Opérations sur les algèbres de Hopf

F. Patras

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

MPI/92-36

Opérations sur les algèbres de Hopf.

F. Patras

Ce travail reprend et développe les résultats du premier chapitre de [P].

La théorie de Galois classique montre comment une extension de corps K'/K peut être décrite par l'intermédiaire des K-automorphismes de K'. Nous allons voir ici comment décrire, au moins partiellement, la structure d'une algèbre de Hopf graduée H, commutative et connexe (resp. cocommutative et connexe) aux termes de propriétés d'éléments du "groupe de Galois" des K-automorphismes d'algèbre (resp. de coalgèbre) de H. Nous verrons en particulier comment obtenir un décomposition *en poids* de toute algèbre de Hopf de ce type.

Cet article est le résultat de recherches entreprises sous la direction de Pierre Cartier. Ses indications et ses conseils sont à l'origine de ce travail. Je souhaite une fois de plus l'en remercier.

Le plan est le suivant:

1. Opérations sur les algèbres de Hopf.
2. Logarithme et représentations unipotentes.
3. Opérations en caractéristique nulle.
4. Structure des algèbres de Hopf graduées en caractéristique nulle.
5. Algèbres de Hopf tensorielles.
6. Opérations et décompositions en caractéristique p.

1. Opérations sur les algèbres de Hopf.

Pour ce qui est des définitions et propriétés élémentaires des algèbres de Hopf, nous renvoyons à [M-M]. Les algèbres de Hopf que nous considérons sont, par hypothèse, associatives et coassociatives, mais pas nécessairement graduées.

Dans ce chapitre, H désigne une K-algèbre de Hopf de produit Π, de coproduit Δ, de morphisme unité η, de morphisme coünité ϵ, où K est un corps commutatif. On note I le morphisme identité de H.

Si f et g sont deux endomorphismes linéaires de H (compatibles avec la graduation si H est une algèbre de Hopf graduée), on appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$ le morphisme:

$$f * g := \Pi \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Ce produit munit l'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des endomorphismes linéaires de H d'une structure d'algèbre associative unitaire, d'unité $\eta \circ \epsilon$.

Définition 1,1. *On appellera k-ième opération caractéristique sur H, et on notera Ψ^k (resp. Ψ^0) l'endomorphisme linéaire de H défini par:*

$$\Psi^k := I * \dots * I = I^{*k}$$

(resp. $\Psi^0 := \eta \circ \epsilon$).

On remarquera que, si on note $\Pi^{[k]}$ (resp. $\Delta^{[k]}$) l'itérée k-ième du produit (resp. du coproduit), on a:

$$\Pi^{[k]} : H^{\otimes k} \longrightarrow H, \quad \Delta^{[k]} : H \longrightarrow H^{\otimes k},$$

et:

$$\Psi^k = \Pi^{[k]} \circ \Delta^{[k]}.$$

Ces opérations sont appelées dans [P] "opérations d'Adams". La terminologie "opérations caractéristiques" de [G-S] semble à l'usage plus pertinente, aussi c'est cette dernière que nous avons adoptée ici.

Proposition 1,2. *Les opérations caractéristiques satisfont aux relations:*

$$\Psi^k * \Psi^l = \Psi^{k+l}.$$

Proposition 1,3. *[G-S]. Si H est une algèbre de Hopf commutative (resp. co-commutative), les opérations caractéristiques sont des endomorphismes d'algèbre (resp. de coalgèbre) de H et satisfont en outre aux relations:*

$$\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k \cdot l}.$$

Corollaire 1,4. *Dans le cas particulier où le corps K est de caractéristique nulle et où H est une algèbre de Hopf commutative non graduée, les opérations caractéristiques définissent sur H une structure de λ-anneau.*

D'après 1,3., les opérations caractéristiques sont, sous les hypothèses du corollaire 1,4., des endomorphismes d'algèbre commutative de H satisfaisant aux relations:

$$\Psi^1 = Id; \quad \Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k \cdot l}.$$

Ces opérations sont donc des opérations d'Adams au sens de la théorie des λ-anneaux [A-T]. Les λ-opérations pour la structure de λ-anneau associée à ces opérations d'Adams sont définies par récurrence par les relations:

$$(-1)^{k+1} \cdot k \cdot \lambda^k = \Psi^k - \Psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \Psi^1 \cdot \lambda^{k-1}.$$

2. Logarithme et représentations unipotentes.

Un monoïde est, par définition, un ensemble muni d'une loi de composition associative et unitaire. Dans tout ce chapitre, M désigne un monoïde d'unité notée 1 et K un corps commutatif de caractéristique nulle ou *au moins égale à k*, où k est un entier fixé.

On appellera *K-représentation* de M tout morphisme d'ensemble de M dans une K-algèbre unitaire $(A, +, \times)$, qui soit un morphisme de monoïde de M dans $(A, \times)$. Une K-représentation ρ est dite *unipotente de rang k* si on a pour tout $m \in M$ l'égalité suivante dans A:

$$(\rho(m) - \rho(1))^k = 0.$$

On ne demande pas ici que k soit minimal pour cette propriété.

Il va de soi que toute représentation linéaire unipotente de M dans un K-espace vectoriel V définit une K-représentation unipotente de M dans l'algèbre des endomorphismes linéaires de V.

Remarquons tout d'abord que toute K-représentation

$$\rho : M \longrightarrow A$$

induit un morphisme d'algèbres:

$$\rho : K[M] \longrightarrow A.$$

Le produit de l'algèbre $K[M]$ et le coproduit défini par l'application $x \mapsto x \otimes x$ permettent de munir $K[M]$ d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative non graduée. L'algèbre de Hopf duale [S] est commutative; notons-la $K[M]^\circ$. Si K est un corps de caractéristique nulle, les endomorphismes caractéristiques de $K[M]^\circ$ permettent de munir cette algèbre de Hopf d'une structure de λ-anneau (corollaire 1,4.).

Les constructions qui vont suivre sur les représentations unipotentes sont en un certain sens duales de celles que l'on peut effectuer sur le λ-anneau $K[M]^\circ$ dans le cas où le corps de base est de caractéristique nulle.

Nous supposerons donnée une représentation unipotente de rang k:

$$\rho : M \longrightarrow A.$$

Nous noterons log_k (resp. exp_k) le morphisme d'ensemble de M dans A défini par:

$$log_k(x) = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} \frac{(\rho(x) - 1)^n}{n},$$

(resp. l'endomorphisme -non linéaire- de A défini par:

$$exp_k(y) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{y^n}{n}.)$$

Lemme 2,1. *On a:*

$$exp_k \circ log_k = \rho.$$

Le lemme résulte immédiatement de ce que ρ est une représentation unipotente de rang k et des propriétés des morphismes *log* et *exp*.

Définition 2,2. *Si $i < k$, on appellera projecteur de poids i et on notera ε^i le morphisme de M dans A défini par:*

$$\forall x \in M,\ \varepsilon^i(x) = \frac{(log_k x)^i}{i!};$$

avec $\varepsilon^0(x) = 1\ \forall x \in M$.

Notons maintenant Φ^n le n-ième endomorphisme caractéristique de l'algèbre de Hopf cocommutative $K[M]$.

Par définition des endomorphismes caractéristiques, on a:

$$\Phi^n(x) = x^n \quad \forall x \in M.$$

Proposition 2,3. *Les endomorphismes caractéristiques de $K[M]$ et les projecteurs de poids i associés à la représentation unipotente ρ de rang k sont liés par les relations:*

$$\rho \circ \Phi^n = \sum_{i=0}^{k-1} n^i \cdot \varepsilon^i.$$

La proposition résulte immédiatement des propriétés des morphismes *log* et *exp*.

Nous appellerons "décomposition en poids" la décomposition $\rho(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i(x)$.

3. Opérations en caractéristique nulle.

Les résultats et méthodes des paragraphes 3 et 4 sont, à leur présentation près, ceux de [P], chapitre I.

On note H une algèbre de Hopf graduée, commutative ou cocommutative connexe sur un corps K de caractéristique nulle. L'ensemble E des endomorphismes caractéristiques Ψ^k de H est un monoïde pour le produit de convolution, d'après 1,2.

Notons $\mathcal{L}(H)_n$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\bigoplus_{i=0}^{n} H_i$ compatibles à la graduation, où H_i désigne la composante de degré i de H. Notons ρ_n l'homomorphisme de restriction de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)_n$.

L'ensemble $\mathcal{L}(H)_n$ muni du produit de convolution est une algèbre associative unitaire, d'unité le morphisme $\rho_n(\eta \circ \epsilon)$. Nous noterons encore ρ_n la K-représentation canonique de E dans $\mathcal{L}(H)_n$.

Lemme 3,1. *La K-représentation ρ_n est unipotente de rang $n+1$.*

Le lemme résulte de l'hypothèse de connexité effectuée sur H.

Sous cette hypothèse, on a en effet: $\rho_0(\Psi^k - \Psi^0) = 0$ pour tout k. On a par ailleurs:

$$[\rho_n(\Psi^k - \Psi^0)]^{*(n+1)} = \rho_n[\Pi^{[n+1]} \circ (\Psi^k - \Psi^0)^{\otimes n+1} \circ \Delta^{[n+1]}].$$

La restriction de $\Delta^{[n+1]}$ à H_m est à valeurs dans $\sum\limits_{i_1,\dots,i_{n+1}} H_{i_1} \otimes \dots \otimes H_{i_{n+1}}$, où $(i_1, \dots, i_{n+1})$ parcourt l'ensemble des $(n+1)$-uplets de somme m. Le lemme résulte alors de ce que $\rho_0(\Psi^k - \Psi^0) = 0$ et de ce que, si $m \leq n$, pour tout tel $(n+1)$-uplet, il existe au moins un coefficient j tel que $i_j = 0$.

Le point délicat pour l'étude de la K-représentation unipotente ρ_n est que deux structures d'algèbre de Hopf apparaissent simultanément: on a d'une part l'algèbre de Hopf H, graduée, connexe, commutative ou cocommutative, dont les endomorphismes caractéristiques sont les Ψ^k et, d'autre part, l'algèbre de Hopf $K[E]$, commutative (puisque E est commutatif) et cocommutative, dont nous noterons Φ^k les endomorphismes caractéristiques, et qui est, en tant que K-espace vectoriel, l'espace vectoriel sur les endomorphismes caractéristiques de H. On remarquera que $\Psi^k = \Phi^k(I)$.

Nous noterons ε_n^i le projecteur de poids i associé à la K-représentation unipotente ρ_n (déf. 2,2.). Le morphisme ε_n^i est donc un morphisme de E dans $\mathcal{L}(H)_n$. On notera enfin e_n^i (resp. Ψ_n^k) la restriction de $\varepsilon_n^i(I)$ (resp. de Ψ^k) à H_n.

Proposition 3,2. *On a:*

$$\Psi_n^k = \sum_{i=1}^{n} k^i \cdot e_n^i.$$

La proposition résulte de 2,3. et de ce que $\rho_n(\Psi^k) = \rho_n(\Phi^k(I))$.

Définition 3,3. *On appellera projecteur de poids i associé à l'algèbre de Hopf H et on notera e^i l'élément de $\mathcal{L}(H)$ dont la restriction à H_n est donnée par le morphisme e_n^i.*

Proposition 3,4. *Les projecteurs de poids i associés à H satisfont aux relations suivantes:*

$$e^i \circ e^j = \delta_j^i \cdot e^i,$$

où on note δ_j^i le symbole de Kronecker, et:

$$e^i * e^j = \binom{i}{i+j} \cdot e^{i+j}.$$

La proposition résulte du corollaire 3,2 et des propositions 1,2. et 1,3., par identification des coefficients polynomiaux dans les formules $\Psi_n^k * \Psi_n^l = \Psi_n^{k+l}$ et $\Psi_n^k \circ \Psi_n^l = \Psi_n^{k \cdot l}$.

Théorème 3,5. *Soit H une algèbre de Hopf graduée, commutative ou cocommutative et connexe sur un corps K de caractéristique nulle. Cette algèbre de Hopf se décompose en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques Ψ^k.*

Plus précisément, si $n > 0$, il existe une famille de projecteurs orthogonaux $(e_n^i)_{i\in[1,n]}$ dans $End_K(H_n)$ tels que:

$$H_n = \bigoplus_{i=1}^{n} H_n^{(i)},$$

où $H_n^{(i)} := e_n^i \cdot H_n$. En outre Ψ_n^k opère comme k^i sur $H_n^{(i)}$.

On posera: $H^{(i)} := \bigoplus_{n\in N} H_n^{(i)}$.

Les projecteurs e_n^i sont les composantes de degré n des endomorphismes linéaires de H définis par les séries formelles:

$$e^i := \frac{(log\ I)^{*i}}{i!}.$$

Le théorème résulte des différents résultats établis précédemment. La série formelle e^i se réduit à une somme finie de termes en chacun des degrés et est donc convergente.

Corollaire 3,6. *Si une algèbre de Hopf graduée connexe H est commutative (resp. cocommutative), la décomposition du théorème 3,5. permet de munir H d'une structure d'algèbre (resp. de coalgèbre) bigraduée.*

Le corollaire résulte de ce que les endomorphismes caractéristiques Ψ^k sont des endomorphismes d'algèbre (resp. de coalgèbre) de H (Proposition 1,3.).

Définition 3,7. *Soit ζ un élément de K^*. On appellera ζ-ième opération caractéristique généralisée sur H et on notera Ψ^ζ l'élément de $\mathcal{L}(H)$ dont la restriction à $H_n^{(i)}$ est la multiplication par ζ^i.*

Il va de soi que, si ζ est entier, Ψ^ζ n'est autre que la ζ-ième opération caractéristique usuelle sur H. Si H est commutative (resp. cocommutative), Ψ^ζ est un endomorphisme d'algèbre (resp. de coalgèbre) de H d'après 3,6.

Proposition 3,8. *Les opérations caractéristiques généralisées satisfont aux relations:*

$$\Psi^{\zeta} \circ \Psi^{\gamma} = \Psi^{\zeta \cdot \gamma}$$

$$\Psi^{\zeta} * \Psi^{\gamma} = \Psi^{\zeta + \gamma}.$$

La première égalité est immédiate.

La seconde est légèrement plus délicate. Par définition, on a:

$$\Psi^{\zeta} * \Psi^{\gamma} = \Pi \circ (\Psi^{\zeta} \otimes \Psi^{\gamma}) \circ \Delta;$$

où Δ et Π sont des morphismes linéaires, respectivement de H dans $H \otimes H$ et de $H \otimes H$ dans H.

Le morphisme $\Psi_n^{\zeta} * \Psi_n^{\gamma}$ s'interprète donc comme un polynôme de degré au plus n en les variables ζ et γ, à coefficients dans $\mathcal{L}(H)_n$. Il s'agit de vérifier que ce polynôme n'est autre que celui définissant $\Psi_n^{\zeta+\gamma}$. Il suffit finalement de vérifier cette identité pour ζ et γ entiers. La proposition 1.3. permet de conclure.

Corollaire 3,9. *Pour tout $\zeta \in K^*$, Ψ^{ζ} est un automorphisme d'algèbre (resp. de coalgèbre) de H si H est commutative (resp. cocommutative).*

Le corollaire résulte de 3,8. et de ce que $\Psi^1 = I$.

Pour finir cette étude des propriétés des opérations caractéristiques sur les algèbres de Hopf graduées commutatives ou cocommutatives, étudions leur comportement au regard de la dualité.

Considérons pour cela une algèbre de Hopf H, commutative (resp. cocommutative) et connexe sur un corps de caractéristique nulle. On supposera H de type fini (i.e. on supposera que chacune de ses composantes H_n est un K-espace vectoriel de dimension finie). Il est alors possible d'associer à H une algèbre de Hopf duale $H^\star$, dont les composantes sont les espaces vectoriels $H_n^\star$ (où $H_n^\star$ est le dual de H_n), le morphisme produit étant l'adjoint du morphisme coproduit sur H et le morphisme coproduit l'adjoint du morphisme produit sur H. Cette algèbre de Hopf $H^\star$ est cocommutative (resp. commutative) connexe.

Si l'on remarque que les opérations caractéristiques sur H et $H^\star$ sont deux à deux adjointes, la proposition 3,10. est immédiate.

Proposition 3,10. *Soit H une algèbre de Hopf graduée commutative ou cocommutative connexe de type fini sur un corps K de caractéristique nulle et $H^\star$ l'algèbre de Hopf duale. Les opérations caractéristiques, les opérations caractéristiques généralisées et les projecteurs de poids i sur H et $H^\star$ sont alors deux à deux adjoints et on a:*

$$(H^{(i)})^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} H^{\star(j)}.$$

4. Structure des algèbres de Hopf graduées en caractéristique nulle.

Les résultats de [M-M] permettent de décrire la structure d'algèbre graduée des algèbres de Hopf graduées commutatives ou cocommutatives et connexes. La question se pose de chercher à relier ces résultats à ceux du paragraphe 3. Les constructions qui suivent sont décrites de façon détaillée dans [P]. La plupart du temps, elles ne présentent pas de difficultés particulières, aussi nous nous contenterons ici d'indiquer les résultats auxquels on aboutit, en esquissant seulement les arguments des preuves.

Rappelons que, si H est une algèbre de Hopf, sa partie primitive, *Prim* H est l'ensemble des éléments de H satisfaisant à:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Lemme 4,1. *Soit H une algèbre de Hopf graduée cocommutative connexe sur un corps de caractéristique nulle, on a alors:*

$$Prim\ H = H^{(1)}.$$

Rappelons par ailleurs [M-M] que, sous les hypothèses du lemme 4,1., si on note $[\ ,\ ]$ le crochet de Lie gradué sur H induit par la structure d'algèbre graduée de H, *Prim* H est une sous-algèbre de Lie graduée de $(H, [,])$. En outre, H, considérée comme algèbre graduée est alors isomorphe à l'algèbre enveloppante de *Prim* H.

Proposition 4,2. *Si H est une algèbre de Hopf graduée cocommutative connexe sur un corps de caractéristique nulle, H est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie graduée $H^{(1)}$.*

La proposition 4,2. sur la structure des algèbres de Hopf cocommutatives connexes sur un corps de caractéristique nulle résulte des résultats de [M-M] que nous avons rappelés.

Elle peut être démontrée en utilisant seulement les propriétés des opérations caractéristiques, sans avoir recours aux méthodes de [M-M]. Les détails de cette démonstration sont laissés en exercice, on peut les trouver dans [P].

Des résultats symétriques sont obtenus dans le cas commutatif. On a en particulier la proposition 4,3.

Proposition 4,3. *Soit H une algèbre de Hopf graduée commutative connexe sur un corps de caractéristique nulle; alors H est isomorphe en tant qu'algèbre graduée, à l'algèbre graduée commutative libre sur $H^{(1)}$.*

Cette proposition peut se déduire des théorèmes de structure de [M-M] ou bien, là encore, directement des résultats du paragraphe 3, sans avoir recours aux méthodes de [M-M].

5. Algèbres de hopf tensorielles.

A titre d'exemple, nous allons voir comment les constructions que nous venons d'effectuer permettent de décrire les structures d'algèbres de Hopf associées à l'algèbre tensorielle. On renvoie à [R] et [G-S] comme références sur le sujet.

Considérons une famille d'objets $X = \{x_1, ..., x_n\}$. On notera $T(X)$ (resp. $Tg(X)$) l'algèbre tensorielle sur K associée à X, où K est un corps de caractéristique nulle (resp. l'algèbre tensorielle considérée comme algèbre graduée).

Il existe sur l'algèbre $T(X)$ (resp. sur l'algèbre graduée $Tg(X)$) une unique structure d'algèbre de Hopf cocommutative (resp. cocommutative au sens gradué) pour laquelle les éléments $x_1, ..., x_n$ soient primitifs. Cela résulte immédiatement de ce que ces éléments engendrent l'algèbre $T(X)$ (resp. $Tg(X)$).

On remarquera qu'il est possible de considérer l'algèbre de Hopf $T(X)$ comme une algèbre de Hopf graduée *paire* pour laquelle les éléments de X sont de degré 2. Cette remarque permet de lui appliquer les résultats des paragraphes 3 et 4. On notera également que l'algèbre de Hopf duale (au sens gradué) de l'algèbre $T(X)$ est munie d'une structure de λ-anneau par l'intermédiaire de ses opérations caractéristiques (corollaire 1,4.).

Il est possible d'expliciter une formule pour les coproduits sur les algèbres de Hopf $T(X)$ et $Tg(X)$ en termes de battages. Le coproduit sur $Tg(X)$ est par exemple donné par:

$$\Delta(x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_k}) =$$

$$\sum_{p+q=k} \sum_{\beta} sgn(\beta)(x_{i_{\beta(1)}} \otimes ... \otimes x_{i_{\beta(p)}}) \otimes (x_{i_{\beta(p+1)}} \otimes ... \otimes x_{i_{\beta(p+q)}});$$

où β parcourt l'ensemble des battages d'indices p et q.

On rappelle qu'un battage d'indices p et q est un élément σ de S_{p+q} tel que:

$$\sigma^{-1}(1) < ... < \sigma^{-1}(p)$$

et

$$\sigma^{-1}(p+1) < ... < \sigma^{-1}(p+q).$$

Faisons maintenant opérer S_n sur les produits tensoriels $x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_n}$ par:

$$\sigma(x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_n}) = x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes ... \otimes x_{i_{\sigma^{-1}(n)}}.$$

Si l'on applique à l'algèbre de Hopf cocommutative graduée $Tg(X)$ (resp. graduée paire $T(X)$) les différents résultats des chapitres 3 et 4, il est intéressant de remarquer que les restrictions en degré n (resp. $2n$) des opérations caractéristiques et des projecteurs de poids i de cette algèbre de Hopf peuvent s'interpréter comme des éléments de l'algèbre $Q[S_n]$ grâce à la description des coproduits en termes de battages.

On notera e^i (resp. f^i) les projecteurs de poids i associés à l'algèbre de Hopf graduée $Tg(X)$ (resp. à l'algèbre de Hopf graduée *paire* $T(X)$). On remarquera que les opérateurs de poids i sur $T(X)$ sont nuls en degré $2n$ dès que $i > n$. On notera enfin par abus $T_n(X)$ *la composante de degré* $2n$ de l'algèbre de Hopf $T(X)$ (par contre $Tg_n(X)$ désigne évidemment la partie de degré n de $Tg(X)$. Le fait que l'on soit amené, pour pouvoir utiliser les résultats de 3 et 4, à munir $T(X)$ d'une structure d'algèbre graduée *paire* conduit à de telles ambiguïtés dans les notations.)

Proposition 5,1. *La famille de projecteurs de poids i, $(e^i_n)_{1\leq i\leq n}$, sur $Tg_n(X)$ (resp. $(f^i_n)_{1\leq i\leq n}$ sur $T_n(X)$) s'interprète comme une famille d'idempotents orthogonaux de somme 1 de l'algèbre $Q[S_n]$.*

Les idempotents e^i_n et f^i_n de l'algèbre $Q[S_n]$ se déduisent les uns des autres par l'involution d'algèbre de $Q[S_n]$:

$$Q[S_n] \longrightarrow Q[S_n]$$

$$\sigma \longmapsto sgn(\sigma)\cdot\sigma.$$

Tous ces résultats ne présentent pas de difficulté et sont obtenus facilement en explicitant les formules pour le produit et le coproduit dans $T(X)$ et $Tg(X)$ en termes d'opérations de battage.

On trouvera dans [R] et [L] une description combinatoire explicite de ces idempotents en termes de descentes.

La structure d'algèbre associative de $T(X)$ (resp. d'algèbre graduée de $Tg(X)$) induit sur $T(X)$ (resp. $Tg(X)$) une structure d'algèbre de Lie (resp. d'algèbre de Lie graduée). Par définition, l'algèbre de Lie libre (resp. graduée) est la plus petite sous-algèbre de Lie (resp. graduée) de $T(X)$ (resp. de $Tg(X)$) contenant X.

Lemme 5,2. *La partie primitive de $T(X)$ (resp. de $Tg(X)$) est l'algèbre de Lie libre (resp. graduée).*

Le lemme 5,2. est classique, il résulte du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et de la proposition 4,2.

Nous allons voir comment ces constructions permettent par exemple de généraliser au cas gradué un théorème de Ree (cité dans [R], introduction).

On note $Tg^*(X)$ l'algèbre de Hopf graduée commutative duale (au sens gradué) de $Tg(X)$. On notera $x^*_{i_1}\otimes\ldots\otimes x^*_{i_k}$ les éléments de la base duale à la base $x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_k}$ de $Tg(X)$.

Considérons alors le produit tensoriel complété:

$$T := Tg^*(X)\hat{\otimes}Tg(X);$$

et considérons dans $\mathcal{T}$ l'élément:

$$T := \sum_{(i_1,\dots,i_k)} (x^\star_{i_1} \otimes \dots \otimes x^\star_{i_k}) \otimes (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k});$$

où k parcourt N^* et $(i_1, \dots, i_k)$, l'ensemble des familles à k éléments d'éléments de l'ensemble [1,n]. Posons enfin: $S := 1 \otimes 1 + T$.

Le logarithme de S est bien défini dans l'algèbre graduée $\mathcal{T}$, la somme des termes étant finie en chacun des degrés. On peut le décomposer sous la forme:

$$log\ S = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} T^m$$

$$= \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1,\dots,i_k} (x^\star_{i_1} \otimes \dots \otimes x^\star_{i_k}) \otimes Q_{i_1,\dots,i_k},$$

où $Q_{i_1,\dots,i_k}$ est un élément de degré k de $Tg(X)$.

Proposition 5,3. *Pour tout k-uplet ordonné $(i_1, \dots, i_k)$ d'éléments de $[1,n]$, l'élément $Q_{i_1,\dots,i_k}$ de degré k de $Tg(X)$ appartient à $Prim\ Tg(X)$, l'algèbre de Lie libre graduée sur X.*

Plus précisément, on a:

$$Q_{i_1,\dots,i_k} = e^1_k(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}).$$

Il s'agit de prouver que:

$$Q_{i_1,\dots,i_k} = log(I)(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}),$$

où $log(I)$ désigne le logarithme du morphisme identité de l'algèbre associative unitaire $\mathcal{L}(Tg(X))$; soit encore que:

$$Q_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (I - \eta \circ \epsilon)^{*j} (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k})$$

où η et ϵ sont les morphismes unité et coünité de $Tg(X)$.

Supposons $m \leq k$ et calculons le coefficient $Q^{(m)}_{i_1,\dots,i_k}$ dans la décomposition:

$$T^m = \sum_{l \geq m} \sum_{(j_1,\dots,j_l)} (x^\star_{j_1} \otimes \dots \otimes x^\star_{j_l}) \otimes Q^{(m)}_{j_1,\dots,j_l}.$$

On note $\Delta^{[m]}$ (resp. $\Delta^{\star[m]}, \dots$) l'itérée m-ième du coproduit dans $Tg(X)$ (resp. du produit dans $Tg^\star(X)$, etc...).

Par définition du produit dans $Tg^\star(X)$ et du coproduit dans l'algèbre de Hopf duale $Tg(X)$, $x^\star_{i_1} \otimes \dots \otimes x^\star_{i_k}$ apparaît dans la décomposition canonique dans $Tg^\star(X)$ de:

$$\Delta^{\star[m]}[(x^\star_{\alpha_1(1)} \otimes \dots \otimes x^\star_{\alpha_1(l_1)}) \otimes \dots \otimes (x^\star_{\alpha_m(1)} \otimes \dots \otimes x^\star_{\alpha_m(l_m)})]$$

si et seulement si le produit tensoriel:

$$(x_{\alpha_1(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\alpha_1(l_1)}) \otimes \ldots \otimes (x_{\alpha_m(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\alpha_m(l_m)})$$

apparaît affecté du même coefficient dans la décomposition de $\Delta^{[m]}(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k})$ dans la base canonique de $Tg(X)^{\otimes k}$.

On a finalement:

$$\begin{aligned} Q^{(m)}_{i_1,\ldots,i_k} &= \Pi^{[m]} \circ (I - \eta \circ \epsilon)^{\otimes m} \circ \Delta^{[m]}(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) \\ &= (I - \eta \circ \epsilon)^{*m}(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}).\ CQFD. \end{aligned}$$

6. Opérations en caractéristique p.

Ce paragraphe étudie le comportement des opérations caractéristiques en caractéristique p. On notera H une algèbre de Hopf graduée de type fini, commutative ou cocommutative connexe sur un corps commutatif K de caractéristique p.

On note, comme dans 3, E le monoïde commutatif des endomorphismes caractéristiques de H, ρ_n la K-représentation canonique de E dans $\mathcal{L}(H)_n$ et Ψ^k_n la restriction de Ψ^k à H_n, composante de degré n de H. On note $H^\bullet$ l'idéal d'augmentation de H et $Q(H)$ le K-espace vectoriel des indécomposables [M-M]:

$$Q(H) := H^\bullet / \Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet).$$

Lemme 6,1. *La K-représentation ρ_n est unipotente de rang $n+1$.*

L'argument est celui du lemme 3,1.

Proposition 6,2. *Soit H une algèbre de Hopf graduée, commutative ou cocommutative connexe sur un corps de caractéristique p. Pour $n < p$ les composantes H_n de cette algèbre de Hopf se décomposent en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques.*

Plus précisément, il existe une famille de projecteurs orthogonaux $(e^i_n)_{i\in[1,n]}$ dans $End_K(H_n)$ telle que:

$$H_n = \bigoplus_{i=1}^{n} H^{(i)}_n,$$

où $H^{(i)}_n := e^i_n \cdot H_n$. En outre, Ψ^k_n opère comme k^i sur $H^{(i)}_n$.

La vérification de cette proposition est identique à celle du théorème 3,5.

Dès que n est supérieur ou égal à p, on ne dispose plus du logarithme pour étudier la K-représentation unipotente ρ_n.

L'étude des propriétés des algèbres de Hopf de caractéristique $p \neq 0$ en degrés supérieurs ou égaux à p passe vraisemblablement par une étude détaillée des propriétés des K-représentations ρ_n, $n \geq p$ (propriétés associées à celles de l'algèbre de Hopf commutative et cocommutative $K[E]$).

Nous n'entreprendrons pas ici une telle étude, et nous nous contenterons de montrer, en développant certains résultats de [K], comment il est malgré tout possible d'exhiber en degrés supérieurs ou égaux à p une décomposition "en poids" de l'algèbre de Hopf H.

Lemme 6,3. *Pour tout k, $k \not\equiv 0$ $[p]$, le morphisme $\Psi_n^{k^{p^{n-1}}}$ satisfait à l'égalité:*

$$(\Psi_n^{k^{p^{n-1}}})^{p-1} = \rho_n(I).$$

Nous poserons: $\Psi_n^{k,n} := \Psi_n^{k^{p^{n-1}}}$.

Le lemme se démontre par récurrence sur n.

Comme les opérations caractéristiques sur une algèbre de Hopf cocommutatives sont adjointes aux opérations correspondantes sur l'algèbre de Hopf commutative duale, il suffit de prouver le lemme dans le cas où H est commutative.

Supposons donc H commutative et, par récurrence, supposons que

$$(\Psi_{n-1}^{k,n-1})^{p-1} = \rho_{n-1}(I).$$

Comme les endomorphismes caractéristiques de H sont des endomorphismes d'algèbre, on a: $(\Psi_n^{k,n-1})^{p-1} = \rho_n(I)$ sur $\Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet) \cap H_n$.

Par ailleurs, on vérifie immédiatement que, pour tout entier l, la restriction de Ψ^l à $Q(H)$ est bien définie et opère sur ce K-espace vectoriel comme $\hat{l}$, où on note $\hat{l}$ la classe de l dans le corps à p éléments F_p.

Considérons maintenant $x \in H_n$. On a:

$$\Psi_n^{k,n-1}(x) = \hat{k} \cdot x + y,$$

où $y \in \Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet)$; d'où:

$$(\Psi_n^{k,n-1})^{p-1}(x) = \hat{k}^{p-1} \cdot x + z = x + z,$$

où z est un élément de $\Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet) \cap H_n$.

Finalement, on a:

$$((\Psi_n^{k,n-1})^{p-1})^p(x) = x + \hat{p} \cdot z = x. \quad CQFD.$$

Proposition 6,4. *Soit $k \in N$, $k \not\equiv 0$ $[p]$, $k \not\equiv 1$ $[p]$. Soit H une algèbre de Hopf graduée de type fini, commutative ou cocommutative, connexe sur un corps K de caractéristique p. L'algèbre de Hopf H se décompose en somme directe:*

$$H = H^{(1)} \oplus \ldots \oplus H^{(p-1)},$$

où $H_n^{(i)} := H_n \cap H^{(i)}$ est le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre $\hat{k}^i$ de l'opération caractéristique $\Psi^{k^{p^{n-1}}}$.

Si H est commutative (resp. cocommutative), cette décomposition est compatible à la structure d'algèbre (resp. de coalgèbre) graduée de H, au sens où:

$$\Pi : H^{(i)} \otimes H^{(j)} \longrightarrow H^{([i+j])}$$

(*resp.:*

$$\Delta : H^{(i)} \longrightarrow \bigoplus_{[j+k]=i} H^{(j)} \otimes H^{(k)}),$$

où si $(a,b) \in [1,p-1]^2$, *on pose* $[a+b] = a+b$ *si* $a+b \in [1,p-1]$ *et* $[a+b] = a+b-p+1$ *sinon.*

Le polynôme minimal de $\Psi_n^{k,n}$ divise en effet d'après 6,3 le polynôme $\zeta^{p-1}-1$, scindé dans F_p, dont les racines sont les éléments de F_p^*. Ces racines sont simples, $\Psi_n^{k,n}$ est donc diagonalisable. Le reste de la proposition en résulte immédiatement.

Bibliographie.

[A-T] M.F. Atiyah et D.O. Tall; Group representations, λ-rings and the J-homomorphism. *Topology 8,* (1969), 253-297.

[G-S] M. Gerstenhaber et S.D. Schack; The shuffle-bialgebra and the cohomology of commutative algebras. *J. of Pure and Applied Alg. 70,* (1991), 263-272.

[K] R.M. Kane; *The homology of Hopf spaces.* North-Holland Math. Lib. (1988).

[L] J.L. Loday; Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives. *Invent. Math. 96,* (1989), 205-230.

[M-M] J.W. Milnor et J.C. Moore; On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. 81,* (1965), 211-264.

[P] F. Patras; *Homothéties simpliciales.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Janvier 1992.

[R] C. Reutenauer; Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm and representations of the symetric group whose orders are the Stirling numbers. *Colloque "Combinatoire Enumérative", Montréal Mai 1985.* Springer lect. Notes in Math. 1234 (1986), 267-284.

[S] M.E. Sweedler; *Hopf algebras.* Benjamin (1969).