M}_{L,n})$ et si $\alpha_m \in L_m^*$ pour $m \geqslant n$, on voit que

$$(\alpha_m, [p^{m-n}](\beta))_{F,m} = (\mathrm{N}_{m,n}(\alpha_m), \beta)_{F,n} \, ,$$

où $\mathrm{N}_{m,n} \, : \, L_m^* \to L_n^*$ désigne l'application "norme". Remarquons que $v_p([p^{m-n}](\beta)) \geqslant c(F)$ pour m suffisamment grand.

ii) V.A.Abrashkin [A1-2] déduit les formules de type de Brückner-Vostokov à partir des formules en cartactéristique p. Cette méthode utilise le lien entre la théorie de Galois de L et celle du corps des normes de l'extension $\bigcup_{m=1}^{\infty} L(\sqrt[p^m]{\pi})/L$ (cf. [Win]). Il est interessant de donner la démonstration analogue du Théorème 2.4.1. C'est connu pour le groupe multiplicatif (et même pour les motifs $\mathbf{Z}_p(r)$) (cf. [F6]).

Considérons maintenant quelques cas particuliers.

i) Loi de réciprocité de S. Sen. Soit $F = \hat{\mathbf{G}}_m = (1+x)(1+y) - 1$ le groupe multiplicatif formel sur $\mathbf{Z}_p$. On sait que $h = \mathrm{ht}(F) = 1$, donc $\dim D_F = \dim D_F^1 = 1$. La forme $\omega = \frac{dx}{1+x}$ est $\hat{\mathbf{G}}_m$-invariante; on a $\lambda_\omega = \log(1+x)$. On voit facilement que $[p^n] = (1+x)^{p^n} - 1$, donc $E_{F,n} = \{z - 1 \mid z \in \mu_{p^n}\}$. Soit $\zeta_{p^n} - 1$ un générateur de $E_{F,n}$. Si L contient $E_{F,n}$, on a alors, $\Theta_{L,n} = p^n \, \zeta_{p^n}^{-1} \frac{d\zeta_{p^n}}{d\pi}$ et on retrouve la formule de S.Sen sous la forme légèrement différente:

$$(\alpha, \beta)_{\hat{\mathbf{G}}_m, n} = [\frac{1}{p^n} \mathrm{Tr}\,(\frac{D\log(\alpha)}{D\log(\zeta_{p^n})} \log(1+\beta))](\zeta_{p^n} - 1)$$

(comme $D_F = D_F^1$, on a $r(F) = 0$, d'où $c(F) = \frac{4}{p-1}$, mais on peut montrer que cette formule reste vrais si $v_p(\beta) > \frac{2}{p-1}$).

ii) Le cas non-ramifié. Supposons K non-ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et soit ϕ le Frobenius absolu. Notons $K[[\Delta]]$ l'anneau des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \Delta^i$ à coefficients dans K avec la règle $\Delta\alpha = \alpha^\phi \Delta$. On peut munir le module D_F d'une structure de $K[[\Delta]]$-module en posant

$$\Delta\,(\sum_{i=1}^{d} a_i(x_1, ..., x_d)\, dx_i) = \sum_{i=1}^{d} a_i^\phi(x_1^p, ..., x_d^p)\, dx_i^p \, .$$

On sait (cf. [F1], chap. 4) que $D_F^1(O_K)$ engendre D_F comme $K[[\Delta]]$-module. On voit maintenant qu'on peut choisir les éléments $\omega_{i_1}{}^{\Delta^{k_1}}, ..., \omega_{i_{h-d}}{}^{\Delta^{k_{h-d}}}$ de sorte que $\omega_1, ..., \omega_d, \omega_{i_1}{}^{\Delta^{k_1}}, ..., \omega_{i_{h-d}}{}^{\Delta^{k_{h-d}}}$ forment une base de D_F. On peut, donc, construire la matrice $\Theta_{L,n}$ à partir de la connaissance des logarithmes de F :

$$\Theta_{L,n} = p^n \begin{pmatrix} \lambda_1'(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda_1'(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \dots & \lambda_1'(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_d'(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda_d'(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \dots & \lambda_d'(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \lambda_{i_1}^{\Delta^{k_1}}(\xi_1) & \lambda_{i_1}^{\Delta^{k_1}}(\xi_2) & \dots & \lambda_{i_1}^{\Delta^{k_1}}(\xi_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{i_{h-d}}^{\Delta^{k_{h-d}}}(\xi_1) & \lambda_{i_{h-d}}^{\Delta^{k_{h-d}}}(\xi_2) & \dots & \lambda_{i_{h-d}}^{\Delta^{k_{h-d}}}(\xi_h) \end{pmatrix},$$

où $\lambda_i = \lambda_{\omega_i}$.

On sait que les éléments $\frac{\omega^{\Delta^i}}{p} = \frac{\omega^{\Delta^i}}{p} \pmod{D_F^1}$, $(\omega \in D_F^1(O_K),\ i \geqslant 1)$ engendrent $t_{F^*}(O_K)$ (cf. [FL]). Comme $\frac{\omega^{\Delta^i}}{p} \in O_K[[x]]\,dx$, on a $r(F) = 0$, donc $c(F) = \frac{4}{p-1}$.

Exemple. Supposons F de dimension 1. Notons ω un générateur de $D_F^1(O_K)$ et posons $\lambda = \int \omega$. On voit que ω, ω^{Δ}, ..., $\omega^{\Delta^{h-1}}$ forment une base de D_F, donc on a

$$\Theta_{L,n} = p^n \begin{pmatrix} \lambda'(\xi_1)\frac{d\xi_1}{d\pi} & \lambda'(\xi_2)\frac{d\xi_2}{d\pi} & \dots & \lambda'(\xi_h)\frac{d\xi_h}{d\pi} \\ \lambda^{\Delta}(\xi_1) & \lambda^{\Delta}(\xi_2) & \dots & \lambda^{\Delta}(\xi_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\Delta^{h-1}}(\xi_1) & \lambda^{\Delta^{h-1}}(\xi_2) & \dots & \lambda^{\Delta^{h-1}}(\xi_h) \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[A1] V.A. Abrashkin, *One remark on Brückner-Vostokov explicit reciprocity law*, preprint MPI/94-61 (1994), Bonn.

[A2] V.A. Abrashkin, *Explicit formulae for the Hilbert symbol of a formal group over Witt vectors*, preprint MPI (1995), Bonn.

[Br] H. Brückner, *Eine explizite Formel zum Reziprozitätsgesetz für Primzahlexponenten p*, Zahlentheorie, Bericht einer Tagung des Math. Inst. Oberwolfach 1964 (1966), Manheim.

[BK] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, Grothendieck Festshrift, vol.1 (1990), Birkhäuser, 334-400.

[C] P. Colmez, *Périodes p-adiques des variétés abéliennes*, Math.Ann. **292** (1992), 629-644.

[Co1] R. Coleman, *The dilogarithm and the norm residue symbol*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 373-402.

[Co2] R. Coleman, *Hodge-Tate periods and p-adic Abelian integrals*, Inv.Math. **78** (1984), 351-379.

[D] F. Destrempes, *Explicit reciprocity laws for Lubin-Tate modules*, J. für reine und angew. Math. **463** (1995), 27-47.

[F1] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48** (1977).

[F2] J.-M. Fontaine, *Sur certaines types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti- Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529-577.

[F3] J.-M. Fontaine, *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, Lect. Notes in Math. **1016** (1983), Springer, 86-108.

[F4] J.-M. Fontaine, *Formes Différentielles et Modules de Tate des Variétés Abéliennes sur les Corps Locaux*, Inv. Math. **65** (1982), 379-409.

[F5] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift , vol.2 (1990), Birkhäuser, 249-309.

[F6] J.-M. Fontaine, *Sur un théorème de Bloch et Kato (lettre à B. Perrin-Riou)*, Inv. Math. **115** (1994), 151-161.

[FL] J.-M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 547-608.

[K] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}*, Lect. Notes in Math. **1553** (1993), Springer, 50-163.

[Ko] V.A. Kolyvagin, *Formal groups and the norm residue symbol*, Math. USSR Izv. **15** (1980), 289-348.

[Ku] M. Kurihara, *Computation of the syntomic regulator in the cyclotomic case. Appendix to: M. Gras, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques I*, Invent. Math. **99** (1990), 293-320.

[S] S. Sen, *On explicit reciprocity laws*, J. für reine und angew. Math. **Bd.313** (1980), 1-26.

[Se] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[dSh] E. de Shalit, *The explicit reciprocity law in local class field theory*, Duke Math. J. **53** (1986), 163-176.

[T1] J. Tate, *p-divisible Groups*, Proc. of a conf. on local fields, Driebergen 1966 (1967).

[T2] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V] S.V. Vostokov, *Explicit form of the law of reciprocity*, Math. USSR Izv. **13** (1979), 557-588.

[W] A. Wiles, *Higher explicit reciprocity laws*, Ann. of Math. **107** (1978), 235-254.

[Win] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; application*, Ann. Sci. ENS **16** (1983), 59-89.

UNIVERSITÉ PÉDAGOGIQUE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, CHAIRE D'ALGÈBRE, MOJKA 48, 191186, SAINT-PETERSBOURG, RUSSIE