Principe de Hasse cohomologique

Uwe Jannsen

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

MPI/90-110

finitely many y in Y, $\psi(y)$ extends to a section of the invertible sheaf $\iota^*\tilde{L}^{-1}{}_{-y}$ on S, and is congruent to 0 modulo I. In general this holds after passing to a finite étale covering of S which trivialises $\underline{Y}$. It follows that for every non-zero element y in Y, $\tau(y,\phi(y))$ extends to a section of the invertible sheaf $(c'\times c\phi)^*\mathcal{P}_A^{-1}|_{(y,y)}$ on S and is congruent to zero modulo I.

6.3. Remark: Assume for simplicity that $\underline{X}$ and $\underline{Y}$ are constant. The trivialisations in (5) and (7) determine invertible fractional ideals (= Cartier-divisors) $I_{y,\mu}$ (for $(y,\mu) \in Y\times X$) and I_y (for $y \in Y$) on S, which are bilinear in (y,μ) respectively quadratic in y. Iy depends on the way we descend $\tilde{\underline{L}}$ to $\mathcal{M}$, but the $I_{y,\mu}$ are canonical. That is we obtain a bilinear form B: $Y\times X \rightarrow \mathrm{Div}(S)$ which a priori depends on $\mathcal{L}$, but we shall see later that is does not. $B(y,\phi(y))$ is positive for any non zero $y\in Y$, and B measures the denominators of $\iota: Y \rightarrow \tilde{G}(K)$. As the form B is often easier to describe than the whole set of data above, it will be very important in the following.

Principe de Hasse cohomologique

Uwe Jannsen

Le principe de Hasse (ou principe local–global) qui nous intéresse ici a pour modèle le théorème de Brauer–Hasse–Noether disant que l'application

$$\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \bigoplus_{v} \mathrm{Br}(K_v)$$

est injective pour tout corps de nombres K . Ici, $\mathrm{Br}(F)$, pour un corps F , désigne le groupe de Brauer, classifiant les algèbres à division sur F (ou, encore, les algèbres centrales simples sur F), v parcourt l'ensemble des places de K , K_v est le complété de K en v , et l'application est induite par les restrictions.

En combinant ce théorème avec l'injectivité de

$$K^{\times}/(K^{\times})^2 \longrightarrow \prod_{v} K_v^{\times}/(K_v^{\times})^2$$

on déduit le théorème de Hasse–Minkowski, donnant un principe local–global pour les formes quadratiques sur K [La] Ch. 6.3. Comme corollaire on obtient le théorème de Lagrange–Hilbert–Siegel: toute somme de carrés dans K est somme d'au plus 4 carrés.

Kato [Ka] a prouvé la généralisation suivante.

Théorème 1 (Kato) Si F est un corps de fonctions d'une variable sur un corps de nombres K , alors l'application

$$H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \longrightarrow \bigoplus_v H^3(F \cdot K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

induite par les restrictions est injective.

Ici, on a posé $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r) = \varinjlim_n \mu_n^{\otimes r}$ comme d'habitude, où μ_n désigne le module galoisien des racines n–ièmes de l'unité dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K . (C'est $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ comme groupe abélien, avec action de Galois par χ^r , puissance r–ième du caractère cyclotomique). Ici encore, v parcourt l'ensemble des places <u>de K</u> , et K_v est comme ci–dessus.

Notons la description cohomologique du groupe de Brauer:

$$Br(K) = H^2(K,\overline{K}^\times) \xleftarrow[\sim]{} H^2(K,\mu) \quad ,$$

$\mu = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ étant le module de toutes les racines de l'unité dans $\overline{K}$ ($\mu \hookrightarrow \overline{K}^\times$ induit un isomorphisme en H^2 , car $\overline{K}^\times/\mu$ est uniquement divisible et donc cohomologiquement trivial). Ainsi, on peut reformuler le théorème de Brauer–Hasse–Noether comme l'injectivité de

$$H^2(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \bigoplus_v H^2(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \quad .$$

D'autre part, pour F comme plus haut, l'application

$$Br(F) \longrightarrow \prod_v Br(F \cdot K_v)$$

n'est pas injective en général: Si X est une courbe lisse projective sur K avec corps de fonctions F , et si X a un point K–rationnel, alors que le noyau est isomorphe à

Ш $(K,J(X))$, groupe de Tate–Šafarevič de la Jacobienne $J(X)$ de X.

Il n'y a pas (encore) d'interprétation de $H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ comme pour $H^2(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ en termes du groupe de Brauer. Néanmoins Kato a déduit des applications similaires de son théorème: des principes de Hasse pour les normes réduites de certains corps de quaternions sur F et pour certaines formes quadratiques, à savoir les formes de Pfister en 8 variables. Comme Colliot–Thélène l'a observé, cela suffit pour démontrer que toute somme de carrés dans F est somme d'au plus 7 carrés ([Ka], appendice).

Pour démontrer le théorème 1, Kato utilise la théorie du corps de classes supérieure et la K–théorie algébrique. Nous pouvons donner une autre preuve, avec une méthode qui fournit la généralisation suivante.

<u>Théorème 2</u> Si F est un corps de fonctions en deux variables sur un corps de nombres, alors l'application de restriction

$$H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)) \longrightarrow \bigoplus_v H^4(F\cdot K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))$$

est injective.

Comme Colliot–Thélène me l'a fait observer, on en déduit encore (en utilisant des résultats de Merkuriev, Suslin, Jacob, Rost) un principe de Hasse pour des formes de Pfister, maintenant à 16 variables, et de là, l'application suivante:

<u>Corollaire</u> Toute somme des carrés dans F est somme d'au plus 8 carrés.

Dans ce qui suit nous indiquons les idées, les détails paraîtront ailleurs. Seulement pour le théorème 1 nous donnons une preuve complète ici, aussi élémentaire que possible.

Plus précisement nous prouvons l'énoncé suivant, où la partie a) découle déja des résultats de Kato ([Ka] Thm. 0.6).

Théorème 1′ Soit K un corps de nombres et X/K une courbe lisse, projective, géométriquement intègre, de corps de fonctions $K(X) = F$.

a) On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \bigoplus_v H^3(F\cdot K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow \bigoplus_{x\in|X|} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

où $|X|$ désigne l'ensemble des points fermés de X et l'application Σ est donnée par la somme.

b) Si $r \neq 2$, alors on a un isomorphisme

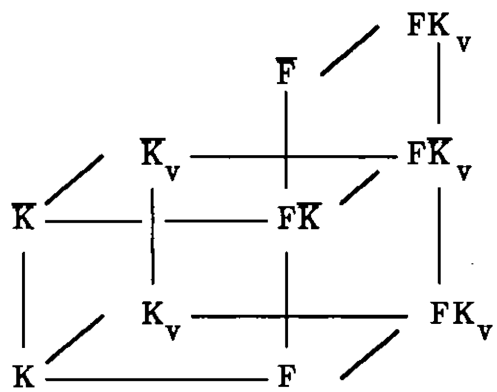
$$H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v|\infty} H^3(F\cdot K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \ .$$

Preuve Pour tout $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$–module discret de torsion M on a les suites spectrales de Hochschild–Serre

$$E_2^{p,q} = H^p(K,H^q(F\overline{K};M)) \Rightarrow H^{p+q}(F,M) \ ,$$

$$E_2^{p,q} = H^p(K_v,H^q(F\overline{K},M)) \Rightarrow H^{p+q}(FK_v,M) \ ,$$

induites par le diagramme de corps



identifiant $\mathrm{Gal}(F\overline{K}/F)$ à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, $\mathrm{Gal}(F\overline{K}_v/FK_v)$ à $\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F\overline{K})$ à $\mathrm{Gal}(\overline{FK_v}/F\overline{K}_v)$ respectivement, de sorte que $H^q(F\overline{K},M) \cong H^q(F\overline{K}_v,M)$. Il est bien connu que la dimension cohomologique de $F\overline{K}$ est $\mathrm{cd}(F\overline{K}) = 1$ ($F\overline{K}$ étant le corps de fonctions de $\overline{X}$, courbe sur le corps algébriquement clos $\overline{K}$). Ainsi $H^q(F\overline{K},M) = 0$ pour $q > 1$.

Si K est totalement imaginaire, alors $\mathrm{cd}(K) = 2 \geq \mathrm{cd}(K_v)$ pour toute place v , et les suites spectrales donnent des isomorphismes

$$H^3(F,M) \cong H^2(K,H^1(F\overline{K},M)) \ ,$$

$$H^3(FK_v,M) \cong H^2(K_v,H^1(F\overline{K},M)) \ .$$

Donc l'application restriction $f : H^3(F,M) \longrightarrow \prod_v H^3(FK_v,M)$ s'identifie à l'application $g : H^2(K,H^1(F,\overline{K},M)) \longrightarrow \prod_v H^2(K_v,H^1(F\overline{K},M))$. En particulier, f prend ses valeurs dans la somme directe $\bigoplus_v \subseteq \prod_v$, puisque c'est vrai pour g .

Pour K un corps de nombres quelconque, on a néanmoins le résultat suivant:

<u>Lemme 1</u> Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^3(F,M) & \xrightarrow{f} & \bigoplus_v H^3(FK_v,M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(K,H^1(F\overline{K},M)) & \xrightarrow{g} & \bigoplus_v H^2(K_v,H^1(F\overline{K},M))
\end{array} ,$$

où les applications verticales proviennent des suites spectrales de Hochschild–Serre, les applications horizontales (induites par les restrictions) ont même noyau et conoyau.

<u>Preuve</u> Puisque $H^q(F\overline{K},M) = 0$ pour $q \neq 0,1$, il est bien connu que les suites spectrales donnent des suites exactes longues (où nous avons supprimé les coefficients M)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots\to & H^1(K,H^1(F\overline{K})) & \to & H^3(K,H^0(F\overline{K})) & \to & H^3(F) & \to & H^2(K,H^1(F\overline{K})) & \to & H^4(K,H^0(F\overline{K})) & \to\ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & \\
\prod_v(\ldots\to & H^1(K_v,H^1(F\overline{K})) & \xrightarrow{\partial'} & H^3(K_v,H^0(F\overline{K})) & \to & H^3(FK_v) & \to & H^2(K_v,H^1(F\overline{K})) & \xrightarrow{\partial} & H^4(K_v,H^0(F\overline{K})) & \to\ldots)
\end{array}$$

(cf. [CE] XV 5.11), jointes par les applications restriction comme indiqué. Le diagramme est commutatif par naturalité. Puisque $H^p(K_v,N) = 0$ pour v non archimédien et $p \geq 3$, pour tout module (discret) de torsion N, il s'ensuit que l'application f, tout comme g, prend ses valeurs dans la somme directe.

Pour tout module de torsion N, on a des isomorphismes

$$H^p(K,N) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_v H^p(K_v,N) = \bigoplus_{v|\infty} H^p(K_v,N)$$

pour $p \geq 3$ ([Mi 2] I 4.10), et la flèche

$$H^p(K,N) \longrightarrow \bigoplus_{v|\infty} H^p(K_v,N)$$

est surjective pour $p = 1,2$ (loc. cit I 4.16 pour $p = 2$, et loc. cit I 9.8 (b) ou [Neu] (6.4) pour $p = 1$). Par conséquent, $\mathrm{Im}\ \partial g = \mathrm{Im}\ \partial$ et $\mathrm{Im}\ \partial' g' = \mathrm{Im}\ \partial'$, et l'assertion du lemme en découle par une chasse au diagramme.

En tout cas, pour le théorème $1'$ il suffit de calculer les noyau et conoyau de l'application restriction

$$(1) \qquad H^2(K,H^1(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))) \longrightarrow \bigoplus_{v} H^2(K_v,H^1(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)))$$

Le problème est donc encore de prouver un principe local–global pour le corps de nombres K, mais avec, au lieu de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (1), le module plus compliqué $H^1(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$. Rappelons que F est le corps de fonctions de la courbe projective lisse X/K. De là,

$$(2) \qquad H^1(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = \varinjlim_{U} H^1(\overline{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \ ,$$

où U parcourt l'ensemble des courbes ouvertes U contenues dans X, $\overline{U} = U \otimes_K \overline{K}$, et $H^1(\overline{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = \varinjlim_{n} H^1_{et}(\overline{U},\mu_n^{\otimes r})$ et la cohomologie étale.

<u>Remarque 1</u> De façon plus élémentaire, $H^1(\overline{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\overline{U},\overline{\eta}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$, où $\pi_1(\overline{U},\overline{\eta})$ est le groupe fondamental (algébrique) de $\overline{U}$ avec point base $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}\ \overline{F}$, c'est–à–dire $\pi_1(\overline{U},\overline{\eta}) = \mathrm{Gal}(F_U/F\overline{K})$, où F_U est l'extension maximale de F (dans $\overline{F}$) non ramifiée en dehors de points $x \in X\backslash U$. En ces termes, (2) devient immédiat, compte–tenu de ce que $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) = \varprojlim_{U} \mathrm{Gal}(F_U/F)$.

La suite exacte de cohomologie relative pour $j : U \hookrightarrow X$ donne une suite exacte

(3)

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \xrightarrow{j^*} H^1(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X \setminus U} \mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1)) \xrightarrow{tr} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\kappa(x)$ désigne le corps residuel de x, $\mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}$ le module induit de $\kappa(x)$ à K (c'est–à–dire, de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/\kappa(x))$ à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$), et tr l'application "somme" ou "augmentation" évidente. En effet, on a $H^1_{\{\overline{x}\}}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = 0$ et $H^2_{\{\overline{x}\}}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \cong H^0(\{\overline{x}\},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1))$ par pureté, $H^2(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1)$ via l'application trace, et $H^2(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = 0$, car V est affine ([Mi 1] V § 2). La description de tr découle de la relation des isomorphismes de pureté et trace avec les classes de cycles.

Remarque 2 Il est possible de déduire (3) purement en termes de cohomologie galoisienne, par la description bien connue de $\pi_1(\overline{U},\overline{\eta})^{ab}$ et $\pi_1(\overline{X},\overline{\eta})^{ab}$ (G^{ab} désignant le quotient pro–abélien maximal d'un groupe pro–fini G).

Par exemple, la théorie classique des jacobiennes généralisées ([Se 1] V, VI § 12) fournit un isomorphisme canonique (en particulier, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$–équivariant)

$$\pi_1(\overline{U},\overline{\eta})^{ab} \xrightarrow{\sim} \hat{T}\, J_m \ ,$$

où l'on a noté J_m la jacobienne généralisée associée au module $m = \sum_{P \in X \setminus U} P$ et $\hat{T}\, J_m = \varprojlim_n J_m(\overline{K})[n]$ le module de Tate (total) de J_m. (Notation: pour un groupe (ou groupe algébrique) commutatif G nous écrivons $G[n]$ pour le noyau de $G \xrightarrow{n} G$). Rappelons (loc. cit.) qu'il y a une suite exacte

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow (F\overline{K})^{\times} \longrightarrow \bigoplus_{y\in|U|} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{y\in\overline{X}\setminus\overline{U}} (F\overline{K})_y^{\times}/(1+m_y) \longrightarrow J_m(\overline{K}) \longrightarrow 0 \ ,$$

$(F\overline{K})_y$ étant le complété de $F\overline{K}$ en y, et m_y son idéal de valuation. En particulier, on a une suite exacte

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow \overline{K}^{\times} \longrightarrow \bigoplus_{y\in\overline{X}\setminus\overline{U}} \kappa(y)^{\times} \longrightarrow J_m(\overline{K}) \longrightarrow J(\overline{K}) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $J = J_{m=0} = \mathrm{Jac}(X)$ est la jacobienne de X. Tous les groupes dans (5) sont divisibles, par conséquent on obtient une suite exacte de modules de Tate

$$(6) \qquad 0 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow{\ \Delta\ } \bigoplus_{x\in X\setminus U} \mathrm{Ind}^{k}_{\kappa(x)} \hat{\mathbb{Z}}(1) \longrightarrow \hat{T}\, J_m \longrightarrow \hat{T}\, J \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\hat{\mathbb{Z}}(1) = \hat{T}\, \overline{K}^{\times} = \varprojlim_{n} \mu_n$ et Δ est l'application "diagonale" évidente. Par passage au $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)$–dual on en déduit la suite (3) – notons que $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbb{Z}}(1),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1)$ et que $\pi_1(\overline{X},\overline{\eta})^{ab} \xrightarrow{\ \sim\ } \hat{T}\, J$ (le cas où $m = 0$).

Posons $C = \mathrm{noyau(tr)} = \mathrm{conoyau}(j^{*})$ dans (3), puis $B = H^1(\overline{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ et $A = H^1(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$, de sorte qu'on a une suite exacte courte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$. Nous nous intéressons à l'application

$$\beta_M : H^2(K,M) \longrightarrow \bigoplus_{v} H^2(K_v,M)$$

dans le cas $M = B$ (après quoi nous passerons à la limite sur tous les U). Nous procédons en six étapes:

1) β_A est un isomorphisme pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Cela résulte du th. 3 d) de [Ja 1], parce que A est divisible et que $1 \neq 2(r-1)$.

Remarque 3 Rappelons l'argument de poids qui est à la base du théorème cité: Par la dualité globale de Tate–Poitou, β_A est un isomorphisme si et seulement si $H^0(K,T) = 0 = \ker(H^1(K,T) \longrightarrow \prod_v H^1(K,T))$ pour $T = \mathrm{Hom}(A,\mu)$. Utilisant des idées de Serre [Se 2], il n'est pas difficile de démontrer qu'il suffit pour cela que T soit pur de poids $w \neq 0$ dans la terminologie rappelée plus bas. Évidemment c'est le cas si et seulement si A est pur de poids w' $(= -2-w) \neq -2$. Dans loc. cit. je renvoie à la preuve de la conjecture de Weil pour le fait que $A = H^1(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ est pur de poids $1-2r$. Mais pour un H^1 il suffit de citer le résultat classique de Weil (cf [Wei] et [Mu]) sur "l'hypothèse de Riemann" pour des variétés abéliennes. Reformulé en termes de poids il dit que $\hat{T}J$ est pur de poids -1, de sorte que $A = \mathrm{Hom}(\hat{T}J,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ est pur de poids $1-2r$ et $T = \mathrm{Hom}(A,\mu) \cong \hat{T}J(1-r)$ est pur de poids $-3+2r$ (en notant comme d'habitude $M(n) = M \otimes \hat{\mathbb{Z}}(1)^{\otimes n}$ le twist d'un $\hat{\mathbb{Z}}$–$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$–module M).

2) $H^2(K_v,A) = 0$ pour les places v non–archimédiennes, si $r \neq 2$.

C'est prouvé dans [Ja 1] Corollaire 7.

3) Si $r \neq 2$, alors β_C est un isomorphisme et $H^2(K_v,C) = 0$ pour $v \nmid \infty$.

Avec les arguments rappelés dans la remarque 3, la première assertion découle du fait que C est pur de poids $2-2r \neq -2$ (car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1)$ a cette propriété). Si $v \nmid \infty$, $H^2(K_v,C)$ est dual de $H^0(K_v,T)$, pour $T = \mathrm{Hom}(C,\mu)$, par dualité locale. En passant à une extension finie de K_v, si nécessaire, on se ramène au fait que

$$H^0(K_v, \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1),\mu)) = H^0(K_v,\hat{\mathbb{Z}}(2-r)) = o$$

pour $r \neq 2$, car l'image du caractère cyclotomique $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$ est ouverte.

Voyons comment 1), 2) et 3) impliquent la partie ii) du théorème 1'. On a un diagramme exact commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bigoplus_{v|\infty} H^1(K_v, C) & \to & \bigoplus_{v|\infty} H^2(K_v, A) & \to & \bigoplus_{v|\infty} H^2(K_v, B) & \to & \bigoplus_{v|\infty} H^2(K_0, C) & \to & \bigoplus_{v|\infty} H^3(K_v, A) \\
\uparrow \alpha_C & & \uparrow \beta_A & & \uparrow \beta_B & & \uparrow \beta_C & & \uparrow \gamma_A \\
H^1(K, C) & \longrightarrow & H^2(K, A) & \longrightarrow & H^2(K, B) & \longrightarrow & H^2(K, C) & \longrightarrow & H^3(K, A)
\end{array}$$

Par 1), 2) et 3), β_A et β_C sont des isomorphismes. Mais γ_M est bijectif et α_M est surjectif pour tout module de torsion M (cf. la preuve du lemme 1), d'où le résultat par le lemme des cinq.

4) Si $r = 2$, on a une suite exacte

$$(7) \qquad 0 \longrightarrow H^2(K,C) \xrightarrow{\beta_C} \bigoplus_{v} H^2(K_v,C) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X\setminus U} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où Σ est donné par la sommation.

Supposons $r = 2$. Alors par définition nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \bigoplus_{x\in X\setminus U} \mathrm{Ind}^{K}_{\kappa(x)}\mu \longrightarrow \mu \longrightarrow 0 \ . \tag{8}$$

Observons qu'il existe une suite exacte de tores sur K

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0 \tag{9}$$

tel que la suite (8) est obtenu en prenant les sous–groupes de torsion dans la suite exacte de groupes divisibles

$$0 \longrightarrow T(\overline{K}) \longrightarrow T'(\overline{K}) \longrightarrow T''(\overline{K}) \longrightarrow 0 \ . \tag{10}$$

En effet, on peut trouver la suite (9) comme ceci:

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \bigoplus_{x\in X\setminus U} \mathrm{Res}^{K}_{\kappa(x)}\mathbb{G}_m \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \ , \tag{11}$$

où $\mathrm{Res}^{K}_{\kappa(x)}\mathbb{G}_m$ est la restriction de Weil de $\kappa(x)$ à K du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $\kappa(x)$, et π est la somme des applications norme $\mathrm{Res}^{K}_{\kappa(x)}\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$.

Comme $S(\overline{K})$ modulo torsion est uniquement divisible pour tout tore S sur K , on a $H^p(K,C) \xrightarrow{\ \sim\ } H^p(K,T)$ pour $p \geq 2$, similairement pour les K_v , de sorte que (11) induit un diagramme commutatif de suites exactes en cohomologie

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{v} H^2(K_v,C) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in X\setminus U} \bigoplus_{w} \mathrm{Br}(\kappa(x)_w) \arrow[r, "\pi_*"] & \bigoplus_{v} \mathrm{Br}(K_v) \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_{v} H^3(K_v,C) \\
0 \arrow[r] & H^2(K,C) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_C"'] & \bigoplus_{x\in X\setminus U} \mathrm{Br}(\kappa(x)) \arrow[r] \arrow[u, "\beta'"'] & \mathrm{Br}(K) \arrow[r] \arrow[u, "\beta''"'] & H^3(K,C) \arrow[u, "\gamma_C"']
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Ici, w parcourt (pour chaque x) l'ensemble de places de $\kappa(x)$, et $\kappa(x)_w$ est le complété de $\kappa(x)$ en w . On a des zéros à gauche par Hilbert 90 $(H^1(K,\mathbb{G}_m) = 0 = H^1(K_v,\mathbb{G}_m))$.

Remarque 4 Rappelons que pour un tore S sur K on a par définition $H^p(K,S) = H^p(K,S(\bar{K}))$, et que $(\mathrm{Res}^K_{\kappa(x)}\, \mathbb{G}_m)(\bar{K}) = \mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}\, \bar{K}^\times$, de sorte que (10) devient

$$(13) \qquad 0 \longrightarrow T(\bar{K}) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X\setminus U} \mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}\, \bar{K}^\times \longrightarrow \bar{K}^\times \longrightarrow 0$$

(similairement pour les K_v).

Pour éviter les tores, on pourrait obtenir le diagramme (12) en prenant directement la cohomologie de (8). Pour déduire les zéros à gauche, on note que l'application $\bigoplus_{x\in X\setminus U} H^1(\kappa(x),\mu) \longrightarrow H^1(K,\mu)$ est surjective (similairement pour les suites locales): elle est induite par les corestrictions, et pour toute extension finie L/K l'application corestriction $H^1(L,\mu) \longrightarrow H^1(K,\mu)$ est surjective. En effet, elle s'identifie à l'application norme $N_{L/K} \otimes \mathrm{id} : L^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow K^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par la théorie de Kummer, et le conoyau de $N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times$ est de torsion.

Considérons le diagramme (12): γ_C est bijectif, et on a $\mathrm{Im}\ \partial = \mathrm{Im}\ \partial\beta''$ (mêmes arguments que dans la preuve du lemme 1), de plus β' et β'' sont injectifs d'après le théorème de Brauer–Hasse–Noether. Ceci fournit l'injectivité de β_C et une suite exacte

$$(14) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{conoyau}(\beta_C) \longrightarrow \mathrm{conoyau}(\beta') \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{conoyau}(\beta'') \longrightarrow 0 \ .$$

Rappelons d'autre part que le théorème de Brauer–Hasse–Noether dit encore qu'il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{Br}(K_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(et des suites analogues pour les $\kappa(x)$), où la flèche $\mathrm{Br}(K_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant de la théorie du corps de classes. De plus on a un triangle commutatif pour toute place w de $\kappa(x)$ au–dessus de v

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \\
\mathrm{Br}(\kappa(x)_w) \arrow[ur, "\mathrm{inv}"] \arrow[rr, "\mathrm{cor}"] & & \mathrm{Br}(K_v) \arrow[ul, "\mathrm{inv}"']
\end{tikzcd}$$

où l'application en bas est la corestriction. Comme par définition le morphisme π_* dans (12) est induit par les corestrictions, on voit que la flèche π_* dans (14) peut être identifiée avec l'application de sommation

$$\bigoplus_{x \in X \setminus V} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ ,$$

d'où la description voulue du conoyau (β_C) .

5) Si S désigne l'ensemble fini des places de K où X a mauvaise réduction, alors $H^2(K_v,A) = 0$ pour $v \notin S' = S \cup \{v|\infty\}$.

C'est prouvé dans [Ja 1] § 7 (la preuve du th. 5 dans loc. cit. vaut aussi pour $\ell = 2$).

<u>Remarque 5</u> La preuve du résultat suivant est plus simple: Si, pour un nombre premier ℓ ,

$A\{\ell\}$ désigne la composante ℓ–primaire de A, alors $H^2(K_v,A\{\ell\}) = 0$ pour $v \notin S \cup \{v|\infty\} \cup \{v|\ell\}$ (cela résulte de la dualité locale: $H^2(K_v,A\{\ell\}) = H^0(K_v,T_\ell J(-1))^*$, et du théorème de Weil cité dans remarque 3). Cette version affaiblie de 5) suffit, quand on traite les composantes ℓ–primaires de B une à une dans ce qui suit.

Par 5) la suite $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ induit un diagramme commutatif avec des lignes exactes

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v\in S'} H^1(K_v,C) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in S'} H^2(K_v,A) \arrow[r] & \bigoplus_v H^2(K_v,B) \arrow[r] & \bigoplus_v H^2(K_v,C) \arrow[r, "\delta"] & \bigoplus_v H^3(K_v,A) \arrow[r] & {} \\
H^1(K,C) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_C"] & H^2(K,A) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_A"] & H^2(K,B) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_B"] & H^2(K,C) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_C"] & H^3(K,A) \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_A"] & {},
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

où β_A et γ_A sont des isomorphismes, ainsi que $\gamma_B : H^3(K,B) \longrightarrow \bigoplus_v H^3(K_v,B)$ qui devrait figurer verticalement à droite du diagramme. Ceci joint à la surjectivité de α_C, qu'on va prouver dans un moment, implique que noyau(β_B) = noyau(β_C) et conoyau(β_B) = conoyau(β_C). Par 4) nous obtenons une suite analogue à (7), avec $B = H^1(\bar{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ à la place de C. Compte–tenu de (2), ceci prouve le théorème 1′ a), par passage à la limite sur les U. Il reste donc à prouver:

6) α_C est surjectif.

La théorie de Kummer pour le tore T (c'est–à–dire le système des suites exactes $0 \longrightarrow C[n] \longrightarrow T \xrightarrow{n} T \longrightarrow 0$) donne un diagramme commutatif exact

$$
(16)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S'} T(K_v)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S'} H^1(K_v, C) & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S'} H^1(K_v, T) & \longrightarrow 0 \\
& \Big\uparrow{\scriptstyle \omega_T} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_C} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_T} & \\
0 \longrightarrow & T(K)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & H^1(K, C) & \longrightarrow & H^1(K, T) & \longrightarrow 0\,.
\end{array}
$$

<u>Lemme 2</u> Pour tout ensemble finis S' de places de K et tout tore T sur K, l'application de restriction

$$\omega_T : T(K)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{v\in S'} T(K_v)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est surjective.

<u>Preuve</u> C'est clair pour $T = \mathbb{G}_m$ (approximation faible) et donc pour tout "tore induit" $\mathrm{Res}_L^K\, \mathbb{G}_m$ pour L/K une extension finie. Comme tout tore est quotient d'un produit de tores induits, le lemme en résulte – noter que $N\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ pour tout groupe de torsion N.

Il reste à prouver que α_T est surjectif. Mais la suite (11) induit un diagramme commutatif exact de cohomologie

$$
(17)\qquad
\begin{array}{cccccc}
\bigoplus_{v\in S'} \bigoplus_{x\in X\setminus U} \bigoplus_{w|v} \kappa(x)_w^\times & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S'} K_v^\times & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in S'} H^1(K_v, T) & \longrightarrow 0 \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_T} & \\
\bigoplus_{x\in X\setminus U} \kappa(x)^\times & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & H^1(K, T) & \longrightarrow 0\,,
\end{array}
$$

où l'application $\kappa(x)_w^\times \longrightarrow K_v^\times$, pour $w\,|\,v$, est la norme. Comme l'image de cette norme est ouverte d'indice fini dans K_v^x, la surjectivité de α_T découle du théorème d'approximation faible par K.

Esquissons la preuve du théorème 2. Par des considérations similaires mais un peu plus compliquées on montre la généralisation suivante du lemme 1.

Lemme 1′ Soit F un corps de fonctions en d variables sur le corps de nombres K. Les noyaux (resp. conoyaux) des applications restriction

$$H^{d+2}(F,M) \longrightarrow \bigoplus_v H^{d+2}(FK_v,M)$$

$$\text{et} \quad H^2(K,H^d(F\overline{K},M)) \longrightarrow \bigoplus_v H^2(K_v,H^d(F\overline{K},M))$$

s'identifient pour tout $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$–module de torsion M, via les suites spectrales de Hochschild–Serre.

Comme précédemment on choisit une variété projective lisse X sur K de corps de fonctions $K(X) = F$. Pour $d = 2$, X est une surface. La considération de la limite (2) et de la suite de cohomologie relative (3) est remplacée par la suite spectrale de Bloch–Ogus [BO]

$$E_2^{p,q} = H^p_{Zar}(V,\mathcal{H}^q(r)) \Rightarrow H^{p+q}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \tag{18}$$

pour une sous–variété ouverte $V \subset X$ convenable. Ici, $\mathcal{H}^q(r)$ est le faisceau (pour la topologie de Zariski sur V) associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow H^q(\overline{U},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \ .$$

Si V est affine et $d = 2$, on a alors

$$H^2_{Zar}(V,\mathscr{H}^2(r)) = H^4(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = 0 \ ,$$

$$H^1_{Zar}(V,\mathscr{H}^2(r)) = H^3(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) = 0$$

par le théorème de Lefschetz faible [Mi 1] VI 7.2, et on obtient un diagramme commutatif exact

$$(19) \qquad \begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, hook] & \bigoplus\limits_{x\in V^{(1)}} C_x \arrow[r, two heads] & \bigoplus\limits_{x\in V^{(2)}} \mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}(r-2) \arrow[d, equal] \\
H^0_{Zar}(V,\mathscr{H}^2(r)) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & H^2(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \bigoplus\limits_{x\in V^{(1)}} H^1(\kappa(x)\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, two heads] \arrow[u, two heads] & \bigoplus\limits_{x\in V^{(2)}} \mathrm{Ind}^K_{\kappa(x)}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-2) \\
H^0_{Zar}(V,\mathscr{H}^2(r)) \arrow[r, hook] & A \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & \bigoplus\limits_{x\in V^{(1)}} A_x \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd} ,$$

où $V^{(i)}$ est l'ensemble des points de V de codimension i , et où $A_x = H^1(\overline{Y}_x,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r-1))$ pour une courbe lisse projective (non nécessairement géométriquement irréductible) Y_x sur K de corps de fonctions $\kappa(x)$. De plus, on a une suite exacte

$$0 \to H^1_{Zar}(V,\mathscr{H}^1(r)) \to H^2(\overline{V},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)) \to H^0_{Zar}(V,\mathscr{H}^2(r)) \to 0 \ .$$

On démontre d'abord un principe de Hasse pour A , utilisant la généralisation suivante du th. 3 de [Ja 2]:

Théorème 3 Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier. Si $A = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^m$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ mixte de poids $\neq -2$, alors l'application restriction donne un isomorphisme

$$H^2(K,A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_v H^2(K_v,A) = \bigoplus_{\substack{v \text{ mauvaise} \\ \text{ou } v|\ell}} H^2(K_v,A) .$$

Rappelons les notions de représentation mixte de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (cf. [De] 1.2 et 3.4.10) et de mauvaise place. A priori c'est une propriété d'une $\mathbb{Q}_\ell$–représentation V de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (c'est–à–dire, d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$ avec action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$). Nous étendons la définition de façon évidente à un module comme A ci–dessus, ou à un $\mathbb{Z}_\ell$–module libre de type fini T avec action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, en disant que A (resp. T) est pur de poids w ou mixte, si $T_\ell A \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ (resp. $T \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$) l'est, où $T_\ell A = \varprojlim_n A[\ell^n]$ est le module de Tate de A.

Définition 1 a) V est appelé pur de poids w, s'il existe un ensemble fini $S \supset \{v|\infty\}$ de places de K (l'ensemble de places "mauvaises") tel que V est non–ramifié en dehors $S \cup \{v|\ell\}$ et tel que pour toute place $v \notin S$, $v \nmid \ell$, les valeurs propres α du Frobenius arithmétique φ_v en v agissant sur V sont des nombres algébriques avec

$$|\sigma\alpha| = q_v^{-\frac{w}{2}}$$

pour tout plongement $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, où q_v est le cardinal du corps résiduel en v.

b) V est mixte, s'il possède une filtration avec des quotients purs.

Exemples i) φ_v opère sur $\mu_{\ell^\infty} = \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)$ comme puissance q_v–ième et multiplication par q_v respectivement. De là, $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)$ est pur de poids -2 , et $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(r) = \varinjlim_n \mu_{\ell^n}^{\otimes r}$ est pur de poids $-2r$.

ii) Selon la preuve de la conjecture de Weil par Deligne, le groupe de cohomologie étale en dimension i

$$H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) = (\varprojlim_n H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

est pur de poids i , si X est une variété lisse et projective sur K (en utilisant le théorème de changement de base propre, cf. la preuve du lemme 3 de [Ja 1]).

iii) Si X est comme dans l'exemple ii) et $V \subset X$ est le complément d'une section hypersurface lisse $Y \subset X$, alors $H^i(V,\mathbb{Q}_\ell)$ est mixte de poids i et $i+1$. Cela découle de la suite de Gysin

$$\ldots \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(V,\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{i-1}(Y,\mathbb{Q}_\ell(-1)) \longrightarrow H^{i+1}(X,\mathbb{Q}_\ell) \ .$$

En particulier, si $V \subset X$ est choisi comme dans l'exemple iii), le module A dans (19) est une limite inductive des modules mixtes de poids $2-2r$ et $3-2r$. Le théorème 3 implique alors le principe de Hasse désiré pour A dans le cas $r = 3$.

Ensuite on prouve que $H^2(K,C) \longrightarrow \bigoplus_v H^2(K_v,C)$ est injectif et que $H^1(K,C) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S'} H^1(K_v,C)$ est surjectif pour n'importe quel ensemble fini S' de places de K . Pour cela on utilise le fait analogue pour les C_x (démontré dans la preuve du théorème $1'$) et la suite

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \bigoplus_{x \in V^{(1)}} C_x \longrightarrow \bigoplus_{x \in V^{(2)}} \mathrm{Ind}_{\kappa(x)}^K \mu \longrightarrow 0$$

ou bien une suite correspondante de tores.

Les propriétés énoncées de A et C impliquent comme précédemment l'injectivité de

$$H^2(K,H^2(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))) \longrightarrow \bigoplus_v H^2(K_v,H^2(F\overline{K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))) .$$

Indiquons brièvement la démonstration des corollaires sur les formes de Pfister et les sommes de carrés. Désignons, pour des éléments a, b dans un corps L de caractéristique différente de 2, par $\langle a,b\rangle$ la forme quadratique $ax^2 + by^2$, et, pour $a_1,\dots,a_n \in L^\times$, par $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ la forme de Pfister en 2^n variables $\langle 1,-a_1\rangle \otimes \langle 1,-a_2\rangle \dots \otimes \langle 1,-a_n\rangle$. Par un résultat obtenu indépendamment par Merkuriev–Suslin et Jacob–Rost ([MS], [JR]) on a $\langle\langle a_1,\dots,a_4\rangle\rangle = 0$ (dans l'anneau de Witt de L) si et seulement si $a_1 \cup \dots \cup a_4 = 0$ dans $H^4(L,\mu_2^{\otimes 4})$, où l'on identifie $a \in L^\times/(L^\times)^2$ avec son image par l'isomorphisme de Kummer $L^\times/(L^\times)^2 \xrightarrow{\sim} H^1(L,\mu_2)$.

En utilisant l'isomorphisme de Merkuriev–Suslin–Rost ([MS] Th. 5.7)

$$K_3^M(L)/2 \xrightarrow{\sim} H^3(L,\mu_2^{\otimes 3})$$

(où $K_*^M(L)$ désigne le groupe de K–théorie de Milnor), on prouve l'injectivité de $H^4(L,\mu_2^{\otimes 3}) \hookrightarrow H^4(L,\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(3))$. Par conséquent, le théorème 2 implique l'injectivité de

$$H^4(F,\mu_2^{\otimes 4}) \longrightarrow \bigoplus_v H^4(FK_v,\mu_2^{\otimes 4}) ,$$

si F est un corps de fonctions en 2 variables sur le corps de nombres K (notons l'isomorphisme $\mu_2^{\otimes 3} \cong \mu_2^{\otimes 4}$). Combiné avec le résultat précédent ça donne le principe de Hasse: la forme de Pfister sur F $\langle\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle\rangle$ est nulle si et seulement si elle l'est sur

FK_v pour toute place v de K .

Il est bien connu qu'un élément f dans un corps L comme avant est somme de 8 carrés si et seulement si $0 = 8\langle 1,-f\rangle = \langle\langle f,-1,-1,-1\rangle\rangle$ ([La] Ch. 11 Prop. 1.3). De plus on sait que toute somme de carrés dans les FK_v est somme d'au plus 8 carrés (pour le cas non–trivial des places archimédiennes on utilise un théorème de Pfister). Par le principe de Hasse qu'on a prouvé on déduit le même résultat pour F .

Remarque 6 La conjecture naturelle est que l'application restriction

$$H^{d+2}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \longrightarrow \bigoplus_v H^{d+2}(FK_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$$

est injective pour un corps de fonctions en d variables sur un corps de nombres k ; c'est donc prouvé pour $d = 0,1,2$, mais pas connu pour $d \geq 3$. Notons que la conjecture découlerait d'une conjecture de Kato ([Ka] Conj. 0.4).

Je remercie Y. André de son aide concernant la version française du texte, et J.–L. Colliot–Thélène pour plusieurs remarques utiles.

Bibliographie

[BO] S. Bloch, A. Ogus: Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sci. ENS (4) 7 (1979), 181–202.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press 1956.

[De] P. Deligne: La conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S. 52 (1981), 313–428.

[JR] B. Jacob, M. Rost: Degree four cohomological invariants for quadratic forms, Invent. Math. 96 (1989), 551–570.

[Ja 1] U. Jannsen: On the ℓ–adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, in Galois Groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publications, Springer 1989, 315–360.

[Ja 2] U. Jannsen: On the Galois cohomology of ℓ–adic representation attached to varieties over local or global fields, Sem. de Th. de Nombres Paris 18986–87, Progress in Math. 75, Birkhäuser 1989, 165–182.

[Ka] K. Kato: A Hasse principle for two dimensional global fields, with an appendix by J.–L. Colliot–Thélène, J. reine angew. Math. 366 (1986), 142–183.

[La] T.Y. Lam: The Algebraic Theory of Quadratic Forms, Benjamin 1973.

[Mi 1] J. Milne: Etale Cohomology, Princeton University Press 1980.

[Mi 2] J. Milne: Arithmetic Duality Theorems, Perspectives in Mathematics 1, Academic Press 1986.

[MS] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin: On the norm residue homomorphism of degree three, LOMI preprint E–9–86, Leningrad 1986.

[Mu] D. Mumford: Abelian Varieties, Tata Institute Studies in Mathematics, Oxford University Press 1974.

[Nev] J. Neukirch: Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, Inventiones Math. 21 (1979), 59–116.

[Se 1] J.–P. Serre: Groupes algébriques et corps de classes, Hermann 1959.

[Se 2] J.–P. Serre: Sur les groupes de congruences des varietés abéliennes, Izv. Akad. Nauk. SSSR 28 (1964), 3–18; II, ibid. 35 (1971), 731–737.

[Wei] A. Weil: Courbes algébriques et variétés abéliennes, Hermann 1948/1971.

Uwe Jannsen
Max–Planck–Institut für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
5300 Bonn 3

Germany