Un théorème de K. Mahler revisité

D. ESSOUABRI

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
53225 Bonn

Germany

Université Nancy 1
Institut de Mathématiques Elie Cartan
B.P. 239
54506 Vandoeuvre lès Nancy

France

MPI 96-164

Un théorème de K.Mahler revisité

D. ESSOUABRI[1]

Université Nancy1, Institut de Mathématiques Elie Cartan, B.P.239,
54506 Vandœuvre lès Nancy, France.
e-mail: essouabr@iecn.u-nancy.fr
et
Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Straße 26
53225 Bonn, Germany.
e-mail: essouabr@mpim-bonn.mpg.de

Abstract: Let θ an irrational quadratic > 0, and P,Q $\in \mathbb{R}[X_1, X_2]$.
Set $s \longmapsto Z_\theta(P,Q;s) = \sum_{m_2=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q(m_1,m_2) P^{-s}(m_1,m_2)$. In 1930, K.Mahler proved, under strong assumptions on P (P elliptic), the existence of a meromorphic continuation to the complex plan of such series . The goal of this paper is:

- To generalize this result under more general assumptions on P which are probably optimal and obtain, as an application, a new prove to a theorem of Hecke-Hardy&Littlewood;
- To give a weak version of Mahler's result when θ is irrational algebraic (not necessary quadratic) and P very general.

Résumé: Soient θ un irrationnel quadratique positif et $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$.
On pose $s \longmapsto Z_\theta(P,Q;s) = \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q(m_1,m_2)\ P^{-s}(m_1,m_2)$
En 1930, K.Mahler a démontré sous des hypothèses assez fortes sur P (ellipticité) un théorème d'existence de prolongement méromorphe au plan complexe de telles séries.Le but de ce travail est:

- Généraliser ce résultat à une classe de polynomes trés générale (et dans un sens optimale) et obtenir, comme application, une nouvelle preuve d'un théorème de Hecke-Hardy&Littlewood;
- Prouver une version faible du théorème de Mahler dans le cas où θ est irrationnel algébrique (non nécessairement quadratique) et P très général.

[1] l'auteur remercie le Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn où il a complété ce travail

1 Introduction, Notations et Enoncés des résultats:

1.1 Introuduction:

Suite aux travaux de E.Hecke([6],1922), de G.H. Hardy et J.E. Littlewood([5],1924) sur le prolongement méromorphe de $s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_1(\theta n)}{n^s}$ où θ est un irrationel quadratique et $B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$ la première fonction de Bernouilli, K.Malher a démontré le résultat suivant:

Théorème (K.Mahler [7],1928)
Soit θ un irrationel quadratique > 0.
Et soient P et $Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ de degrés respectifs m et n. On note P_m la partie homogène de plus grand degré de P et $r = P - P_m$ et soit $d = 2$ si $r \equiv 0$ et $d = 1$ sinon.Et on suppose que P est elliptique c'est à dire:

1. $P(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in [1, +\infty[^2$;
2. $P_m(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in [0, +\infty[^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Alors la série de Dirichlet:

$$s \longmapsto Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q(m_1, m_2) P^{-s}(m_1, m_2)$$

possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples et contenus dans un ensemble de la forme : $\Gamma = \{\frac{n+2-k}{m} | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{n-dk}{m} + \frac{2k^* \pi i}{m \ln \eta} | k \in \mathbb{N}, k^* \in \mathbf{Z}\}$
où η est une unité positive de $\mathbf{Z}[\theta]$.
En outre $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2, \forall \varepsilon > 0$ et $\forall \delta > 0$,
il existe $C = C(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon, P, Q, \theta) > 0$ tel qu'on ait : $|Z_\theta(P, Q; s)| \leq C e^{\varepsilon |\tau|}$ uniformément en $s = \sigma + i\tau$ vérifiant $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ et $d(s, \Gamma) \geq \delta$.

Si on note $A_\theta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > \frac{1}{2} \ et \ \frac{1}{2} < x_2 < \theta x_1\}$, alors A_θ est un semi-algébrique ouvert de $\mathbb{R}^2$ et :

$$Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q(m_1, m_2) \quad [P(m_1, m_2)]^{-s} = \sum_{\mathbf{m} \in A_\theta \cap \mathbf{Z}^2} Q(\mathbf{m}) \quad P^{-s}(\mathbf{m})$$

Dans [4], nous avons étudié de telles séries dans le cas où A est un semi-algébrique ouvert quelconque très général, $Q \equiv 1$ et P vérifiant des hypothéses très faibles. Il est facile de se convaincre que prendre Q polynôme très général (par exemple non dégénéré sur ∂A) ou même quelconque dans certain cas comme $A = A_\theta$ où θ quadratique, n'introduit pas de difficultés serieuses et les résultats énoncés dans [4] s'étendent à ce cadre . Il découle donc des résultats de [4] que la série de Dirichlet associée à un tel semi-algébrique possède un demi plan de convergence et d'holomorphie $\{\Re(s) > \sigma_0\}$, ou σ_0 est son abscisse de convergence et qu'elle possède un prolongement méromorphe à un demi

plan de la forme $\{\Re(s) > \sigma_0 - \beta\}$ ($\beta > 0$) avec σ_0 comme seul pôle (d'ailleurs d'ordre 1 ou 2). Pour aller au delà de ces résultats (i.e obtenir le $2^{\text{ème}}$pôle, $3^{\text{ème}}$pôle, etc, $\cdots$) cela dépend des effets arithmétiques de la frontière de A . Nous avons traité dans [4] le cas d'une classe où cet effet est absent et nous avons montré alors que les séries de Dirichlet associées à de tels ensembles possèdent des prolongements méromorphes à tout $\mathbb{C}$ qui vérifient les propriétés standardes notamment le fait que les pôles forment une suite discrète décroissante de réels. Les secteurs A_θ étudiés par K.Mahler (et en dehors des raisons qui ont motivé son travail) constitue pour nous la première classe de semi-algébriques dont les effets arithmétiques des frontières sont non négligables et pour laquelle on sait exhiber des prolongements méromorphes à tout $\mathbb{C}$ des séries de Dirichlet associées. Le point essentiel ici est évidement les répartitions non standardes des pôles .
Les hypothèses imposées par Mahler au polynome P (ellipticité) étant très restrictives et le résultat de Hecke-Hardy&Littlewood (voir corollaire 1 de ce papier) ne découle pas de son théorème. Le but de ce papier est d'une part de généraliser (en précisant) ce théorème, les hypothèses que nous imposerons à P sont très générales et le résultat obtenu contient ceux de Mahler et de Hecke-Hardy&Littlewood . D'un autre côté nous donnerons une forme faible du théorème de Mahler qui reste valable dans le cas d'un nombre algébrique irrationel quelconque (non nécessairement quadratique) chose que les méthodes classiques comme celle de Mahler, adaptées au cas quadratique, ne pouvaient faire.

1.2 Notations:

Dans toute la suite les symboles:

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \ll_{\mathbf{y}} \quad g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \Lambda)$$

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0_{\mathbf{y}}\,(g(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \Lambda)$$

ont le même sens et signifie qu'il existe $A = A(\mathbf{y}) > 0$, ne dépendant ni de $\mathbf{x}$ ni de λ, mais pouvant à priori dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré en particulier de $\mathbf{y}$, tel qu'on ait:

$$\forall \mathbf{x} \in X \ et\ \forall \lambda \in \Lambda \quad |f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \le A g(\mathbf{x})$$

Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$. On note en fin, pour $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + i\tau$ où $\sigma = \Re(s)$ et $\tau = \Im(s)$.

1.3 Enoncés des résultats:

Théorème 1 *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$, θ un irrationel quadratique > 0. On pose $A_\theta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < x_2 < \theta x_1\}$ .On suppose que P vérifie les hypothèses suivantes:*

1. $P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty$ *quand* $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in A_\theta$;
2. $d(A_\theta, Z(P)) > 0$ *où* $Z(P) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 | P(\mathbf{z}) = 0\}$;

3. P *est non dégénéré sur* $S_\theta = \{(x_1, \theta x_1) | x_1 > \frac{1}{2}\} (\subset \partial A_\theta)$
i.e si $P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ *et si on pose* $P^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} \mathbf{x}^\alpha$, *alors* $P(\mathbf{x}) \asymp P^*(\mathbf{x})$.

On a alors:

1. *Il existe* $\beta > 0$ *tel que* $s \longmapsto Z_\theta(P, Q; s)$ *converge absolument et est holomorphe dans le demi plan* $\{\Re(s) > \beta\}$. *Le meilleur* β *possible est appelé abscisse de convergence et noté* $\sigma_0 = \sigma_0(\theta, P, Q)$;

2. $s \longmapsto Z_\theta(P, Q; s)$ *possède un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *avec des pôles contenus dans un ensemble de la forme*
$\Gamma_\theta = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} + \frac{2k^* \pi i}{\ln \eta} | (k, k^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$
où $M = M(\theta, P, Q) \in \mathbb{N}^*$ *et* η *une unité positive de* $\mathbb{Z}[\theta]$
De plus si s *est un pôle de* Z_θ, *alors l'ordre de* s *est* ≤ 2 *si* s *est réel et l'ordre de* s *est* ≤ 1 *sinon;*

3. *Si en plus le polynôme* Q *verifie* $\forall \mathbf{m} \in N^{*2} \quad Q(\mathbf{m}) \geq 0$ *alors l'abscisse de convergence* $\sigma_0 = \sigma_0(\theta, P, Q)$ *est effectivement un pôle de* Z_θ *et appartient a* $\mathbb{Q}_+$.

4. *Le prolongement méromorphe* $\tilde{Z}_\theta$ *de* Z_θ *vérifie: il existe* $D = D(\theta, P, Q) > 0$ *tel que* $\forall\ \varepsilon, \delta, N > 0$, *il existe* $C = C(\varepsilon, \delta, \theta, P, Q) > 0$ *tel que*
$|\tilde{Z}_\theta(P, Q; s)| \leq C \quad (1 + |\tau|^{D(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon})$
uniformément en $s = \sigma + i\tau$ *vérifiant* $\sigma \geq \sigma_0 - N$ *et* $d(s, \Gamma_\theta) \geq \delta$;

5. *Si en plus le polynôme* $Q(\mathbf{x}) = \sum_\alpha b_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ *verifie la condition:*

$$\sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = deg(Q)} \frac{1}{\alpha_2 + 1} b_\alpha \theta^{\alpha_2 + 1} \neq 0 \ \text{et}\ \forall \mathbf{m} \in N^{*2} \quad Q(\mathbf{m}) \geq 0$$

Alors dans le demi-plan $\{\Re s > \sigma_0 - \frac{1}{M}\}$, σ_0 *est le seul pôle de* $s \longmapsto \tilde{Z}_\theta(P, Q; s)$.

Corollaire 1 (théorème de Hecke -Hardy&Littelwood) *Soit* θ *un irrationnel quadratique* > 0 *et posons* $s \longmapsto L_\theta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_1(\theta n)}{n^s}$ *où* $B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$, *la première fonction de Bernouilli. Alors* $s \longmapsto L_\theta(s)$ *verifie les conclusions 1, 2 et 4 du théorème 1 avec* $\sigma_0 = 0$ *et* $M = 1$.

Théorème 2 *Soit* θ *algébrique irrationnel positive (non nécessairement quadratique) Et soient* $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ *tel que* P *verifie les hypotheses du theoreme 1 et* $Q(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ *verifie l'hypothese suivante:* $\sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = deg(Q)} \frac{1}{\alpha_2 + 1} b_\alpha \theta^{\alpha_2 + 1} \neq 0$
On a alors:

1. *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $s \longmapsto Z_\theta(P, Q; s)$ *converge absolument et est holomorphe dans le demi plan* $\{\Re(s) > \alpha\}$. *On notera* $\sigma_0 = \sigma_0(\theta, P, Q)$ *son abscisse de convergence.*

2. *Il existe* $\beta > 0$ *tel que* $s \longmapsto Z_\theta(P, Q; s)$ *possède un prolongement méromorphe au demi-plan* $\{\Re(s) > \sigma_0 - \beta\}$ *avec* σ_0 *comme seul candidat pôle dans ce demi plan;*

3. Si en plus Q verifie $\forall \mathbf{m} \in N^{*2} \quad Q(\mathbf{m}) \geq 0$ *alors* $\sigma_0 \in \mathbb{Q}_+$ *et il est effectivement un pôle d'ordre 1 ou 2;*

4. Le prolongement méromorphe $\tilde{Z}_\theta$ *de* Z_θ *vérifie: il existe* $D = D(\theta, P, Q) > 0$ *tel que* $\forall\ \varepsilon, \delta > 0$, *il existe* $C = C(\varepsilon, \delta, \theta, P, Q) > 0$ *tel que*
$|\tilde{Z}_\theta(P, Q; s)| \leq C \quad (1 + |\tau|^{D(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon})$
uniformément en $s = \sigma + i\tau$ *vérifiant* $\sigma > \sigma_0 - \beta$ *et* $|s - \sigma_0| \geq \delta$.

1.4 Remarques

- Si P vérifie les hypothèses de Mahler (i.e. P elliptique), alors il est évident que P est non dégénéré sur $[1, +\infty[^2$ ce qui est plus restrictif que nos hypothèses (voir [3]);

- Les hypothèses (1) et (2) des théorèmes 1 et 2 sont dans un sens optimales pour les mêmes raisons que celles que nous avons données dans [3] (le cas où A_θ est remplacé par un quadrant de la forme $[B, +\infty[^2)$. Quant à l'hypothèse (3), elle n'est pas très restrictive, puisque presque tous les polynômes sont non dégénérés à l'infini sur une demi droite donnée .

- Dans la démonstration du théorème2 on n'utilise que le faite qu'un algébrique s'approxime mal par les rationnels plus précisement on utilise le faite qu'il existe deux constantes $c, d > 0$ tel que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad |\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{|q|^d}$. Et le théorème est valable pour tout les irationnels qui verifient cette propriété donc en plus des algébriques bien sur le resultat reste valable pour certains transendants comme π, $\ln(r)$ $\forall r \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[$, etc...

- Pour obtenir les résultats ci-dessus nous avons utilisé essentiellement, en plus des idées de Mahler dans [7], une nouvelle formule sommatoire (construite à partir de celle de Bochner-Martinelli) et la désingularisation des courbes planes.

2 Construction d'une formule sommatoire:

Soient θ un algébrique irrationnel positif et P$\in \mathbb{R}[X_1, X_2]$qui vérifie les hypothèses (1)et(2)du théorème 1. On pose $A_\theta = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \frac{1}{2}\ et\ \frac{1}{2} < x_2 < \theta x_1\}$, A_θ est un semi-algbrique, ouvert et connexe de $\mathbb{R}^2$. Alors d'aprés ([4], lemmes 1 et 4 page 4-5) on a:

$$\exists c, \beta > 0 \ tels\ que\ \forall x \in A_\theta\ P(x) \geq c(1 + \|x\|)^\beta \tag{1}$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ la fonction\ \mathbf{x} \longmapsto \frac{\partial^\alpha P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})}\ est \text{ bornée } sur\ A_\theta \tag{2}$$

(En fait il n'y a qu'un nombre fini de conditions car $\partial^\alpha P \equiv 0\ si\ |\alpha| > degP$) , en particulier, il existe R > 0 tel que $\forall \mathbf{x} \in A_\theta$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^\alpha P(\mathbf{x})| \leq RP(\mathbf{x})$. Soient

D=deg(P), et $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} inf\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{R2^{D+1}})\ \in]0, \frac{1}{2}[$. On a alors $\forall \mathbf{x} \in A_\theta,\ et\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $\|\mathbf{z}\| < 2\varepsilon_0$:

$$|P(\mathbf{x}+\mathbf{z}) - P(\mathbf{x})| = |\sum_{|\alpha|\leq D,\ \alpha\neq 0} \frac{\partial^\alpha P(\mathbf{x})}{\alpha!}\ \mathbf{z}^\alpha| \leq R2^D P(\mathbf{x})\|\mathbf{z}\| \leq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$$

$$\Longrightarrow \Re(P(\mathbf{x}+\mathbf{z})) \geq P(\mathbf{x}) - |P(\mathbf{x}+\mathbf{z}) - P(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$$

Ce qui permet de voir facilement d'aprés (1) qu'il existe $\varepsilon_0, c, c' > 0$ ne dépendant que de P et de θ tel que sur l'ensemble
$\{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid d(\mathbf{x}, A_\theta) < \varepsilon_0\ et\ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) < {\varepsilon_0}^2\}$, on a

$$\Re(P(\mathbf{z})) = \Re(P(\mathbf{x}+i\mathbf{y})) \geq c(1+\|\mathbf{x}\|)^\beta \geq c'(1+\|\mathbf{z}\|)^\beta \tag{3}$$

Ceci étant, nous poserons $\forall \varepsilon\ \in]0, \varepsilon_0[\ et\ \forall N \in \mathbb{N}^*$:

$U_{\varepsilon,N} = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in A_\theta,\ |x_1| + |x_2| < \sqrt{2}N\ et\ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) < \varepsilon^2\}$

Alors, $U_{\varepsilon,N}$ est un domaine de $\mathbb{C}^2$, borné et à frontière C^1 par morceaux. En plus, $\partial U_{\varepsilon,N} = {F_{\varepsilon,N}}^1 \cup {F_{\varepsilon,N}}^2 \cup {F_{\varepsilon,N}}^3$, où:

$F^1_{\varepsilon,N} = \{\mathbf{z} = \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \mathbf{x} \in \partial A_\theta, |x_1|+|x_2| \leq \sqrt{2}N \text{et} \sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2) \leq \varepsilon^2\}$

$F^2_{\varepsilon,N} = \{\mathbf{z} = \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \mathbf{x} \in \overline{A}_\theta, |x_1|+|x_2| = \sqrt{2}N \text{et} \sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2) \leq \varepsilon^2\}$

$F^1_{\varepsilon,N} = \{\mathbf{z} = \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad \mathbf{x} \in \overline{A}_\theta, |x_1|+|x_2| \leq \sqrt{2}N \text{et} \sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2) = \varepsilon^2\}$

On fixe $s \in \mathbb{C}$ et nous poserons pour $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\ et\ j \in \{1, 2\}$:

$$h(\mathbf{z}) = Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z})\ ,\ f_j(\mathbf{z}) = \sin(\pi z_j)\ et\ s_j(\mathbf{z}) = \sin(\pi \overline{z_j})$$

On a évidement d'aprés (3) h est continue sur $\overline{U_{\varepsilon,N}}$ et holomorphe sur $U_{\varepsilon,N}$. En plus, $f = (f_1, f_2)$ est holomorphe au voisinage de $\overline{U_{\varepsilon,N}}$ et $s = (s_1, s_2)$ est de classe C^1 au voisinage de $\partial U_{\varepsilon,N}$.
Mais comme $\partial U_{\varepsilon,N} \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$ alors $\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \partial U_{\varepsilon,N}$ on a:

$$\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle = \sum_{j=1}^{2} |\sin(\pi z_j)|^2 = \sum_{j=1}^{2} \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^{2} \sinh^2(\pi y_j)\ >\ 0$$

Ce qui permet de justifier l'utilisation du corollaire de la formule de représentation intégrale de Leray ([2],p.56, 1.10.1, 1.10.2 et 1.10.3) (elle aussi consequense de celle de Bochner-Martinelli) suivant:

Théorème([1],p.34)
Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière C^1 par morceaux. Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{U}$ et $s_1 \ldots s_n$ n fonctions de classe C^1 sur un voisinage de ∂U. On pose $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $s = (s_1, \ldots, s_n)$

On suppose que $\forall \mathbf{z} \in \partial U \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{z}) s_i(\mathbf{z}) \neq 0$. *Alors:*
$Z(U,f) = \{\mathbf{z} \in U | f_1(\mathbf{z}) \ldots f_n(\mathbf{z}) = 0\}$ *est discret dans* U *(donc fini) et* $\forall\ h : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue sur* $\overline{U}$ *et holomorphe sur* U*, on a:*

$$\sum_{\alpha \in Z(U,f)} h(\mathbf{z}) = \frac{(-1)^{n(n-1)}(n-1)!}{(2\pi i)^n} \quad \int_{\partial U} h(\mathbf{z}) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(\mathbf{z})\ ds_{[k]} \wedge df}{\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^n}$$

où pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, $ds_{[k]} = ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_{k-1} \wedge ds_{k+1} \wedge \ldots \wedge ds_n$

Nous obtenons donc que: $\forall s \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ *et* $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m} \in A_\theta \cap \mathbf{Z}^2, |m_1|+|m_2|<\sqrt{2}N} Q(\mathbf{m}) P^{-s}(\mathbf{m}) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial U_{\varepsilon,N}} Q(\mathbf{z}) P^{-s}(\mathbf{z}) \frac{s_2(\mathbf{z})\ ds_1 \wedge df - s_1(\mathbf{z})\ ds_2 \wedge df}{\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^2} \\ &= \sum_{j=1}^{j=3} \frac{1}{4\pi^2} \int_{F^j_{\varepsilon,N}} Q(\mathbf{z}) P^{-s}(\mathbf{z}) \frac{s_1(\mathbf{z}) ds_2 \wedge df - s_2(\mathbf{z}) ds_1 \wedge df}{\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^2} \quad (4) \end{aligned}$$

car $\partial U_{\varepsilon,N} = \bigcup_{j=1}^{3} F^j_{\varepsilon,N}$ et les $F^j_{\varepsilon,N}$ sont à des ensembles de mesures nulles près, deux à deux disjoints.
De plus il est facile de vérifier que:

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \exists d = d(\theta, \varepsilon) > 0 \textit{ et } \gamma = \gamma(\theta) > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{z} \in \partial U_{\varepsilon,N} \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle \geq \frac{d}{(1 + \|\mathbf{z}\|)^\gamma} \quad (5)$$

En effet: $\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \partial U_{\varepsilon,N}$

$$\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^2 = \sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2) + \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2)$$

et:

$$(i) \text{ sur } F^3_{\varepsilon,N} \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle \geq \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) = \varepsilon^2 \quad \gg_\varepsilon \frac{1}{1 + \|\mathbf{z}\|}$$

$$(ii) \text{ Sur} F^1_{\varepsilon,N} \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle \geq \sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2) \quad \gg \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^2)$$

Mais si $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in F^1_{\varepsilon,N}$ alors $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \partial A_\theta$ d'où $x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$ ou $x_2 = \theta x_1$.
Si $x_1 = \frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$ alors $d(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \geq \frac{1}{2}$. Sinon alors $x_2 = \theta x_1$ nous poserons alors $\forall j = 1, 2 \quad n_j =$ l'entier le plus proche de x_j *et* $u_j = x_j - n_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ on a alors:
$0 = x_2 - \theta x_1 = (n_2 + u_2) - \theta(n_1 + u_1) = (n_2 - \theta n_1) + (u_2 - \theta u_1)$
$\Longrightarrow |u_1| + |u_2| \quad \gg_\theta \quad |u_2 - \theta u_1| = |n_2 - \theta n_1| \quad \gg_\theta \quad \frac{1}{n_1{}^\gamma}$ pour une constante $\gamma = \gamma(\theta) > 0$
La dernière inégalité découle du théorème de Liouville sur l'approximation diaphantienne des nombres algébriques.
On obtient donc:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^2) = |u_1| + |u_2| \quad \gg_\theta \quad \frac{1}{n_1{}^\gamma} \quad \gg_\theta \quad \frac{1}{(1 + \|\mathbf{x}\|)^\gamma} \quad \gg_\theta \quad \frac{1}{(1 + \|\mathbf{z}\|)^\gamma}$$

$$(iii)\text{Sur}F^2_{\varepsilon,N} \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^2 \quad \geq \sin(\pi x_1)^2 + \sin(\pi x_2)^2 \quad \gg \quad d(\mathbf{x}, \mathbb{Z}^2)$$

Or $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in F^2_{\varepsilon,N} \Longrightarrow |x_1| + |x_2| = \sqrt{2}N$. Nous posons alors comme dans le cas précédent $\forall j = 1, 2 \quad n_j =$ l'entier le plus proche de x_j et $u_j = x_j - n_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ on pose aussi $\varepsilon_j = \frac{x_j}{|x_j|} \in \{-1, +1\}$ on a alors

$$\sqrt{2}N = |x_1| + |x_2| = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 = \varepsilon_1(n_1 + u_1) + \varepsilon_2(n_2 + u_2) = (\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2) + (\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2)$$

$$\Longrightarrow |u_1| + |u_2| \quad \geq \quad |\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2)| = |\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 - \sqrt{2}N| \quad \gg \quad \frac{1}{N}$$

La dernière inégalité découle toujours du théorème de Liouville cité précédement. D'où:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^2) = |u_1| + |u_2| \quad \gg \quad \frac{1}{N} = \frac{\sqrt{2}}{|x_1| + |x_2|} \quad \gg \quad \frac{1}{1 + \| \mathbf{x} \|} \quad \gg_\theta \quad \frac{1}{1 + \|\mathbf{z}\|}$$

En conclusion la relation (5) est démontrée.C.Q.F.D.
De plus $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ verifiant $\sigma > 0$ on a d'aprés (4):

$$\exists c' = c'(\theta, P) > 0 \ et \ \beta = \beta(\theta, P) > 0 \text{tel que:} \forall \mathbf{z} \in U_{\varepsilon,N} \quad \Re P(\mathbf{z}) \geq c'(1 + \| \mathbf{z} \|)^\beta$$

$\Longrightarrow \forall \mathbf{z} \in U_{\varepsilon,N} \quad |P(\mathbf{z})| \geq c'(1 + \| \mathbf{z} \|)^\beta$. D'où

$$|P^{-s}(\mathbf{z})| = |e^{-s \ln P(\mathbf{z})}| = |e^{-(\sigma + i\tau)(\ln(|P(\mathbf{z})|) + i \arg(P(\mathbf{z})))}| \leq \quad e^{\pi|\tau|}|P(\mathbf{z})|^{-\sigma}$$

et par suite:

$$|P^{-s}(\mathbf{z})| \leq \quad e^{\pi|\tau|}c'^{-\sigma}(1 + \|\mathbf{z}\|)^{-\beta\sigma} \tag{6}$$

Nous en déduisans que: $\exists \eta_0 = \eta_0(\theta, P, Q) > 0$ tel que: $s \longrightarrow Z_\theta(s; P, Q)$ converge absolument et holomorphe sur le demi-plan $\{\Re(s) > \eta_0\}$.
Nous rappelons les notations:
$A_\theta = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \frac{1}{2} \ et \ \frac{1}{2} < x_2 < \theta x_1\}$ et $S_\theta = \{(x_1, \theta x_1) \mid x_1 > \frac{1}{2}\}$.
Et nous posons:
$V_\theta = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in A_\theta \mid x_1 = \frac{1}{2}\}$ et $W_\theta = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in A_\theta \mid x_2 = \frac{1}{2}\}$
Nous posons aussi $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

- $U^1_\varepsilon = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in A_\theta \ et \ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) = \varepsilon^2\}$;
- $U^2_\varepsilon = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in S_\theta \ et \ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) < \varepsilon^2\}$;
- $U^3_\varepsilon = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in V_\theta \ et \ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) < \varepsilon^2\}$;
- $U^4_\varepsilon = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in W_\theta \ et \ \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2) < \varepsilon^2\}$;
- Et
$$K(\mathbf{z}) = \frac{s_1(\mathbf{z})ds_2 \wedge df - s_2(\mathbf{z})ds_1 \wedge df}{\langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle^2}.$$

Alors avec ces notations et en utilisant ce qui précède nous déduisons que:
$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \eta_0$:

$$Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{\mathbf{m} \in A_\theta \cap \mathbf{Z}^2} Q(\mathbf{m}) P^{-s}(\mathbf{m}) = Z_\theta^1(P, Q; s) + Z_\theta^2(P, Q; s) + Z_\theta^3(P, Q; s) + Z_\theta^4(P, Q; s) \tag{7}$$

où

$$\forall i = 1, 2, 3, 4 \quad Z_\theta^i(P, Q; s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{U_\varepsilon^i} Q(\mathbf{z}) P^{-s}(\mathbf{z}) K(\mathbf{z})$$

Pour obtenir (7) nous avons fait tendre $N \longrightarrow +\infty$ par valeurs entières (ie $N \in \mathbb{N}^*$) dans (4) en tenant compte de (5) et (6) pour justifier cette opération.
D'où, vu les définitions des s_j et des f_j on verifie facilement qu'il existe des polynômes universels H_1, H_2, G_2, G_3 et $G_4 \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_8]$ tels que si pour $R \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_8]$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ on pose:

$\tilde{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\cos(\pi x_1), \cos(\pi x_2), \sin(\pi x_1), \sin(\pi x_2), \cosh(\pi y_1), \cosh(\pi y_2), \sinh(\pi y_1), \sinh(\pi y_2))$
Alors:

$$* \ \forall\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^1 \quad K(\mathbf{z}) = K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\tilde{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \wedge dy_2 + \tilde{H}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \wedge dy_1}{[\sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2) + \varepsilon^2]^2};$$

$$* \ \forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^2 \quad K(\mathbf{z}) = K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\tilde{G}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx_1 \wedge d\mathbf{y}}{[\sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2) + \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2)]^2};$$

$$* \ \forall j = 3, 4 \quad \forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^j \quad K(\mathbf{z}) = K_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\tilde{G}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx_l \wedge d\mathbf{y}}{[1 + \sin^2(\pi x_l) + \sinh^2(\pi y_1) + \sinh^2(\pi y_2)]^2}$$

où $l = 2$ si $j = 3$ et $l = 1$ si $j = 4$.

En conclusion et avec ces notations on obtient alors la proposition suivante:

Proposition 1 (Formule sommatoire) *Il existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta, P, Q) \in]0, 1[$ *et* $\eta_0 = \eta_0(\theta, P, Q) > 0$ *tel que:*

1. $s \longrightarrow Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{\mathbf{m} \in A_\theta \cap \mathbf{Z}^2} Q(\mathbf{m}) P^{-s}(\mathbf{m})$ *converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan* $\{\Re(s) > \eta_0\}$*;*
2. $\forall s \in]0, \varepsilon_0[$ *et* $\forall s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\Re(s) > \eta_0$ *on a:* $Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{j=1}^4 Z_{\theta,\varepsilon}^j(P, Q; s)$ *où*

$$\forall j = 1, 2, 3, 4 \quad Z_{\theta,\varepsilon}^j(P, Q; s) = \int_{U_\varepsilon^j} Q(\mathbf{z}) P^{-s}(\mathbf{z}) K(\mathbf{z}) = \int_{U_\varepsilon^j} Q(\mathbf{z}) P^{-s}(\mathbf{z}) K_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

les U_ε^j *ainsi que les* K_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ *sont définis ci-dessus.*

Remarque:
Dans la suite de ce travail, nous n'avons pas besoin des expressions explicites des polynômes H_1, H_2, G_2, G_3 *et* G_4, mais il est evident que l'on peut obtenir ces expressions par un calcul facile à partir des fomules des pages précedentes. Il va de soi que ceci peut s'averer utile si l'on veut rendre effectifs les résultats de ce papier.

3 Démonstrations des théorèmes 1 et 2:

Soient θ un algébrique irrationel > 0

et $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ qui vérifient les hypothèses du théorème 1. Alors d'aprés la proposition1 il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta, P, Q) \in]0,1[$ et $\eta_0 = \eta_0(\theta, P, Q) > 0$ tel que:

1.
$$s \longrightarrow Z_\theta(P, Q; s) \tag{8}$$
converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > \eta_0\}$

2. $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et$\forall s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > \eta_0$, on a:
$$Z_\theta(P, Q; s) = \sum_{j=1}^{4} Z_{\theta,\varepsilon}^{j}(P, Q; s) \tag{9}$$
où les $Z_{\theta,\varepsilon}^{j}$ sont définis dans la proposition 1.

Donc il suffit d'étudier chacun des termes $Z_{\theta,\varepsilon}^{j}$

3.1 Etude de $s \longrightarrow Z_{\theta,\varepsilon}^{1}(P, Q; s)$:

On remarque d'abord que nous pouvons supposer sans restreindre la généralité du problème que:

1. $\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \quad Q(\mathbf{z}) = \tilde{Q}(\mathbf{x})\mathbf{y}^\mu$ où $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ et $\mu \in \mathbb{N}^2$

2.
$$\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^1 \quad K(\mathbf{z}) = K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{R(\mathbf{x})G(\mathbf{y})d\mathbf{x} \wedge dy_1}{[\sin^2(\pi x_1) + \sin^2(\pi x_2) + \varepsilon^2]^2}$$
où $R(\mathbf{x})$ est un monôme en $(\cos(\pi x_1), \cos(\pi x_2), \sin(\pi x_1), \sin(\pi x_2))$ et $G(\mathbf{y})$ est un monôme en $(\cosh(\pi y_1), \cosh(\pi y_2), \sinh(\pi y_1), \sinh(\pi y_2))$

Nous supposerons désormais que c'est le cas. Soit D le degré total de P,nous définissons $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{N}^2$ par $\alpha_0 = 0$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^2 \mid |\alpha| \le D\}$ les α_j sont deux à deux distincts.On a alors:$\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^1$

$$P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \le D} \partial^\alpha P(\mathbf{x}) \frac{(i\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=1}^{q} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x})\ \mathbf{y}^{\alpha_j}$$

Or d'après (2) on a:

$$|\sum_{j=2}^{q} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x}) \mathbf{y}^{\alpha_j}| \quad \ll \quad P(\mathbf{x}) \|\mathbf{y}\| \quad \ll \quad \varepsilon P(\mathbf{x})$$

Donc quitte à diminuer $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta, P, Q) \in]0,1[$ nous pouvons supposer que

$$\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^1 \quad |\sum_{j=2}^{q} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x}) \mathbf{y}^{\alpha_j}| \quad \le \quad \frac{1}{2} P(\mathbf{x})$$

Et comme:

$$P^{-s}(\mathbf{z}) = P^{-s}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \left[P(\mathbf{x}) + \sum_{j=2}^{q} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!}\partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x})\mathbf{y}^{\alpha_j}\right]^{-s}$$

En développant on obtient: $\forall s \in \mathbb{C},\ \forall \mathbf{z} = \mathbf{x}+i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^1$

$$P^{-s}(\mathbf{z}) = P^{-s}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} \binom{-s}{\mathbf{u}} H(\mathbf{x})^{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}} \tag{10}$$

où

$$H(\mathbf{x}) = (1, \frac{\partial^{\alpha_2}P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_q}P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})}),\ \tilde{\mathbf{y}} = (1, \frac{i^{|\alpha_2|}}{\alpha_2!}\mathbf{y}^{\alpha_2}, \dots, \frac{i^{|\alpha_q|}}{\alpha_q!}\mathbf{y}^{\alpha_q})$$

Et

$$\binom{-s}{\mathbf{u}} = \frac{-s(-s-1)\dots(-s-|\mathbf{u}|+1)}{\mathbf{u}!} = (-1)^{|\mathbf{u}|}\ \frac{s(s+1)\dots(s+|\mathbf{u}|-1)}{\mathbf{u}!}$$

et avec convergence uniforme sur tout compact en s.
On en déduit que $\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ et $\forall s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma = \Re(s) > \eta_0$:

$$Z^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} \binom{-s}{\mathbf{u}} G_{\mathbf{u}}(\varepsilon) \int_{A_\theta} \tilde{Q}(\mathbf{x})P^{-s}(\mathbf{x})H(\mathbf{x})^{\mathbf{u}} \frac{R(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}}{[\sin^2(\pi x_1)+\sin^2(\pi x_2)+\varepsilon^2]^2}$$

où

$$G_{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \int_{\{\sinh(\pi y_1)^2+\sinh(\pi y_2)^2=\varepsilon^2\}} G(\mathbf{y})\mathbf{y}^{\mu}\tilde{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}}\ dy_1$$

En particulier on a: $G_{\mathbf{u}}(\varepsilon) \ << \ \varepsilon^{|\mathbf{u}|}$ uniformement en $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^q$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ Mais par definition de $R(\mathbf{x})$ et en utilisant la théorie des séries de Fourier à plusieures variables, on a:

$$\frac{R(\mathbf{x})}{[\sin^2(\pi x_1)+\sin^2(\pi x_2)+\varepsilon^2]^2} = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2} C_{\mathbf{h}}(\varepsilon)\ e^{2\pi i<\mathbf{h},\mathbf{x}>}$$

avec convergence uniforme sur $\mathbb{R}^2$ (donc sur A_θ) et où

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbf{Z}^2 \quad C_{\mathbf{h}}(\varepsilon) = \frac{1}{4}\int_{[-1,+1]^2} \frac{R(\mathbf{x})\ e^{-\pi i<\mathbf{h},\mathbf{x}>}\ d\mathbf{x}}{[\sin^2(\pi x_1)+\sin^2(\pi x_2)+\varepsilon^2]^2}$$

Nous obtenons donc que $\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ et $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \eta_0$

$$Z^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} \binom{-s}{\mathbf{u}} G_{\mathbf{u}}(\varepsilon)C_{\mathbf{h}}(\varepsilon) \int_{A_\theta} \tilde{Q}(\mathbf{x})P^{-s}(\mathbf{x})H(\mathbf{x})^{\mathbf{u}}\ e^{\pi i<\mathbf{h},\mathbf{x}>}\ d\mathbf{x}$$

Et si on pose $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{Z}^2$ et $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{N}^q$

$$Y_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s) = \int_{A_\theta} \tilde{Q}(\mathbf{x})P^{-s}(\mathbf{x})H(\mathbf{x})^{\mathbf{u}}\ e^{\pi i<\mathbf{h},\mathbf{x}>}\ d\mathbf{x}$$

IL en découle que:

$$Z^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{N}^q,\ u_1=0} \binom{-s}{\mathbf{u}} G_{\mathbf{u}}(\varepsilon)C_{\mathbf{h}}(\varepsilon)Y_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s) \tag{11}$$

Mais d'après un théorème que nous avons donné dans ([4],th.6,p.6) dans le cas où $\tilde{Q}\equiv 1$ et qui se généralise sans aucune difficulté au cas où $\tilde{Q}\in\mathbb{R}[X_1,X_2]$ quelconque nous savons que:

$$\exists\sigma_0' = \sigma_0'(\theta,P,Q) > 0 \textit{ tel que } \quad \forall\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^2,\ \forall\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q \quad s\longmapsto Y_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s) \tag{12}$$

converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > \sigma_0'\}$.

$$\forall\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2,\ \forall\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q \quad s\longmapsto Y_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s) \tag{13}$$

posséde un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus deux et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = {\sigma_0}' - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ où ${\sigma_0}' = {\sigma_0}'(\theta,P,Q)\in\mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(\theta,P,Q)\in\mathbb{N}^*$ ne dépendent pas de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{u}$.
Il existe $\beta = \beta(\theta,P,Q) > 0$ et $K = K(\theta,P,Q) > 1$ tel que: $\forall\mathbf{h}\in\mathbb{Z}^2$ et $\forall\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q$ le prolongement méromorphe $\tilde{Y}_{P,\tilde{Q},\theta}$ de $Y_{P,\tilde{Q},\theta}$ verifie: $\forall\varepsilon',\delta,N > 0$
il existe $C = C(\varepsilon',\delta,N,P,Q,\theta) > 0$ (indépendant de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{u}$) tel que: $\forall s = \sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ vérifiant $\sigma\geq{\sigma_0}' - N$ et $d(s,\mathcal{S})\geq\delta$ on a:

$$|\tilde{Y}_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s)| \leq C\ K^{|\mathbf{u}|}\ (1+|\tau|^{\beta({\sigma_0}'-\sigma)+\varepsilon'})\ (1+\|\mathbf{h}\|^{\beta({\sigma_0}'-\sigma)+\varepsilon'}) \tag{14}$$

Soient maintenant $N > 0$ et $\delta > 0$ fixés. D'après ce qui précède on a: $\forall s = \sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ vérifiant ${\sigma_0}'+1\geq\sigma\geq{\sigma_0}' - N$ et $d(s,\mathcal{S})\geq\delta$:

$$R = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{N}^q,\ u_1=0} \left|\binom{-s}{\mathbf{u}} G_{\mathbf{u}}(\varepsilon)C_{\mathbf{h}}(\varepsilon)\tilde{Y}_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s)\right|$$

$$\ll_{\{N,\delta,P,Q,\theta\}} \quad \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{N}^q,\ u_1=0} \left|\binom{-s}{\mathbf{u}}\right| |G_{\mathbf{u}}(\varepsilon)|\ |C_{\mathbf{h}}(\varepsilon)|\ K^{|\mathbf{u}|}\ (1+\|\mathbf{h}\|^{2\beta N})\ (1+|\tau|^{-\beta\sigma+2\beta{\sigma_0}'})$$

Or nous savons que $G_{\mathbf{u}}(\varepsilon) \quad \ll \quad \varepsilon^{|\mathbf{u}|}$
Et des intégrations par parties faciles montrent que:

$$C_{\mathbf{h}}(\varepsilon) \quad \ll_{N,\delta} \quad \frac{\varepsilon^{-4-8(\beta N+1)}}{\sum_{j=1}^2 (1+|h_j|)^{2\beta N+2}}$$

uniformément en $\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2$ et $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$. D'où:

$$R \quad \ll_{N,\delta} \quad \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{N}^q,\ u_1=0} \left|\binom{-s}{\mathbf{u}}\right| K^{|\mathbf{u}|}\ \varepsilon^{|\mathbf{u}|-4-8(\beta N+1)}\ (1+|\tau|^{-\beta\sigma+2\beta{\sigma_0}'})$$

$$\ll_{N,\delta}\Big(\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{N}^q,\ u_1=0} \left|\binom{-s}{\mathbf{u}}\right| (K\varepsilon)^{|\mathbf{u}|}\Big)\ \varepsilon^{-4-8(\beta N+1)}\ (1+|\tau|^{-\beta\sigma+2\beta{\sigma_0}'})$$

Or comme $\sigma\in[{\sigma_0}'-N,{\sigma_0}'+1]$ est bornée alors:

$$\left|\binom{-s}{\mathbf{u}}\right| \quad \leq \frac{|s|(|s|+1)\dots(|s|+|\mathbf{u}|-1)}{\mathbf{u}!}$$

$$\ll_N \quad \frac{|\tau|(|\tau|+1)\dots(|\tau|+|\mathbf{u}|-1)}{\mathbf{u}!}$$

D'où

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} |\binom{-s}{\mathbf{u}}|\,(K\varepsilon)^{|\mathbf{u}|} \quad \ll_N \quad \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} \frac{|\tau|(|\tau|+1)\dots(|\tau|+|\mathbf{u}|-1)}{\mathbf{u}!}\,(K\varepsilon,\dots,K\varepsilon)^{\mathbf{u}}$$

$$\ll_N \quad (1-K\varepsilon-\dots-K\varepsilon)^{-|\tau|} = (1-qK\varepsilon)^{-|\tau|}$$

Donc:

$$R \quad \ll_{N,\delta} \quad \varepsilon^{-8(\beta N+2)}\,(1-qK\varepsilon)^{-|\tau|}\,(1+|\tau|^{-\beta\sigma+2\beta{\sigma_0}'+1})$$

et quitte à diminuer $\varepsilon_0 \in]0,1[$, il est facile de voir que nous pouvons supposer que $\forall\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[\quad (1-qK\varepsilon)^{-|\tau|} \le e^{2qK\varepsilon|\tau|}$

Il découle de ceci que:

$$s \longmapsto \tilde{Z}^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{N}^q,\ u_1=0} \binom{-s}{\mathbf{u}}\,G_{\mathbf{u}}(\varepsilon)C_{\mathbf{h}}(\varepsilon)\tilde{Y}_{P,\tilde{Q},\theta}(\mathbf{h},\mathbf{u};s)$$

existe en tant que fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus 2 et contenus dans $\mathcal{S} = {\sigma_0}' - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ définis dans (13). En outre elle vérifie: $\forall N > 0, \forall\delta > 0$ il existe $C = C(N,\delta,P,Q,\theta) > 0$ tel que $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \ge {\sigma_0}' - N$ et $d(s,\mathcal{S}) \ge \delta$ on a:

$$|\tilde{Z}^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)| \quad \le \quad C\,\varepsilon^{-8(\beta N+2)}\,(1+|\tau|^{-\beta\sigma+2\beta{\sigma_0}'+1})\,e^{2qK\varepsilon|\tau|}$$

De plus il est évident que $\forall s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma = \Re(s) > {\sigma_0}'$ on a:

$$\tilde{Z}^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = Z^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$$

En conclusion nous avons:

Lemme 1 *Avec les notations de la proposition 1 et quitte à diminuer* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta,P,Q) \in]0,1[$ *on a:* $s \longmapsto Z^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$, *qui converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan* $\{\Re(s) > \eta_0\}$, *possède un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *avec des pôles d'ordre au plus deux et contenus dans un ensemble de la forme* $S_1 = {\sigma_0}^1 - \frac{1}{M_1}\mathbb{N}$ *où* ${\sigma_0}^1 = {\sigma_0}^1(\theta,P,Q) \in \mathbb{Q}_+$ *et* $M_1 = M_1(\theta,P,Q) \in \mathbb{N}^*$. *En outre, le prolongement méromorphe qu'on note* $s \longmapsto \tilde{Z}^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$ *vérifie: il existe* $\beta_1 = \beta_1(\theta,P,Q) > 0$, *et* $\gamma_1 = \gamma_1(\theta,P,Q) > 0$ *tels que* $\forall N \ge 1$ *et* $\forall\delta > 0$ *on a uniformément en* $\sigma = \Re(s) \ge {\sigma_0}^1 - N$ *et* $d(s,S_1) \ge \delta$:

$$\tilde{Z}^1_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) \ll_{N,\delta,P,Q,\theta} \quad \varepsilon^{-\beta_1 N} e^{\gamma_1\varepsilon|\tau|}$$

3.2 Etude de $s \longmapsto Z^3_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$ et de $s \longmapsto Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$:

3.2.1 Etude de $s \longmapsto Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$:

Comme dans le paragraphe (3.1) nous pouvons aussi supposer sans restreindre la généralité du problème que Q est de la forme $Q(\mathbf{z}) = \tilde{Q}(\mathbf{x})\mathbf{y}^{\mu}$ où $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X_1,X_2]$

$\mu \in \mathbb{N}^2$ *et* $G_4(\mathbf{x},\mathbf{y}) = R'(\mathbf{x})G'(\mathbf{y})$ où R(**x**) est un monôme en $(\cos(\pi x_1), \cos(\pi x_2), \sin(\pi x_1), \sin(\pi x_2))$ et G(**y**) est un monôme en $(\cosh(\pi y_1), \cosh(\pi y_2), \sinh(\pi y_1), \sinh(\pi y_2))$ On a donc:

$$K_4(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{R'(\mathbf{x})G'(\mathbf{y})dx_1 \wedge d\mathbf{y}}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)+\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^2}$$

D'après la proposition 1 on a: $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ *et* $\forall s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > \eta_0$:

$$Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \int_{U^4_\varepsilon} Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z}) \quad \frac{R'(\mathbf{x})G'(\mathbf{y})dx_1 \wedge d\mathbf{y}}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)+\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^2}$$

D'où en utilisant (10) et avec les notations de cette relation on obtient:

$$Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{u \in \mathbb{N}^q, u_1=0} \binom{-s}{u} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \quad \tilde{Q}(x_1,\frac{1}{2})P^{-s}(x_1,\frac{1}{2})\Big(H(x_1,\frac{1}{2})\Big)^{\mathbf{u}} R'(x_1,\frac{1}{2}) \times$$

$$\left(\int_{\{\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\ \leq\ \varepsilon^2\}} \frac{G'(\mathbf{y})\ \tilde{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}}\ \mathbf{y}^{\mu}\ dy}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)+\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^2}\right) \quad dx_1$$

Or quite à diminuer ε_0 on peut supposer que $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ on a alors $\varepsilon < \frac{1}{2}$ d'où uniformément en $\mathbf{z} = (x_1, \frac{1}{2}) + i\mathbf{y} \in U^4_\varepsilon$ on a:

$$\frac{1}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)+\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^2} = \frac{1}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)\right]^2\ \left[1+\frac{\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)}{1+\sin^2(\pi x_1)}\right]^2}$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l\ (l+1)\ \frac{\left[\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^l}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)\right]^{l+2}}$$

D'où $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \eta_0$ on a:

$$Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{u \in \mathbb{N}^q, u_1=0} \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{-s}{u}\ (-1)^l(l+1)G_{\mathbf{u},l}(\varepsilon) \times$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \quad \tilde{Q}(x_1,\frac{1}{2})P^{-s}(x_1,\frac{1}{2})\Big(H(x_1,\frac{1}{2})\Big)^{\mathbf{u}}\ \frac{R'(x_1,\frac{1}{2})\ dx_1}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)\right]^{l+2}}$$

où

$$G_{\mathbf{u},l}(\varepsilon) = \int_{\{\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\ \leq\ \varepsilon^2\}} G'(\mathbf{y})\ \tilde{\mathbf{y}}^{\mathbf{u}}\ \mathbf{y}^{\mu}\left[\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)\right]^l\ d\mathbf{y}$$

on a en particulier $G_{\mathbf{u},l}(\varepsilon) \quad << \varepsilon^{|\mathbf{u}|+2l}$ uniformément en $\mathbf{u}, l$ et ε.
En outre en développant en séries de Fourier la fonction:

$$x_1 \longmapsto \frac{R'(x_1,\frac{1}{2})}{\left[1+\sin^2(\pi x_1)\right]^{l+2}}$$

on obtient uniformément en $x_1 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{R'(x_1,\frac{1}{2})}{[1+\sin^2(\pi x_1)]^{l+2}} = \sum_{h\in\mathbf{Z}} d_h(l)\ e^{\pi i h x_1}$$

où $\forall h \in \mathbf{Z}$ et $\forall l \in \mathbb{N}$:

$$d_h(l) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{R(\frac{1}{2},t)\ e^{-\pi i h t}}{[1+\sin^2(\pi t)]^{l+2}}\ dt$$

D'où $\forall \varepsilon]0,\varepsilon_0[$ et $\forall s=\sigma+i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \eta_0$ on a:

$$Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \sum_{u\in\mathbf{N}^q, u_1=0} \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{h\in\mathbf{Z}} \binom{-s}{u}\ (-1)^l(l+1)G_{\mathbf{u},l}(\varepsilon)d_h(l)\ Y^1_{P,\tilde{Q},\theta}(h,\mathbf{u};s)$$

où $Y^1_{P,\tilde{Q},\theta}(h,\mathbf{u};s) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \tilde{Q}(x_1,\frac{1}{2})P^{-s}(x_1,\frac{1}{2})\Big(H(x_1,\frac{1}{2})\Big)^{\mathbf{u}}\ e^{\pi i h x_1}\ dx_1$
Et comme dans le paragraphe (3.1), le théorème ([4],th.6,p.6) implique que les $Y^1_{P,\tilde{Q},\theta}(h,\mathbf{u};s)$ vérifient les mêmes conclusions (ie les points (12),(13) et (14)) que les $Y_{P,\tilde{Q},\theta}$
Or nous savons que $G_{\mathbf{u},l}(\varepsilon) \quad << \quad \varepsilon^{|\mathbf{u}|+2l}$ uniformément en $\mathbf{u}$, ε et l. Et des intégrations par parties faciles permettent de voir que:

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{Z}\ et\ \forall l \in \mathbb{N} \quad d_h(l) \quad \ll_\alpha \quad (1+|h|)^{-\alpha}$$

Donc le même raisonnement que celui utiliser pour conclure dans le paragraphe (3.1) permet de conclure ici. Plus précisement on obtient:

Lemme 2 *Avec les notations de la proposition 1 et quitte à diminuer $\varepsilon = \varepsilon(\theta,P,Q) \in]0,1[$ on a: $\forall\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$: $s \longmapsto Z^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$ qui converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > \eta_0\}$, posède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus 2 et contenus dans un ensemble de la forme $S_4 = \sigma^4_0 - \frac{1}{M_4}\mathbb{N}$ où $\sigma^4_0 = \sigma^4_0(\theta,P,Q) \in \mathbb{Q}_+$ et $M_4 = M_4(\theta,P,Q) \in \mathbb{N}^*$.*
En outre ce prolongement méromorphe qu'on notera $s \longmapsto \tilde{Z}^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$ vérifie: il existe $\beta_4 = \beta_4(\theta,P,Q) > 0$ et $\gamma_4 = \gamma_4(\theta,P,Q) > 0$ tel que: $\forall N \geq 1$ et $\forall\delta > 0$ on a uniformément en $\sigma = \Re(s) \geq \sigma^4_0 - N$ et $d(s,S_4) \geq \delta$:

$$\tilde{Z}^4_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) \quad \ll_{N,\delta,P,Q,\theta} \quad \varepsilon^{-\beta_4 N}\ e^{\gamma_4\varepsilon|\tau|}$$

3.2.2 Etude de $s \longmapsto Z^3_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$:

On sait d'après la proposition 1 que pour $\Re(s) > 0$

$$Z^3_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \int_{U^3_\varepsilon} Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z})K(\mathbf{z}) = \int_{U^3_\varepsilon} Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z})K_3(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

0ù $U^3_\varepsilon = \{\mathbf{z}=\mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \mid \mathbf{x} \in \{\frac{1}{2}\}\times]\frac{1}{2},\frac{\theta}{2}[\ et\ \sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2) < \varepsilon^2\}$ et

$$\forall\mathbf{z}=\mathbf{x}+i\mathbf{y} \in U^3_\varepsilon \quad K_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\tilde{G}_3(\mathbf{x},\mathbf{y})dx_2\wedge d\mathbf{y}}{[1+\sin^2(\pi x_2)+\sinh^2(\pi y_1)+\sinh^2(\pi y_2)]^2}$$

Si $\theta < 1$ alors $U_\varepsilon^3 = \emptyset$ il n y'a rien à démontrer.
Sinon, alors d'après (2) on a, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $\forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in U_\varepsilon^3$:

$$|P(\mathbf{z}) - P(\mathbf{x})| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2 1 \leq |\alpha| \leq deg(P)} \partial^\alpha P(\mathbf{x}) \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \ll \varepsilon P(\mathbf{x})$$

En en déduit que:

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\text{ et } \forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U_\varepsilon^3 \quad |\arg(P(\mathbf{z}))| \ll \varepsilon P(\mathbf{x})$$

où arg est la détermination principale de l'argument (i.e $\in] - \pi, +\pi[$).
Et comme $\overline{U_\varepsilon^3}$ est compact et P ne s'annule pas dans son voisinage alors il est facile de voir qu'il existe trois constantes M, K et γ strictement positives et qui ne dépondent que de P et θ tel que, pour tout $\mathbf{z} \in U_\varepsilon^3$ et tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ on a:

$$\begin{aligned} |Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z})| &= |Q(\mathbf{z})||P^{-(\sigma+i\tau)(\ln(P(\mathbf{z})+i\arg(P(\mathbf{z})))}| \\ &\leq e^{|\tau||\arg(P(\mathbf{z}))|}|P(\mathbf{z})|^{-\sigma} \\ &\leq MK^{|\sigma|}e^{\gamma\varepsilon|\tau|} \end{aligned}$$

En en déduire alors facilement que:

Lemme 3 *Avec les notations de la proposition 1 et quitte à diminuer $\varepsilon = \varepsilon(\theta, P, Q) \in]0, 1[$ on a: $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$: la fonction $s \longmapsto Z_{\theta,\varepsilon}^3(P, Q; s)$ est holomorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$. En outre cette fonction vérifie: il existe $\gamma_4 = \gamma_4(\theta, P, Q) > 0$ tel que: $\forall N \geq 1$ on a uniformément en $\sigma = \Re(s) \geq -N$:*

$$Z_{\theta,\varepsilon}^3(P, Q; s) \quad \ll_{N,P,Q,\theta} \quad e^{\gamma_4\varepsilon|\tau|}$$

Ce qui termine l'étude de $Z_{\theta,\varepsilon}^3(P, Q; s)$ et $Z_{\theta,\varepsilon}^3(P, Q; s)$.

3.3 Etude de $s \longmapsto Z_{\theta,\varepsilon}^2(P, Q; s)$ et fin des démonstrations des théorèmes 1 et 2:

Commençons d'abord par des préliminaires. Soit D=deg(P) on pose:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C} \quad P(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha, \quad P^*(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} \mathbf{z}^\alpha, \; L = (1+\theta^2)^{-D} \sum_{\alpha \in supp(P),\; |\alpha| = D} a_\alpha \, \theta^{\alpha_2}$$

et $\forall \delta \in]0, 1[\quad B_\delta = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \mid d(\mathbf{z}, S_\theta) < \delta\} \subset \mathbb{C}^2$ où $S_\theta = \{(x_1, \theta x_1) \mid x_1 > \frac{1}{2}\}$
Ceci étant nous remarquons d'abord facilement que:
$\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^2 \quad \forall \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in B_\delta$

$$\mathbf{z}^\alpha = \theta^{\alpha_2} \, x_1^{|\alpha|} + 0_{\alpha,\delta}(x_1^{|\alpha|-1}) = \theta^{\alpha_2} \, z_1^{|\alpha|} + 0_{\alpha,\delta,\theta}(\|\mathbf{z}\|^{|\alpha|-1}) \tag{15}$$

Et ceci permet de justifier que:

$$L = (1+\theta^2)^{-D} \sum_{\alpha \in supp(P),\; |\alpha| = D} a_\alpha \, \theta^{\alpha_2} > 0 \tag{16}$$

En effet sinon, alors $L = 0$ et ceci plus (15) implique que:

$$\forall \mathbf{x} \in S_\theta \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} a_\alpha \, \mathbf{x}^\alpha = (1+\theta^2)L \, {x_1}^D + 0({x_1}^{D-1}) \ll {x_1}^{D-1}$$

Or sur S_θ: $P^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in supp(P)} \mathbf{x}^\alpha \asymp {x_1}^D$ ce qui contredit le fait que P est non dégénéré sur S_θ. Donc $L \neq 0$ et par suite $P(\mathbf{x}) \sim (1+\theta^2)L \, {x_1}^D$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty, \mathbf{x} \in S_\theta$. Et comme $P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty, \mathbf{x} \in S_\theta$, alors $L > 0$ et (16) est démontré.

Soit maintenant $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in B_\delta$ ($\delta \in]0,1[$ assez petit et fixé) on a:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{z}) &= \sum_{\alpha \in supp(P)} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha = \sum_{|\alpha|=D} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha + \sum_{|\alpha|<D} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha \quad (D = deg(P)) \\ &= L \, (\theta z_2 + z_1)^D + \sum_{|\alpha|=D} a_\alpha \, [\mathbf{z}^\alpha - \frac{\theta^{\alpha_2}}{(1+\theta^2)^D}(\theta z_2 + z_1)^D] + \sum_{|\alpha|<D} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha \\ &= L \, (\theta z_2 + z_1)^D + L \, H(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Où

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{L} \sum_{|\alpha|=D} a_\alpha \, [\mathbf{z}^\alpha - \frac{\theta^{\alpha_2}}{(1+\theta^2)^D}(\theta z_2 + z_1)^D] + \frac{1}{L} \sum_{|\alpha|<D} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha \quad \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$$

Mais d'aprés (15) on vérifie facilement qu'on a uniformément en $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in B_\delta$:

$$\frac{H(\mathbf{z})}{(\theta z_2 + z_1)^D} = 0_{P,\delta,\theta}(\frac{1}{\|\mathbf{z}\|}) \tag{17}$$

D'ou $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \mathbf{z} \in B_\delta$ on a:

$$\begin{aligned} P^{-s}(\mathbf{z}) &= L^{-s} \, [(\theta z_2 + z_1)^D + H(\mathbf{z})]^{-s} = L^{-s} \, (\theta z_2 + z_1)^{-sD} \left[1 + \frac{H(\mathbf{z})}{(\theta z_2 + z_1)^D}\right]^{-s} \\ &= L^{-s} \sum_{l=0}^{N-1} \binom{-s}{l} (\theta z_2 + z_1)^{-(s+l)D} H(\mathbf{z})^l + 0_{P,\theta,N,\delta}((|s|+1)^N \|\mathbf{z}\|^{-N}) \end{aligned} \tag{18}$$

De la même façon il est facile de voir que:

$$K = \sum_{\alpha \in supp(P)} a_\alpha \, \theta^{\alpha_2} > 0$$

Et que le polynôme:

$$R(\mathbf{z}) = \frac{1}{K} \sum_{|\alpha|=D} a_\alpha \, [\mathbf{z}^\alpha - \theta^{\alpha_2} {z_1}^D] + \frac{1}{K} \sum_{|\alpha|<D} a_\alpha \, \mathbf{z}^\alpha$$

Vérifie uniformement en $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in B_\delta$:

$$\frac{R(\mathbf{z})}{{z_1}^D} = 0_{P,\delta,\theta}(\frac{1}{\|\mathbf{z}\|})$$

En particulier on a, $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \mathbf{z} \in B_\delta$:

$$\begin{aligned} P^{-s}(\mathbf{z}) &= K^{-s}\left[{z_1}^D + R(\mathbf{z})\right]^{-s} = K^{-s}\, {z_1}^{-sD}\left[1 + \frac{R(\mathbf{z})}{{z_1}^D}\right]^{-s} \\ &= K^{-s}\sum_{l=0}^{N-1}\binom{-s}{l}{z_1}^{-(s+l)D}R(\mathbf{z})^l + 0_{P,\theta,N,\delta}((|s|+1)^N\|\mathbf{z}\|^{-N}) \end{aligned} \tag{19}$$

Les préliminaires étant terminer maintenant nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 4 *On suppose que θ est quadratique > 0.*
Alors Avec les notations de la proposition 1 et quitte à diminuer $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta, P, Q) \in]0,1[$ on a $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:
$s \longmapsto Z^2_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$, qui converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > \eta_0\}$, posséde un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordes au plus 2 et contenus dans un ensemble de la forme:

$$\mathcal{S}_2 = \{\sigma_0^2 - \frac{k}{M_2} + \frac{2k^*\pi i}{\ln(\eta)} \quad | \quad (k,k^*) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}$$

où $\sigma_0^2 = \sigma_0^2(\theta,P,Q) \in \mathbb{Q}_+$, $M_2 = M_2(\theta,P,Q) \in \mathbb{N}^*$ et η est une unité positive de $\mathbb{Z}[\theta]$.
En outre ce prolongement méromorphe qu'on notera $s \longmapsto \tilde{Z}^2_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$ vérifie:
il existe $\beta_2 = \beta_2(\theta,P,Q) > 0$ et $\gamma_2 = \gamma_2(\theta,P,Q) > 0$ tel que: $\forall N \geq 1$, $\forall \delta > 0$ on a uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geq \sigma_0^2 - N$ et $d(s,\mathcal{S}_2) \geq \delta$:

$$\tilde{Z}^2_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) \quad \ll_{N,\delta,P,Q,\theta} \quad \varepsilon^{-\beta_2 N}\ e^{\gamma_2\varepsilon|\tau|}$$

En plus les pôles non rélles de $\tilde{Z}^2_{\theta,\varepsilon}$, $s = \sigma + i\tau$ avec $(\tau \neq 0)$ sont d'ordres au plus 1.

Démonstration du lemme 4:

On sait que pour $\sigma > \eta_0$: $Z^2_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{U^2_\varepsilon} Q(\mathbf{z})P^{-s}(\mathbf{z})\ K(\mathbf{z})$

Or d'après (5) on déduit facilement que:

$$\forall\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[, \exists d = d(\theta,\varepsilon) > 0 \textit{ et } \gamma = \gamma(\theta) > 0 \textit{ tel que } \forall \mathbf{z} \in \partial U_\varepsilon \quad \langle f(\mathbf{z}), s(\mathbf{z})\rangle \quad \geq \frac{d}{(1+\|\mathbf{z}\|)^\gamma}$$

D'où vu l'exprésion de $K(\mathbf{z})$ on a pour $\mathbf{z} \in U^2_\varepsilon$:

$$K(\mathbf{z}) \quad \ll_\varepsilon \quad (1+\|\mathbf{z}\|)^{2\gamma}$$

Et ceci en plus de la relation (18) permet de justifier qu'il suffit de démontrer le lemme 4 pour $P(\mathbf{z}) = P_0(\mathbf{z}) = \theta z_2 + z_1$.
En outre Q peut s'ecrire $Q(\mathbf{z}) = \sum_{l=0}^n Q^{(l)}(\mathbf{z})$ où $n = deg(Q)$ et $\forall l = 1,\ldots,n$ $Q^{(l)}$ est la partie homogène de degré l de Q.
De plus si θ' désigne le conjugué de θ (θ irrationnel quadratique) il est facile de voir que: $\forall k \in \mathbb{N}$ la famille $(\theta x_2 + x_1)^{k-l}\ (\theta' x_2 + x_1)^l \quad (l = 0,\ldots,k)$ engendre l'espace des polynômes homogènes de degré k.
En conclusion on peut donc supposé sans réstriendre la généralité du problème que:

- $P(\mathbf{z}) = P_0(\mathbf{z}) = \theta z_2 + z_1$;
- $Q(\mathbf{z}) = Q_0(\mathbf{z}) = (\theta x_2 + x_1)^{n-l}\ (\theta' x_2 + x_1)^l$ où $n = deg(Q)$ et $l \in \mathbb{N}$ vérifiant $l \leq n$.

Désormais on supposera que c'est le cas. Mais la proposition 1 appliquée cette fois ci à P_0 et Q_0 montre que: pour $\Re(s) >> 0$, on a $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

$$Z^2_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q_0; s) = Z_\theta(P_0, Q_0; s) - Z^1_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q_0; s) - Z^3_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q_0; s) - Z^4_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q_0; s)$$

Et comme d'après les lemmes 1, 2 et 3: $\forall j \in \{1,3,4\} \quad s \longmapsto Z^j_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q_0; s)$ vérifie les conclusions du lemme 4. Alors pour terminer la démonstration il suffit de démontrer que $s \longmapsto Z_\theta(P_0, Q_0; s)$ vérifie les conclusions du lemme 4. Pour ceci nous allons utiliser une idée du a Mahler[7] et qu'on peut trouver aussi sous une forme equivalente dans les traveaux de Hardy&Littlewood notamment dans [5], qui consiste a exploiter le fait que le développement en fraction continue d'un quadratique est périodique.
Plus précisement comme θ est quadratique alors $\frac{1}{\theta}$ aussi et on peut ecrire: $\frac{1}{\theta} = [a_0, a_1, \ldots]$ son développement en fraction continue. On pose aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n = \frac{1}{[a_n, a_{n+1}, \ldots]}$$

En particulier on a: $\theta_0 = \theta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\theta_n = \frac{1}{a_n + \theta_{n+1}} \tag{20}$$

On definit ensuite les deux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2) & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2) & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right. \tag{21}$$

On a alors les quelques relations, classiques en théorie des fractions continues, suivantes:

$$p_0 \geq 0, q_0 \geq 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^* p_n, q_n \geq 1\ et\ p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}. \tag{22}$$

Et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta = \frac{q_{n-2}\theta_n + q_{n-1}}{p_{n-2}\theta_n + p_{n-1}} \tag{23}$$

Ensuite il est facile de verifier l'identité suivante:

$$Z_{\frac{1}{a+\alpha}}(P, Q; s) = Z\left(P(ax_1 + x_2, x_1), Q(ax_1 + x_2, x_1); s\right) - Z_\alpha\left(P(ax_1 + x_2, x_1), Q(ax_1 + x_2, x_1); s\right) \tag{24}$$

Valable pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \mathbb{Q} \quad P, Q \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ P etant a coeficients positives et $\Re(s) \gg 0$:

où par convention $\forall \beta \in \mathbb{R}^*_+$:

$$Z_\beta = \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[m_1\beta]} \ et\ Z = \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{+\infty}$$

On définit ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ par:

$$P_n(x_1,x_2) = P_0(p_{n-1}x_1+q_{n-1}x_2, p_{n-2}x_1+q_{n-2}x_2) \text{ et } Q_n(x_1,x_2) = Q_0(p_{n-1}x_1+q_{n-1}x_2, p_{n-2}x_1+q_{n-2}x_2) \tag{25}$$

avec la convevtion $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$.
Or d'après la relation (20) on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \theta_n = \frac{1}{a_n+\theta_{n+1}}$ et ceci en plus de la relation (24) permet de voir facilement que:
$\forall n \in \mathbb{N}$ on a pour $\Re(s) \gg 0$:

$$Z_{\theta_n}(P_n, Q_n; s) = Z(P_{n+1}, Q_{n+1}; s) - Z_{\theta_{n+1}}(P_{n+1}, Q_{n+1}; s)$$

Et une recurence facile implique alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_\theta(P_0, Q_0; s) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} Z(P_j, Q_j; s) + (-1)^n Z_{\theta_n}(P_n, Q_n; s) \tag{26}$$

Comme θ est quadratique alors $\frac{1}{\theta}$ aussi et par conséquent son développement en fraction continue est périodique. En en déduit que:

$$\exists (r,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \text{tel que } \forall m \in \mathbb{N}\ m \geq r \quad \theta_{m+k} = \theta_m$$

Mais la relation (26) permet de voir qu'il suffit de traiter le cas où $r = 0$. On supposera désormais que c'est le cas. On a alors en particuliers

$$\theta_h = \theta \quad \text{où } h = 2k \in 2\mathbb{N}^* \tag{27}$$

Ce qui d'après la relation (26) implique que:

$$Z_\theta(P_0, Q_0; s) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} Z(P_j, Q_j; s) + Z_\theta(P_h, Q_h; s) \tag{28}$$

De plus comme $\theta_h = \theta$ alors d'après la relation (23) on a:

$$\theta = \frac{q_{h-2}\theta + q_{h-1}}{p_{h-2}\theta + p_{h-1}} \tag{29}$$

Donc le conjugué θ' de θ vérifie aussi:

$$\theta' = \frac{q_{h-2}\theta' + q_{h-1}}{p_{h-2}\theta' + p_{h-1}} \tag{30}$$

On en déduit que: $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$\begin{aligned}
P_h(x_1,x_2) &= P_0\left(p_{h-1}x_1 + q_{h-1}x_2, p_{h-2}x_1 + q_{h-2}x_2\right) \\
&= \left(p_{h-1}x_1 + q_{h-1}x_2\right) + \left(p_{h-2}x_1 + q_{h-2}x_2\right)\theta \\
&= \left(p_{h-1} + p_{h-2}\theta\right)x_1 + \left(q_{h-1} + q_{h-2}\theta\right)x_2 \\
&= \left(p_{h-1} + p_{h-2}\theta\right)\left(x_1 + \frac{q_{h-1} + q_{h-2}\theta}{p_{h-1} + p_{h-2}\theta}x_2\right) \\
&= \eta(x_1 + \theta x_2) \quad \text{où } \eta = (p_{h-1} + p_{h-2}\theta)
\end{aligned}$$

D'où

$$P_h(x_1,x_2) = \eta P_0(x_1,x_2) \quad \text{où } \eta = (p_{h-1} + p_{h-2}\theta) \tag{31}$$

Et par un calcul analogue:

$$Q_h(x_1,x_2) = \eta^{n-l}\varphi^l\, Q_0(x_1,x_2) \text{ où } \eta = (p_{h-1}+p_{h-2}\theta) \;\; et \;\; \varphi = (p_{h-1}+p_{h-2}\theta') \tag{32}$$

Et comme d'après les relations (29) et (30), θ et θ' sont les solutions (distinctes) de l'équation:

$$x = \frac{q_{h-1}+q_{h-2}x}{p_{h-1}+p_{h-2}x}$$

alors:

$$\theta+\theta' = \frac{q_{h-2}-p_{h-1}}{p_{h-2}} \;\; et \;\; \theta\theta' = -\frac{q_{h-1}}{p_{h-2}}$$

Et par suite il est claie que $\eta,\varphi \in \mathbb{Z}[\theta]$ et

$$\begin{aligned}
\eta\varphi &= (p_{h-1}+p_{h-2}\theta)\;(p_{h-1}+p_{h-2}\theta') \\
&= p_{h-1}q_{h-2} - q_{h-1}p_{h-2} \\
&= (-1)^{h-2} \quad \text{d'apres la relation (22)} \\
&= 1 \quad \text{car h est pair}
\end{aligned}$$

En particulier η est une unité positive de $\mathbb{Z}[\theta]$ et

$$P_h(x_1,x_2) = \eta P_0(x_1,x_2) \;\; et \;\; Q_h(x_1,x_2) = \eta^{n-2l}Q_0(x_1,x_2)$$

Et ceci plus la relation (28) implique que: pour $\Re(s) \gg 0$

$$Z_\theta(P_0,Q_0;s) = \left(1-\eta^{-s+h+n-2l}\right)\left(\sum_{j=1}^{h}(-1)^{j-1}Z(P_j,Q_j;s)\right) \tag{33}$$

Et comme pour tout $j \in \{1,\ldots,h\}$ $P_j \in \mathbb{R}[X_1,X_2]$ et est à coefficients positives alors l'étude de $s \longmapsto Z(P_j,Q_j;s)$ est classique et le résultat découle par exemple de ([8],th. 1.1, 1.2 et 1.4). Ce qui termine la démonstration du lemme 4. C.Q.F.D.

3.3.1 Démonstration des points 1, 2 et 3 du théorème 2:

Démonstrations des points 1 et 2 du théorème 2:

En utilisant les lemmes 1, 2 et 3 on voie facilement qu'il suffit de démontrer les points 1 et 2 du théoreme 2 pour la fonction $s \longmapsto Z^2_{\theta,\varepsilon}(P,Q;s)$
Mais d'après la relation (19) il suffit de le faire pour $P(\mathbf{z}) = P_0(\mathbf{z}) = z_1$ Or la proposition 1 implique que, pour $\Re(s) \gg 0$ on a:

$$Z^2_{\theta,\varepsilon}(P_0,Q;s) = Z_\theta(P_0,Q;s) - Z^1_{\theta,\varepsilon}(P_0,Q;s) - Z^3_{\theta,\varepsilon}(P_0,Q;s) - Z^4_{\theta,\varepsilon}(P_0,Q;s)$$

Et une fois encore les lemmes 1, 2 et 3 permettent de voir qu'il suffit de d'étudier $s \longmapsto Z_\theta(P_0, Q; s)$.
On pose alors $Q(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \mathbf{z}^\alpha$ et $\mu = deg(Q)$, alors pour $\Re(s) \gg 0$ on a:

$$\begin{aligned}
Z_{\theta,\varepsilon}(P_0, Q; s) &= \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q(\mathbf{m}) {m_1}^{-s} \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} \mathbf{m}^\alpha {m_1}^{-s} \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} {m_1}^{-s+\alpha_1} {m_2}^{\alpha_2} \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \sum_{m_1=1}^{+\infty} {m_1}^{-s+\alpha_1} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} {m_2}^{\alpha_2} \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \sum_{m_1=1}^{+\infty} {m_1}^{-s+\alpha_1} \left(\frac{[\theta m_1]^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} + 0({m_1}^{\alpha_2})\right) \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} b_\alpha \sum_{m_1=1}^{+\infty} {m_1}^{-s+\alpha_1} \left(\frac{(\theta m_1)^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} + 0({m_1}^{\alpha_2})\right) \quad car\ [x] = x + 0(1) \\
&= \sum_{\alpha \in supp(Q)} \frac{b_\alpha \theta^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} \zeta(s - |\alpha| - 1) + 0\left(\sum_{\alpha \in supp(Q)} \frac{|b_\alpha|}{\alpha_2+1} \zeta(\Re(s) - |\alpha|)\right) \\
&= \left(\sum_{\alpha \in supp(Q), |\alpha|=\mu} \frac{b_\alpha \theta^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1}\right) \zeta(s - \mu - 1) + 0\left(\zeta(\Re(s) - \mu)\right)
\end{aligned}$$

Et comme par hypothese $\sum_{\alpha \in supp(Q), |\alpha|=\mu} \frac{b_\alpha \theta^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} \neq 0$ alors il est clair que, $s \longmapsto Z_\theta(P_0, Q; s)$ verifie les points 1 et 2 du théorème 2, ce qui d'après ce qui précéde termine la démonstration des points 1 et 2 du théorème2. C.Q.F.D.

Démonstrations du point 3 du théorème 2:
La démonstration est en tout point analogue a celle que nous avons donné dans ([3], p.35) dans le cas où A_θ est remplacé par un quadrant de la forme $[B, +\infty[^2$. Et ceci termine la démonstration des points 1, 2 et 3 du théorème 2. C.Q.F.D.

3.3.2 Fin des démonstrations des théorèmes 1 et 2:

Il est claire que les points 1, 2, 3 et 5 du théorème 1 découlent de facon evidente des lemmes 1, 2, 3 et 4 ainsi que de la partie du théorème 2 que nous avons démontré dans le paragraphe précédent (i.e. points 1, 2 et 3 du théorème 2). Donc il ne reste plus que le point 4 des théorèmes 1 et 2 a démontrer. Mais comme la méthode est la même dans les deux cas (même plus simple dans le cas du théorème 2) nous allons nous limiter ici au cas du théorème 1.

Démonstration du point 4 du théorème 1

Les lemmes 1, 2, 3 et 4 montrent que le prolongement méromorphe $s \longmapsto \tilde{Z}_\theta(P,Q;s)$ de $s \longmapsto Z_\theta(P,Q;s)$ vérifie:
Il existe $\beta = \beta(\theta,P,Q) > 0$ et $\gamma = \gamma(\theta,P,Q) > 0$ tel que, $\forall N \geq 1$ et $\forall \delta > 0$ on a uniformément en $\sigma = \Re(s) > \sigma_0 - N$ et $d(s,\mathcal{S}_\theta) \geq \delta$:

$$\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[\qquad \tilde{Z}_\theta(P,Q;s) \quad \ll_{N,P,Q,\delta} \quad \varepsilon^{-\beta N}\ e^{\gamma\varepsilon|\tau|} \tag{34}$$

où $\sigma_0 = \sigma_0(\theta,P,Q)$ est l'absside de convergence de $s \longmapsto Z_\theta(P,Q;s)$ (qui est effectivement un pôle d'aprè ce qui précéde) et où $\mathcal{S}_\theta$ est l'ensemble des candidats pôles définis dans l'enoncé du théorème 1.
Et l'uniformité de la relation (34) en $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$, nous permet d'optimiser ε en y prenant $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2(1+|\tau|)} \in]0,\varepsilon_0[$. Ce qui implique alors que:
$\forall N \geq 1$ et $\forall \delta > 0$ on a uniformément en $\sigma = \Re(s) \geq \sigma_0 - N$ et $d(s,\mathcal{S}_\theta) \geq \delta$:

$$\tilde{Z}_\theta(P,Q;s) \quad \ll_{N,P,Q,\delta} \quad \left(1+|\tau|^{\beta N}\right) \tag{35}$$

Maintenant si pour $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma = \Re(s) \leq \sigma_0 + 1$ nous prenons $N = \sigma_0 - \sigma + 2$ alors $N \geq 1$, et $\sigma \geq \sigma_0 - N$. On en déduit alors d'après la relation (35) que:

$$\tilde{Z}_\theta(P,Q;s) \quad \ll_{N,P,Q,\delta} \quad \left(1+|\tau|^{-\beta\sigma+\beta(\sigma_0+2)}\right)$$

De plus il est facile de voir que pour $\sigma = Re(s) \geq \sigma_0 + 1$ on a:

$$\tilde{Z}_\theta(P,Q;s) = Z_\theta(P,Q;s) \quad <<_{P,Q,\theta} \quad 1$$

Nous en déduisons que si on pose $B = \beta(\sigma_0+2) = B(\theta,P,Q)$ alors: $\forall N \geq 1$ et $\forall \delta > 0$ on a uniformément en $\sigma = \Re(s) \geq \sigma_0 - N$ et $d(s,\mathcal{S}_\theta) \geq \delta$:

$$\tilde{Z}_\theta(P,Q;s) \quad <<_{N,P,Q,\theta,\delta} \quad \left(1+|\tau|^{-\beta\sigma+B}\right) \tag{36}$$

Nous définissons en suite $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$s \longmapsto H_N(s) = \prod_{k=0}^{(1+N)M} \left(1-\eta^{s-\sigma_0+\frac{k}{M}}\right)^2$$

On vérifie alors facilement que:

- $$s \longmapsto H_N(s) \quad \text{est une fonction entière} \tag{37}$$

- $$\text{les } s = \sigma_0 - \frac{k}{M} + \frac{2\pi i k^*}{\ln(\eta)} \quad (k=0,\ldots,(N+1)M \ et\ k^* \in \mathbb{Z}) \tag{38}$$

  sont des zéros doubles de $H_N(s)$ d'ailleurs c'est les seuls zéros de H_N.

-
$$H_N(s) \ll_N 1 \tag{39}$$

Uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma_0 - (N+1) \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$

- Il existe $c = c(N) > 0$ tel que $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_\theta$ on a:

$$|H_N(s)| \geq c\ [d(s, \mathcal{S}_\theta)]^{-(2(1+N)M+1)} \tag{40}$$

On pose enfin:

$$\tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;s) = H_N(s)\ \tilde{Z}_\theta(P,Q;s)$$

où $s \longmapsto \tilde{Z}_\theta(P,Q;s)$ est le prolongement méromorphe de $s \longmapsto Z_\theta(P,Q;s)$.
Alors le théorème 1 et la propriété (38) implique que:
$s \longmapsto \tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > \sigma_0 - (N+1)\}$.
En outre les propriété (36), (38) et (39) imlique que $\forall \delta > 0$ on a:

$$\tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;s) \ll_{N,P,Q,\theta,\delta} \left(1 + |\tau|^{-\beta\sigma+B}\right) \tag{41}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \sigma_0 - (N+1)$

en particulier on a uniformément en $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;\sigma_0 - N + i\tau) \ll_{N,P,Q,\theta,\delta} \left(1 + |\tau|^{\beta(N-\sigma_0)+B}\right) \tag{42}$$

Soit mantenant $\varepsilon' > 0$ fixé quelconque on a, $\forall \tau \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)| &= |H_N(\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)|\ |\tilde{Z}_\theta(P,Q;\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)| \\ &= |H_N(\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)|\ |Z_\theta(P,Q;\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)| \\ &\ll_{\varepsilon'} |H_N(\sigma_0 + \varepsilon' + i\tau)| \\ &\ll_{\varepsilon',N} 1 \end{aligned} \tag{43}$$

La dernière relation découle de (39)

Les trois dernières relations (i.e (41), (42) et (43)) implique d'après le principe de Phragmen-Lindelöf (voir par exemple [9],§242) que:
$\forall \varepsilon > 0$ on a uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma_0 - N \leq \sigma \leq \sigma_0 + \varepsilon'$

$$\tilde{Z}_{\theta,N}(P,Q;s) \ll_{N,P,Q,\theta,\delta,\varepsilon'} \left(1 + |\tau|^{k(N,\varepsilon';\sigma)}\right)$$

où $\sigma \longmapsto k(N,\varepsilon';\sigma)$ est la fonction affine qui vérifie:
$k(N,\varepsilon';\sigma_0 + \varepsilon') = 0$ et $k(N,\varepsilon';\sigma_0 - N) = \beta(N - \sigma_0) + B$. D'où

$$\forall \sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \varepsilon'] \quad k(N,\varepsilon';\sigma) = -\frac{\beta(N-\sigma_0) + B}{N + \varepsilon'}(\sigma - \sigma_0 - \varepsilon')$$

Ce qui permet de voir que, pour σ et ε' fixés on a:

$$k(N,\varepsilon';\sigma) \sim \beta(\sigma_0 - \sigma + \varepsilon') \quad \text{quand} N \longrightarrow +\infty$$

En particulier on a: $k(N, \varepsilon'; \sigma) \leq \beta(\sigma_0 - \sigma + 2\varepsilon')$ pour $N \gg 0$ assez grand.
D'où comme pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant: $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \varepsilon']$ et $d(s, \mathcal{S}_\theta) \geq \delta$ on a:

$$\tilde{Z}_\theta(P, Q; s) = \frac{1}{H_N(s)} \tilde{Z}_{\theta,N}(P, Q; s)$$

Et vu la relation (40) on obtient facilement le résultat.
Ce qui termine les démonstrations des théorèmes 1 et 2. C.Q.F.D.

4 Démonstration du corollaire 1:

On vérifie d'abord facilement que $\forall t \in \mathbb{R}$ on a: $B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2} \in [-1, +1]$. Il en découle imédiatement que:

$$s \longmapsto L_\theta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_1(m\theta)}{m^s}$$

converge absolument dans le demi-plan $\{\Re(s) > 1\}$. Et que dans ce demi-plan on a:

$$\begin{aligned} L_\theta(s) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{B_1(m\theta)}{m^s} \\ &= \theta\, \zeta(s-1) - \frac{1}{2}\, \zeta(s) - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[m\theta]}{m^s} \end{aligned}$$

où $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s}$ est la fonction zêta de Riemann. Mais une propriété classique de cette dernière est l'existence d'un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec $s = 1$ comme seul pôle d'ailleurs simple et de résidu 1.Il en découle donc que pour terminer la démonstration du corollaire il suffit de prouvé le lemme suivant:

Lemme 5 *Si l'on pose pour $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 1$:*

$$L'_\theta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[m\theta]}{m^s}$$

Alors on a:

1. *$s \longmapsto L'_\theta(s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ (que nous noterons $s \longmapsto \tilde{L}'_\theta(s)$) avec des pôles simples et contenus dans un ensemble de la forme:*

$$\mathcal{S}_\theta' = \left\{ -k + \frac{2\pi i k^*}{\ln(\eta)} \mid k \in \mathbf{N} \text{ et } k^* \in \mathbf{Z} \right\} \cup \{1, 2\}$$

   où η est une unité positive de $\mathbf{Z}[\theta]$;

2. *Le résidu de $s \longmapsto \tilde{L}'_\theta(s)$ en $s = 2$ (resp. $s = 1$) est égale à θ (resp. $-\frac{1}{2}$);*

3. $\exists \beta = \beta_0(\theta)$ *tel que* $\forall N \geq 1$, $\forall \delta > 0$ *et* $\forall \varepsilon' > 0$ *on a uniformément en* $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\sigma \geq \sigma_0 - N$ *et* $d(s, \mathcal{S}_\theta') \geq \delta$*:*

$$\tilde{L}_\theta'(s) \quad \ll_{\theta,\delta,N} \quad \left(1 + |\tau|^{\beta(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right).$$

Démonstration du lemme 5:

Les trois points du lemme 5 découlent facilement du théorème 1. En effet il est facile de voir que, $\forall s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 2$ on a:

$$\begin{aligned}
L_\theta'(s) &= \sum_{m_1=1}^{+\infty} \frac{[m_1\theta]}{{m_1}^s} \\
&= \sum_{m_1=1}^{+\infty} \frac{1}{{m_1}^s} \left(\sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} 1\right) \\
&= \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} \frac{1}{{m_1}^s} \\
&= \sum_{m_1=1}^{+\infty} \sum_{m_2=1}^{[\theta m_1]} Q_0(m_1, m_2)\ P_0^{-s}(m_1, m_2) \\
&= Z_\theta(P_0, Q_0; s)
\end{aligned}$$

où $P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ sont définis par:

$$\forall \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad P_0(\mathbf{z}) = z_1 \text{ et } Q_0(\mathbf{z}) = 1$$

De plus les hypothéses du théorème 1 sont vérifiés. En effet:

- $\forall \mathbf{x} \in A_\theta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \frac{1}{2} \textit{ et } \frac{1}{2} < x_2 < \theta x_1\}$ on a:

  $$P_0(\mathbf{x}) = x_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sqrt{x_1 x_2}$$

  D'où $P_0(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in A_\theta$;

- $Z(P_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \mid P_0(\mathbf{z}) = 0\} = \{0\} \times \mathbb{C}$. D'où $d(A_\theta, Z(P_0)) \geq \frac{1}{2}$

En outre comme P_0 et Q_0 sont très simples nous n'avons pas besoin de les désingulariser (ils le sont dèjà) et tous les calculs qui ont permis de démontrer le théorème 1 sont cette fois-ci effectifs ce qui par conséquent permet de vérifier sans difficulté les trois points du lemme 5 pour $s \longmapsto Z_\theta(P_0, Q_0; s)$ et donc pour $s \longmapsto L_\theta'(s)$. Et ceci termine la démonstration du lemme 5 et aussi celle du corollaire 1. C.Q.F.D.

Remarques:

- Le polynôme P_0 ne vérifie pas les hypothèses de K.Mahler (éllipticité) car il est égale à sa partie homogène de plus grande dégré et $P_0(\mathbf{x}) = x_1$ peut s'annuler pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc, contrairement au théorème 1, le théorème de K.Mahler ne s'applique pas à la série de Dirichlet $s \longmapsto Z_\theta(P_0, Q_0; s)$ et ne permet donc pas de retrouver directement le résultat de Hecke-Hardy&Littlewood (i.e. le corollaire 1);

- Il n'existe pas de quadrant $[B, +\infty[^2$ sur lequel le polynôme P_0 (malgré sa simplicité) vérifie l'hypothèse:

$$P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty, \ \mathbf{x} \in [B, +\infty[^2$$

  Ce qui constitue un exemples parmi d'autres qui montre les limites de la théorie classique des séries de Dirichlet (i.e à support dans un quadrant) et justifie le point de vue que nous avons adopté dans [4], c'est à dire celui des séries de Dirichlet à support dans un semi-algébrique quelconque. Point de vue, qui en plus des nouvelles applications arithmétiques qu'il permet de trouver (problèmes de comptages des points à coordonnées entières dans des domaines très générals), fourni d'une part un cadre qui contient le cadre classique (un quadrant n'est qu'un semi-algébrique particulier) et induit surtout une souplesse dans les hypothèses imposés (les hypothéses ne concernent que le comportement du polynôme P au dessus du semi-algébrique et pas ailleurs) et permet par conséquent de prendre en considération une classe plus large de polynômes et donc de problèmes.

Je tiens à remercier Daniel Barlet pour ses conseils le long de la réalisation de ce travail. Je remercie également Ben Lichtin qui en me mettant au courant des travaux de K.Mahler a été a l'origine de ce papier.

Bibliographie

[1] C.A. Berenstein, R.Gay, A.Vidras, A.Yger *"Residus curents and Bezout identities"*, Progress in mathematics, Vol.114, Birkhäuser Verlag, 1993;

[2] G.M.Henkin, J.Leiterer *"Theory of Functions on Complex Manifolds"*, Akademie-Verlag, Berlin (1984);

[3] D.Essouabri *"Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et application à la théorie analytique des nombres"*, Preprint de l'institut Elie Cartan $n^o 12$ (1996), à paraitre aux annales de l'institut Fourier;

[4] D.Essouabri *"Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet à support dans un sous ensemble semi-algébriques de* $\mathbb{R}^n$ ", Preprint de l'institut Elie Cartant $n^o 30$ (1996), les énoncés des principaux résultats constituent une note au C.R.A.S. paru au tome 323, série I (1996), p.729-733 ;

[5] G.H.Hardy, J.E.Littlewood *"The analytique character of a Dirichlet's series considered by Hecke"*,Abh.a.d.math.Sem.d. Hamb.Univ.3 (1924), S.57;

[6] E.Hecke *"Über analytische functionen und die Verteilung Von Zahlen mod.eins."*, Abh.a.d.math.Sem.d.Hamb.Univ.1 (1922), S54;

[7] K.Mahler *"Zur Fortsetzbarkeit gewisser Dirichletscher Reihen "*, Mathematische Annalen 102 (1930), p.30-48 ;

[8] P.Sargos *"Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieures variables"*, Annales de l'institut Fourier 33,3 (1984),p.83-123;

[9] G.Valiron *"Théorie des fonctions"*, Masson, Paris, 1955, 2ème édition.