Monodromie des fonctions d'Appell, variétés abéliennes et plongement modulaire

Paula Cohen[1] et Jürgen Wolfart[2]

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

[1] Laboratoire de Math.
Fondamentales,
UER 48
Univ. P. et M. Curie
4 place Jussieu
F–75230 Paris Cédex 05

France

[2] Math. Seminar der Univ.
Robert–Mayer–Straße 10
D–6000 Frankfurt a.M. 1

Federal Republic of Germany

MPI/1989–80

Monodromie des fonctions d'Appell, variétés abéliennes et plongement modulaire

Paula Cohen[1] *et* *Jürgen Wolfart*[2]

Summary. The monodromy groups of Appel's hypergeometric functions F_1 in two variables are sometimes discontinuous, but in general are not arithmetically defined ([DM], [M]). However we associate to them families of abelian varieties which give natural modular embeddings of the monodromy groups into arithmetic groups. We describe these embeddings and sketch some applications to automorphic functions and transcendence questions.

§ 1 Les groupes de Picard - Terada - Mostow - Deligne

Soient $0 < \mu_0, \dots, \mu_4 < 1$ des nombres rationnels avec le dénominateur plus petit commun $d > 2$ satisfaisants à la condition

$$(1) \qquad \sum_j \mu_j = 2 \quad .$$

Alors pour tout $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{C} - \{0,1\}$,

$$\omega := u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}\, du = \frac{du}{w}$$

définit une différentielle holomorphe sur une courbe projective non-singulière $X(x,y)$ dont un modèle affine s'écrit

$$(2) \qquad w^d = u^{d\mu_0}(u-1)^{d\mu_1}(u-x)^{d\mu_2}(u-y)^{d\mu_3} \quad .$$

Comme fonction de x et y , chaque période de ω satisfait à un système d'équations différentielles partielles linéaires dont on peut choisir les trois solutions de base comme des périodes de ω , par exemple

$$\int_{\gamma_0} \omega\ , \quad \int_{\gamma_1} \omega\ , \quad \int_{\gamma_2} \omega \quad ,$$

où les γ_i sont des cycles sur $X(x,y)$, décrits par leurs projections sous $(u,w) \longmapsto u$ (ramifié en $0,1,x,y,\infty$) comme des cycles de Pochhammer autour des paires 1 et ∞, 1 et 0 , 1 et x respectivement, en évitant des points de ramification. En effet, à un facteur cyclotomique et un dénominateur $B(1-\mu_1, 1-\mu_4)$ près, $\int_{\gamma_0} \omega$ est une fonction hypergéométrique $F_1(x,y)$ d'Appell [AK]. Le système d'EDP a ses singularités (régulières, voir e.g. [Y]) dans les *surfaces caractéristiques* $x=y$ et $x,y = 0,1,\infty$. Le prolongement analytique suivant les cycles dans l'espace des points réguliers définit par représentation du groupe fondamental sur l'espace des solutions *le groupe de monodromie affine* $\Delta_0 \subset GL_3\mathbb{C}$ et *projectif* $\Delta \subset PGL_3\mathbb{C}$. Sous ces hypothèses on obtient le

[1]) Laboratoire de Math. Fondamentales, UER 48, Univ. P. et M. Curie, 4 place Jussieu, F 75230 Paris-Cédex 05

[2]) Math. Seminar der Univ., Robert-Mayer-Str. 10, D 6000 Frankfurt a.M. 1

Théorème . ([P], [Te 1,2], [DM], [M], [Y]) *L'application*

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 - \{ (x,y) \mid x=y \quad \text{ou} \quad x,y=0,1,\infty \} \to \mathbb{P}_2 \\ (x,y) \longmapsto \left(\int_{\gamma_0} \omega , \int_{\gamma_1} \omega , \int_{\gamma_2} \omega \right) \end{cases}$$

définit une application localement biholomorphe et $PGL_3\mathbb{C}$ *- multivalente sur une partie dense d'une boule projective* $B \subset \mathbb{P}_2$ *, donnée par* $|\alpha_1 z_1|^2 + |\alpha_2 z_2|^2 < |z_0|^2$ *avec des constantes algébriques* $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. *Le groupe de monodromie* Δ *opère sur* B , *et si l'on a pour tout* $i \neq j \in \{0,1,2,3,4\}$

$$(3) \qquad (1-\mu_i-\mu_j)^{-1} \begin{cases} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \{\infty\} & si \quad \mu_i = \mu_j \\ \in \mathbb{Z} & sinon , \end{cases}$$

Δ *opère comme groupe discontinu sur* B .

A des permutations des μ_j près, on obtient comme cela 49 groupes discontinus Δ que nous appelons les *groupes de Picard - Terada - Deligne - Mostow (PTDM)* en tenant compte du fait qu'une version faible du Théorème déjà formulée par Picard est démontrée sous cette forme faible par Terada et en cette version-ci par Deligne - Mostow et Mostow. Une autre démonstration - utilisant des travaux de Hirzebruch et Höfer sur les revêtements des surfaces algébriques, sous une condition plus réstrictive que (3) - est donnée par Yoshida. Parmi ces 49 groupes, il y en a 15 qui ne sont pas arithmétiquement définis. Il existe une extension du Théorème à la situation en plus de deux variables (les fonctions de Lauricella), mais nous nous bornons ici aux groupes de PTDM $\Delta \subset PGL_3\mathbb{C}$.

Par continuité, Ψ s'étend sur les surfaces caractéristiques hors de leurs intersections; cette extension contracte e.g. la surface $x=0$ (pour $y \neq 0$) en des points de la boule si $\mu_0 + \mu_2 > 1$ et en des points au bord de la boule (des pointes de Δ) si $\mu_0 + \mu_2 = 1$. Mais Ψ ne s'étend pas e.g. au point $x=y=0$ si $\mu_0 + \mu_2 + \mu_3 > 1$, donc l'espace naturel pour la définition de Ψ n'est pas $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. D'autre part, on peut traiter les points de ramification $0, 1, x, y, \infty$ de façon équivalente en les remplacant par $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, la différentielle ω par

$$\prod_{j=0}^{4} (u-x_j)^{-\mu_j} du =: \omega' .$$

Finalement, le bon espace de définition pour Ψ sera donc l'espace des *points stables* [DM]

$$\begin{aligned} Q_{st} := \; & \{ (x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) \in (\mathbb{P}^1)^5 \} - \{ (x_0,\dots,x_4) \mid \exists\, i \neq j \textit{ avec } x_i = x_j \textit{ et } \mu_i + \mu_j \geq 1 \} \\ & - \{ (x_0,\dots,x_4) \mid \exists\, i,j,k \textit{ deux à deux distincts avec } x_i = x_j = x_k \textit{ et } \mu_i + \mu_j + \mu_k \geq 1 \} \\ & - \{ (x_0,\dots,x_4) \mid \textit{quatre coordonnées coincident} \} \\ & \textit{modulo l'action diagonale de } PSL_2\mathbb{C} \textit{ sur } (\mathbb{P}^1)^5 . \end{aligned}$$

L'espace Q_{st} porte une structure complexe naturelle, et même après l'adjonction d'un nombre fini de points *semi - stables* correspondants aux pointes de Δ la structure d'une variété algébrique projective (plus précisément, d'un $\mathbb{P}_2$ éclaté en au plus quatre points en position générale). Localement, on peut normaliser Q_{st} par l'action de $PSL_2\mathbb{C}$ de telle façon que trois des x_j prennent les valeurs $0, 1, \infty$; si l'on désigne les deux autres par x et y, on retrouve donc les définitions données au début. Mais globalement, on considère maintenant dix surfaces caractéristiques $S(ij)$ données par $x_i = x_j$; si

$\mu_i + \mu_j < 1$, nous désignons par $S_{st}(ij)$ la partie stable $S(ij) \cap Q_{st}$, tandis que $S_{st}(ijk)$ désigne le point $x_i = x_j = x_k$ de Q_{st} si $\mu_i + \mu_j + \mu_k < 1$. Dans tous les cas, Ψ s'étend par continuité comme application $PGL_3\mathbb{C}$ - multivalente de Q_{st} *sur* B . L'extension sera appelé encore Ψ.

Remarquons enfin que la restriction de Ψ à une surface caractéristique stable $S_{st}(ij)$ est essentiellement composée de deux solutions de l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss en une variable pour les périodes de $\omega'|_{x_i = x_j}$, dont le quotient est une application triangulaire. Le groupe de monodromie Δ_{ij} de cette application triangulaire est déterminé, comme Δ , par les périodes de ω : Il ne faut que remplacer le quintuplet $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}$ par un quadruplet en remplacant la paire μ_i, μ_j par la somme $\mu_i + \mu_j$. Ce procédé cadre avec les formules classiques pour la restriction des fonctions d'Appell $F_1(x,y)$ aux surfaces caractéristiques.

§ 2 Le plongement modulaire dans les points réguliers

Le résultat principal de ce travail-ci dit que même les groupes de PTDM non - arithmétiques sont étroitement liés à certains groupes arithmétiques:

Théorème 1 . *Soit* Δ *un groupe de PTDM. Alors il existe un groupe arithmétique* Γ *agissant sur une puissance* B^m *de la boule et un plongement modulaire qui consiste en une injection analytique*

$$F : B \hookrightarrow B^m$$

compatible à une injection de groupes

$$h : \Delta \hookrightarrow \Gamma$$

tel que $F(\gamma\tau) = h(\gamma) F(\tau)$ *pour tout* $\gamma \in \Delta$ *et tout* $\tau \in B$. *Si l'on munit les espaces quotients compactifiés de leur structure naturelle de variétés projectives définis sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, *l'application induite par* F

$$\overline{\Delta\backslash B} \rightarrow \overline{\Gamma\backslash B^m}$$

est un morphisme défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nous publierons les détails de la démonstration ailleurs, mais nous indiquons ici les idées principales pour expliquer le lien avec les variétés abéliennes et pour expliciter la construction de F . Pour les Ψ - images des points réguliers dans B , c'est une extension de la troisième construction dans [CoWo], §3. Naturellement, pour les Δ arithmétiques on obtient $m = 1$ et des identités respectives pour F et h .

A chaque point régulier $(x,y) \in Q_{st} - \bigcup S(ij)$ on associe une variété abélienne $T(x,y)$ principalement polarisée contenue dans la Jacobienne $J(X(x,y))$: Les morphismes naturels de $X(x,y)$ sur des courbes $X_f(x,y)$ avec des modèles

$$w^f = u^{d\mu_0} (u-1)^{d\mu_1} (u-x)^{d\mu_2} (u-y)^{d\mu_3} ,$$

f un diviseur propre de d , induisent des morphismes m_f de $J(X(x,y))$ sur $J(X_f(x,y))$, et on prend pour $T(x,y)$ la composante connexe de 0 du noyau commun de ces m_f.

L'automorphisme $\varkappa : (u,w) \longmapsto (\zeta_d^{-1}u,w)$, $\zeta_d = e^{2i\pi/d}$

de $X(x,y)$ entraîne $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_d) \subset \mathrm{End}_0 T(x,y) = \mathbb{Q}\otimes\mathrm{End}\ T(x,y)$, donc $T(x,y)$ admet des multiplications complexes par $\mathbb{K}$ avec un type de CM généralisé

$$\sum_{n\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} r_n \sigma_n \ , \qquad \sigma_n \text{ les plongements } \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ avec } \zeta_d \longmapsto \zeta_d^n \ ,$$

qui contient des informations sur l'action induite par $\mathbb{K}$ sur l'espace $H^0(T(x,y),\Omega)$ des différentielles de première espèce: $r_n = \dim V_n$ pour l'espace $\mathbb{K}$-propre V_n des $\omega \in H^0(T(x,y),\Omega)$ sur lesquels $\mathbb{K}$ agit comme multiplication par $\sigma_n\mathbb{K}$. Autrement dit, r_n est la multiplicité du valeur propre ζ_d^n pour l'automorphisme $\varkappa^*$ de $H^0(X(x,y),\Omega)$ induit par $\varkappa$; une formule classique de Chevalley et Weil [CW] permet de le calculer (soit $\langle a\rangle$ la partie fractionnaire $a-[a]$ du nombre $a\in\mathbb{R}$) sous la forme

$$(4) \qquad r_n = -1 + \sum_j \langle n\mu_j\rangle \ ,$$

d'où résulte $r_n + r_{-n} = 3$ pour tout n , donc $\dim T(x,y) = \frac{3}{2}\Phi(d)$ avec la fonction d'Euler Φ . En particulier, la différentielle $\omega = \frac{du}{w}$ se trouve dans V_1 et (1) entraîne $r_1 = 1$.

Or, d'après les travaux de Siegel [Sie] et Shimura [Shi 1], la famille de toutes les variétés abéliennes T avec multiplication complexe par $\mathbb{K}$ et du même type de CM que cette sous-famille des $T(x,y)$ est paramétrisée par le domaine symétrique complexe $\mathbb{B}^m$, où l'exposant m est le nombre de sous-espaces propres V_n avec $r_n = 1$, et les points de $\mathbb{B}^m$ qui correspondent à T sont données par des m-tuplets

$$(5) \qquad \Big(\int_{\gamma_0} \omega_n \ , \int_{\gamma_1} \omega_n \ , \int_{\gamma_2} \omega_n \Big)_{n\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} \text{ avec } r_n = 1$$

de triplets (à des facteurs algébriques près) $\in \mathbb{B} \subset \mathbb{P}_2$, où les γ_i sont des générateurs du $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-module des cycles $H_1(T,\mathbb{Z})$ et les ω_n sont certains générateurs de V_n . Pour $T = T(x,y)$ on peut choisir

$$(6) \qquad \omega_n = u^{-\langle n\mu_0\rangle}(u-1)^{-\langle n\mu_1\rangle}(u-x)^{-\langle n\mu_2\rangle}(u-y)^{-\langle n\mu_3\rangle}\,du$$

(donc $\omega_1 = \omega = \frac{du}{w}$) et les cycles de Pochhammer γ_i du §1 s'identifient à des $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-générateurs de $H_1(T(x,y),\mathbb{Z})$. Dans (5), tout triplet définit une application localement biholomorphe de l'espace des points réguliers (x,y) dans $\mathbb{B}$, donc hors des singularités et à des facteurs algébriques près,

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \hookrightarrow & \mathbb{B}^m \\ \Big(\int_{\gamma_0}\omega, \int_{\gamma_1}\omega, \int_{\gamma_2}\omega\Big) & \longmapsto & \Big(\int_{\gamma_0} \omega_n \ , \int_{\gamma_1} \omega_n \ , \int_{\gamma_2} \omega_n \Big)_{n\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} \text{ avec } r_n = 1 \end{array} \right.$$

est une injection analytique.

Quant à la compatibilité avec les actions de Δ et Γ , on remarque que le prolongement analytique des $\int_{\gamma_j}\omega_n$ le long des cycles dans l'espace des points réguliers change les cycles d'intégration γ_j en une autre base du $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-module $H_1(T,\mathbb{Z})$, mais ne change ni la courbe ni les différentielles. Comme cela, tout $\gamma\in\Delta$ définit un élément $h(\gamma)$ du groupe modulaire associé à cette famille des variétés abéliennes T . En effet, h est une injection de groupes.

§ 3 Singularités et points CM

Pour compléter la démonstration du Théorème 1 il faut 1°) étendre F dans les Ψ-images des singularités stables et 2°) prouver la rationalité de l'application quotient. Ces deux points reposent sur une extension de la famille T(x,y) aux surfaces caractéristiques stables dont nous résumons ici quelques résultats.

Soit $i \neq j$ et $\mu_i + \mu_j < 1$, donc $S_{st}(ij) \neq \emptyset$. Alors la famille T(x,y) s'étend continuement. sur $S_{st}(ij)$ comme somme directe

- d'une variété abélienne A_{ij} avec multiplication complexe par $\mathbb{K}$ au sens stricte de Shimura - Taniyama [ST] , de dimension $\frac{1}{2}\Phi(d)$ et avec le type
$$\sum_{n \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} (\langle n\mu_i \rangle + \langle n\mu_j \rangle - \langle n(\mu_i + \mu_j)\rangle) \, \sigma_n \quad ,$$
uniquement caractérisé à isogénie près [WW] par sa période de
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{première espèce} & B(\mu_i,\mu_j) \\ \text{deuxième espèce} & B(1-\mu_i,1-\mu_j) \end{array} \right\}$$
- et une variété abélienne de dimension $\Phi(d)$ avec multiplication complexe par $\mathbb{K}$ et un type de CM généralisé $\displaystyle\sum_{n \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} \Big(r_n - (\langle n\mu_i \rangle + \langle n\mu_j \rangle - \langle n(\mu_i + \mu_j)\rangle) \Big) \sigma_n$,
qui dépend d'un seul paramètre complexe.

Si par exemple $i=0$, $j=2$, S(ij) est donné par $x=0$, et sur $S_{st}(ij)$ la famille T(x,y) prend la forme $A_{02} \oplus T(y)$, où T(y) désigne la famille de variétés abéliennes introduite et étudiée dans [CoWo], §3 sous le nom de $\mathcal{F}$; là, cette famille joue le même rôle pour une construction d'un plongement modulaire du groupe triangulaire Δ_{02} (introduit à la fin du §1) que la famille T(x,y) pour Δ ici. Comme on sait bien que ce T(y) même se casse en deux facteurs avec multiplication complexe pour $y=0,1$ et ∞ dont on connaît les types, on obtient un certain nombre de *points CM*: Ce sont des points dans soit Q_{st} soit B soit B^m auxquels correspondent des variétés abéliennes T(x,y) isogènes à un produit de facteurs de type CM. Si l'on note par "$\sim$" une égalité dans $\mathbb{C}^* \bmod \overline{\mathbb{Q}}^*$, et si $\{i,j,k,l,s\} = \{0,1,2,3,4\}$, on a le

Théorème 2 . *Sur chaque surface caractéristique stable* $S_{st}(ij)$ ($\mu_i + \mu_j < 1$) *on a au moins trois points CM, soit de la forme* $S_{st}(ijk)$ *avec* $\mu_i + \mu_j + \mu_k < 1$ *dont la variété abélienne se casse en un facteur avec période* $B(1-\mu_l,1-\mu_s)$ *et deux facteurs isogènes à* $A_{ij} \mathrel{\hat{=}} A_{ik} \mathrel{\hat{=}} A_{jk}$ *avec des périodes* $B(\mu_i,\mu_j) \sim B(\mu_i,\mu_k) \sim B(\mu_j,\mu_k)$, *soit de la forme* $S_{st}(ij) \cap S_{st}(kl)$ *dont les trois facteurs ont les périodes respectives* $B(\mu_i,\mu_j)$, $B(\mu_k,\mu_l)$ *et* $B(1-\mu_i-\mu_j,1-\mu_k-\mu_l)$.

Dans ces points CM, on peut choisir les cycles d'intégration γ_ν pour les solutions fondamentales $\int_{\gamma_\nu} \omega$ du système d'EDP de telle manière que ces solutions ont des développements dans $\overline{\mathbb{Q}}[[\xi,\eta]]$ pour des variables locales ξ,η convenables fois des puissances rationnels de ξ et η et des facteurs c_ν qui sont simplement les périodes $B(\alpha_\nu,\beta_\nu)$ mentionnés dans le Théorème 2 ou bien les périodes de deuxième espèce $\frac{\pi}{B(\alpha_\nu,\beta_\nu)}$ correspondantes. Ceci entraîne un résultat sur la nature arithmétique des coefficients de Taylor des fonctions Δ-automorphes dans les points CM de B :

Théorème 3 . *Supposons que le point CM*

a) $S_{st}(ijk)$
b) $S_{st}(ij) \cap S_{st}(kl)$ $\Big\} \in Q_{st}$ *soit appliqué par* Ψ *dans le point* $(1,0,0) \in B$. *Alors les composantes* (Δ *- automorphes) du revêtement* $B \to \Delta \backslash B$ *ont des développements dans* $\overline{\mathbb{Q}}[[\frac{c_0 z_1}{c_1 z_0}, \frac{c_0 z_2}{c_2 z_0}]]$ *avec des "rayons" transcendants* $\frac{c_1}{c_0}$ *et* $\frac{c_2}{c_0}$ *qui sont des quotients de*

a) $c_0 \sim B(1-\mu_l, 1-\mu_s)$, $c_1 \sim c_2 \sim B(1-\mu_i, 1-\mu_j)$ *et*

b) $c_0 \sim B(1-\mu_i-\mu_j, 1-\mu_k-\mu_l)$, $c_1 \sim B(1-\mu_i, 1-\mu_j)$, $c_2 \sim B(1-\mu_k, 1-\mu_l)$ *respectivement.*

Ces quotients sont la généralisation naturelle aux surfaces Q_{st} du rayon de revêtement de certaines courbes comme dans la discussion de [CoWo] et [WW]. Leur transcendance résulte de [WW]. Pour les Δ arithmétiques, le Théorème 3 résulte aussi bien du travail de Shimura [Shi 2]; pour les Δ non - arithmétiques, la comparaison avec ces résultats de Shimura (sur Γ, cette fois!) est possible à l'aide du plongement modulaire du Théorème 1 .

Reférences

[AK] P.Appell, M.J.Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthier - Villars 1926.

[CW] Cl.Chevalley, A.Weil: Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers. Abh. Hamburger Math. Sem. **10** (1934) 358-361.

[CoWo] P.Cohen, J.Wolfart: Modular Embeddings for some Non - Arithmetic Fuchsian Groups, to appear in Acta Arithmetica **56**, preprint IHES/M/88/57.

[DM] P.Deligne, G.D.Mostow: Monodromy of Hypergeometric Functions and Non - Lattice Integral Monodromy. Publ. IHES **63** (1986) 5-89.

[M] G.D. Mostow: Generalized Picard Lattices arising from Half - Integral Conditions. Publ. IHES **63** (1986) 91-106.

[P] E. Picard: Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. Ann. ENS III **2** (1885) 357-384.

[Shi 1] G.Shimura: On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. Ann. Math. **78** (1963) 149-192.

[Shi 2] G.Shimura: Automorphic forms and the periods of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan **31** (1979) 561-592.

[ST] G. Shimura, Y. Taniyama: Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. Publ. Math. Soc. Japan **6**, 1961.

[Sie] C.L.Siegel: Lectures on Riemann Matrices. Tata Institute, Bombay 1963.

[Te 1] T.Terada: Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973) 557-578.

[Te 2] T.Terada: Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I, II . J. Math. Soc. Japan **35** - 3 (1983) 451-475 et **37** - 2 (1985) 173-185.

[WW] J.Wolfart, G.Wüstholz: Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen, Math. Ann. **273** (1985) 1-15.

[Y] M. Yoshida: Fuchsian Differential Equations. Aspects of Mathematics E 11, Vieweg 1987.