

Singularitäten,  
Kac - Moody - Liealgebren,  
assoziierte Gruppen  
und Verallgemeinerungen

von  
Peter Slodowy

84 54

Mathematisches Institut  
der Universität Bonn

und

MPI für Mathematik/SFB 40  
Gottfried-Claren-Str. 26  
D-5300 Bonn 3

MPI/SFB 84-54

Singularitäten,  
Kac - Moody - Liealgebren,  
assozierte Gruppen  
und Verallgemeinerungen

Habilitationsschrift

zur Erlangung der

venia legendi

im Fach Mathematik

an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

von

Peter Slodowy

E I N L E I T U N G

Die vorliegende Arbeit handelt, wie der Titel zum Ausdruck bringt, von Singularitäten und gewissen Liealgebren sowie dazu assoziierten Gruppen. Sie ist aus der Überzeugung entstanden und versucht zu zeigen, daß die betreffenden Objekte durch mathematische Konstruktionen eng miteinander verknüpft sind. Ausgangspunkt und Modellfall zugleich ist dabei ein Satz von E. Brieskorn aus dem Jahre 1970 (vgl. [Brieskorn<sub>4</sub>] und Kapitel 2), der zeigt, wie die semiuniverselle Deformation  $\psi : Y \rightarrow U$  einer sogenannten einfachen Flächensingularität  $X$  vom Typ  $A_\ell$ ,  $D_\ell$  oder  $E_\ell$  in den adjungierten Quotienten  $\chi : \underline{\mathfrak{g}} \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}/W$  der einfachen Liealgebra  $\underline{\mathfrak{g}}$  gleichen Typs eingebettet werden kann

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathfrak{g}} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \chi \\
 U & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathfrak{h}}/W
 \end{array}$$

(eine ähnliche Aussage gilt auch für den adjungierten Quotienten  $G \rightarrow T/W$  der zugehörigen einfach zusammenhängenden algebraischen Gruppe  $G$ ). Dieser Satz erklärte mit einem Schlage eine Vielzahl geometrischer Eigenschaften der einfachen Singularitäten, ihrer Auflösungen und Deformationen von einem Liealgebra- bzw. Liegruppen-theoretischen Standpunkt. Insbesondere lieferte er eine Identifikation des Basisraumes  $U$  der semiuniversellen Deformation  $\psi$  mit dem Quotienten  $\underline{\mathfrak{h}}/W$  einer Cartanunteralgebra  $\underline{\mathfrak{h}}$  von  $\underline{\mathfrak{g}}$  nach der natürlichen Aktion der Weylgruppe  $W$ , und eine Identifikation der in  $U$  enthaltenen, die Konfigurationen singulärer Punkte in den Fasern von  $\psi$  kontrollierenden Diskriminantenhyperfläche  $D$  mit dem Verzweigungs-

ort der verzweigten Überlagerung  $\underline{h} \rightarrow \underline{h}/W$ .

Diese Beschreibung des Paares  $(U, D)$ , die für sich nicht die volle Theorie der Lieschen Algebren und Gruppen sondern nur die in sich abgeschlossene Theorie der Wurzelsysteme und Weylgruppen erfordert, wurde seitdem zu einem erfolgreichen Paradigma bei den Untersuchungen der semiuniversellen Deformationen auch komplizierterer Singularitäten, so der einfach elliptischen Singularitäten ([Looijenga<sub>2,3</sub>], [Merindol], [Pinkham<sub>2</sub>]), der Spitzensingularitäten ([Looijenga<sub>5,6</sub>]) und anderer ([Knörrer], [Wirthmüller<sub>2,3</sub>])

Während bei den einfachen Singularitäten über deren Auflösung eine Beziehung zu Wurzelsystemen schon seit den Arbeiten von Du Val vor 50 Jahren besteht, treten "verallgemeinerte" Wurzelsysteme bei den komplizierteren (zweidimensionalen komplexen) Singularitäten (vollständiger Durchschnitte) nicht in Zusammenhang mit deren Auflösung auf, sondern mit deren Milnorgitter, d. h. der zweiten Homologiegruppe  $H_2(F, \mathbb{Z})$  einer glatten Faser  $F$  der semiuniversellen Deformation  $\psi : Y \rightarrow U$ . Die Rolle der Wurzeln spielen dabei die verschwindenden Zyklen, die der Weylgruppe spielt die algebraische Monodromiegruppe  $\Gamma$  der Singularität. Eine Beziehung zwischen der Basis  $U$  von  $\psi$  und dem Milnorgitter wird in den genannten Arbeiten im wesentlichen durch eine  $\Gamma$ -äquivariante Periodenabbildung

$$p : \tilde{U} \longrightarrow H^2(F, \mathbb{C})$$

vermittelt. Dabei ist  $\tilde{U}$  eine verzweigte  $\Gamma$ -Überlagerung der offenen Teilmenge  $U(\emptyset)$  von  $U$ , über der die Fasern von  $\psi$  höchstens einfache Singularitäten haben. Insbesondere ist  $U \setminus U(\emptyset)$  in der Diskriminante  $D$  enthalten. Sofern die Periodenabbildung genügend gute Eigenschaften hat, identifiziert sich  $U(\emptyset)$  mit dem Quotienten des Bildes  $p(\tilde{U})$  nach der Aktion

der Monodromiegruppe  $\Gamma$ . Das Problem der Rekonstruktion von  $D$  erscheint nun als das der Beschreibung einer gewissen partiellen Kompaktifizierung des Orbitraumes  $p(\tilde{U})/\Gamma$ . Außer in den oben schon genannten Fällen ist dieses Problem bisher nur noch für die sogenannten exzeptionellen unimodalen oder Dreieckssingularitäten erfolgreich gelöst worden (vgl. [Brieskorn<sub>6,8</sub>], [Looijenga<sub>7,9</sub>], wo auch die Problemstellung präziser dargestellt ist).

Insofern wir oben von "verallgemeinerten" Wurzelsystemen im Milnorgitter gesprochen haben, erhebt sich die Frage nach der Realisation solcher Systeme in tatsächlichen Liealgebren. Bis auf den Fall der einfachen Singularitäten, bei denen die verschwindenden Zykeln im Milnorgitter ein endliches Wurzelsystem vom Typ der Singularität bilden, war die Antwort auf diese Frage, strikt genommen, bisher nein. Weiter unten werden wir auf diesen Punkt zurückkommen. Hier geht es zunächst darum zu beschreiben, wie im Fall der einfach elliptischen und Spitzensingularitäten dennoch ein Zusammenhang mit der Theorie der sogenannten Kac-Moody-Liealgebren existiert. Im Fall dieser Singularitäten ist die Schnittform auf dem Milnorgitter entartet. Das Bild des Systems der verschwindenden Zykeln im Quotienten von  $H_2(F, \mathbb{Z})$  nach einem isotropen Rang-1-Untergitter erweist sich dann als das System der sogenannten reellen Wurzeln einer Kac-Moody-Liealgebra  $\underline{g}$ . Die von Looijenga gegebene Beschreibung des Basisraums  $U$  der semiuniversellen Deformation involviert allerdings nicht mehr den Orbitraum (eines Gebietes) einer Cartanunteralgebra  $\underline{h}$  von  $\underline{g}$  nach der Weylgruppe  $W$ , sondern nach einer durch Translationen erweiterten Weylgruppe  $\tilde{W}$ , die im wesentlichen isomorph zur Monodromiegruppe ist. In etwas anderer Formulierung identifiziert Looijenga den Basisraum  $U$  als partielle Kompaktifizierung  $\hat{J}/W$  des

$W$ -Orbitraum  $\mathcal{T}/W$  eines Gebietes  $\mathcal{T}$  innerhalb eines maximalen Torus  $T$  einer  $\mathfrak{g}$  zugeordneten Gruppe  $G$  ([Looijenga<sub>6</sub>]).

Der überwiegende Teil der Untersuchungen dieser Arbeit (Kapitel 5,6,7) ist durch die Frage motiviert worden, ob die der Kac-Moody-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  zugeordnete Gruppe  $G$ , oder vielmehr ein Teil  $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$  derselben, einen adjungierten Quotienten über  $\hat{\mathcal{T}}/W$ , d. h. eine konjugationsinvariante Abbildung  $\chi : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{\mathcal{T}}/W$  besitzt mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß sich die semi-universelle Deformation  $\psi : Y \rightarrow U$  der Ausgangssingularität  $X$  in diesen Quotienten einbetten läßt:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \chi \\
 U & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathcal{T}}/W
 \end{array}$$

Eine positive Antwort auf diese Frage haben wir als Vermutung weiter offen lassen müssen (vgl. 8.2). Allerdings werden wir in Kapitel 7 einen adjungierten Quotienten  $\chi : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{\mathcal{T}}/W$  definieren und untersuchen, der weitgehend ähnliche Eigenschaften hat wie der adjungierte Quotient endlichdimensionaler reductiver Gruppen und eine positive Antwort erwarten läßt.

Kac-Moody-Liealgebren wurden im Jahre 1968 unabhängig von Kac und Moody bei der Verallgemeinerung eines auf Chevalley, Harish-Chandra, Jacobson und Serre zurückgehenden Konstruktionsprozesses für halbeinfache Liealgebren eingeführt ([Kac<sub>1</sub>], [Moody<sub>1</sub>], vgl. Kapitel 3).

Erste Untersuchungen von Gruppen, die diesen Liealgebren nach der Methode von Chevalley und Steinberg zugeordnet wurden, begnügten sich mit der Kon-

struktions eines Tits-Systems (vgl. [Moody-Teo], [Marcuson]). Erst in neuerer Zeit fanden diese Gruppen ein weitergehendes Interesse (vgl. [Garland<sub>2</sub>], [Kac-Peterson<sub>2,3</sub>], [Peterson-Kac], [Tits<sub>3,4,5</sub>]), jedoch gab es bisher keine Ergebnisse über Konjugationsklassen oder adjungierte Quotienten (abgesehen von denen in [Slodowy<sub>3,4</sub>] für spezielle Situationen, oder denen für die Liealgebra [Frenkel], [Segal], [Peterson-Kac]), geschweige denn eine derart entwickelte Theorie wie sie 1970 für reductive Gruppen nach Arbeiten von Dynkin, Kostant, Springer, Steinberg und anderen zur Verfügung stand.

Neben einer für unsere Zwecke genügend flexiblen Konstruktion von Gruppen zu Kac-Moody-Liealgebren in Kapitel 5 wird daher das Hauptgewicht dieser Arbeit auf der Untersuchung der Konjugationsklassen in solchen Gruppen, der Definition eines adjungierten Quotienten und der Analyse der Fasern dieses adjungierten Quotienten liegen (Kapitel 6,7).

Der früher aufgeworfenen Frage nach der Realisierbarkeit des Systems der verschwindenden Zykeln im Milnorgitter einer isolierten Singularität (sagen wir, einer zweidimensionalen Hyperfläche) als (Teil-) System der ("reellen" oder "Weyl"-) Wurzeln einer geeigneten Liealgebra widmet sich das Kapitel 4. Ausgehend von der Schnittmatrix des Milnorgitters bezüglich einer Basis von verschwindenden Zykeln (oder auch allgemeineren Matrizen, vgl. 4.1) konstruieren wir zunächst eine Klasse von Liealgebren  $\mathfrak{g}$  mit den folgenden Eigenschaften. Das komplexifizierte Milnorgitter identifiziert sich mit einer "Cartanalgebra"  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{g}$ . Die verschwindenden Zykeln gehen dabei über in die sogenannten Weylwurzeln von  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ , und die Monodromiegruppe  $\Gamma$  identifiziert sich mit der Weylgruppe  $W$  von  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ . Nach Über-

gang zu einer Erweiterung operiert die Weylgruppe  $W$  durch Automorphismen auf der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ . Die letzte Eigenschaft impliziert eine wesentliche Differenz unserer Konstruktion zur Konstruktion der sogenannten kontragredienten Liealgebren ( $[Kac_1]$ , vgl. auch 3.6), die sogar beliebigen komplexwertigen quadratischen Matrizen zugeordnet werden können. Bei der Untersuchung von Singularitäten werden gewisse Basen des Milnorgitters als "geometrische Basen" ausgezeichnet (vgl. 1.8). Diese sind nicht eindeutig festgelegt, sondern können durch eine gewisse Klasse von Transformationen ineinander überführt werden (vgl. 1.9). Soll die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  eine Invariante der Singularität sein, so muß ihr Isomorphietyp unabhängig sein von der Wahl der geometrischen Basis des Milnorgitters. Dies zwingt uns zu einer Modifikation der ursprünglichen Konstruktion. Leider können wir die Nichttrivialität der modifizierten Liealgebren nur in Einzelfällen nachweisen. Diese Lage verbietet uns vorerst, weitergehende Vermutungen über den Zusammenhang der koadjungierten Darstellung dieser Liealgebren mit der semiuniversellen Deformation der betreffenden Singularitäten zu äußern. Im Fall der einfach elliptischen und Spitzensingularitäten besitzt jedoch die zugeordnete Liealgebra vermutlich eine Interpretation als Schleifenalgebra über der weiter oben schon betrachteten Kac-Moody-Liealgebra, die einem Quotienten des Milnorgitters der Singularität zugeordnet war. Die Ausführungen in 4.16 über die Konjugationsklassen in Schleifenalgebren in Zusammenhang mit unserer Untersuchung der Konjugationsklassen in Kac-Moody-Liegruppen (Kapitel 7) mögen eine Beziehung zwischen den neu konstruierten Liealgebren und den semiuniversellen Deformationen wenigstens der einfach elliptischen und Spitzensingularitäten als nicht ganz abwegig erscheinen lassen.



Wir wollen nun auf den Inhalt der einzelnen Kapitel gesondert eingehen.

Kapitel 1 bringt eine Übersicht über Eigenschaften isolierter Singularitäten, ihrer Deformationen, ihrer Milnorfasern und der algebraischen Invarianten, die ihnen assoziiert werden. Besonders ausführlich werden dabei die Konstruktion und die Äquivalenzen geometrischer Basen im Milnorgitter beschrieben (1.6 - 1.10), da diese den Hintergrund liefern für die Liealgebraischen Entwicklungen des Kapitels 4. Diejenigen Klassen von Singularitäten, die einen Bezug zu dieser Arbeit haben, werden einzeln vorgestellt (1.13 - 1.18).

In Kapitel 2 werden noch einmal der Satz von Brieskorn und seine Anwendungen auf die Deformationstheorie der einfachen Singularitäten dargestellt. Neu ist hier eine Liealgebrentheoretische Konstruktion einer Periodenabbildung für die semiuniversellen Deformationen der einfachen Singularitäten (2.5, 2.6).

Kapitel 3 berichtet über die Grundlagen aus der Theorie der Kac-Moody-Liealgebren. Dabei gehen wir auch auf Sachverhalte ein, die nicht unbedingt in späteren Kapiteln benutzt werden, dafür aber ein vollständigeres Bild über diese Liealgebren vermitteln. Dieses Material findet sich teilweise nur verstreut in der Originalliteratur. Hervorheben wollen wir, daß wir die Konstruktion von Kac-Moody-Liealgebren (und anderen) systematisch von Ausgangsdaten entwickeln, die wir in Anlehnung an eine ähnliche Terminologie in [Looijenga<sub>5</sub>] Wurzelbasen nennen, und die feinere Information enthalten als die üblicherweise zugrundegelegten Cartanmatrizen. Diese Wurzelbasen ermöglichen eine größere Flexibilität im Umgang mit natürlichen Unterhalbgebren und Homomorphismen. Bei der Konstruktion von Gruppen drängen sie sich

## VIII

ohnehin automatisch auf (vgl. auch [Tits<sub>4,5</sub>]).

Wie schon oben erläutert, beschäftigt sich Kapitel 4 mit der Konstruktion einer neuen Klasse von Liealgebren, die wir Verallgemeinerte-Schnittmatrix-Liealgebren, oder kürzer GIM-Liealgebren nennen. Als eine Unterklasse enthält diese die der Kac-Moody-Liealgebren. Ein erster wesentlicher technischer Punkt ist hier der Beweis der Nichttrivialität der Konstruktion, der sich nicht mehr so einfach wie für Kac-Moody-Liealgebren führen läßt. Er erfolgt durch Einbettung (eines Quotienten) einer GIM-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  als Fixpunktalgebra einer Involution in einer zugeordneten Kac-Moody-Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Das Coxeterdiagramm von  $\tilde{\mathfrak{g}}$  tritt dabei in natürlicher Weise als "Orientierungsüberlagerung" des Diagramms von  $\mathfrak{g}$  auf, und die Involution auf  $\tilde{\mathfrak{g}}$  wird durch die korrespondierende Decktransformation induziert (4.5 - 4.8). Die vom Standpunkt der Singularitäten natürlich auftretende Frage nach der "Zopf-invarianz" dieser Liealgebren (vgl. 4.9) führt zu einer Modifikation der GIM-Liealgebren, die wir IM-Liealgebren nennen (4.10, 4.12). Natürliche Beispiele für IM-Liealgebren (oder gewisse Quotienten derselben) ergeben sich durch iterierte Bildung von Schleifenalgebren  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$  zu schon konstruierten IM-Liealgebren  $\mathfrak{g}$ , wie z. B. zu endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebren oder Kac-Moody-Liealgebren  $\mathfrak{g}$ . Die Erläuterung der Ergebnisse von Frenkel und Segal über die Konjugationsklassen in Schleifenalgebren zu endlichdimensionalen Liealgebren in 4.16 legt die Vermutung nahe, daß ähnliche Ergebnisse für beliebige Schleifenalgebren korrekt sind. In diesem Fall reduzierte sich die Beschreibung der Konjugationsklassen in den den Milnorgittern der einfach elliptischen oder Spitzensingularitäten zugeordneten IM-Liealgebren auf die Beschreibung des lokal-endlichen adjungierten Quotienten der Kac-Moody-Liegruppe, die einem Quotienten des

Milnorgitters zugeordnet ist (s. o.). Das Kapitel schließt mit einigen offenen Fragen zur Strukturtheorie (4.17).

Kapitel 5 handelt von Gruppen zu Kac-Moody-Liealgebren, genauer zu ganzzahligen Cartanschen Wurzelbasen. Die Darstellung der Konstruktion dieser Gruppen schließt sich eng an die von Tits gegebene Konstruktion an (vgl. [Tits<sub>3,4</sub>]). Dabei haben wir versucht, so viel wie möglich die als bekannt vorausgesetzte Theorie der reductiven Gruppen zu benutzen (5.7) oder die der Lieschen Gruppen zu imitieren (5.2 - 5.5). Letzteres ist wesentlich dadurch ermöglicht, daß wir nur in einer Charakteristik-Null-Situation arbeiten. Wir konstruieren also zunächst die sogenannten Standard-parabolischen Untergruppen endlichen Typs und definieren die gesuchte Gruppe  $G$  als das Amalgam dieses Systems (5.7, 5.8). Diese Gruppe  $G$  besitzt ein Tits-System, dessen Standard-parabolische Untergruppen endlichen Typs gerade mit den oben genannten übereinstimmen, und das die theoretische Basis für fast alle später folgenden Untersuchungen ist. Die Existenz dieses Systems im Rahmen der angegebenen Konstruktion folgt aus einem allgemeinen Satz von Tits (vgl. [Tits<sub>3,4</sub>]). Unter Benutzung der Darstellungstheorie der zugehörigen Liealgebra (5.10) und der von  $G$  (5.11) geben wir dafür einen unabhängigen Beweis (5.12), der wie frühere Arbeiten dem Schema von Chevalley und Steinberg folgt ([Chevalley], [Steinberg<sub>1</sub>]). U. a. mittels des Tits-Systems untersuchen wir diverse Untergruppen von  $G$  (5.9) und beschreiben die Struktur gewisser homogener Räume (5.13).

In Kapitel 6 referieren wir zunächst Looijengas Theorie der holomorphen Vervollständigung (oder der partiellen Kompaktifizierung) für den Weylgruppenorbitraum  $J/W$  eines Diskontinuitätsgebietes  $J \subset T$  im maximalen Torus

von  $G$  (6.3, 6.4). Diese Theorie beruht auf einer geometrischen Analyse des sogenannten Tits-Kegels (6.1, 6.2). Wir leiten hier auch einige Aussagen ab, die sich, explizit wenigstens, nicht in der Literatur finden. Der zweite Teil von Kapitel 6 konstruiert eine Zerlegung von  $G$  in konjugationsinvariante Teile  $G(\theta)$ , die den Randkomponenten der Vervollständigung  $\hat{T}/W$  von  $T/W$  entsprechen. Wesentlich ist dabei die Untersuchung der Fixpunkt Mengen der Elemente von  $G$  auf dem Gebäude von  $G$ , dessen Eigenschaften in 6.6 und 6.7 beschrieben werden. Hauptresultat ist ein "Homogenitätssatz" von Looijenga (6.8, Theorem), der die Disjunktheit der konstruierten Zerlegung impliziert. Dieser Satz wird hier zum ersten Mal mit der Erlaubnis E. Looijengas veröffentlicht. Mit Hilfe der Darstellungstheorie konstruieren wir dann effektiv Elemente für jeden Teil dieser Zerlegung, und wir formulieren eine Vermutung über die darstellungstheoretische Interpretation der Zerlegung (6.9, 6.10).

Kapitel 7 untersucht die Konjugationsklassen und einen adjungierten Quotienten für Kac-Moody-Liegruppen  $G$ . Zunächst beschränken wir uns dabei auf die Teilmenge  $G(\emptyset)$  derjenigen Elemente von  $G$ , die in eine Boreluntergruppe  $B$  konjugiert sind (7.1 - 7.5). Die proalgebraische Jordanzerlegung auf  $B$  induziert dann eine Jordanzerlegung auf diesem Teil der Gruppe (7.3), die die Definition eines "partiellen" adjungierten Quotienten  $\chi_{G(\emptyset)} : G(\emptyset) \rightarrow T/W$  sowie die Analyse der Fasern dieser Abbildung ermöglicht (7.5). Wie im Fall reductiver Gruppen haben diese Fasern die Gestalt eines assoziierten Bündels, dessen Faser wiederum eine unipotente Varietät einer kleineren Gruppe ist (7.4, 7.5). Außerdem erlaubt die gesamte Familie  $G(\emptyset) \rightarrow T/W$  eine "simultane Auflösung" (7.6). Mittels der in Kapitel 6 konstruierten Partition von  $G$  ist es nun möglich, eine konjugationsinvariante Abbildung  $\chi : G \rightarrow \hat{T}/W$

von  $G$  auf eine mengentheoretische Vervollständigung  $\hat{T}/W$  von  $T/W$  zu definieren (7.7), die auf  $G(\emptyset)$  mit  $\chi_{G(\emptyset)}$  übereinstimmt. Die Fasern von  $\chi$  über den Randkomponenten von  $\hat{T}/W$  sind wieder assoziierte Bündel, deren Faser selbst im wesentlichen das Produkt der unipotenten Varietät einer kleineren Gruppe  $M^+ \subset G$  mit der speziellen Faser einer ähnlichen Abbildung  $\chi_M : M \rightarrow \hat{T}_M/W_M$  für eine andere Kac-Moody-Lieuntergruppe  $M \subset G$  ist (7.9). Über jeder Randkomponente von  $\hat{T}/W$  gestattet  $\chi$  eine "simultane partielle Auflösung", die den unipotenten Anteil auflöst und den speziellen invariant läßt (7.10). Im letzten Abschnitt 7.11 diskutieren wir offene Fragen, die sich um die analytisch-geometrische Interpretation der Abbildung  $\chi$ , wenigstens über dem analytischen Teilraum  $\hat{J}/W$  von  $\hat{T}/W$ , drehen.

Kapitel 8 resümiert inwiefern uns die Resultate der letzten Kapitel dem Ziel nähergebracht haben, für die semiuniversellen Deformationen der einfach elliptischen und der Spitzensingularitäten eine gruppentheoretische Konstruktion zu liefern.

All denen, die durch ihre Anregungen, Bestärkungen und offenen Ohren zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, vor allem E. Brieskorn, E. Looijenga, K. Saito und J. Tits, möchte ich für ihre Unterstützung und Hilfe herzlich danken.

Mein Dank geht ebenfalls an Frau M. Barrón, die das Manuskript mit Geduld, Sorgfalt und, trotz anwachsenden Zeitdrucks, mit zunehmender Begeisterung fertiggestellt hat.

Bonn, März 1984

Peter Slodowy

INHALTSVERZEICHNISKapitel 1: Singularitäten

1.1	Isolierte Singularitäten.....	1-1
1.2	Deformationen.....	1-1
1.3	Deformationen vollständiger Durchschnitte.....	1-3
1.4	Die Diskriminante.....	1-4
1.5	Die Milnorfaserung.....	1-8
1.6	Gewöhnliche Doppelpunkte.....	1-11
1.7	Verschwindende Zykeln und Picard-Lefschetz-Formeln.....	1-13
1.8	Geometrische Basen.....	1-15
1.9	Äquivalenz von Basen.....	1-19
1.10	Schnittdiagramme.....	1-23
1.11	Auflösungsgraphen.....	1-25
1.12	Die Hierarchie der Singularitäten.....	1-27
1.13	Einfache Singularitäten.....	1-29
1.14	Simultane Auflösung.....	1-31
1.15	Unimodale Singularitäten.....	1-32
1.16	Einfach elliptische Singularitäten.....	1-33
1.17	Spitzensingularitäten.....	1-37
1.18	Dreieckssingularitäten.....	1-41
1.19	Periodenabbildungen.....	1-44

Kapitel 2: Einfache Singularitäten und einfache Liegruppen

2.1	Adjungierte Quotienten reductiver Gruppen.....	2-1
2.2	Fasern des adjungierten Quotienten.....	2-3

2.3	Die Auflösung der Fasern.....	2-5
2.4	Der Satz von Brieskorn.....	2-6
2.5	Die koadjungierte Darstellung.....	2-9
2.6	Eine Lie-theoretische Periodenabbildung.....	2-12

### Kapitel 3: Kac-Moody-Liealgebren

3.1	Wurzelbasen.....	3-1
3.2	Verallgemeinerte Cartanmatrizen, Symmetrisierbarkeit.....	3-9
3.3	Coxeterdiagramme.....	3-12
3.4	Weylgruppen.....	3-13
3.5	Klassifikation der verallgemeinerten Cartanmatrizen.....	3-16
3.6	Kontragrediente und Kac-Moody-Liealgebren.....	3-21
3.7	Struktur des Radikals, Leviunteralgebren.....	3-25
3.8	Die adjungierte Gruppe.....	3-28
3.9	Eigenschaften des Wurzelsystems.....	3-32
3.10	Konjugationssätze.....	3-34
3.11	Affine Liealgebren.....	3-36

### Kapitel 4: Eine neue Klasse von Liealgebren

4.1	Verallgemeinerte Schnittmatrizen.....	4-1
4.2	Coxeter- und Schnittdiagramme.....	4-2
4.3	Weylgruppen.....	4-4
4.4	GIM-Liealgebren.....	4-6
4.5	Lokale Orientierungswechsel.....	4-9
4.6	Orientierbarkeit.....	4-10
4.7	Ein Hilfssatz über Involutionen.....	4-14
4.8	Realisation von GIM-Liealgebren.....	4-15

4.9	Schwache Zopftransformationen.....	4-23
4.10	IM-Liealgebren.....	4-26
4.11	Die adjungierten Gruppen.....	4-31
4.12	Zopf-invarianz der IM-Liealgebren.....	4-35
4.13	Affinisierungen von Wurzelbasen.....	4-40
4.14	Weylgruppen von Affinisierungen.....	4-44
4.15	Schleifenalgebren.....	4-46
4.16	Ein Reduktionssatz.....	4-51
4.17	Offene Fragen.....	4-57

#### Kapitel 5: Kac-Moody-Liegruppen

5.1	Tits-Systeme.....	5-1
5.2	Proalgebraische Gruppen.....	5-4
5.3	Die Liealgebra einer proalgebraischen Gruppe.....	5-7
5.4	Eine Komplettierung von Kac-Moody-Liealgebren.....	5-13
5.5	Die Gruppe $U$ .....	5-15
5.6	Die Gruppen $T$ und $N$ .....	5-18
5.7	Parabolische Gruppen von endlichem Typ.....	5-20
5.8	Kac-Moody-Liegruppen.....	5-25
5.9	Diverse Untergruppen.....	5-29
5.10	Darstellungen der Liealgebra.....	5-39
5.11	Darstellungen der Gruppe.....	5-45
5.12	Rekonstruktion des Tits-Systems.....	5-49
5.13	Verallgemeinerte Flaggenmannigfaltigkeiten.....	5-55



**Kapitel 6: Geometrie der Weylgruppe und des Tits-Gebäudes**

6.1	Der Tits-Kegel.....	6-1
6.2	Randkomponenten des Tits-Kegels.....	6-4
6.3	Der Diskontinuitätsbereich im maximalen Torus.....	6-8
6.4	Holomorphe Vervollständigung des Orbitraumes $\mathcal{T}/W$ .....	6-9
6.5	Gebäude.....	6-13
6.6	Das Gebäude eines Tits-Systems.....	6-15
6.7	Konvexe Hüllen.....	6-17
6.8	Die parabolische Partition.....	6-22
6.9	Eine darstellungstheoretische Interpretation.....	6-28
6.10	Existenz parabolischer Elemente.....	6-33

**Kapitel 7: Ein adjungierter Quotient für Kac-Moody-Liegruppen**

7.1	Jordanzerlegung in proalgebraischen Gruppen.....	7-1
7.2	Konjugationsklassen in Boreluntergruppen.....	7-3
7.3	Die lokal-endliche Jordanzerlegung für $G(\emptyset)$ .....	7-8
7.4	Halbeinfache Klassen und Zentralisatoren.....	7-13
7.5	Der lokal-endliche adjungierte Quotient.....	7-18
7.6	Eine simultane Auflösung.....	7-20
7.7	Der volle adjungierte Quotient.....	7-23
7.8	Spezielle Fasern.....	7-28
7.9	Die Struktur allgemeiner Fasern.....	7-32
7.10	Simultane partielle Auflösungen.....	7-37
7.11	Einige offene Fragen.....	7-45

**Kapitel 8: Beziehungen zur Deformationstheorie von Singularitäten**

8.1	Die semiuniversellen Deformationen der einfach elliptischen und Spitzensingularitäten.....	8-1
8.2	Eine Vermutung.....	8-4

Einige Konventionen

Zur Vermeidung unnötiger Konfusionen wollen wir auf einige, möglicherweise von anderen Quellen abweichende Konventionen und Notationen hinweisen. Teilweise werden diese im laufenden Text nochmals explizit eingeführt.

Das Komplement einer Teilmenge  $B$  in einer Menge  $A$  bezeichnen wir mit  $A \setminus B$ . Eine Liegruppe  $G$  heiÙe einfach (in anderen Quellen gelegentlich präzisier, fast-einfach), wenn  $G$  keine echten Normalteiler positiver Dimension hat. Das Wurzelsystem einer Kac-Moody-Liealgebra bezeichnen wir mit  $\Sigma$ , eine Basis einfacher Wurzeln mit  $\Delta$  (in den meisten Referenzen wird  $\Sigma$  mit  $\Delta$  und  $\Delta$  mit  $\Pi$  bezeichnet!). Diese Notation ist konform mit der in der Arbeit [Slodowy<sub>2</sub>], aus der wir auch die Konventionen für assoziierte Bündel übernehmen (loc. cit. 3.7). Alle Höchstgewichtsmoduln werden ab Kapitel 6 immer irreduzibel und zu dominantem höchstem Gewicht sein (vgl. 5.10, 5.10).

KAPITEL 1: SINGULARITÄTEN1.1 Isolierte Singularitäten

Unter einer isolierten Singularität verstehen wir einen komplex-analytischen Raumkeim  $(X,x)$  der in  $x$  einen isolierten singulären Punkt besitzt.

Einige der folgenden Begriffsbildungen werden für solch allgemeine Raumkeime sinnvoll sein, bei den Betrachtungen über Milnorfasern werden wir jedoch annehmen müssen, daß  $(X,x)$  ein vollständiger Durchschnitt ist, d. h. daß  $(X,x)$  isomorph zur Faser  $(f^{-1}(0),0)$  eines flachen Morphismus

$$f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$$

ist. In den späteren Anwendungen werden wir uns dann auf sehr spezielle normale zweidimensionale Singularitäten beschränken.

1.2 Deformationen

Sei  $(X,x)$  eine isolierte Singularität. Eine Deformation von  $(X,x)$  ist ein Paar  $(\phi, i)$  bestehend aus einem flachen Morphismus analytischer Raumkeime

$$\phi : (Y,y) \rightarrow (U,u)$$

und einem Isomorphismus

$$i : (X,x) \xrightarrow{\sim} (\phi^{-1}(u), y)$$

von  $(X,x)$  auf die spezielle Faser  $(\phi^{-1}(u), y)$ . Der Raum  $(U,u)$  heißt die Basis und  $(Y,y)$  der Totalraum der Deformation  $(\phi, i)$ .

Ein Isomorphismus  $\Phi : (\phi, i) \xrightarrow{\sim} (\phi', i')$  zweier Deformationen

$$\phi : (Y, \gamma) \rightarrow (U, u)$$

$$\phi' : (Y', \gamma') \rightarrow (U, u)$$

von  $(X, x)$  über  $(U, u)$  besteht aus einem Isomorphismus

$$\Phi : (Y, \gamma) \rightarrow (Y', \gamma') \quad ,$$

der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccc}
 & (X, x) & \\
 i \swarrow & & \searrow i' \\
 (Y, \gamma) & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & (Y', \gamma') \\
 \phi \searrow & & \swarrow \phi' \\
 & (U, u) &
 \end{array}$$

Ist  $\phi : (Y, \gamma) \rightarrow (U, u)$  eine Deformation von  $(X, x)$  und  $\alpha : (T, t) \rightarrow (U, u)$  ein Morphismus, so ist das Faserprodukt

$$(Y, \gamma) \times_{(U, u)} (T, t)$$

wieder flach über  $(T, t)$  und definiert eine offensichtliche, die durch  $\alpha$  aus  $\phi$  induzierte Deformation von  $(X, x)$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, x) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & (X, x) & & \\
 \downarrow & & \downarrow i & & \\
 (Y, \gamma) \times_{(U, u)} (T, t) & \longrightarrow & (Y, \gamma) & & \\
 \alpha(\phi) \downarrow & & \downarrow \phi & & \\
 (T, t) & \xrightarrow{\quad \alpha \quad} & (U, u) & &
 \end{array}$$

Konvention: Der Kürze halber werden wir im folgenden die Immersion

$i : (X, x) \hookrightarrow (Y, y)$  nicht mehr gesondert in der Notation für Deformationen mitführen. Entsprechend identifizieren wir die Punkte  $x$  und  $y$ .

Eine Deformation  $\phi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  von  $(X, x)$  heißt versell falls jede andere Deformation  $\phi' : (Y', x) \rightarrow (T, t)$  von  $(X, x)$  isomorph zu einer induzierten Deformation  $\alpha^*(\phi) : (Y, x) \times_{(U, u)} (T, t) \rightarrow (T, t)$  ist bezüglich eines geeigneten Basiswechsels  $\alpha : (T, t) \rightarrow (U, u)$ . Sie heißt semiuniversell, wenn zudem das Differential von  $\alpha$  im Punkt  $t \in T$  eindeutig bestimmt ist. Semiuniverselle Deformationen sind bis auf Isomorphie (der Basis und der Deformation) eindeutig bestimmt und existieren für isolierte Singularitäten ([Grauert], [Kas-Schlessinger], [Tjurina<sub>1</sub>]).

### 1.3 Deformationen vollständiger Durchschnitte

Ist  $(X, x)$  ein vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität, gegeben als Faser  $(f^{-1}(0), 0)$  eines flachen Morphismus  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , so läßt sich eine semiuniverselle Deformation von  $(X, x)$  leicht explizit angeben.

Sei  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  (bzw.  $\mathcal{O}_{X, 0}$ ) die lokale Algebra der Keime holomorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}^n$  (bzw.  $X$ ) im Punkte  $0$ . Dann induziert das Differential

$$Df : T_*\mathbb{C}^n \rightarrow f^*T_*\mathbb{C}^k$$

nach Restriktion über  $X$  und Übergang zu den Schnitten eine  $\mathcal{O}_{X, 0}$ -lineare Abbildung

$$\overline{Df} : \mathcal{O}_{X, 0}^n \rightarrow \mathcal{O}_{X, 0}^k,$$

deren Kokern  $T^1(f)$  wegen der Isoliertheit der Singularitäten von  $X$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Seien  $\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_r$  die Elemente einer

$\mathbb{E}$ -Basis von  $T^1(f)$  und  $b_1, \dots, b_r$  ihre Liftungen nach  $(\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n, 0})^k$ . Sei  $(Y, 0) \subset (\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^r, 0)$  definiert als Faser  $F^{-1}(0)$  der Abbildung

$$F : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^r \rightarrow \mathbb{E}^k$$

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i b_i(x) \quad ,$$

und sei  $\phi : (Y, 0) \rightarrow (\mathbb{E}^r, 0)$  die Einschränkung der zweiten Projektion auf  $(Y, 0)$ . Dann identifiziert sich  $(\phi^{-1}(0), 0)$  mit  $(f^{-1}(0), 0) = (X, 0)$  und  $\phi$  realisiert eine semiuniverselle Deformation von  $(X, 0)$  (vgl. 1.2, loc. cit.).

Beispiel: Sei  $(X, 0)$  die Hyperfläche  $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{E}^n, 0)$  gegeben durch die quadratische Form

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2 \quad .$$

Dann heißt  $(X, 0)$  ein gewöhnlicher Doppelpunkt der Dimension  $n-1$ , oder auch eine Singularität vom Typ  $A_1$  (falls  $n = 3$  ist). Der Raum  $T^1(f)$  berechnet sich als

$$\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n, 0} / \langle f, z_1, \dots, z_n \rangle = \mathbb{E} \quad ,$$

und die semiuniverselle Deformation von  $(X, 0)$  wird durch  $\phi = f : (\mathbb{E}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gegeben.

#### 1.4 Die Diskriminante

Im folgenden sei  $(X, x)$  eine isolierte Singularität, reduziert und reindimensional von der Dimension  $d$ . Sei  $\phi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  eine Deformation von  $(X, x)$  und  $(C, x) \subset (Y, x)$  die kritische Menge von  $\phi$ , d. h.

$$C = \{y \in Y \mid \phi \text{ ist nicht glatt in } y\} \quad .$$

Das Bild  $(D, u) = (\phi(C), u)$  der kritischen Menge in  $U$  heißt die Diskriminante von  $\phi$ .

Eine geeignete, d. h. mit Basiswechsel verträgliche, analytische Struktur auf  $D$  erhält man folgendermaßen (für Details und Erläuterungen vergleiche man [Teissier] § 1,2):

Sei  $\Omega_Y^1|_U$  die Garbe der relativen Differentiale auf  $Y$  und  $d = \dim(X, O)$ .  
Der Quotient

$$\mathcal{O}_Y / F_d(\Omega_Y^1|_U)$$

von  $\mathcal{O}_Y$  nach der  $d$ -ten Fittingidealgarbe hat als Träger  $C$  und definiert eine analytische Struktur  $(C, \mathcal{O}_C)$  auf  $C$ . Wegen der Isoliertheit der Singularitäten von  $X$  ist die Einschränkung von  $\phi$  auf  $C$  endlich, und  $\phi_* \mathcal{O}_C$  ist deshalb eine kohärente Garbe auf  $U$ . Die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_D$  auf  $D$  ist nun als Quotient

$$\mathcal{O}_U / F_1(\phi_* \mathcal{O}_C)$$

von  $\mathcal{O}_U$  nach der ersten Fittingidealgarbe von  $\phi_* \mathcal{O}_C$  gegeben.

Im wesentlichen interessiert uns später der Fall, daß  $\phi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  die semiuniverselle Deformation eines vollständigen Durchschnitts  $(X, O) = (f^{-1}(O), O)$  ist. Es gelten dann die folgenden Aussagen (vgl. [Teissier], [Vohmann]):

Der Basisraum  $U$  ist glatt von der Dimension  $\tau = \dim T^1(f)$ . Die kritische Menge  $C$  ist normal,  $D$  ist eine reduzierte irreduzible Hyperfläche in  $U$ , und die Einschränkung

$$\phi|_C : C \rightarrow D$$

ist die Normalisierung von  $D$ .



Die Diskriminantenvarietät  $D \subset U$  in der Basis  $U$  einer semiuniversellen Deformation enthält zahlreiche Informationen über die ursprüngliche Singularität  $(X, x)$  und die Singularitäten der Nachbarfasern  $\phi^{-1}(u')$ ,  $u' \in U$ . Auf einer allgemeinen Ebene hat man die folgenden Aussagen:

Nach einem Resultat von Wirthmüller ([Wirthmüller]) bestimmt die analytische Struktur von  $D$  die von  $X$ . Präziser gilt: Sind  $(X, x)$  und  $(X', x')$  isolierte Singularitäten vollständiger Durchschnitte, und sind die Diskriminanten  $(D, u)$  und  $(D', u')$  ihrer semiuniversellen Deformation isomorph, so auch  $(X, x)$  und  $(X', x')$  falls  $\dim X = \dim X'$  gilt. Im Fall  $\dim X \neq \dim X'$  folgt, daß beide Singularitäten Hyperflächen sind und durch "stabil-äquivalente" Funktionskeime

$$f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

und

$$f' : (\mathbb{C}^{n'}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

definiert werden können ("stabil-äquivalent" bedeutet im Fall  $n < n'$ , daß in geeigneten Koordinaten

$$f'(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n'}) = f(z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}^2 + \dots + z_{n'}^2,$$

gilt).

Betreffend der Nachbarfasern hat man das Resultat über die "Offenheit der Versalität" (vgl. [Teissier] für den Fall vollständiger Durchschnitte und [Pourcin] für den allgemeinen Fall):

Sei  $\phi : Y \rightarrow U$  ein genügend kleiner Repräsentant einer versellen Deformation  $(Y, y) \rightarrow (U, u)$  von  $(X, x)$ . In einer Faser  $\phi^{-1}(u')$ ,  $u' \in U$  treten dann

höchstens endlich viele singuläre Punkte  $x_1, \dots, x_k$  auf. Sei

$$(X_i, x_i) = (\phi^{-1}(u'), x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad ,$$

und

$$\phi_i : (Y_i, x_i) \rightarrow (U_i, u_i) \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad ,$$

die zugehörige semiuniverselle Deformation. Dann ist die Einschränkung

$$\phi : \bigsqcup_{i=1}^k (Y, x_i) \rightarrow (U, u')$$

von  $\phi$  auf den Multikeim  $\bigsqcup_{i=1}^k (Y, x_i)$  eine verselle Deformation dieses Multikeims, d. h. für ein geeignetes  $l \in \mathbb{N}$  gibt es Isomorphismen  $\alpha$  und  $\beta$ , die das folgende Diagramm kommutativ machen

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{i=1}^k (Y, x_i) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{C}^l, 0) \times \bigsqcup_{i=1}^k (Y_i, x_i) \\ \downarrow \phi & & \downarrow p(\phi) \\ (U, u') & \xrightarrow{\beta} & (\mathbb{C}^l, 0) \times \bigsqcup_{i=1}^k (U_i, u_i) \quad , \end{array}$$

dabei ist für  $v \in \mathbb{C}^l$ ,  $y \in Y_i$

$$p(\phi)(v, y) = (v, u_1, \dots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \dots, u_k) \quad .$$

Insbesondere ergibt sich daraus, daß die Diskriminante  $(D, u')$  im Punkte  $u'$  isomorph zum Produkt

$$(\mathbb{C}^l, 0) \times \prod_{i=1}^k (D_i, u_i)$$

eines trivialen Faktors mit den Diskriminanten  $(D_i, u_i)$  der Deformationen  $\phi_i$  ist.

Für den Fall, daß  $\phi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  die semiuniverselle Deformation eines vollständigen Durchschnitts  $(X, x)$  ist, ermöglichen die obigen Resultate die Rekonstruktion der Singularitäten der Fasern  $\phi^{-1}(u')$ ,  $u' \in U$ , aus der lokalen Struktur der Diskriminante in  $u'$ . Als einfachen Fall erwähnen wir den eines regulären Punktes  $u' \in D \subset U$  der Diskriminante. Solche Punkte sind dadurch charakterisiert, daß die zugehörige Faser  $\phi^{-1}(u')$  genau einen singulären Punkt, nämlich einen gewöhnlichen Doppelpunkt, besitzt (vgl. [Teissier], [Vohmann] für weitere derartige Beschreibungen).

Außerhalb des Bereichs der vollständigen Durchschnitte findet man analoge Verhältnisse für die Diskriminante nur in einigen Randfällen (z. B. für einfach elliptische oder Spitzensingularitäten vom Grad 5, vgl. 1.16, 1.17). Im allgemeinen brauchen die Basisräume  $U$  weder glatt, noch reduziert, noch irreduzibel, und die Diskriminanten nicht unbedingt Hyperflächen zu sein. Aus diesen Gründen sind die im folgenden zu erörternden Begriffe und Strukturen bisher auch nur für den Fall vollständiger Durchschnitte systematisch entwickelt worden.

### 1.5 Die Milnorfaserung

Sei  $(X, x)$  die isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnittes der Dimension  $d$  und  $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  die semiuniverselle Deformation von  $(X, x)$ . Nach Übergang zu einem Repräsentanten von  $\phi$  und Einschränkung auf genügend kleine offene Umgebungen  $Y$  von  $0$  in  $\mathbb{C}^n$  und  $U$  von  $0$  in  $\mathbb{C}^k$  induziert  $\phi$  ein differenzierbares Faserbündel

$$\phi^* : Y^* \rightarrow U^* ,$$

wobei  $U^* = U \setminus D$  das Komplement der Diskriminante in  $U$  und  $Y^* = \phi^{-1}(U^*)$

ist. Die typische Faser  $F$  dieses Bündles hat den Homotopietyp eines Buketts von  $\mu$  Sphären  $S^d$  der reellen Dimension  $d = n-k$  :

$$F \sim S^d \vee \dots \vee S^d .$$

Die Faser  $F$  heißt die Milnorfaser und  $\mu$  die Milnorzahl von  $(X, x)$  .

(Sie sind unabhängig von den getroffenen Auswahlen, für Details vgl. [Milnor], [Hamm].)

Für die reduzierte Homologie von  $F$  ergibt sich somit

$$\tilde{H}_i(F, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^\mu & i = d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da wir in dieser Arbeit niemals den Fall  $d = 0$  betrachten werden, nehmen wir der einfacheren Bezeichnungen wegen  $d > 0$  im folgenden an. Insbesondere gilt dann

$$\tilde{H}_d(F, \mathbb{Z}) = H_d(F, \mathbb{Z}) .$$

(Andererseits bleiben die Aussagen betreffend  $H_d(F, \mathbb{Z})$  auch im Fall  $d = 0$  gültig, sofern man dann  $H_0(F, \mathbb{Z})$  als die reduzierte Homologie interpretiert.)

Da die reelle Dimension von  $F$  gleich  $2d$  ist, liefert die Poincarédualität einen Isomorphismus

$$p : H_d(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_c^d(F, \mathbb{Z}) .$$

Mittels der natürlichen Abbildung

$$v : H_c^d(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^d(F, \mathbb{Z}) = H_d(F, \mathbb{Z})^*$$

erhalten wir dann eine Bilinearform

$$\langle , \rangle : H_d(F, \mathbb{Z}) \times H_d(F, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\langle h, h' \rangle = (v \circ p(h))(h') .$$

Diese Form ist symmetrisch für gerades  $d$  und antisymmetrisch für ungerades  $d$ . (Da  $F$  nicht kompakt ist ( $d > 0$ ), kann diese Form entartet sein.)

Wir nennen  $H = (H_d(F, \mathbb{Z}), \langle , \rangle)$  das Milnorgitter von  $(X, x)$ .

Die Familie der Gruppen  $H_d(\phi^{-1}(u), \mathbb{Z})$ ,  $u \in U^*$ , bildet ein lokales System über dem zusammenhängenden Raum  $U^*$ . Nach Wahl eines Basispunktes  $u_0 \in U^*$  und Identifikation von  $F$  mit  $\phi^{-1}(u_0)$  erhalten wir die zugehörige Monodromiedarstellung

$$\pi_1(U^*, u_0) \rightarrow \text{Aut}(H)$$

der Fundamentalgruppe von  $U^*$ . Das Bild  $W \subset \text{Aut}(H)$  dieser Darstellung heißt die (algebraische) Monodromiegruppe von  $(X, x)$ .

Sei  $L \subset \mathbb{C}^k$  eine komplexe Gerade durch den Nullpunkt  $0 \in \mathbb{C}^k$ , die nicht im Tangentialkegel der Diskriminantenhyperfläche  $D$  in  $0$  liege. Für genügend kleines  $U$  schneidet dann  $L \cap U$  die Diskriminante nur im Punkt  $0$ . Der positive Umlauf um  $0$  in  $L \cap U$  induziert daher ein bis auf Konjugation bestimmtes Element von  $\pi_1(U, u_0)$  und somit die  $W$ -Konjugationsklasse  $C$  eines Elementes  $c \in W$ . Diese Klasse  $C$  hängt nicht ab von den bisher getroffenen Auswahlen und heißt die Coxeterklasse von  $(X, x)$ . Jedes Element in  $C$  heißt Coxeterelement.

In den folgenden Abschnitten werden wir genauer auf die Bestimmungen der Invarianten  $H, W, C$  von  $(X, x)$  eingehen. Details dazu findet man in den

Arbeiten [Husein-Zade], [Lamotke], [Lê], [Looijenga<sub>8</sub>], [Brieskorn<sub>5</sub>], [Brieskorn<sub>7</sub>], [Brieskorn<sub>8</sub>].

Bemerkung: Bis zum Augenblick dieser Niederschrift ist kein Beispiel zweier topologischer nichtäquivalenter (Hyperflächen-) Singularitäten bekannt, für die alle Invarianten  $H$ ,  $W$ ,  $C$  übereinstimmen. Dagegen gibt es Beispiele nichtäquivalenter Singularitäten mit gleichem Gitter  $H$  (aber verschiedenem  $W$  und  $C$ , vgl. [Brieskorn<sub>7</sub>]) und Beispiele mit gleichem Gitter  $H$ , gleicher Gruppe  $W$  (aber verschiedenen Klassen  $C$ , vgl. [Ebeling<sub>1</sub>], [Ebeling<sub>2</sub>]).

Alle Invarianten des Gitters  $H$  sind insbesondere Invarianten der Singularität, so z. B. die Signatur  $(\mu_-, \mu_0, \mu_+)$  der Schnittform, wobei  $\mu_-$  (bzw.  $\mu_0$ , bzw.  $\mu_+$ ) die Zahl der negativen (bzw. Null-, bzw. positiven) Eigenwerte einer reellen Diagonalisierung bezeichnet.

## 1.6 Gewöhnliche Doppelpunkte

In diesem Abschnitt wollen wir die Milnorfaserung für einen gewöhnlichen Doppelpunkt  $(X, o)$ ,

$$X = \{z \in \mathbb{C}^{d+1} \mid z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_d^2 = 0\}.$$

der Dimension  $d$  genauer betrachten. Dieser Fall dient als Baustein in der Untersuchung komplizierterer Singularitäten.

Die semiuniverselle Deformation von  $(X, o)$  besitzt den "globalen" Repräsentanten

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C} \\ \phi(z) &= z_0^2 + \dots + z_d^2, \end{aligned}$$

der ein Faserbündel

$$\mathbb{C}^{d+1} \setminus X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

induziert, welches zu jeder "lokalen" Milnorfaserung topologisch äquivalent ist. Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $X_\varepsilon = \phi^{-1}(\varepsilon)$  homotopieäquivalent zur reellen  $d$ -Sphäre

$$X_\varepsilon \cap \mathbb{R}^{d+1} = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_0^2 + \dots + x_d^2 = \varepsilon\} .$$

Die Gruppe  $H = H_d(X_\varepsilon, \mathbb{Z})$  wird von der Klasse  $h$  dieser Sphäre (versehen mit einer Orientierung) erzeugt

$$H = \mathbb{Z} \cdot h .$$

Das Normalenbündel von  $X_\varepsilon \cap \mathbb{R}^{d+1}$  in  $X_\varepsilon$  identifiziert sich mit dem Kotangentenbündel der Sphäre. Bezüglich der komplexen Orientierung auf  $X_\varepsilon$  erhält man so die folgende Selbstschnittzahl

$$\langle h, h \rangle = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{cases} \quad \text{falls } n \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \pmod{4} .$$

Als Monodromiegruppe  $W \subset \text{Aut}(H)$  ergibt sich

$$W = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ 1 \end{cases} \quad \text{falls } n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} .$$

Beim Übergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird die Sphäre  $X_\varepsilon \cap \mathbb{R}^{d+1}$  vom Radius  $\sqrt{\varepsilon}$  zunehmend kleiner bis sie in den singulären Punkt  $0 \in X_0 = X$  verschwindet. Daher heißt die Klasse  $h \in H$  auch ein in den Doppelpunkt  $0 \in X$  verschwindender Zykel. Bis auf Orientierung (Vorzeichen) ist dieser Zykel eindeutig als Erzeuger von  $H$  bestimmt.

In den folgenden Abschnitten werden wir beschreiben, wie sich das Milnorgitter eines vollständigen Durchschnitts aus solchen Zykeln aufbauen läßt.

### 1.7 Verschwindende Zykeln und Picard-Lefschetz-Formeln

Sei nun  $(X, x)$  isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension  $d$  ( $d > 0$ , vgl. 1.5) und  $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  ihre semiuniverselle Deformation. Mit  $\phi$  bezeichnen wir einen für die folgenden Zwecke jeweils genügend klein zu wählenden Repräsentanten  $Y \rightarrow U$  von  $\phi$  mit lokaler Milnorfasern  $\phi^* : Y^* \rightarrow U^*$ . Wir wählen einen Basispunkt  $u \in U^*$  und identifizieren die Milnorfaser  $F$  mit  $\phi^{-1}(u)$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  ein Weg mit  $\gamma([0, 1]) \subset U^*$ ,  $\gamma(0) = u$ , und  $\gamma(1) = v$  ein regulärer Punkt der Diskriminante  $D \subset U$ . Die Faser  $Y_1 = \phi^{-1}(v)$  besitzt also einen einzigen singulären Punkt  $y \in Y_1$ , vom Typ  $A_1$ , und ist Deformationsretrakt von  $Y_\gamma = \phi^{-1}(\gamma([0, 1]))$ . Wir haben daher einen Isomorphismus

$$H_d(Y_\gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_d(Y_1, \mathbb{Z}) .$$

Andererseits ist  $Y_\gamma^* = Y_\gamma \setminus Y_1 = Y_\gamma \cap Y^*$  ein triviales Faserbündel über  $\gamma([0, 1])$ . Wir erhalten somit Isomorphismen

$$H_d(F, \mathbb{Z}) \cong H_d(Y_\gamma^*, \mathbb{Z}) \cong H_d(Y_t, \mathbb{Z})$$

für alle Fasern  $Y_t = \phi^{-1}(\gamma(t))$ ,  $t \in [0, 1)$ . Für eine genügend kleine Kugel  $B$  um  $y \in Y_1$  und  $t$  nahe genug bei 1,  $t \neq 1$ , gilt nach 1.6

$$H_d(Y_t \cap B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} h_\gamma ,$$

wobei  $h_\gamma$  ein in den Doppelpunkt  $y$  verschwindender Zykeln ist. Diese Homologiegruppe injiziert sich in das Milnorgitter



$$\mathbb{Z} h_\gamma = H_d(Y_t \cap B, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_d(Y_t, \mathbb{Z}) \cong H$$

und identifiziert sich mit dem Kern der durch die Inklusion  $Y_\gamma^* \rightarrow Y_\gamma$  induzierten Abbildung

$$H \cong H_d(Y_\gamma^*, \mathbb{Z}) \rightarrow H_d(Y_\gamma, \mathbb{Z}) = H_d(Y_1, \mathbb{Z}) .$$

Bemerkung und Definition: Obwohl strikt genommen alle Klassen  $h \in H$  des Milnorgitters beim Übergang

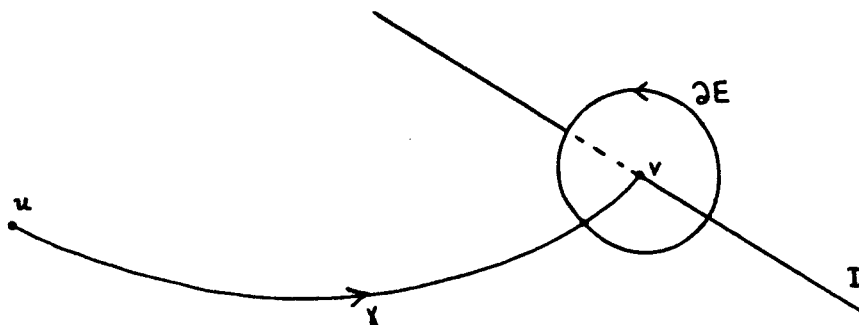
$$H_d(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_d(Y, \mathbb{Z}) \cong H_d(X, \mathbb{Z}) = 0$$

in die Singularität  $x \in X$  verschwinden, reservieren wir den Namen verschwindende Zykeln von jetzt ab für diejenigen  $h \in H$ , die die Form  $h_\gamma$  für einen Weg wie oben haben.

Die Menge aller verschwindenden Zykeln in  $H$  bildet eine Invariante der Singularität, die i. a. stärker als das Milnorgitter ist (vgl. hierzu [Brieskorn<sub>7</sub>], [Brieskorn<sub>8</sub>]). Bis auf den Fall, daß  $(X, x)$  ein gewöhnlicher Doppelpunkt ungerader Dimension ist, bildet die Menge aller verschwindenden Zykeln einen Orbit unter der Aktion der Monodromiegruppe  $W$ .

Jedem Weg  $\gamma$  wie oben wollen wir wie folgt ein Element  $\sigma_\gamma \in \pi_1(U^*, u)$  zuordnen. Da  $v = \gamma(1)$  ein regulärer Punkt von  $D$  ist, gibt es eine kleine abgeschlossene Umgebung  $V$  von  $v$  in  $U$ , in der das Paar  $(V, V \cap D)$  die Gestalt  $((V \cap D) \times E, (V \cap D) \times 0)$  annimmt, wobei  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  eine komplexe Kreisscheibe ist. Wir definieren nun  $\sigma_\gamma$  durch die Schleife, die von  $u$  aus mittels  $\gamma$  auf einen Randpunkt, o. B. d. A.  $(v, 1) \in (V \cap D) \times \partial E$ , von  $V$  trifft, dann den Kreis  $\{v\} \times \partial E$  positiv durchläuft, und mittels  $\gamma^{-1}$

wieder nach  $u$  zurückführt.



Wir nennen diese Schleife als auch ihre Klasse  $\sigma_\gamma \in \pi_1(U^*, u)$  eine einfache Schleife zu  $\gamma$ .

Die  $\sigma_\gamma$  entsprechende Monodromietransformation  $s_\gamma \in W$  operiert dann gemäß der Picard-Lefschetz-Formel:

$$s_\gamma(h) = \begin{cases} h - \langle h, h_\gamma \rangle h_\gamma \\ h + \langle h, h_\gamma \rangle h_\gamma \end{cases} \quad \text{falls} \quad d \equiv \begin{cases} 0, 1 \\ 2, 3 \end{cases} \pmod{4} .$$

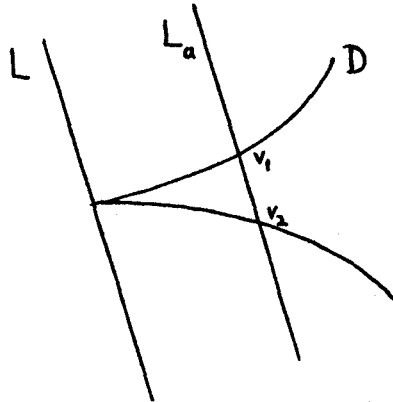
Ist  $d$  gerade, so impliziert diese Formel wegen  $\langle h_\gamma, h_\gamma \rangle = \pm 2$ , daß  $s_\gamma$  als orthogonale Spiegelung an  $h_\gamma$  operiert. Ist  $d$  ungerade, so ist  $s_\gamma$  eine symplektische Transvektion.

### 1.8 Geometrische Basen

Wir betrachten die gleiche Situation wie in 1.7. Es sei  $m$  die Multiplizität der Diskriminante  $(D, 0) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$ . Sei  $L \subset \mathbb{C}^k$  eine "generische" Gerade durch den Nullpunkt  $0 \in \mathbb{C}^k$ , d. h.  $L$  liegt nicht im Tangentialkegel der Diskriminante  $D$  und trifft  $D$  nur in  $0$  ( $U$  genügend klein). Für ein geeignetes, genügend kleines  $a \in \mathbb{C}^k$  trifft die Parallelverschiebung

$L_a = L + a$  die Diskriminante in  $m$  verschiedenen regulären Punkten

$v_1, \dots, v_m \in D \subset U$ , und wir können annehmen, daß  $v_1, \dots, v_m$  im Inneren einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $E \subset L_a \cap U$  liegen.

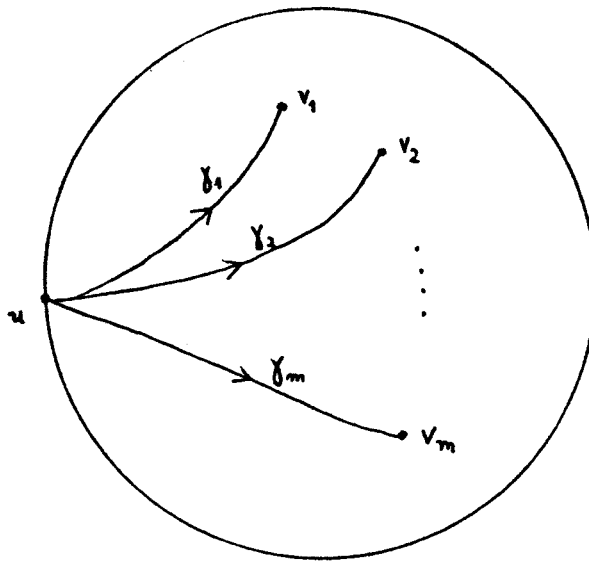


Sei  $u \in \partial E$  ein festgewählter Punkt. Ein System von stetigen Wegen  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$\gamma_i : [0,1] \rightarrow E \subset U$$

heißt geometrisch mit Basispunkt  $u$  falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind

- i)  $\gamma_i(0) = u$ ,  $\gamma_i(1) = v_i$ ,  $\gamma_i([0,1)) \subset E \cap U^*$ .
- ii)  $\gamma_i$  ist injektiv.
- iii)  $\text{Bild } \gamma_i \cap \text{Bild } \gamma_j = \{u\}$  für  $i \neq j$ .
- iv) Für  $j > i$  verläßt der Weg  $\gamma_j$  den Punkt  $u$  im Uhrzeigersinn später als der Weg  $\gamma_i$ .



Wir wählen nun ein geometrisches System von Wegen  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und identifizieren die Milnorfaser  $F$  mit  $\phi^{-1}(u)$ . Sei  $F' = \phi^{-1}(L_a)$  und  $h_i \in H$  ein längs des Weges  $\gamma_i$  verschwindender Zykel (i.e.  $h_i = \pm h_{\gamma_i}$ , vgl. 1.7). Mit ähnlichen Methoden wie in [Brieskorn<sub>5</sub>], App. (vgl. auch [Looijenga<sub>8</sub>]) erhält man dann eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{d+1}(F', \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} h_i \rightarrow H \rightarrow 0 .$$

Die Gruppe  $H_{d+1}(F', \mathbb{Z})$  hat dabei die folgende Interpretation. Ist

$\pi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}$  eine Projektion längs der Geraden  $L$  und

$\psi = \pi \circ \phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$ , so ist  $F'$  eine Milnorfaser der isolierten Singularität  $(X', 0) = (\psi^{-1}(0), 0)$ . Der Rang  $\mu'$  von  $H_{d+1}(F', \mathbb{Z})$  ist also

die Milnorzahl von  $(X', 0)$ . Die Singularität  $(X, 0)$  ist eine Hyperfläche

genau dann, wenn  $(X', 0)$  glatt, also  $\mu' = 0$  ist. In diesem Fall ist dann

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} h_i \rightarrow H$$

ein Isomorphismus.

Ein wie im vorausgehenden gewonnenes Erzeugendensystem  $(h_1, \dots, h_m)$  des Milnorgitters  $H$  heißt geometrisch. Ist  $(X, 0)$  eine Hyperfläche, so nennen wir ein geometrisches Erzeugendensystem auch eine geometrische Basis von  $H$  (ausgezeichnet im Sinne von [Husein-Zade], [Gabrielov]).

Die Bedeutung eines geometrischen Erzeugendensystems  $(h_1, \dots, h_m)$  von  $H$  liegt darin, daß sich damit die Monodromiegruppe  $W$  und die Coxeterklasse  $C \subset W$  bestimmen lassen:

Die Einbettung  $E \cap U^* \rightarrow U^*$  induziert nämlich einen Epimorphismus der Fundamentalgruppen

$$\pi_1(E \cap U^*, u) \rightarrow \pi_1(U^*, u) \rightarrow 1,$$

und die erste Gruppe wird von den einfachen Schleifen  $\sigma_{\gamma_i}$  zu den Wegen  $\gamma_i$  erzeugt (o.B.b.A. mögen diese Schleifen in  $E \cap U^*$  liegen). Daher wird die Monodromiegruppe von den diesen Schleifen entsprechenden Monodromietransformationen  $s_i \in \text{Aut}(H)$  erzeugt. Die Picard-Lefschetz-Formeln beschreiben nun die Aktion der  $s_i$ . Ein Coxetererelement  $c \in C \subset W$  läßt sich realisieren als Monodromie des positiven Umlaufs um den Rand  $\partial E$  der Kreisscheibe  $E$ . Dieser ist homotop zu der Komposition der einfachen Schleifen

$$\sigma_{\gamma_m} \cdot \dots \cdot \sigma_{\gamma_1}$$

(Erst Durchlaufen von  $\sigma_{\gamma_m}$ , dann von  $\sigma_{\gamma_{m-1}}, \dots$ ). Die zugehörige Monodromietransformation ist

$$c = s_1 \cdot \dots \cdot s_m.$$

Anhang: Ist  $(X,0)$  keine Hyperfläche, so ist die surjektive Abbildung

$$\hat{H} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} h_i \xrightarrow{\nu} H$$

nicht injektiv. Wie K. Saito im Rahmen seiner Theorie der erweiterten affinen Wurzelsysteme und am Beispiel der einfach elliptischen  $D_5$ -Singularität gezeigt hat, ist es sinnvoll, das Prä-Milnorgitter  $\hat{H}$  mit der Bilinearform

$$\langle h, h' \rangle_{\hat{H}} = \langle \nu(h), \nu(h') \rangle_H$$

zu betrachten ([Saito<sub>3</sub>]). Mittels des formalen Analogons der Picard-Lefschetz-Formel läßt sich jedem Basisvektor  $h_i \in \hat{H}$  eine Transformation  $\hat{s}_i \in \text{Aut}(\hat{H})$  zuordnen. Die von diesen Transformationen erzeugte Gruppe

$$\hat{W} = \langle \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_m \rangle$$

heißt die Prä-Monodromiegruppe, und die Konjugationsklasse in  $\hat{W}$  des Elementes

$$\hat{c} = \hat{s}_1 \cdot \dots \cdot \hat{s}_m$$

die Prä-Coxeterklasse,  $\hat{c}$  selbst ein Prä-Coxeterelement (diese Benennung stammt von K. Saito). Obwohl es bisher keine unmittelbare geometrische Interpretation von  $\hat{H}$ ,  $\hat{W}$  und  $\hat{c}$  gibt, folgt mit dem nächsten Abschnitt, daß es sich dabei dennoch um Invarianten der Singularität  $(X,0)$  handelt (dies wurde zuerst von E. Brieskorn bemerkt).

### 1.9 Äquivalenz von Basen

Die Konstruktion eines geometrischen Erzeugendensystems  $(h_1, \dots, h_m)$  von  $H$  hängt von verschiedenen Auswahlen ab, wie der von  $L$ ,  $L_a$ ,  $u$ , den Wegen  $\gamma_i$  und den Zykeln  $h_{\gamma_i}$ . In diesem Abschnitt betrachten wir daher Operationen auf

der Menge  $m$ -Tupel verschwindender Zykeln in  $H$ , die verschiedene Erzeugendensysteme ineinander überführen. Diese Operationen werden von vier Klassen fundamentaler Transformationen erzeugt.

i) "Orientierungswechsel":

$$\tau_j(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_{j-1}, -h_j, h_{j+1}, \dots, h_m)$$

$$j = 1, \dots, m \quad .$$

ii) "Monodromietransformationen":

$$w(h_1, \dots, h_m) = (w(h_1), \dots, w(h_m))$$

$$w \in W \quad .$$

iii) "Zopftransformationen":

$$\zeta_j(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_{j-1}, s_j(h_{j+1}), h_j, h_{j+2}, \dots, h_m)$$

$$j = 1, \dots, m-1 \quad .$$

(Hierbei bezeichnet  $s_j$  die durch die Picard-Lefschetz-Formel definierte von  $h_j$  abhängige Transformation  $h \mapsto h \pm \langle h, h_j \rangle h_j$  .)

iv) "Permutationen":

$$\sigma(h_1, \dots, h_m) = (h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)})$$

$$\sigma \in \mathfrak{S}_m \quad (\text{symmetrische Gruppe}) \quad .$$

Alle diese Operationen erhalten die Eigenschaft eines  $m$ -Tupels  $(h_1, \dots, h_m)$  ein Erzeugendensystem (bzw. eine Basis) von  $H$  zu sein. Auch die von den fundamentalen Transformationen  $s_i : h \mapsto h \pm \langle h, h_i \rangle h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in  $\text{Aut}(H)$

erzeugte Gruppe ist bis auf  $W$ -Konjugation invariant (uns interessiert ohne-  
hin nur der Fall, in dem sie gleich  $W$  ist). Jedoch erhalten nur die Opera-  
tionen der Klassen i), ii), iii) die  $W$ -Konjugationsklasse des Elementes

$$c = s_1 \cdot \dots \cdot s_m .$$

Wie die Beispiele von Ebeling zeigen, können Operationen der Klasse iv) die  
Konjugationsklasse von  $c$  verändern (vgl. [Ebeling<sub>1</sub>]).

Bemerkung: Analoge Aussagen erhält man auch für die im letzten Abschnitt 1.9,  
Anhang, eingeführten Prä-Objekte  $\hat{H}$ ,  $\hat{W}$ ,  $\hat{C}$ .

Wir nennen zwei Erzeugendensysteme  $(h_1, \dots, h_m)$  und  $(h'_1, \dots, h'_m)$  von ver-  
schwindenden Zykeln in  $H$  geometrisch (bzw. schwach) äquivalent, wenn sie  
sich durch Iteration von Operationen der Klassen i), ii) und iii) (bzw. i),  
ii), iii) und iv)) ineinander überführen lassen.

Diese Begriffsbildung ist motiviert durch die Tatsache, daß zwei verschiedene  
geometrische Erzeugendensysteme geometrisch äquivalent sind und jedes Erzeu-  
gendensystem, das geometrisch äquivalent zu einem geometrischen System ist,  
selbst geometrisch ist. Während die Operationen der Klasse i) die verschiede-  
nen möglichen Orientierungen der verschwindenden Zykel ineinander überführen,  
und die Operationen der Klasse ii) die Unbestimmtheit des Basispunktes  $u \in U^*$   
der Fundamentalgruppe  $\pi_1(U^*, u)$  ausgleichen, dienen die Operationen der  
Klasse iii) dazu, die Varianz eines geometrischen Erzeugendensystems bezüglich  
der möglichen Änderungen des zugrundegelegten geometrischen Wegesystems aus-  
zudrücken. Ist nämlich in der in 1.8 beschriebenen Situation  $(h_1, \dots, h_m)$  ein  
System von längs den Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  verschwindenden Zykeln, so bildet

$$\zeta_j(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_{j-1}, s_j(h_{j+1}), h_j, h_{j+2}, \dots, h_m)$$

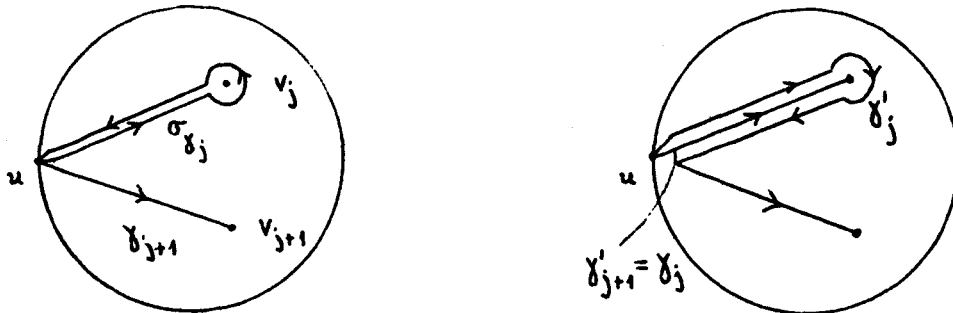


ein System von längs den Wegen  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_m$  verschwindenden Zykeln, wobei

$$\gamma'_i = \gamma_i \quad \text{für} \quad i \neq j, j+1$$

$$\gamma'_{j+1} = \gamma_j$$

und  $\gamma'_j$  ein zum Weg  $(\sigma_{\gamma_j})^{-1} \cdot \gamma_{j+1}$  homotoper Weg wie in der folgenden Skizze ist:



Die gerade beschriebenen,  $\zeta_j$  entsprechenden Wegetransformationen erzeugen eine Zopfgruppe  $Z_m$  zu  $m$  Strängen, und man sieht leicht, daß zwei verschiedene geometrische Wegesysteme  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  und  $(\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$  gerade einen Zopf aus  $Z_m$  definieren, der sie ineinander überführt (für Details vgl. [Husein-Zade]).

In späteren Anwendungen werden wir eine Abschwächung des Begriffs des geometrischen Erzeugendensystems benutzen. Wir nennen ein Erzeugendensystem  $(h_1, \dots, h_m)$  von  $H$  kombinatorisch oder schwach ausgezeichnet, wenn es schwach äquivalent zu einem geometrischen Erzeugendensystem ist.

Bemerkungen: 1) Diese Definition eines schwach ausgezeichneten Erzeugendensystems ist a priori etwas enger als die von Gabrielov und Husein-Zade gegebene Definition (vgl. [Husein-Zade]). Diese Autoren vermuten jedoch, daß beide Definitionen übereinstimmen, d. h. daß alle schwach ausgezeichneten Erzeugendensysteme im Sinne von [Husein-Zade] zueinander schwach äquivalent sind.

2) Da wir uns später ausschließlich mit zweidimensionalen Singularitäten beschäftigen werden, merken wir noch an, daß die Gruppe der schwachen Äquivalenzen, d. h. der von den Operationen aller Klassen i), ii), iii), iv) erzeugten Transformationen, im Fall  $d = \dim(X, O)$  gerade schon von den Permutationen (Klasse iv)) und den folgenden Operationen erzeugt wird

$$v) \quad \zeta_{ij}(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_{j-1}, s_i(h_j), h_{j+1}, \dots, h_m)$$

$$i, j = 1, \dots, m \quad .$$

### 1.10 Schnittdiagramme

Sei  $(X, O)$  isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension  $d$ . Wir nehmen jetzt  $d$  gerade an. Bezüglich eines geometrischen oder schwach ausgezeichneten Erzeugendensystems  $(h_1, \dots, h_m)$  des Milnorgitters  $H$  bilden wir die Schnittmatrix  $C = ((c_{ij}))_{i,j=1, \dots, m}$

$$c_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle$$

der jetzt symmetrischen Schnittform  $\langle , \rangle$ . Die Information dieser Matrix wird üblicherweise in einem Schnittdiagramm kodiert. Die Ecken dieses Diagramms entsprechen den Elementen  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und zwei verschiedene Ecken  $h_i$  und  $h_j$  werden mit  $|\langle h_i, h_j \rangle|$  Kanten verbunden, die im Fall  $\langle h_i, h_j \rangle < 0$  unterbrochen gezeichnet werden:

Beispiele:

$\langle h_i, h_j \rangle$	Schnittdiagramm
1	$i \quad j$ —————
-1	$i \quad j$ - - - - -
2	$i \quad j$ =====
-2	$i \quad j$ == = = =

Wegen  $\langle h_i, h_i \rangle = 2 \cdot (-1)^{d/2}$  erhält man die Schnittmatrix unmittelbar aus dem Schnittdiagramm zurück.

Ist  $(h_1, \dots, h_m)$  ein geometrisches Erzeugendensystem, so werden die Ecken des Schnittdiagramms mit der gleichen Numerierung versehen wie die Elemente  $h_i$ . Wir sprechen dann auch von einem geometrischen Schnittdiagramm. Ist dagegen  $(h_1, \dots, h_m)$  nur schwach ausgezeichnet, so enthält die Numerierung der Ecken keine eigentliche Information über  $(X, O)$  und kann daher entfallen. Wir sprechen in diesem Fall auch von einem schwach ausgezeichneten Schnittdiagramm.

Man kann zeigen, daß jedes schwach ausgezeichnete Schnittdiagramm zusammenhängend ist (vgl. [Husein-Zade], [Looijenga<sub>g</sub>]).

Bemerkungen: 1) Ist  $d$  ungerade, so kann man auf ähnliche Weise Schnittdiagramme definieren. Wegen der Antisymmetrie der Schnittform sind jetzt aber die Kanten zu orientieren, z. B.  $\langle h_i, h_j \rangle = -\langle h_j, h_i \rangle = 1$  entspricht  $i \xrightarrow{\quad} j$ .

2) Ist  $(X, O)$  eine Hyperfläche, so gilt  $m = \mu$ , und die Schnittmatrix  $C$ , oder das zu ihr äquivalente Schnittdiagramm, bestimmt das Milnorgitter  $H$  und die Monodromiegruppe  $W \subset \text{Aut}(H)$ , sowie die Coxeterklasse  $C \subset W$ , falls die Ausgangsbasis geometrisch ist. Ist dagegen  $(X, O)$  keine Hyperfläche, so gelten

diese Aussagen nur für die Prä-Objekte  $\hat{H}$ ,  $\hat{W}$  und  $\hat{C}$ . Zur Kenntnis von  $H$ ,  $W$  und  $C$  benötigt man noch zusätzliche Information über die linearen Relationen der  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in  $H$ . In Saito's Theorie der erweiterten affinen Wurzelsysteme werden solche Relationen mittels der Klasse  $\hat{C} \subset \hat{W}$  ausgedrückt ([Saito<sub>3</sub>]). Es ist nicht klar, ob sich dies verallgemeinern läßt.

Wir haben nun einer Singularität  $(X, O)$  zwei Klassen von Schnittdiagrammen zugeordnet, nämlich die geometrischen und schwach ausgezeichneten Diagramme. Mittels der in 1.9 beschriebenen Transformationen lassen sich die Diagramme jeweils einer Klasse ineinander überführen. In vielen Fällen (vgl. 1.13, 1.16, 1.17, 1.18) hat sich ein spezielles Diagramm als besonders charakteristisch für die Singularität erwiesen (einer der Gründe dafür ist die "Nähe" zu einem Coxeter-Dynkin-Diagramm, vgl. auch 4.12, Korollar). Ob es im allgemeinen Fall auch solche "optimalen" Diagramme gibt, ist allerdings fraglich.

### 1.11 Auflösungsgraphen

Sei nun  $(X, x)$  eine normale zweidimensionale Singularität, nicht notwendigerweise ein vollständiger Durchschnitt. Dann können wir  $(X, x)$  ein natürliches Diagramm zuordnen, den dualen Graph einer minimalen guten Auflösung von  $(X, x)$ . Bis auf den Fall der einfachen Singularitäten (vgl. 1.13) wird dieses Diagramm allerdings keine unmittelbare Beziehung zu den über die Milnorfaserung gewonnenen Schnittdiagrammen (vgl. 1.10) haben.

Sei  $\pi : (\tilde{X}, \pi^{-1}(x)) \rightarrow (X, x)$  eine Auflösung der Singularität  $x \in X$ . Dann ist die reduzierte Ausnahmefaser  $\pi^{-1}(x)$  eine Vereinigung kompakter irreduzibler Kurven

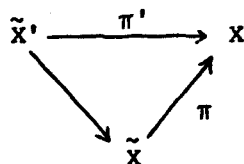
$$\pi^{-1}(x) = E_1 \cup \dots \cup E_r .$$

Die Auflösung  $\pi$  heißt gut, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Jede Komponente  $E_i$  ist nichtsingulär.
- ii) Zwei verschiedene Komponenten  $E_i, E_j, i \neq j$ , schneiden sich, wenn überhaupt, transversal.
- iii) Der Durchschnitt dreier verschiedener Komponenten ist leer

$$E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Zusätzlich heißt  $\pi$  minimal, wenn jede andere gute Auflösung  $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X$  über  $\pi$  faktorisiert



Minimale gute Auflösungen existieren und sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. [Laufer<sub>1</sub>], Th. 5.12).

Der duale Graph der minimalen guten Auflösung  $\pi$  von  $(X, x)$  ist nun wie folgt gegeben: Jeder Komponente  $E_i$  ist ein Eckpunkt zugeordnet, der mit dem Geschlecht  $g_i$  von  $E_i$  und der Selbstschnittzahl  $e_i = \langle E_i, E_i \rangle$  von  $E_i$  in  $\tilde{X}$  versehen wird

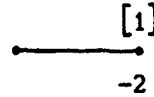
$$E_i \longmapsto \begin{array}{c} [g_i] \\ \bullet \\ e_i \end{array}.$$

Schneiden sich zwei verschiedene Komponenten  $E_i, E_j$ , so werden die zugehörigen Eckpunkte  $\langle E_i, E_j \rangle$ -mal verbunden ( $\langle E_i, E_j \rangle =$  Schnittzahl). Ist  $g_i = 0$ , oder  $g_i = 0$  und  $e_i = -2$ , so entfallen die entsprechenden Markierungen.

Beispiel:

$$E_1 : g_1 = 0 \quad , \quad e_1 = -2$$

$$E_2 : g_2 = 1 \quad , \quad e_2 = -2$$



$$\langle E_1, E_2 \rangle = 1$$

Wegen Zariskis Hauptsatz ist der duale Graph von  $(X, x)$  zusammenhängend (vgl. [Hartshorne] III 11.4). Der duale Graph erlaubt unter anderem die Konstruktion der symmetrischen Schnittform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \times H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H_2(\pi^{-1}(x), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} [E_i] \quad .$$

Diese Form ist stets negativ definit (vgl. z. B. [Laufer<sub>1</sub>] Th. 4.4).

### 1.12 Die Hierarchie der Singularitäten

Im folgenden erinnern wir an einige Begriffe, die im wesentlichen von Arnol'd zur Klassifikation der isolierten Singularitäten von Funktionen eingeführt wurden ([Arnol'd<sub>1</sub>], [Arnol'd<sub>2</sub>]). Dabei übernehmen wir die auf den Fall von Varietäten angepassten Definitionen von Looijenga ([Looijenga<sub>g</sub>]).

Sei  $\phi : Y \rightarrow U$  der Repräsentant einer semiuniversellen Deformation der isolierten Singularität  $(X, x)$ . Dann zerlegt sich  $Y$  in eine Vereinigung von Klassen entsprechend der Äquivalenzrelation

$$y \sim y' \iff (\phi^{-1}(\phi(y)), y) \text{ ist isomorph zu } (\phi^{-1}(\phi(y')), y') \quad .$$

Eine andere isolierte Singularität  $(X', x')$  heißt einfacher als  $(X, x)$ , in Zeichen  $(X', x') \leq (X, x)$ , falls es in jeder Umgebung von  $x$  in  $Y$  Punkte  $y$  mit  $(\phi^{-1}(\phi(y)), y) \cong (X', x')$  gibt. Man sagt dann auch  $(X, x)$  deformiere nach  $(X', x')$ , oder  $(X', x')$  sei eine Nachbarsingularität von  $(X, x)$ .

Man kann zeigen, daß " $\leq$ " eine Halbordnung auf der Menge der Isomorphieklassen von isolierten Singularitäten definiert (vgl. [Looijenga<sub>g</sub>]).

Die Modalität  $\text{mod}(X, x)$  von  $(X, x)$  ist definiert als die kleinste ganze Zahl  $k$ , für die es einen Repräsentanten  $\phi : Y \rightarrow U$  der semiuniversellen Deformation von  $(X, x)$  und eine analytische Menge  $Z \subset Y$  der Dimension  $\leq k$  gibt, die jede Äquivalenzklasse in  $Y$  bezüglich der Relation " $\sim$ " trifft.

Die Relation  $(X', x') \leq (X, x)$  impliziert dann

$$\text{mod}(X', x') \leq \text{mod}(X, x)$$

$$\tau(X', x') \leq \tau(X, x) \quad ,$$

wobei  $\tau$  die Dimension der Basis der semiuniversellen Deformation bezeichnet. Ist zudem  $(X, x)$  ein vollständiger Durchschnitt, also auch  $(X', x')$ , sobettet sich das Milnorgitter  $H'$  von  $(X', x')$  primitiv (d. h. ohne Kotorsion) in das Milnorgitter  $H$  von  $(X, x)$  ein. (Genauer läßt sich ein geometrisches Erzeugendensystem für  $H'$  zu einem geometrischen Erzeugendensystem für  $H$  erweitern. Insbesondere erhält man somit auch Einbettungen der Prä-Milnorgitter. Für Details vgl. [Siersma]). Für die Milnorzahlen folgt mit dem obigen

$$\mu(X', x') \leq \mu(X, x) \quad .$$


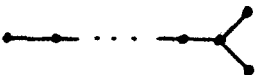


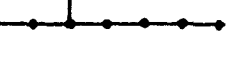
Bemerkung: Es ist praktisch und sehr oft üblich, die Relation " $\leq$ " auch

auf größere Klassen von Singularitäten (topologisch äquivalente, äquisinguläre, zur "gleichen Familie" gehörige) auszudehnen. Entsprechend sagen wir, daß eine Klasse  $\mathcal{X}'$  von isolierten Singularitäten einfacher sei als eine andere  $\mathcal{X}$ , in Zeichen  $\mathcal{X}' \leq \mathcal{X}$ , wenn jeder Repräsentant von  $\mathcal{X}$  in einen Repräsentant von  $\mathcal{X}'$  deformiert. Man beachte, daß die Relation " $\leq$ " zwischen solchen Klassen von Singularitäten nicht unbedingt weiterhin transitiv ist. Gemäß der Grobheit der Klasseneinteilung sind die Konsequenzen der Deformationsrelation entsprechend schwächer. Für die sogenannten  $\mu$ -Homotopieklassen vergleiche man [Siersma].

### 1.13 Einfache Singularitäten

Es gibt zahlreiche Charakterisierungen der sogenannten einfachen Singularitäten, z. B. als die 0-modalen isolierten Singularitäten von zweidimensionalen vollständigen Durchschnitten ([Arnol'd<sub>1</sub>], [Giusti]), als rationale Doppelpunkte von Flächen ([Artin]), oder als Quotientensingularitäten  $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ , wobei  $\Gamma$  eine endliche Untergruppe von  $SL_2(\mathbb{C})$  ist (für eine ausführliche Übersicht vergleiche man [Durfee]). Der Auflösungsgraph einer einfachen Singularität ist ein Dynkindiagramm vom Typ  $A_r$ ,  $D_r$  oder  $E_r$ . Dieser Graph bestimmt die jeweilige Singularität bis auf analytische Isomorphie.



$\Gamma$	$X \subset \mathbb{C}^3$	Auflösungsgraph	Typ
Zyklische Gruppe der Ordnung $n$	$x^n + yz = 0$		$A_{n-1}$
Binäre Diedergruppe der Ordnung $4n$	$x(x^n + y^2) + z^2 = 0$		$D_{n+2}$
Binäre Tetraedergruppe	$x^4 + y^3 + z^2 = 0$		$E_6$
Binäre Oktaedergruppe	$x^3 + xy^3 + z^2 = 0$		$E_7$
Binäre Ikosaedergruppe	$x^5 + y^3 + z^2 = 0$		$E_8$

Zu jeder Numerierung der Eckpunkte des Auflösungsgraphen gibt es eine geometrische Basis des Milnorgitters  $H$  von  $X$ , deren Schnittdiagramm eben dieser numerierte Graph ist (vgl. [Brieskorn<sub>7</sub>]). Insbesondere ist das Milnorgitter  $H$  isomorph zum Gitter  $(H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}), \langle, \rangle)$  der minimalen guten Auflösung  $\tilde{X} \rightarrow X$  von  $X$ . Die Schnittform des Milnorgitters ist somit negativ definit, und dies ist eine weitere Eigenschaft, mittels der sich die einfachen Singularitäten unter den zweidimensionalen Hyperflächensingularitäten auszeichnen (vgl. [Tjurina<sub>2</sub>]). Der Identifikation von  $H$  und  $H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z})$  liegt geometrisch ein Diffeomorphismus zwischen Milnorfaser  $F$  und Auflösung  $\tilde{X}$  zugrunde, den man mittels einer simultanen Auflösung erhält (vgl. dazu 1.14 unten).

Als Konsequenz der oben beschriebenen speziellen Gestalt eines Schnittdia-

grammes identifiziert sich  $H$  nach Vorzeichenwechsel der Schnittform mit dem Wurzelgitter  $Q$  des zugehörigen Wurzelsystems vom Typ  $A, D, E$ . Die Menge der verschwindenden Zykeln in  $H$  bildet dabei die Menge aller Wurzeln, und die Monodromiegruppe  $W$  ist genau die Weylgruppe dieses Systems.

#### 1.14 Simultane Auflösungen

Sei  $\chi : Y \rightarrow U$  ein flacher Morphismus von komplexen Räumen. Eine simultane Auflösung von  $\chi$  besteht aus einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{\phi} & Y \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \chi \\
 V & \xrightarrow{\psi} & U
 \end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- i)  $\theta$  ist ein glatter Morphismus.
- ii)  $\psi$  ist eine verzweigte Überlagerung.
- iii) Die Einschränkung von  $\phi$  auf die Fasern von  $\theta$

$$\phi_v : \theta^{-1}(v) \rightarrow \chi^{-1}(\psi(v)) \quad , \quad v \in V \quad ,$$

liefert Auflösungen der Singularitäten der Fasern von  $\phi$ .

Sei nun  $\chi$  eine flache Familie von Flächen über einer irreduziblen Basis  $U$ . Die generische Faser sei glatt, und die Singularitäten der singulären Fasern seien isoliert und (lokal) vollständige Durchschnitte. Dann zeigten Brieskorn und Tjurina, daß  $\chi$  eine simultane Auflösung genau dann besitzt, wenn die Singularitäten der Fasern von  $\chi$  einfach sind ( $[Brieskorn_1]$ ,  $[Brieskorn_3]$ ,  $[Brieskorn_4]$ ,  $[Tjurina_3]$ ).

1.15 Unimodale Singularitäten

Entsprechend der Monotonie

$$(X', x') \leq (X, x) \implies \text{mod}(X', x') \leq \text{mod}(X, x)$$

lassen sich 0-modale, also einfache, isolierte Singularitäten vollständiger Durchschnitte nur wieder in solche deformieren. Als nächstkomplizierte nach der Klasse der einfachen Singularitäten können wir daher die Klasse der 1-modalen oder unimodalen Singularitäten von zweidimensionalen vollständigen Durchschnitten betrachten. Diese Klasse zerfällt in drei Unterklassen

- i) die einfach elliptischen Singularitäten,
- ii) die Spitzensingularitäten,
- iii) die exceptionellen oder Dreieckssingularitäten.

Für die Klassen gilt

$$i) \leq ii) \leq iii)$$

in dem strikten Sinn, daß keine Singularität der Klasse i) (bzw. ii)) nach ii) oder iii) (bzw. nach iii)) deformiert.

Allgemeiner als für vollständige Durchschnitte von Flächen lassen sich die obigen drei Klassen für normale Flächensingularitäten definieren. Dies werden wir in den folgenden separaten Betrachtungen genauer ausführen. Für weitere Übersicht vergleiche man [Arnol'd<sub>2</sub>], [Brieskorn<sub>6</sub>], [Brieskorn<sub>9</sub>], [Looijenga<sub>8</sub>], sowie die im folgenden zitierten Referenzen.

### 1.16 Einfach elliptische Singularitäten

Eine normale Flächensingularität  $(X, x)$  heißt einfach elliptisch wenn der Ausnahmedivisor  $E = \pi^{-1}(x)$  der minimalen guten Auflösung  $\pi : (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$  eine elliptische Kurve ist. Die Selbstschnittzahl von  $E$  in  $\tilde{X}$  ist dann eine negative ganze Zahl, und man nennt  $d = -\langle E, E \rangle$  den Grad der Singularität.

Eine einfach elliptische Singularität wird bis auf analytische Isomorphie durch ihren Grad  $d$  und die analytische Struktur der Kurve  $E$  eindeutig bestimmt. Insbesondere erhält man jede einfach elliptische Singularität als Kontraktion des Nullschnitts eines negativen Geradenbündels über einer elliptischen Kurve. Das Komplement  $X \setminus x$  des singulären Punktes einer solchen Singularität ist somit ein  $\mathbb{C}^*$ -Bündel über einer elliptischen Kurve. Die Fundamentalgruppe  $\Pi = \pi_1(X \setminus x)$  ist dann eine Heisenberggruppe

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Pi \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$\Pi \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, c \in (1/d) \cdot \mathbb{Z} \right\},$$

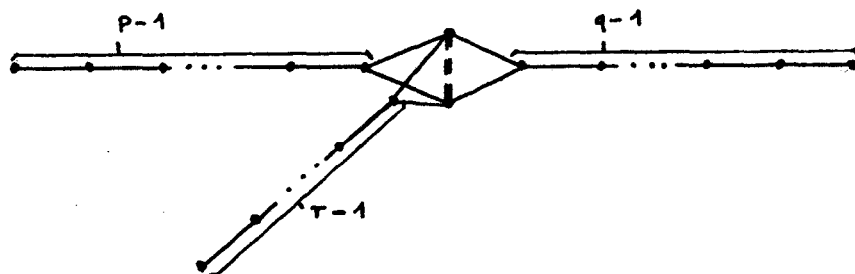
wobei  $d$  der Grad der Singularität ist.

Eine einfach elliptische Singularität  $(X, x)$  ist ein vollständiger Durchschnitt (bzw. eine Hyperfläche) genau dann, wenn der Grad  $d \leq 4$  (bzw.  $\leq 3$ ) ist. In diesem Fall läßt sich  $(X, x)$  durch die folgenden Gleichungen beschreiben (für Details vgl. [Saito<sub>1</sub>]):

Name	Grad	Gleichung(en)	$j(\lambda)$
$\tilde{E}_8$	1	$x^6 + y^3 + z^2 + \lambda xyz = 0$	$\frac{\lambda^{12}}{\lambda^6 - 27 \cdot 16}$
$\tilde{E}_7$	2	$x^4 + y^4 + z^2 + \lambda xyz = 0$	$\frac{(\lambda^4 + 3 \cdot 64)^3}{(\lambda^4 - 64)^2}$
$\tilde{E}_6$	3	$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 0$	$\left( \frac{8 \cdot 27 \lambda - \lambda^4}{\lambda^3 + 27} \right)^3$
$\tilde{D}_5$	4	$x^2 + y^2 + \lambda zw = 0$ $xy + z^2 + w^2 = 0$	$\frac{16 \cdot (\lambda^4 + 14 \lambda^2 + 1)^3}{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1)^4}$

Der Parameter  $\lambda$  in den obigen Gleichungen kann jeden komplexen Wert annehmen, für den die Funktion  $j(\lambda)$  keinen Pol annimmt. Diese Funktion beschreibt die  $j$ -Invariante der exzeptionellen elliptischen Kurve  $E$  gemäß der Konvention von [Hartshorne] IV, 4. (Die Angaben für  $j(\lambda)/1728$  in [Saito<sub>1</sub>] sind nicht immer korrekt, vgl. dazu [Miller]).

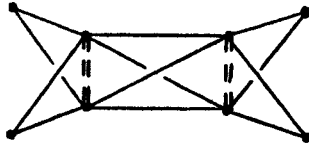
Ist der Grad  $d \leq 3$ , so läßt sich eine geometrische Basis des Milnorgitters  $H$  finden, für die das (unnummerierte) Schnittdiagramm die folgende Form hat:



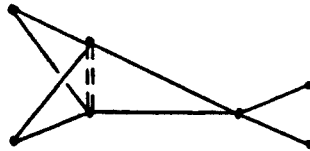
Dabei ist

$$(p, q, r) = \begin{cases} (2, 3, 6) \\ (2, 4, 4) \\ (3, 3, 3) \end{cases} \quad \text{falls} \quad d = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

(Dies sind gerade die ganzzahligen Tripel  $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ , für die  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  gilt.) Für Details sowie eine zulässige Numerierung vergleiche man [Gabrielov]. Im Fall  $d = 4$  gibt es nach [Saito<sub>3</sub>] ein geometrisches Erzeugendensystem mit (unnumeriertem) Schnittdiagramm



Dieses System enthält eine Basis von  $H$  mit dem Diagramm



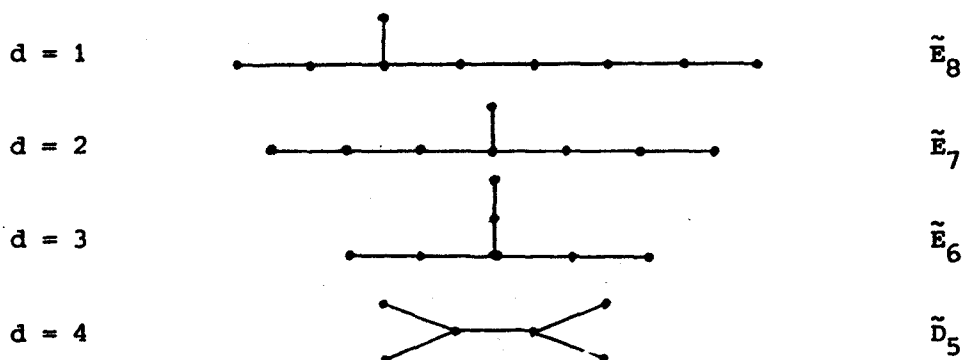
Jedes dieser Milnorgitter  $H$  ist negativ semidefinit mit Signatur  $(\mu_-, 2, 0)$ , wobei  $\mu_- = 8$  (bzw. 7, 6, 5) im Fall  $d = 1$  (bzw. 2, 3, 4) ist. Der Quotient  $H_0 = H/H^\perp$  nach dem Radikal liefert ein Wurzelgitter vom Typ  $E_8$  (bzw.  $E_7$ ,  $E_6$ ,  $D_5$ ). Die Monodromiegruppe  $W$  ist ein semidirektes Produkt

$$W = W_0 \ltimes \mathbb{Z}^{2\mu_-}$$

der zugehörigen endlichen Weylgruppe  $W_0 \subset \text{Aut}(H_0)$  und eines Gitters  $\mathbb{Z}^{2\mu_-}$ , das  $W_0$ -isomorph zu dem Gitter  $H_0 \otimes H^\perp$  ist (vgl. [Looijenga<sub>3</sub>]). Die Menge der verschwindenden Zykeln besteht gerade aus dem Urbild unter  $H \rightarrow H_0$  des endlichen Wurzelsystems in  $H_0$ .

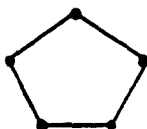
Offensichtlich liegt die Differenz  $h - h'$  der Zykeln zu den Eckpunkten einer

Kante der Form  $\bullet \text{---} \bullet$  im Radikal  $H^\perp$  von  $H$ . Division von  $H$  nach  $\mathbb{Z} \cdot (h-h')$  liefert daher ein Gitter der Signatur  $(\mu_-, 1, 0)$ . Die Bilder der geometrischen Basis von  $H$  bilden dann eine Basis dieses Quotientengitters mit den folgenden Schnittdiagrammen, die den Singularitäten ihre Typbezeichnung gegeben haben und als erweiterte Dynkindiagramme bekannt sind:



Bemerkung: In  $H$  selbst kann es keine  $\mathbb{Z}$ -Basen  $(h_1, \dots, h_\mu)$  von verschwindenden Zykeln geben, bezüglich denen alle Schnittprodukte  $\langle h_i, h_j \rangle$ ,  $i \neq j$ , nichtnegativ, also alle Kanten des Schnittdiagramms durchgezogen sind. Dies folgt mit [LIE] V, 35, vgl. [Siersma] p. 81.

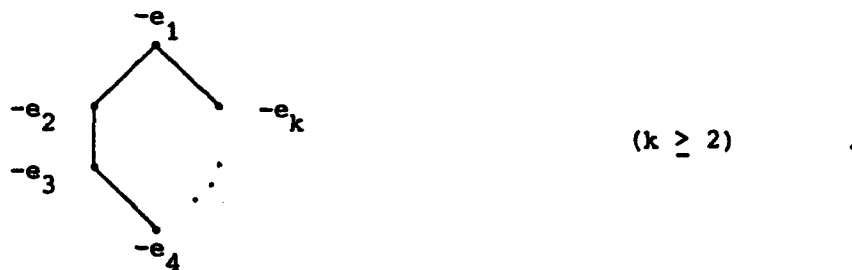
Die einfach elliptischen Singularitäten der Grade  $d = 5, 6, 7, 8$  lassen sich noch glätten, besitzen also noch "Milnorfasern". Diese lassen sich als Komplemente einer elliptischen Kurve in gewissen Del-Pezzo-Flächen beschreiben (vgl. [Pinkham<sub>1</sub>], [Pinkham<sub>2</sub>], [Merindol]). Die entsprechenden Milnorgitter haben wiederum die Signatur  $(\mu_-, 2, 0)$  und projizieren auf die Wurzelgitter der Typen  $A_4$ ,  $A_2 \times A_1$  (in den Fällen  $d = 5, 6$ ). Wie Looijenga gezeigt hat, erhält man im Fall  $d = 5$  auch eine natürliche Projektion auf das semi-definite Gitter vom Typ  $\tilde{A}_4$  mit dem Schnittdiagramm



bezüglich einer geeigneten, geometrisch definierbaren Basis, vgl. [Looijenga<sub>6</sub>].

### 1.17 Spitzensingularitäten

Eine normale zweidimensionale Singularität  $(X, x)$  heißt Spitzensingularität wenn die Komponenten des Ausnahmedivisors  $\pi^{-1}(x)$  einer minimalen guten Auflösung  $\pi : (\tilde{X}, \pi^{-1}(x)) \rightarrow (X, x)$  glatte projektive Geraden sind, die sich gemäß einem zyklischen dualen Graphen schneiden



Eine Spitzensingularität ist bis auf analytische Isomorphie durch ihren Auflösungsgraphen eindeutig bestimmt ([Karras<sub>1</sub>], [Laufer<sub>2</sub>]).

Spitzensingularitäten treten auf bei der Kompaktifizierung Hilbertscher Modulflächen ([Hirzebruch]). Ihre lokale Fundamentalgruppe schreibt sich als semidirektes Produkt

$$\pi_1(X \setminus x) = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2 ,$$

wobei ein Erzeuger von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{Z}^2$  mittels der Matrix

$$\begin{pmatrix} e_k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

operiert. Hierbei sind  $-e_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , die Selbstschnittzahlen der



exzeptionellen Komponenten.

Die negative Definitheit der Auflösungsschnittmatrix impliziert die folgenden Ungleichungen für die  $e_i$  :

1) Gibt es keine exzeptionelle Komponenten mit  $e_i = 1$  , so gilt  $e_i \geq 2$  für alle  $i = 1, \dots, k$  , und  $e_j \geq 3$  für mindestens ein  $j$  .

2) Gibt es eine exzeptionelle Komponente  $E'$  mit  $\langle E', E' \rangle = -1$  , so ist  $k = 2$  , i.e.  $\pi^{-1}(x)$  besteht aus zwei Komponenten  $\pi^{-1}(x) = E \cup E'$  mit  $\langle E, E' \rangle = 2$  , und es gilt  $\langle E, E \rangle = -e$  mit  $e \geq 5$  .

Der Grad  $d$  von  $(X, x)$  ist definiert als die negative Selbstschnittzahl,  $d = -\langle Z, Z \rangle$  , des Fundamentalzykels  $Z$  der Auflösung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  (vgl. [Laufer<sub>2</sub>]). Es gilt dann

$$d = \sum_{i=1}^k (e_i - 2) \quad \text{im Fall 1)}$$

$$d = e - 4 \quad \text{im Fall 2) .}$$

Eine Spitzensingularität  $(X, x)$  ist eine Hyperfläche (bzw. ein vollständiger Durchschnitt) genau dann, wenn ihr Grad  $d \leq 3$  (bzw.  $\leq 4$ ) ist. Sie läßt sich dann durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

Name	Grad	Gleichung(en)
$T_{p,q,r}$	1	$p = 2, q = 3, r > 6$
	2	$x^p + y^q + z^r + xyz = 0$ $p = 2, q \geq 4, r > 4$
	3	$p \geq 3, q \geq 3, r > 3$
$H_{p,q,r,s}$	4	$x^p + y^q + zw = 0$ $p \geq 2, q \geq 2$
		$xy + z^r + w^s = 0$ $r \geq 2, s > 2$

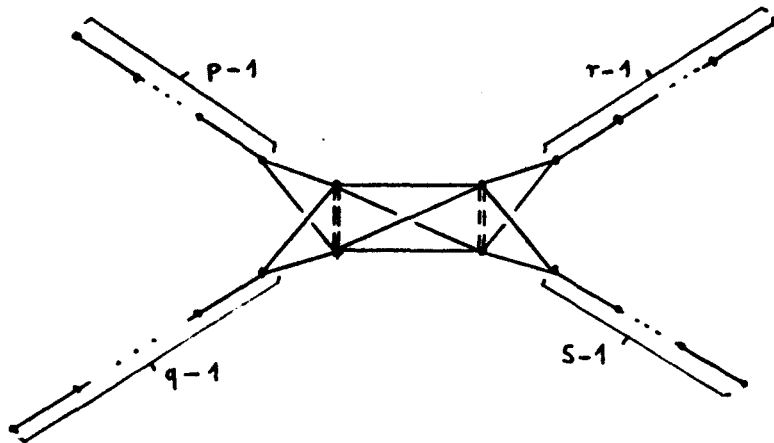
Für die präzise Zuordnung von Gleichungen zu Auflösungsgraphen vergleiche

man [Karras<sub>1</sub>], [Karras<sub>2</sub>], [Kulikov], [Looijenga<sub>6</sub>], [Nakamura<sub>1</sub>].

Ist der Grad  $d \leq 3$ , so besitzt das Milnorgitter  $H$  eine geometrische Basis mit einem Schnittdiagramm wie für die entsprechenden einfach elliptischen Singularitäten (vgl. 1.16), wobei die "Armlängentripel"  $(p, q, r)$  durch den Index des Singularitätentyps  $T_{p,q,r}$  gegeben werden. Insbesondere gilt jetzt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \quad .$$

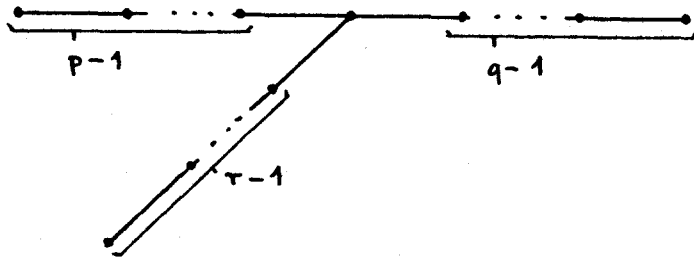
Im Fall  $d = 4$  läßt sich die Existenz eines geometrischen Erzeugendensystems von  $H$  mit einem Schnittdiagramm der folgenden Form vermuten



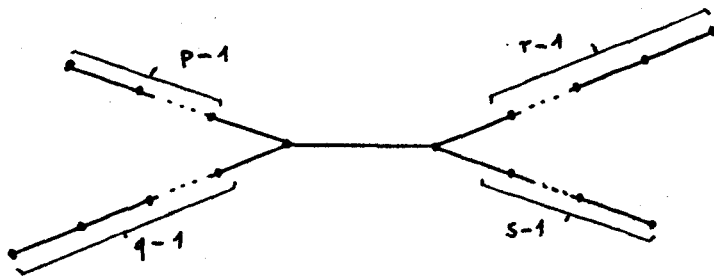
Looijenga gibt eine Basis von  $H$  an, in deren Schnittdiagramm wie im Fall der einfach elliptischen Singularität vom Typ  $\tilde{D}_5$  eine Doppelkante  $\bullet \equiv \bullet$  mit einem Eckpunkt entfällt ([Looijenga<sub>8</sub>]).

Jedes dieser Milnorgitter  $H$  ist indefinit mit Signatur  $(\mu, 1, 1)$ . Der Quotient  $H_0 = H/H^\perp$  nach dem Radikal liefert ein Wurzelgitter zu einer Kac-Moody-Liealgebra (vgl. Kapitel 3). Die Schnittdiagramme zu den Bildern in  $H_0$  der oben beschriebenen Basen haben dann die Gestalt eines Coxeterdiagramms

$T_{p,q,r}$   
 ( $d = 1, 2, 3$ )



$H_{p,q,r,s}$   
 ( $d = 4$ )

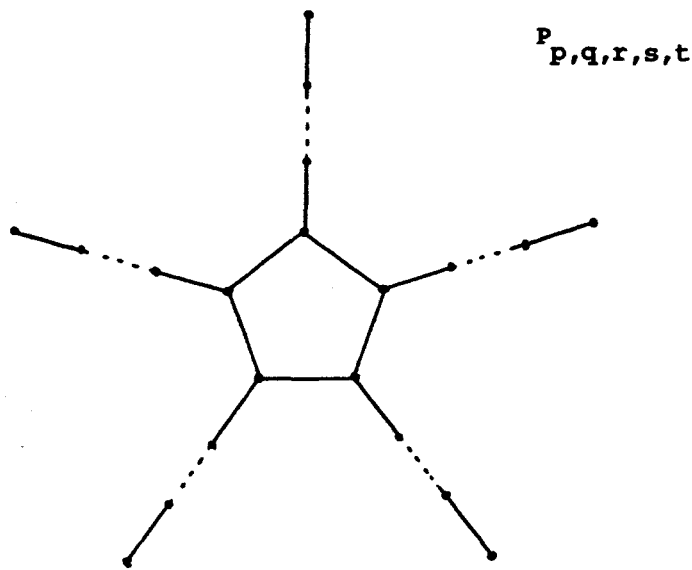


Die Monodromiegruppe  $W$  ist nun ein semidirektes Produkt

$$W = W_0 \ltimes \mathbb{Z}^{\mu-1},$$

wobei  $W_0$  die Weylgruppe des Wurzelsystems in  $H_0$  ist, und  $\mathbb{Z}^{\mu-1}$  sich  $W_0$ -äquivariant mit dem Gitter  $H_0$  identifiziert ([Gabrielov], [Looijenga<sub>2</sub>]). Die verschwindenden Zykeln in  $H$  bilden gerade das Urbild unter  $H \rightarrow H_0$  der reellen Wurzeln in  $H_0$  (vgl. Kapitel 3; 3.4, 3.9).

Looijenga und Nakamura haben auch den Fall der glättbaren Spitzensingularitäten vom Grad  $d = 5$  untersucht und dabei in  $H/H^\perp$  Basen mit den folgenden Schnittdiagrammen erhalten

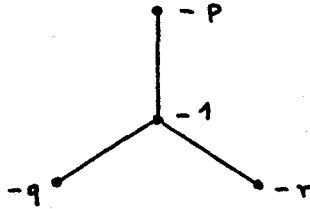


(vgl. [Looijenga<sub>6</sub>], [Nakamura<sub>2</sub>]). Wie im Fall der einfach elliptischen Singularitäten vom Grad 5 tritt die Bedeutung dieses Diagramms in der Deformationstheorie hervor.

### 1.18 Dreieckssingularitäten

Als letzte der unimodalen Klassen verbleibt noch die der exzeptionellen oder Dreieckssingularitäten. Ihre Milnorgitter und Deformationen sind in letzter Zeit ausgiebig studiert worden (vgl. z. B. [Brieskorn<sub>6</sub>], [Brieskorn<sub>8</sub>], [Ebeling<sub>1</sub>], [Looijenga<sub>7</sub>]). Ob Beziehungen zu Liealgebren ähnlich denen im einfachen, einfach elliptischen oder Spitzensingularitäten-Fall bestehen, bleibt vorerst offen. Wir geben daher nur eine kurze Übersicht.

Eine normale Flächensingularität  $(X, x)$  heißt exzeptionell genau dann, wenn der Ausnahmedivisor  $\pi^{-1}(x)$  einer minimalen guten Auflösung  $\pi : (\tilde{X}, \pi^{-1}(x)) \rightarrow (X, x)$  aus vier projektiven Geraden besteht, die sich gemäß dem folgenden dualen Graphen schneiden:



Für die negative Definitheit der Auflösungsschnittmatrix muß das Tripel  $(p, q, r)$  hyperbolisch sein, d. h. die Bedingung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

erfüllen.

Bis auf analytische Isomorphie gibt es genau zwei exzeptionelle Singularitäten zu gegebenem hyperbolischen Tripel, von denen die eine eine "gute"  $\mathbb{C}^*$ -Aktion zuläßt und die andere nicht. Die quasihomogene Singularität heißt auch Dreieckssingularität vom Typ  $D_{p,q,r}$ , da sie sich nach [Dolgachev] mittels der hyperbolischen Dreiecksgruppe  $\Delta(p, q, r)$  zu den Winkeln  $\pi/p$ ,  $\pi/q$ ,  $\pi/r$  konstruieren läßt. Insbesondere ist die lokale Fundamentalgruppe dieser Singularität eine zentrale Erweiterung

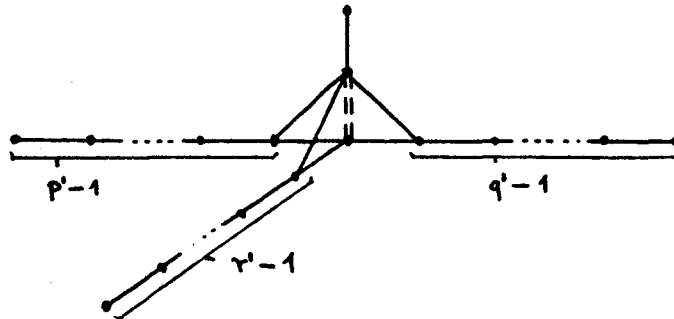
$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X \setminus x) \rightarrow \Delta^+(p, q, r) \rightarrow 1$$

der Untergruppe  $\Delta^+(p, q, r)$  der Rotationen in  $\Delta(p, q, r)$ .

Für 14 (bzw. 22) Tripel  $(p, q, r)$  ist  $(X, x)$  eine Hyperfläche (bzw. ein vollständiger Durchschnitt). Die zugehörigen Gleichungen findet man in [Arnol'd<sub>2</sub>], [Pinkham<sub>3</sub>], [Looijenga<sub>8</sub>].

Für die Milnorgitter der 14 Hyperflächen  $D_{p,q,r}$  hat Gabrielov geometri-

sche Basen mit Schnittdiagrammen der folgenden Gestalt konstruiert:



Dabei durchlaufen die Tripel  $(p', q', r')$  die Menge der 14 Tripel  $(p, q, r)$  gemäß der Arnol'd'schen "strange duality" (vgl. [Arnol'd<sub>2</sub>], [Pinkham<sub>3</sub>]). Die Signatur der Schnittform ist  $(\mu, 0, 2)$ . Sowohl die Monodromiegruppe  $W$  als auch die Menge  $V$  der verschwindenden Zyklen lassen sich mittels der Schnittform allein charakterisieren. Nach [Ebeling<sub>1</sub>], [Pinkham<sub>4</sub>] gilt

$$W = O^*(H) \quad ,$$

wobei  $O^*(H)$  mittels der Spinornorm und des Diskriminantengitters von  $H$  definiert ist (vgl. loc. cit.). Nach Looijenga (vgl. [Brieskorn<sub>7</sub>], [Brieskorn<sub>8</sub>]) gilt

$$V = \{ h \in H \mid \langle h, h \rangle = -2 \text{ und } \langle h, H \rangle = \mathbb{Z} \} \quad .$$

Diese beiden Resultate gelten allgemeiner für alle vollständigen Durchschnitte, die in die exzeptionellen deformieren (vgl. [Ebeling<sub>3</sub>]), und damit u. a. für alle Hyperflächensingularitäten außer denen der Serie  $T_{p,q,r}$   $((p, q, r) \neq (2, 3, 7), (2, 4, 5), (3, 3, 4))$ .

1.19 Periodenabbildungen

Als wesentliches Hilfsmittel beim Studium der semiuniversellen Deformation vor allem der in den letzten Abschnitten 1.13 - 1.18 vorgestellten Singularitäten haben sich lokale Periodenabbildungen erwiesen

([Looijenga<sub>1,3,4,6</sub>]). Wir werden hier die allgemeine Konstruktion beschreiben und später auf spezielle Anwendungen zurückkommen.

Sei  $\phi : Y \rightarrow U$  semiuniverselle Deformation einer isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension  $n$ ,  $\psi = \phi^* : Y^* \rightarrow U^*$  eine genügend kleine Milnorfaserung (vgl. 1.5),  $u_0 \in U^*$  ein Basispunkt und  $F = \psi^{-1}(u_0)$  die Milnorfaser. Das direkte Bild

$$H := R^n \psi_* \mathbb{C}_{Y^*}$$

der konstanten Garbe auf  $Y^*$  ist dann eine lokal konstante Garbe über  $U^*$  assoziiert zur Monodromiedarstellung

$$\rho : \pi_1(U^*, u_0) \longrightarrow \text{Aut}(H^n(F, \mathbb{C}))$$

Sei  $\pi : \tilde{U} \rightarrow U^*$  die durch den Kern von  $\rho$  definierte Überlagerung, i.e.  $\pi$  ist Überlagerung mit Galoisgruppe  $W = \rho(\pi_1(U^*, u_0))$ . Dann ist  $\pi^* H$  eine konstante Garbe auf  $\tilde{U}$ , isomorph zu  $H^n(F, \mathbb{C})_{\tilde{U}}$ .

Sei nun  $\omega \in H^0(Y^*, \Omega^n_{Y^*/U^*})$  eine relative holomorphe  $n$ -Form auf  $Y^*$ . Für jedes  $u \in U^*$  ist dann die Einschränkung  $\omega|_{\psi^{-1}(u)}$  eine geschlossene  $n$ -Form auf  $\psi^{-1}(u)$ , und definiert somit eine Kohomologieklass

$$[\omega](u) \in H^n(\psi^{-1}(u), \mathbb{C})$$

Wir erhalten daher einen Schnitt  $[\omega]$  in der  $H$  zugeordneten kohärenten

Garbe  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{U^*}$ . Sei  $\pi^*[\omega]$  der induzierte Schnitt in  $(\pi^*\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{U}} = H^n(F, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{U}}$ . Dann definiert die Zuordnung

$$\tilde{u} \longmapsto \pi^*[\omega](\tilde{u}), \quad \tilde{u} \in \tilde{U},$$

eine holomorphe  $W$ -äquivariante Abbildung

$$p_\omega : \tilde{U} \longrightarrow H^n(F, \mathbb{C}).$$

Diese heißt die der Form  $\omega$  zugeordnete Periodenabbildung.

Die Periodenabbildung  $p_\omega$  heie nichtentartet, oder  $\omega$  heie zulässig, falls  $p_\omega$  eine analytische Immersion ist.

Existiert ein analytischer Quotient des Bildes  $p_\omega(\tilde{U}) \subset H^n(F, \mathbb{C})$  nach der Monodromiegruppe  $W$ , so steigt die Periodenabbildung  $p_\omega$  ab zu einer analytischen Abbildung

$$\overline{p_\omega} : U^* = \tilde{U}/W \longrightarrow p_\omega(\tilde{U})/W.$$

Bei geeigneter Wahl einer zulässigen Form  $\omega$  läßt sich für die Singularitäten der Abschnitte 1.13 - 1.18 das Verhalten von  $p_\omega$  bzw.  $\overline{p_\omega}$  (Struktur des Bildes, Randverhalten) so genau beschreiben, daß eine Rekonstruktion des Raumes  $U$  und der Diskriminante  $D = U \setminus U^*$  möglich ist (loc. cit.).

Aus allgemeiner Sicht lassen sich Überlegungen anstellen für geeignete Wahlen von  $\omega$ , oder über die "wesentliche" Unabhängigkeit der Periodenabbildung von der Wahl von  $\omega$ . Dazu vergleiche man z. B. die Arbeiten [Saito<sub>2</sub>], [Varchenko-Givental'].



## KAPITEL 2: EINFACHE LIEGRUPPEN UND EINFACHE SINGULARITÄTEN

### 2.1 Adjungierte Quotienten reductiver Gruppen

Im folgenden erinnern wir an einige grundlegende Eigenschaften der adjungierten Quotienten reductiver Gruppen, die wesentlich sind zum Verständnis der Beziehungen einfacher Liegruppen zu einfachen Singularitäten. Für Details betreffend reductive Gruppen vergleiche man [Borel], [Humphreys], [Springer]. Einzelheiten über die adjungierten Quotienten finden sich in [Steinberg<sub>2</sub>], sowie [Slodowy<sub>1</sub>], [Slodowy<sub>2</sub>] und der dort zitierten Literatur.

Sei nun  $G$  eine komplexe reductive Gruppe mit einfach zusammenhängendem Teil  $DG$ , maximalem Torus  $T$  und Boreluntergruppe  $B$ ,  $T \subset B$ . Wir nennen  $r = \dim T$  den reductiven und  $l = \dim T \cap DG$  den halbeinfachen Rang von  $G$ . Die Gruppe der Charaktere  $\text{Hom}(T, \mathbb{C}_m^*)$  von  $T$  werde mit  $H^*$ , die der Ko-Charaktere  $\text{Hom}(G_m, T)$  mit  $H$  bezeichnet. Es sei  $\Sigma \subset H^*$  das System der Wurzeln von  $T$  in  $G$  und  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Sigma$  das durch die Boreluntergruppe  $B$  festgelegte System einfacher Wurzeln, entsprechend  $V = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee\} \subset H$  das System der zugehörigen einfachen Kowurzeln, und  $W = N_G(T)/T$  die Weylgruppe.

Jedes Element  $x \in G$  besitzt eine Jordanzerlegung

$$x = x_s \cdot x_u = x_u \cdot x_s$$

als Produkt eines eindeutig bestimmten halbeinfachen Elementes  $x_s \in G$  mit einem (ebenso eindeutig bestimmten) kommutierenden unipotenten Element

$x_u \in G$ . Jedes halbeinfache Element in  $G$  ist zu einem Element in  $T$  konjugiert, und sind zwei Elemente von  $T$  in  $G$  konjugiert, so auch schon unter  $W$ .

Die Zuordnung

$$\chi : G \longrightarrow T/W ,$$

die jedem Element  $x \in G$  den Durchschnitt  $\chi(x) = \zeta(x_g) \cap T$  der Konjugationsklasse  $\zeta(x_g)$  des halbeinfachen Teils mit  $T$  zuweist, ist somit eine wohldefinierte Abbildung und heißt der adjungierte Quotient von  $G$ .

Die Abbildung  $\chi$  ist realisierbar als Morphismus algebraischer Varietäten, genauer noch ist  $\chi$  der Quotient von  $G$  nach der adjungierten Aktion von  $G$ , d. h. der Aktion von  $G$  auf  $G$  durch Konjugation, in der Kategorie der komplex algebraischen Varietäten. Die Algebraizität von  $\chi$  ergibt sich aus der folgenden charaktertheoretischen Interpretation.

Da  $DG$  einfach zusammenhängend ist, existieren fundamentale dominante Gewichte  $\omega_i \in H^*$ ,  $i = 1, \dots, l$

$$\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij} .$$

Diese lassen sich zu einer Basis  $\omega_1, \dots, \omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_r$  von  $H^*$  erweitern mit  $\omega_j|_{T \cap DG} \equiv 1$  für  $j > l$ . Seien

$$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i) , \quad i = 1, \dots, r ,$$

die den  $\omega_i$  zugehörigen irreduziblen Darstellungen von  $G$  (für  $i > l$  sind diese eindimensional) und

$$\chi_i : G \longrightarrow \mathbb{C} , \quad \chi_i(x) = \text{Spur}(\rho_i(x))$$

deren Charaktere. Setzen wir

$$\bar{\chi} : G \longrightarrow \mathbb{C}^r, \quad \bar{\chi}(x) = (\chi_1(x), \dots, \chi_r(x)),$$

so faktorisiert die Einschränkung  $\bar{\chi}|_T : T \rightarrow \mathbb{C}^r$  über einen Isomorphismus

$$\iota : T/W \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^*)^{r-l}$$

des Quotientenraumes  $T/W$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^r$  (die im Fall  $G = DG$ , also  $r = l$ , mit  $\mathbb{C}^r$  übereinstimmt)

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\bar{\chi}|_T} & \mathbb{C}^r \\ \downarrow & & \uparrow \\ T/W & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^*)^{r-l} \end{array}$$

und für alle  $x \in G$  gilt

$$\bar{\chi}(x) = \iota(\chi(x)).$$

Daher läßt sich  $\bar{\chi}$  mit  $\chi$  identifizieren.

## 2.2 Die Fasern des adjungierten Quotienten

Nach Konstruktion ist  $\chi$  invariant gegenüber Konjugation. Daher zerlegt sich jede Faser als Vereinigung von Konjugationsklassen. Ebenfalls nach Konstruktion hat jede Faser die Form  $\chi^{-1}(\chi(t))$  für ein bis  $W$ -Konjugation eindeutig bestimmtes Element  $t \in T$ . Sei  $e \in G$  das Neutralelement. Die Faser  $\chi^{-1}(\chi(e))$  besteht gerade aus allen unipotenten Elementen in  $G$  und heißt daher die unipotente Varietät  $\text{Uni}(G)$  von  $G$ . Für ein beliebiges Element

$t \in T$  ist der Zentralisator  $Z_G(t)$  von  $t$  in  $G$  eine reduktive Untergruppe mit maximalem Torus  $T$  und Wurzelsystem  $\Sigma(t) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(t) = 1\}$ . Sei  $\text{Uni}(t)$  die unipotente Varietät von  $Z_G(t)$ . Mittels der Jordanzerlegung erhält man nun einen  $G$ -Isomorphismus der Faser  $\chi^{-1}(\chi(t))$  auf das homogene Bündel

$$G \times_{Z_G(t)} \text{Uni}(t)$$

assoziiert zur Prinzipalfaserung  $G \rightarrow G/Z_G(t)$  und zur Konjugationsaktion von  $Z_G(t)$  auf  $\text{Uni}(t)$ . Dieser Isomorphismus reduziert das Problem der Beschreibung der Fasern von  $\chi$  auf das der unipotenten Varietät in beliebigen reduktiven Gruppen.

Ein Element  $x \in G$  heißt regulär (bzw. subregulär) genau dann, wenn die Dimension  $\dim Z_G(x)$  des Zentralisators von  $x$  gleich  $r$  (bzw. gleich  $r+2$ ) ist. Sinngemäß heißt eine Konjugationsklasse regulär (bzw. subregulär), wenn eines und damit jedes Element dieser Klasse regulär (bzw. subregulär) ist. Die unipotente Varietät  $\text{Uni}(G)$  (und damit jede Faser von  $\chi$ ) zerfällt in endlich viele Konjugationsklassen, von denen genau eine regulär ist. Der Zariski-Abschluß dieser Klasse ist gleich  $\text{Uni}(G)$ , insbesondere ist  $\text{Uni}(G)$  irreduzibel. Das Komplement der regulären Klasse in  $\text{Uni}(G)$  ist von der Kodimension zwei in  $\text{Uni}(G)$  und enthält genauso viele subreguläre Klassen wie  $G$  einfache Faktoren besitzt. Die unipotente Varietät von  $G$  ist isomorph zum Produkt der unipotenten Varietäten der einfachen Faktoren von  $G$ .

### 2.3 Die Auflösung der Fasern.

Sei  $G \times^B B$  das homogene Bündel assoziiert zur  $B$ -Prinzipalfaserung  $G \rightarrow G/B$  und zur Konjugationsaktion von  $B$  auf  $B$ . Da jedes Element von  $G$  nach  $B$  konjugiert ist, erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \phi : G \times^B B &\longrightarrow G \\ g * b &\longmapsto gbg^{-1} \end{aligned}$$

einen surjektiven  $G$ -äquivarianten Morphismus (zur Notation vgl. [Slodowy<sub>2</sub>] 3.7), der auch eigentlich ist. Die Boreluntergruppe  $B$  ist das semidirekte Produkt  $T \rtimes U$  von  $T$  mit dem unipotenten Radikal  $U$  von  $B$ . Sei  $\tau : B \rightarrow T$  die Projektion auf  $T$ . Diese induziert einen  $G$ -invarianten glatten Morphismus

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} : G \times^B B &\longrightarrow T \\ g * b &\longmapsto \tau(b) \end{aligned}$$

Ist  $\bar{\phi} : T \rightarrow T/W$  die natürliche Quotientenabbildung, so wird das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} G \times^B B & \xrightarrow{\phi} & G \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \chi \\ T & \xrightarrow{\bar{\phi}} & T/W \end{array}$$

Nach Springer und Grothendieck ist dieses Diagramm eine simultane Auflösung von  $\chi$  im Sinne von 1.14.

#### 2.4 Der Satz von Brieskorn

Von jetzt ab sei  $G$  zusätzlich einfach vom Typ  $A_\ell$ ,  $D_\ell$ ,  $E_\ell$ . Es gilt also  $r = \ell$ . Sei  $x \in G$  ein subreguläres unipotentes Element,  $\sigma = \text{Ad}(G) \cdot x$  der adjungierte Orbit durch  $x$ , d. h. die Konjugationsklasse von  $x$ , und  $S \subset G$  eine transversale Scheibe an diesen Orbit im Punkte  $x$ . Dann hat  $S$  die Dimension  $r+2 = \ell+2$ . Das folgende Resultat wurde von Grothendieck vermutet und von Brieskorn bewiesen ([Brieskorn<sub>4</sub>], für Details und eine Diskussion der Fälle  $B_\ell$ ,  $C_\ell$ ,  $F_4$  und  $G_2$  vgl. man [Slodowy<sub>2</sub>]).

#### Satz:

- i) Der Raumkeim  $(X, x) = (S \cap \text{Uni}(G), x)$  ist eine einfache Singularität vom gleichen Typ wie  $G$ .
- ii) Die Einschränkung  $\chi|_S : (S, x) \rightarrow (T/W, \chi(e))$  des adjungierten Quotienten auf  $S$  realisiert eine semiuniverselle Deformation der einfachen Singularität  $(X, x)$ .

Dieser Satz hat zahlreiche Anwendungen auf die Deformationstheorie der einfachen Singularitäten:

So erhält man durch Einschränkung der simultanen Auflösung von  $X$  (vgl. 2.3) auf  $S$  eine simultane Auflösung der semiuniversellen Deformation von  $(X, x)$ , welche vor der Existenz des Satzes in jedem Einzelfall separat konstruiert worden war (vgl. 1.14).

Der Satz ermöglicht auch eine vollständige Beschreibung der Konfigurationen von Singularitäten in beliebigen Fasern der semiuniversellen Deformation. Für  $t$  nahe genug bei  $e$  ist die Faser  $S \cap \chi^{-1}(\chi(t))$  singularär genau in

ihren subregulären Elementen. Diesen entsprechen über den Isomorphismus  $\chi^{-1}(\chi(t)) \cong G \times_{Z_G(t)} \text{Uni}(t)$  genau die subregulären Orbits in  $\text{Uni}(t)$ .

Mit der Aussage i) des Satzes erhält man dann, daß alle Singularitäten von  $S \cap \chi^{-1}(\chi(t))$  einfach sind und den gleichen Typ haben wie die einfachen Faktoren der Gruppe  $Z_G(t)$ . Diese einfachen Faktoren werden wiederum durch die Zusammenhangskomponenten des Wurzelsystems  $\Sigma(t) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(t) = 1\}$  in ihrem Typ beschrieben. Für  $t$  nahe bei  $e$  läßt sich eine Basis  $\Delta(t)$  einfacher Wurzeln von  $\Sigma(t)$  stets zu einer Basis von  $\Sigma$  ergänzen. Daher ist das Dynkindiagramm von  $\Delta(t)$  ein Unterdiagramm des Diagramms von  $G$  bzw.  $(X, x)$ .

Die Beschreibung der singulären Konfigurationen in allen Fasern der semiuniversellen Deformation läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Sei  $\psi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  semiuniverselle Deformation von  $(X, x)$  und  $\mathcal{D}$  die Menge aller nicht notwendig zusammenhängenden Dynkindiagramme aus Komponenten der Form  $A, D, E$ . Durch die Zuordnung

$$v \in U \longmapsto \text{Dynkindiagramm der Singularitäten in } \psi^{-1}(v)$$

erhalten wir eine Bewertung

$$\delta : U \longrightarrow \mathcal{D} .$$

Der Raum  $T/W$  erhält ebenfalls eine Bewertung

$$\sigma : T/W \longrightarrow \mathcal{D}$$

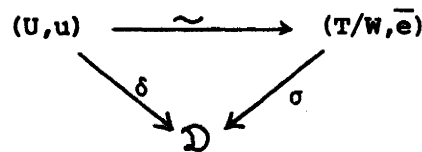
auf die folgende Weise. Sei  $\bar{t} \in T/W$  und  $t \in T$  ein Repräsentant von  $\bar{t}$  in  $T$ . Der Stabilisator  $Z_W(t) = \{w \in W \mid w \cdot t = t\}$  wird dann von den Spie-

gelungen zu den Wurzeln  $\alpha \in \Sigma(t)$  erzeugt und ist bis auf Konjugation unabhängig von der Wahl von  $t$ . Es sei nun

$$\sigma(\bar{t}) = \text{Dynkindiagramm von } \Sigma(t) = \text{Dynkindiagramm von } Z_W(t).$$

Somit reflektiert  $\sigma$  das Verzweigungsverhalten der verzweigten Überlagerung  $T \rightarrow T/W$ . Die Aussage über die Nachbarfasern lautet jetzt einfach:

Der bewertete Keim  $(U, u, \delta)$  ist isomorph zu dem bewerteten Keim  $(T/W, \bar{e}, \sigma)$



Diese Beschreibung des Basisraums der semiuniversellen Deformation in Termen einer natürlichen verzweigten Überlagerung, die zur Monodromiegruppe der Singularität assoziiert ist, wurde seit der Existenz von Brieskorns Satz zu einem Modell für die Untersuchung der Deformationen komplizierter Singularitäten. Unter Benutzung von Periodenabbildungen (1.19) oder dazu verwandter geometrischer Methoden wurde so die Struktur der semiuniversellen Deformation aller unimodalen sowie einiger nicht-zweidimensionaler Singularitäten erfolgreich geklärt ([Brieskorn<sub>6,8</sub>], [Knörrer], [Looijenga<sub>3,4,6,7,9</sub>], [Merindol], [Pinkham<sub>2,3,4</sub>], [Wirthmüller<sub>2,3</sub>]).

Ebenfalls mittels einer Periodenabbildung hat Looijenga eine von Brieskorns Satz unabhängige Konstruktion des Basisraums der semiuniversellen Deformation einer einfachen Singularität geliefert ([Looijenga<sub>1,3</sub>], für noch eine andere auf [Tjurina<sub>3</sub>] aufbauende Konstruktion vgl. [Pinkham<sub>5</sub>]).



In den nächsten beiden Abschnitten werden wir sehen, daß der Liealgebentheoretische Rahmen auf natürliche Weise ebenfalls eine Periodenabbildung für die semiuniversellen Deformationen der einfachen Singularitäten liefert.

### 2.5 Die koadjungierte Darstellung

Sei  $G$  reduktiv wie in 2.1,  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  die Liealgebra von  $G$  und  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(T)$  die Liealgebra von  $T$ . Die Gruppe  $G$  operiert auf  $\mathfrak{g}$  mittels der adjungierten Darstellung

$$\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) .$$

Wegen der Existenz einer Killingform, d. h. einer nichtentarteten,  $\text{Ad}(G)$ -invarianten, symmetrischen Bilinearform auf  $\mathfrak{g}$ , identifiziert sich  $\mathfrak{g}$  mit dem Dualraum  $\mathfrak{g}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  und  $\text{Ad}$  mit der zu  $\text{Ad}$  kontragredienten koadjungierten Darstellung

$$\text{Ad}^* : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*) .$$

Der algebraische Quotient von  $\mathfrak{g}$  nach der Aktion von  $\text{Ad}(G)$  läßt sich, ähnlich wie der adjungierte Quotient von  $G$ , mit Hilfe der jetzt additiven Jordanzerlegung

$$x = x_s + x_n , \quad [x_s, x_n] = 0 ,$$

für Elemente von  $\mathfrak{g}$  in der Form

$$\chi' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}/W$$

realisieren, wobei  $x \in \mathfrak{g}$  auf den Durchschnitt  $(\text{Ad}(G) \cdot x_{\mathfrak{g}}) \cap \mathfrak{h}$  des Orbits des halbeinfachen Teiles  $x_{\mathfrak{g}}$  von  $x$  mit  $\mathfrak{h}$  abgebildet wird (vgl. [Kostant<sub>1</sub>]).

Die analytische Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  induziert einen Isomorphismus  $\overline{\exp} : V' \xrightarrow{\sim} V$  von einer Umgebung  $V'$  von  $\chi'(0)$  in  $\mathfrak{h}/W$  auf eine Umgebung  $V$  von  $\chi(e)$  in  $T/W$  und einen  $G$ -äquivalenten Isomorphismus  $\chi'^{-1}(V') \xrightarrow{\sim} \chi^{-1}(V)$  der Urbilder, so daß das folgende Diagramm cartesianisch ist (vgl. [Slodowy<sub>2</sub>] 3.15):

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{g} \supset \chi'^{-1}(V') & \xrightarrow{\exp} & \chi^{-1}(V) \subset G & & \\
 \downarrow \chi' & & \downarrow & & \downarrow \chi \\
 \mathfrak{h}/W \supset V' & \xrightarrow{\overline{\exp}} & V \subset T/W & & 
 \end{array}$$

Für die Untersuchung der Deformationstheorie der einfachen Singularitäten genügt es somit die transversale Scheibe  $S$  an den subregulären unipotenten Orbit in  $G$  durch eine solche an den entsprechenden subregulären nilpotenten Orbit in  $\mathfrak{g}$  (oder auch in  $\mathfrak{g}^*$ ) zu ersetzen. Wir glauben, daß dies nicht bloß technische Vorteile mit sich bringt (die z. B. beim Beweis der Semiuniversalität von  $\chi'|_S : S \rightarrow \mathfrak{h}/W$  in [Slodowy<sub>2</sub>] 8.7 wesentlich benutzt werden), sondern daß auch prinzipielle Gründe für eine Liealgebrentheoretische Interpretation oder, genauer, eine Interpretation im Rahmen der koadjungierten Darstellung sprechen.

Einer dieser Gründe ist die Existenz einer symplektischen Struktur auf allen koadjungierten Orbits einer beliebigen (endlichdimensionalen) Liegruppe  $G$ .

Diese wurde von Kirillov entdeckt und spielt eine wichtige Rolle in der Darstellungstheorie (vgl. [Kirillov] Ch 15, [Kostant<sub>2</sub>]). Sie ist wie folgt definiert (vgl. loc. cit.):

Sei  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$  ein Orbit der koadjungierten Darstellung  $\text{Ad}^*$ ,  $\lambda \in \mathcal{O}$  und  $\underline{z}_\lambda$  die Liealgebra des Zentralisators  $Z_\lambda = \{g \in G \mid \text{Ad}^*(g) \cdot \lambda = \lambda\}$ . Dann identifiziert sich der Tangentialraum  $T_\lambda \mathcal{O}$  von  $\mathcal{O}$  im Punkt  $\lambda$  mit  $\mathfrak{g}/\underline{z}_\lambda$  und das Tangentialbündel  $T_* \mathcal{O}$  mit dem assoziierten Bündel  $G \times^{Z_\lambda} (\mathfrak{g}/\underline{z}_\lambda)$ . Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & [x, y] & \longmapsto & \lambda([x, y]) \end{array}$$

faktoriert über eine nichtentartete, schiefsymmetrische und  $Z_\lambda$ -invariante Form

$$\omega_\lambda : (\mathfrak{g}/\underline{z}_\lambda) \times (\mathfrak{g}/\underline{z}_\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}$$

und definiert daher eine  $G$ -invariante nichtentartete 2-Form  $\omega$  auf  $\mathcal{O}$ .

Diese Form ist geschlossen, und sie ist regulär (bzw. analytisch, bzw. differenzierbar) wenn  $G$  algebraisch (bzw. analytisch, bzw. differenzierbar) ist. In jedem Punkt  $\lambda' \in \mathcal{O}$  hat  $\omega$  die Form

$$\omega_{\lambda'} : (\mathfrak{g}/\underline{z}_{\lambda'}) \times (\mathfrak{g}/\underline{z}_{\lambda'}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega_{\lambda'}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda'([x, y])$$

für Repräsentanten  $x, y \in \mathfrak{g}$  von  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{g}/\underline{z}_{\lambda'}$ .

Bemerkung: Man beachte, daß für die Definition der Form  $\omega$  die Endlich-

dimensionalität von  $G$  keine Rolle spielt.

Im nächsten Abschnitt werden wir die jetzt für jeden Orbit einzeln definierte Kirillov-Form wenigstens auf einer offenen Teilmenge einer reduktiven Liealgebra als relative Differentialform interpretieren.

### 2.6 Eine Lie-theoretische Periodenabbildung

Sei  $G$  wieder reaktiv und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Killingform, die  $\mathfrak{g}^*$  mit  $\mathfrak{g}$  und die koadjungierte Darstellung  $\text{Ad}^*$  mit der adjungierten Darstellung  $\text{Ad}$  identifiziert. Die Kirillov-Form auf einem adjungierten Orbit  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$  ist dann auf dem Tangentialraum  $T_\lambda^* \mathcal{O} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_\lambda$  definiert durch

$$\omega_\lambda : \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_\lambda \times \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega_\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \lambda, [x, y] \rangle$$

für Repräsentanten  $x, y \in \mathfrak{g}$  von  $\bar{x}, \bar{y}$ .

Sei  $\mathfrak{g}^x$  die  $\text{Ad}(G)$ -stabile Teilmenge der regulären halbeinfachen Elemente in  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{h}^x = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^x$  die  $W$ -stabile Teilmenge der regulären Elemente in  $\mathfrak{h}$ . Dann ist  $\mathfrak{g}^x$  das Urbild von  $\mathfrak{h}^x/W$  unter  $\chi'$ . Sei  $\bar{\mathfrak{g}}^x := G/T \times \mathfrak{h}^x \cong G \times^T \mathfrak{h}^x$  (hier operiert  $T$  trivial auf  $\mathfrak{h}^x$ ),  $\phi : \bar{\mathfrak{g}}^x \rightarrow \mathfrak{g}^x$  die Abbildung  $\phi(gT, \lambda) = \text{Ad}(g) \cdot \lambda$  und  $\bar{\phi} : \mathfrak{h}^x \rightarrow \mathfrak{h}^x/W$  die natürliche Quotientenabbildung.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathfrak{g}}^x & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g}^x \\ \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \chi' \\ \mathfrak{h}^x & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathfrak{h}^x/W \end{array}$$

ist dann cartesisch, und  $\phi$  realisiert  $\underline{g}^X$  als Quotienten der affinen Varietät  $\underline{g}^X = G/T \times \underline{h}^X$  nach der freien Rechtsaktion der Weylgruppe  $W$

$$\begin{aligned} \underline{g}^X \times W &\longrightarrow \underline{g}^X \\ ((gT, \lambda), w) &\longmapsto (gwT, w^{-1} \cdot \lambda) \end{aligned} .$$

Insbesondere ist  $\underline{g}^X$  ein algebraisches Faserbündel über  $\underline{h}^X/W$  mit Fasern  $G$ -isomorph zu  $G/T$  (für Details vgl. [Slodowy<sub>1</sub>] 3.3). Die Zuordnung

$$\lambda \longmapsto \omega_\lambda \in \Lambda^2(\underline{g}/\underline{z}_\lambda)^* = \Lambda^2 T_\lambda^*(\text{Ad}(G) \cdot \lambda)$$

definiert also eine relative 2-Form

$$\omega : \underline{g}^X \longrightarrow \Lambda^2 T^*(\underline{g}^X | (\underline{h}^X/W)) .$$

Lemma 1: Die Form  $\omega$  ist regulär.

Beweis: Es genügt die Regularität der zurückgezogenen Form  $\phi^* \omega$  nachzuweisen. Dies folgt unmittelbar, wenn wir  $\phi^* \omega$  als den Schnitt

$$\begin{array}{ccc} \underline{g}^X & \longrightarrow & \Lambda^2 T^*(\underline{g}^X | \underline{h}^X) \\ \parallel & & \parallel \\ G \times^T \underline{h}^X & \longrightarrow & G \times^T (\underline{h}^X \times \Lambda^2(\underline{g}/\underline{h})^*) \\ \\ (g * \lambda) & \longmapsto & g * (\lambda, \omega_\lambda) \end{array}$$

interpretieren, da die Abbildung  $\underline{h}^X \rightarrow \Lambda^2(\underline{g}/\underline{h})^*$ ,  $\lambda \mapsto \omega_\lambda$ , die Einschränkung einer linearen Abbildung auf  $\underline{h}$  ist. (Hier haben wir die Tangentialräume  $\underline{g}/\underline{z}_\lambda$  für alle  $\lambda \in \underline{h}^X$  mit  $\underline{g}/\underline{h}$  identifiziert.)

Da die Einschränkung von  $\omega$  auf einen Orbit  $\mathcal{O} \subset \underline{g}^X$  bzw. von  $\phi^* \omega$  auf

eine Faser von  $\underline{\mathfrak{g}}^X \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}^X$  geschlossen ist, stellt sich die Frage nach der Kohomologieklassse dieser Form.

Nach einem Satz von A. Borel (vgl. [Borel<sub>2</sub>]) definiert die Abbildung

$$\tau : H^* \longrightarrow H^2(G/T, \mathbb{Z}) \quad ,$$

die jedem Charakter  $\lambda \in H^*$  die negative Chernklasse des der entsprechenden Darstellung  $T \rightarrow \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$  assoziierten Bündels  $G \times^T \mathbb{C}(\lambda)$  zuordnet, einen  $W$ -äquivarianten Isomorphismus (die Aktion von  $W$  auf  $H^2(G/T, \mathbb{Z})$  ist dabei von der Rechtsaktion von  $W$  auf  $G/T$  induziert). Wir erhalten somit eine Identifikation von  $H^2(G/T, \mathbb{C})$  mit  $H^* \otimes \mathbb{C} = \underline{\mathfrak{h}}^*$ , und, über die Killingform, mit  $\underline{\mathfrak{h}}$ .

Sei  $\lambda \in \underline{\mathfrak{h}}$ ,  $\omega_\lambda \in \Lambda^2(\underline{\mathfrak{g}}/\underline{\mathfrak{h}})^*$  definiert durch  $\omega_\lambda(X, Y) = \langle \lambda, [X, Y] \rangle$ , und  $\omega(\lambda) : G/T \rightarrow G \times^T \Lambda^2(\underline{\mathfrak{g}}/\underline{\mathfrak{h}})^*$ ,  $gT \mapsto g * \omega_\lambda$ , die resultierende  $G$ -invariante geschlossene 2-Form auf  $G/T$ .

Lemma 2: Die Kohomologieklassse  $[\omega(\lambda)] \in H^2(G/T, \mathbb{C})$  ist gleich  $\lambda$  unter der obigen Identifikation von  $H^2(G/T, \mathbb{C})$  mit  $\underline{\mathfrak{h}}$ .

Beweis: Offensichtlich genügt es die Behauptung für ganzzahlige  $\lambda$ , d. h.  $\lambda \in H^*$  zu beweisen. In diesem Fall ist dann zu zeigen, daß  $[\omega(\lambda)]$  die Chernklasse des Geradenbündels  $G \times^T \mathbb{C}(-\lambda)$  ist. Dies folgert man entweder mit [Borel-Hirzebruch] 14.6 oder mit [Kostant<sub>2</sub>] 5.7 durch Reduktion auf die kompakten Formen  $G_{\mathbb{C}}$ ,  $T_{\mathbb{C}}$  von  $G$ ,  $T$  (in [Kostant<sub>2</sub>] erscheint  $\omega(\lambda)$  als die Krümmungsform einer  $T_{\mathbb{C}}$ -invarianten Metrik auf  $G \times^T \mathbb{C}(-\lambda)$ ).

Sei nun  $G$  einfach vom Typ  $A$ ,  $D$  oder  $E$ , und  $S \subset \underline{\mathfrak{g}}$  eine genügend

kleine transversale Scheibe an den subregulären nilpotenten Orbit in  $\underline{\mathfrak{g}}$ . In [Slodowy<sub>1</sub>] 4.5 wird gezeigt, daß die Inklusion  $S \cap \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  für alle adjungierten Orbits  $\mathcal{O}$  in  $\underline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$  nahe bei  $\text{Nil}(\underline{\mathfrak{g}})$  einen Isomorphismus in der zweiten Kohomologie induziert

$$H^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{O} \cap S, \mathbb{C})$$

Die Milnorfaserung  $S^{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}/W$  wird ebenso wie die Faserung  $\underline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}/W$  nach Rückzug mit der Überlagerung  $\underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}/W$  trivialisiert (vgl. z. B. loc. cit.).

Sei  $\tilde{U} \subset \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}$  das Urbild unter  $\bar{\phi}$  von  $\chi'(S^{\mathbb{R}}) \subset \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}/W$ . (Für eine geeignete Scheibe  $S$  gilt  $\tilde{U} = \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}$ , vgl. loc. cit..) Fixieren wir eine Faser  $F = S^{\mathbb{R}} \cap \mathcal{O}$  von  $\chi' : S^{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathfrak{h}}^{\mathbb{R}}/W$  als "die" Milnorfaser, so erhalten wir nun mit den Lemmata 1 und 2 in der Terminologie von 1.19:

Satz: Die Einschränkung der Kirillov-Form  $\omega$  auf  $S^{\mathbb{R}}$  induziert eine Periodenabbildung

$$p_{\omega} : \tilde{U} \longrightarrow H^2(F, \mathbb{C}) ,$$

die bezüglich der Identifikation von  $H^2(F, \mathbb{C}) = H^2(\mathcal{O}, \mathbb{C})$  mit  $\underline{h}$  die Einschränkung der Identität  $\text{id}_{\underline{h}}$  auf  $\tilde{U}$  ist. Insbesondere ist  $p_{\omega}$  nicht entartet.

Bemerkung: Es wäre interessant die obige Periodenabbildung mit der in [Looijenga<sub>1,3</sub>] zu identifizieren. In Anbetracht von Theorem 3 in [Varchenko-Givental] sind beide Abbildungen auf jeden Fall in dem dortigen Sinne äquivalent.

KAPITEL 3: KAC-MOODY-LIEALGEBREN3.1 Wurzelbasen

Sei  $R$  ein kommutativer Ring, der die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  enthält (i.e.  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},$  oder  $\mathbb{C}$  in unseren Anwendungen).

Eine R-Wurzelbasis ist ein Tripel  $(H, \nabla, \Delta)$  bestehend aus

- einem freien  $R$ -Modul  $H$  von endlichem Rang,
- einer Familie  $\nabla = (h_i)_{i \in I}$ , von Elementen  $h_i \in H$  bezüglich einer endlichen Indexmenge  $I$ ,
- und einer Familie  $\Delta = (\alpha_i)_{i \in I}$ , von Elementen  $\alpha_i \in H^* = \text{Hom}_R(H, R)$  bezüglich derselben Indexmenge  $I$ .

Der Rang  $r$  von  $H$  heißt der reduktive, und die Cardinalität  $l = |I|$  von  $I$  heißt der halbeinfache Rang von  $(H, \nabla, \Delta)$ . Wir lassen auch den Fall  $I = \emptyset$ , also  $l = 0$ , zu.

Die  $\alpha_i$ ,  $i \in I$ , (bzw.  $h_i \in H$ ,  $i \in I$ ) heißen die einfachen Wurzeln (bzw. Kowurzeln) von  $(H, \nabla, \Delta)$ . Statt  $h_i$  schreiben wir gelegentlich auch  $(\alpha_i)^\vee$  oder  $h_{\alpha_i}$ , entsprechend  $\Delta^\vee$  für  $\nabla$ . Die  $R$ -wertige Matrix  $A = ((A_{ij}))$ ,  $i, j \in I$ , mit

$$A_{ij} = \alpha_j(h_i)$$

heißt die Strukturmatrix von  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Ein Morphismus von  $R$ -Wurzelbasen

$$(\phi, \sigma) : (H, (h_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I}) \rightarrow (H', (h'_j)_{j \in J}, (\alpha'_j)_{j \in J})$$



besteht aus einem  $R$ -Homomorphismus

$$\phi : H \rightarrow H'$$

und einer Bijektion

$$\sigma : I \rightarrow J$$

mit der Eigenschaft

$$\phi(h_i) = h'_{\sigma(i)} \quad , \quad i \in I \quad ,$$

und

$$\phi^*(\alpha'_j) = \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \quad , \quad j \in J \quad ,$$

wobei  $\phi^* : H'^* \rightarrow H^*$  die zu  $\phi$  transponierte Abbildung bezeichnet.

Seien  $A = ((A_{ik}))$  ,  $i, k \in I$  ,  $A' = ((A'_{jl}))$  ,  $j, l \in J$  , die Strukturmatrizen der beiden Wurzelbasen. Dann gilt offensichtlich

$$A_{ik} = A'_{\sigma(i)\sigma(k)} \quad .$$

Wir folgern auch unmittelbar

$$\text{Ker } \phi \subset \{h \in H \mid \alpha_i(h) = 0 \text{ f\u00fcr alle } i \in I\}$$

$$\text{Ker } \phi^* \subset \{\gamma \in H' \mid \gamma(h'_j) = 0 \text{ f\u00fcr alle } j \in J\}$$

$$\text{Bild } \phi \supset R \cdot \{h'_j \mid j \in J\}$$

$$\text{Bild } \phi^* \supset R \cdot \{\alpha_i \mid i \in I\}$$

Wir sagen  $(\phi, \sigma)$  sei ein Isomorphismus von Wurzelbasen, falls  $\phi : H \rightarrow H'$  ein Isomorphismus ist.

Eine  $R$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  hei\u00dft frei, falls die Elemente  $h_i \in H$  ,  $i \in I$  , und die Elemente  $\alpha_i \in H^*$  ,  $i \in I$  , jeweils  $R$ -linear unabh\u00e4ngig sind.

Jede Matrix  $A \in M_1(R)$  läßt sich als Strukturmatrix einer R-Wurzelbasis mit halbeinfachem Rang 1 realisieren. Soll diese frei sein, so muß der reduktive Rang  $r$  mindestens den Wert  $2l - \text{Rang}(A) = 1 + \text{Korang}(A)$  haben. Jede R-Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ist Subquotient einer freien R-Wurzelbasis, d. h. es gibt Morphismen

$$(\phi, \sigma) : (H, \nabla, \Delta) \rightarrow (H', \nabla', \Delta')$$

$$(\psi, \tau) : (H'', \nabla'', \Delta'') \rightarrow (H', \nabla', \Delta')$$

von R-Wurzelbasen, wobei  $(H'', \nabla'', \Delta'')$  frei,  $\psi$  surjektiv und  $\phi$  injektiv ist. Ist  $A \in M_1(R)$  und  $R$  ein Körper, so sind alle freien R-Wurzelbasen mit Strukturmatrix  $A$  und minimalem reduktiven Rang  $r = 1 + \text{Korang}(A)$  zueinander isomorph.

Seien  $(H, \nabla, \Delta)$ ,  $(H', \nabla', \Delta')$  zwei R-Wurzelbasen,  $\nabla = (h_i)_{i \in I}$ ,  $\nabla' = (h_j)_{j \in J}$ ,  $\Delta = (\alpha_i)_{i \in I}$ ,  $\Delta' = (\alpha_j)_{j \in J}$ . Sei

$$H'' = H \oplus H'$$

$$\nabla'' = (h_k)_{k \in I \cup J}$$

$$\Delta'' = (\alpha_k)_{k \in I \cup J}$$

Fassen wir  $\nabla''$  (bzw.  $\Delta''$ ) in kanonischer Weise als Familie von Elementen in  $H''$  (bzw.  $(H'')^* = H^* \oplus H'^*$ ) auf, so definiert

$$(H'', \nabla'', \Delta'')$$

eine neue R-Wurzelbasis, die direkte Summe

$$(H, \nabla, \Delta) \oplus (H', \nabla', \Delta') \quad .$$

Eine R-Wurzelbasis heißt unzerlegbar falls sie sich nicht als direkte Summe

zweier  $R$ -Wurzelbasen  $(H, \nabla, \Delta)$  und  $(H', \nabla', \Delta')$  mit  $H, H' \neq \{0\}$  schreiben läßt.

Eine Matrix  $A = ((A_{ij}))_{i,j \in I}$  heißt zusammenhängend falls es keine Zerlegung

$$I = I_1 \cup I_2$$

in disjunkte nichtleere Teilmengen  $I_1, I_2$  gibt mit

$$A_{ij} = A_{ji} = 0$$

für alle  $i \in I_1, j \in I_2$ .

Eine  $R$ -Wurzelbasis heißt zusammenhängend, wenn ihre Strukturmatrix zusammenhängend ist.

Sei nun  $R$  ein Körper.

Jede unzerlegbare  $R$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit halbeinfachem Rang 1 und Strukturmatrix  $A$  hat dann einen reduktiven Rang  $r \leq 1 + \text{Korang}(A)$ . Es gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  frei ist. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei und unzerlegbar, so ist  $(H, \nabla, \Delta)$  auch zusammenhängend (dies gilt nicht unbedingt für nichtfreie Basen!). Jede freie  $R$ -Wurzelbasis zerlegt sich in eine direkte Summe unzerlegbarer freier Wurzelbasen

$$\bigoplus_{i=1}^n (H_i, \nabla_i, \Delta_i) .$$

(Die Zahl der Summanden mit  $\nabla_i = \Delta_i = \emptyset$  ist dabei gleich  $r-1-\text{Korang}(A)$ .)

Sei  $(H, (h_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I})$  eine  $R$ -Wurzelbasis und  $\phi : R \rightarrow R'$  ein Homomorphismus kommutativer Ringe,  $\mathbb{Z} \subset R'$ . Mit

$$(H \otimes_R R', (h'_i)_{i \in I}, (\alpha'_i)_{i \in I}) ,$$

wobei  $h'_i$  (bzw.  $\alpha'_i$ ) das Bild von  $h_i$  in  $H \otimes_R R'$  (bzw. das Bild von  $\alpha_i$  in  $H^* \otimes_R R' = (H \otimes_R R')^*$ ) ist, erhalten wir dann eine  $R'$ -Wurzelbasis, die Basiserweiterung  $(H, \nabla, \Delta)_{R'}$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  mittels  $\phi$ .

Konventionen: Ist  $(H, \nabla, \Delta) = (H, (h_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I})$  eine freie  $R$ -Wurzelbasis, so sind die Abbildungen

$$I \rightarrow H$$

$$i \mapsto h_i$$

und

$$I \rightarrow H$$

$$i \mapsto \alpha_i$$

injektiv. Wir können dann  $\nabla$  (bzw.  $\Delta$ ) als indizierte Teilmenge von  $H$  (bzw.  $H^*$ ) auffassen, und es gilt dann in  $H$  (bzw.  $H^*$ )

$$\nabla \cap -\nabla = \emptyset$$

$$\Delta \cap -\Delta = \emptyset .$$

Die durch die Indizierung vermittelte Bijektion

$$\Delta \rightarrow \nabla$$

$$\alpha_i \mapsto h_i$$

läßt sich nun in der Form

$$\Delta \rightarrow \nabla$$

$$\alpha \mapsto h_\alpha = \alpha^\vee$$

schreiben. Ähnlich können wir die Strukturmatrix  $A$  durch  $\Delta$  indizieren

$$A = ((A_{\alpha\beta}))_{\alpha, \beta \in \Delta}$$

mit

$$A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha) \quad .$$

Bei der Konstruktion gewisser Liealgebren in diesem und dem nächsten Kapitel ermöglichen diese Fakten eine ökonomische Notation. Obwohl wir uns im wesentlichen auf die Untersuchung freier Wurzelbasen beschränken werden (und können) wollen wir jedoch auch den Fall nichtfreier Wurzelbasen betrachten. In dieser Situation gelten die obigen Eigenschaften i. a. nicht mehr:

Beispiele: 1) Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $H = \mathbb{Z}h_1 \oplus \mathbb{Z}h_2$ ,  $\nabla = (h_i)$ ,  $\Delta = (\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mit

$$\alpha_1(h_1) = 2 = -\alpha_1(h_2)$$

$$\alpha_2(h_2) = 2 = -\alpha_2(h_1) \quad .$$

In diesem Beispiel sind die Abbildungen

$$i \mapsto h_i \quad \text{und} \quad i \mapsto \alpha_i$$

noch injektiv, so daß wir  $\nabla$  (bzw.  $\Delta$ ) als Teilmenge von  $H$  (bzw.  $H^*$ ) auffassen können. Es gilt jedoch  $\Delta \cap -\Delta = \Delta \neq \emptyset$ .

2) Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $H = \mathbb{Z}h_1 \oplus \mathbb{Z}h_2$ ,  $\nabla = (h_i)$ ,  $\Delta = (\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mit

$$\alpha_i(h_1) = \alpha_i(h_2) = 2, \quad i = 1, 2 \quad .$$

Es gilt also  $\alpha_1 = \alpha_2$  in  $H^*$ .

Um dennoch die besagte ökonomische Notation auch im Fall nichtfreier Wurzelbasen beibehalten zu können, werden wir die folgenden Konventionen für eine Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  benutzen:

Nach Definition ist  $\nabla$  (bzw.  $\Delta$ ) eine Teilmenge von  $I \times H$  (bzw.  $I \times H^*$ ).

Sei

$$h = (i, h_i) \in \nabla$$

$$\alpha = (j, \alpha_j) \in \Delta$$

$$x \in H$$

$$\gamma \in H^*$$

Wir setzen dann

$$\gamma(h) := \gamma(h_i)$$

$$\alpha(x) := \alpha_j(x)$$

$$\alpha(h) := \alpha_j(h_i)$$

$$-h := (i, -h_i)$$

$$-\alpha := (j, -\alpha_j)$$

$$\alpha^\vee = h_\alpha := (j, h_j)$$

also

$$-\nabla = \{-h \mid h \in \nabla\}$$

$$-\Delta = \{-\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$$

$$\Delta^\vee = \nabla$$

Es gilt dann (in  $I \times H$  bzw.  $I \times H^*$ )

$$\nabla \cap -\nabla = \emptyset$$

$$\Delta \cap -\Delta = \emptyset ,$$

und die natürlichen Abbildungen

$$I \rightarrow \nabla , \quad I \rightarrow \Delta$$

sind nach Definition injektiv.

Ist die Basis  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so sind die obigen Operationen unter den Einbettungen

$$\nabla \rightarrow H, \quad \Delta \rightarrow H^*$$

verträglich mit den entsprechenden Operationen auf  $H, H^*$  und  $H \times H^*$ .

Das Wurzelgitter  $\Gamma$  (bzw. Kowurzelgitter  $L$ ) einer  $R$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ist der freie  $\mathbb{Z}$ -Modul

$$\Gamma = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \alpha$$

auf  $\Delta$ , (bzw.

$$L = \bigoplus_{h \in \nabla} \mathbb{Z} h$$

auf  $\nabla$ ). Durch die Vorschrift

$$\alpha = (i, \alpha_i) \mapsto \alpha_i$$

$$, \quad i \in I ,$$

$$h = (i, h_i) \mapsto h_i$$

werden  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen

$$\mu : \Gamma \rightarrow H^*$$

$$\nu : L \rightarrow H$$

definiert, die Paarungen

$$\Gamma \times L \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\gamma, h) \mapsto \gamma(h) = \mu(\gamma)(\nu(h))$$

und

$$\Gamma \times H \rightarrow R$$

$$(\gamma, h) \mapsto \gamma(h) = \mu(\gamma)(h)$$

induzieren. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so sind  $\mu$  und  $\nu$  Einbettungen, und wir identifizieren dann  $\Gamma$  (bzw.  $L$ ) mit ihren Bildern in  $H^*$  (bzw.  $H$ ).

### 3.2 Verallgemeinerte Cartanmatrizen, Symmetrisierbarkeit

Sei  $I$  eine endliche Menge und  $A = ((A_{ij}))$ ,  $i, j \in I$ , eine ganzzahlige Matrix. Dann heißt  $A$  eine verallgemeinerte Cartanmatrix oder GCM (für: generalized Cartan matrix) falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= 2 & , \quad i \in I & , \\ A_{ij} &\leq 0 & , \quad i \neq j \in I & , \\ A_{ij} &= 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0 & , \quad i, j \in I & . \end{aligned}$$

Gelegentlich werden wir eine verallgemeinerte Cartanmatrix auch einfach als Cartanmatrix bezeichnen. Ursprünglich war die letztere Benennung für die Matrizen von endlichem Typ reserviert (vgl. 3.5).

Eine Wurzelbasis heißt Cartansch oder GCM-Datum, wenn ihre Strukturmatrix eine verallgemeinerte Cartanmatrix ist.

Jede Cartansche  $R$ -Wurzelbasis läßt sich als Basiserweiterung einer Cartanschen  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis mittels  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  erhalten.

Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche Wurzelbasis, so können wir  $\nabla$  (bzw.  $\Delta$ ) als indizierte Teilmenge von  $H$  (bzw.  $H^*$ ) auffassen. Wegen



$$\alpha_i(h_i) = A_{ii} = 2$$

$$\alpha_j(h_i) = A_{ij} \leq 0$$

$$\alpha_i(h_j) = A_{ji} \leq 0$$

sind die  $h_i \in H$  (bzw.  $\alpha_i \in H^*$ ) nämlich paarweise verschieden.

Sei  $R$  ein Ring wie in 3.1. Eine  $R$ -wertige Matrix  $A = ((A_{ij}))$ ,  $i, j \in I$ , heißt symmetrisierbar, wenn es Elemente  $d_i \in R \setminus \{0\}$ ,  $i \in I$ , gibt mit der Eigenschaft

$$d_i A_{ij} = d_j A_{ji}$$

für alle  $i, j \in I$ .

Sind die  $d_i$  invertierbar, so gilt auch

$$A_{ij} \cdot (d_j)^{-1} = A_{ji} \cdot (d_i)^{-1} .$$

Ist  $A$  zusammenhängend, so sind die  $d_i$  bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt.

Eine Wurzelbasis heie symmetrisch (bzw. symmetrisierbar) wenn ihre Strukturmatrix symmetrisch (bzw. symmetrisierbar) ist.

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  eine symmetrisierbare  $R$ -Wurzelbasis, und  $D \cdot A$  die symmetrisierte Strukturmatrix. Dann induziert  $D \cdot A$  eine symmetrische Bilinearform auf dem Wurzelgitter

$$(\cdot, \cdot) : \Gamma \times \Gamma \rightarrow R$$

durch

$$((i, \alpha_i), (j, \alpha_j)) = d_i A_{ij} .$$

Durch

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_{ij} A_{ij}$$

erhalten wir eine entsprechende Form auf dem Bild  $\mu(\Gamma) \subset H^*$ , die wir zu einer symmetrischen Bilinearform

$$(\ , \ ) : H^* \times H^* \rightarrow R$$

auf ganz  $H^*$  mit der Eigenschaft

$$(\omega, \alpha_i) = \frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_i) \omega(h_i) \quad , \quad \omega \in H^* \quad , \quad i \in I \quad ,$$

ausdehnen können. Eine solche (im allgemeinen nicht eindeutige) Form auf  $H^*$  nennen wir invariant.

Sind die  $d_{ij}$  invertierbar, z. B. wenn  $R$  ein Körper ist, oder wenn wir eine  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis nach Basiswechsel als  $\mathbb{Q}$ -Wurzelbasis auffassen, so definieren wir auf dem Kowurzelgitter  $L$  (bzw. seinem Bild  $\nu(L) \subset H$ ) eine symmetrische Bilinearform durch

$$((i, h_i), (j, h_j)) = A_{ij} d_j^{-1}$$

(bzw.  $(h_i, h_j) = A_{ij} d_j^{-1}$ ). Die Form auf  $\nu(L)$  läßt sich zu einer symmetrischen Bilinearform

$$(\ , \ ) : H \times H \rightarrow R$$

mit der Eigenschaft

$$(h, h_i) = \frac{1}{2} (h_i, h_i) \alpha_i(h) \quad , \quad h \in H \quad , \quad i \in I \quad ,$$

fortsetzen. Eine solche (im allgemeinen nicht eindeutig bestimmte) Fortsetzung nennen wir eine invariante Form auf  $H$ .

### 3.3 Coxeterdiagramme

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche Wurzelbasis. Das Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  ist dann wie folgt definiert:

$\underline{\Delta}$  ist ein Graph mit Eckenmenge  $\Delta$ , und zwei Eckpunkte  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , werden durch eine Kante genau dann verbunden, wenn

$$\alpha(h_\beta) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \beta(h_\alpha) \neq 0)$$

gilt. Zusätzlich wird eine solche Kante mit einem Coxeterkoeffizienten

$m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  bewertet. Dieser wird durch die folgende Tabelle definiert

$\alpha(h_\beta) \cdot \beta(h_\alpha)$	0	1	2	3	$\geq 4$
$m_{\alpha\beta}$	2	3	4	6	$\infty$

Die Bewertung mit 3 entfällt üblicherweise (ebenso wie die der leeren Kante mit 2).

Es ist offensichtlich, daß das Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  nur von der Strukturmatrix

$$A = ((A_{\alpha\beta})) \quad , \quad \alpha, \beta \in \Delta$$

$$A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha)$$

abhängt. Wir sagen daher auch,  $\underline{\Delta}$  sei das Coxeterdiagramm von  $A$ .

Das Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  ist genau dann zusammenhängend (als 1-dimensionaler Komplex) wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  zusammenhängend im Sinne von 3.1 ist.

Beispiele:  $l = \text{card}(\Delta) = 2$

Strukturmatrix A	Diagramm $\underline{\Delta}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\bullet \quad \bullet$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{---}$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{---} \quad 4$
$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{---} \quad \infty$

### 3.4 Weylgruppen

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis. Sei  $\underline{h} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  und  $\underline{h}^* = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ . Jeder Wurzel  $\alpha \in \Delta$  wird durch

$$s_{\alpha} : \underline{h} \rightarrow \underline{h}$$

$$s_{\alpha}(h) = h - \alpha(h)h_{\alpha} \quad , \quad h \in \underline{h} \quad ,$$

eine Spiegelung auf  $\underline{h}$  zugeordnet, die sowohl  $H$  als auch  $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \underline{h}$  in sich überführt. Die kontragrediente Aktion von  $s_{\alpha}$  auf  $\underline{h}^*$  wird durch die analoge Formel

$$s_{\alpha}(\omega) = \omega - \omega(h_{\alpha})\alpha \quad , \quad \omega \in \underline{h}^* \quad ,$$

beschrieben. Auch diese Aktion überführt  $H^*$  und  $H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \underline{h}^*$  in sich.

Die von den Transformationen  $s_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , erzeugte Gruppe  $W \subset \text{Aut}(\underline{h})$  heißt die Weylgruppe der Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Zerlegt sich  $(H, \nabla, \Delta)$  in die direkte Summe zweier Wurzelbasen

$$(H_1, \nabla_1, \Delta_1) \oplus (H_2, \nabla_2, \Delta_2)$$

so zerlegt sich die Weylgruppe  $W$  in das direkte Produkt

$$W = W_1 \times W_2$$

der zugehörigen Weylgruppen. Aus der Tatsache, daß es zu gegebener Strukturmatrix bis auf Isomorphie nur eine freie  $\mathbb{C}$ -Wurzelbasis minimaler Dimension gibt, folgt somit, daß die Struktur der Gruppe  $W$  für eine freie Wurzelbasis unabhängig von der Auswahl der (freien) Wurzelbasis zu gegebener Strukturmatrix ist, also nur von der letzteren abhängt.

Von nun an sei  $(H, \nabla, \Delta)$  frei. Mittels einer geometrischen Analyse der  $W$ -Aktion auf  $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  oder den später einzuführenden Kac-Moody-Liealgebren läßt sich zeigen, daß  $(W, \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\})$  ein Coxetersystem ist, dessen Coxeterdiagramm gerade das in 3.3 eingeführte Diagramm  $\underline{\Delta}$  ist (vgl. [Moody-Teo], [Vinberg], [Looijenga<sub>5</sub>]). Daraus folgt unter anderem, daß die Einschränkungen der  $W$ -Aktion von  $H$  auf das Kowurzelgitter  $L$  bzw. von  $H^*$  auf das Wurzelgitter  $\Gamma$  treu sind.

Im folgenden fassen wir  $\nabla$  (bzw.  $\Delta$ ) als Teilmenge von  $H$  (bzw.  $H^*$ ) auf. Die Bahn  $W \cdot \Delta$  der einfachen Wurzeln unter  $W$  heißt die Menge  $\Sigma^{\mathbb{R}}$  der reellen oder Weylwurzeln, entsprechend  $W \cdot \nabla$  die Menge der reellen oder Weylkowurzeln. Man kann zeigen, daß es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung der Bijektion

$$\nabla : \Delta \rightarrow \nabla$$

zu einer  $W$ -equivarianten Bijektion

$$v : \Sigma^R \rightarrow W \cdot \nabla$$

gibt ([Looijenga<sub>5</sub>], [Kac-Peterson<sub>1</sub>]). Daher bezeichnen wir  $W \cdot \nabla$  auch mit  $\Sigma^{R,v}$  und  $\gamma^v, \gamma \in \Sigma^R$ , mit  $h_\gamma$ .

Sei  $\gamma = w(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Dann heißt

$$s_\gamma = w s_\alpha w^{-1}$$

die Spiegelung zu  $\gamma$ . Es gilt

$$s_\gamma(h) = h - \gamma(h)h_\gamma, \quad h \in \underline{h},$$

und

$$s_\gamma(\omega) = \omega - \omega(h_\gamma)\gamma, \quad \omega \in \underline{h}^*.$$

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  auch symmetrisierbar und  $(, )$  eine invariante Form auf  $H^*$  (bzw.  $H$ ). Dann gilt für alle  $\gamma \in \Sigma^R$ :

$$s_\gamma(\omega) = \omega - \frac{2(\omega, \gamma)}{(\gamma, \gamma)} \gamma, \quad \omega \in H^*$$

und

$$s_\gamma(h) = h - \frac{2(h, h_\gamma)}{(h_\gamma, h_\gamma)} h_\gamma, \quad h \in H.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß die Weylgruppe  $W$  die Form  $(, )$  auf  $H^*$  (bzw.  $H$ ) invariant läßt.

Bemerkungen: 1) Die Weylgruppen für nichtfreie Wurzelbasen können gegenüber denen des freien Falls degenerieren. Sie sind im allgemeinen echte Quotienten der "freien" Weylgruppen (für Beispiele betrachte man den affinen Fall).

2) Mit den gleichen Formeln wie oben läßt sich eine Gruppe  $W$  für Wurzelbasen definieren, die nicht Cartansch sind. Diese Gruppe wird jedoch keine

Beziehung mehr zu den in 3.6 eingeführten kontragredienten Liealgebren haben. Anders verhält es sich mit den in Kapitel 4 behandelten GIM-Liealgebren zu GIM-Wurzelbasen. Wir werden darauf jedoch gesondert in 4.3 eingehen.

### 3.5 Klassifikation der verallgemeinerten Cartanmatrizen

Sei  $I$  eine endliche Menge und  $A = ((A_{ij}))$ ,  $i, j \in I$ , eine verallgemeinerte Cartanmatrix. Wir sagen  $A$  sei zusammenhängend genau dann, wenn es keine Partition

$$I = I_1 \cup I_2$$

in nichtleere disjunkte Teilmengen  $I_1$ ,  $I_2$  gibt mit

$$A_{ij} = A_{ji} = 0$$

für alle  $i \in I_1$ ,  $j \in I_2$ .

Eine Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $A$  zusammenhängend ist.

Vinberg ([Vinberg]) hat eine grobe Klassifikation der zusammenhängenden verallgemeinerten Cartanmatrizen gegeben. Dazu betrachten wir die folgende, nicht unbedingt freie  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit Strukturmatrix  $A$ :

- $H$  sei der freie  $\mathbb{Z}$ -Modul über  $\nabla$ , i.e.  $H := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} h_i$
- die einfachen Wurzeln  $\alpha_i \in H^*$ ,  $i \in I$ , seien durch

$$\alpha_i(h_j) = A_{ji}, \quad i, j \in I,$$

definiert.

Sei nun

$$H^+ := \left\{ \sum_{i \in I} k_i h_i \in H \mid k_i \geq 0 \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

$$H^{++} := \left\{ \sum_{i \in I} k_i h_i \in H \mid k_i > 0 \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

$$\bar{C} := \{h \in H \mid \alpha_i(h) \geq 0 \text{ für alle } i \in I\}.$$

$$C := \{h \in H \mid \alpha_i(h) > 0 \text{ für alle } i \in I\}.$$

$$K := \{h \in H \mid \alpha_i(h) = 0 \text{ für alle } i \in I\}.$$

Dann ist A entweder

- vom sphärischen oder endlichen Typ, d. h.  $\det A \neq 0$  und  $\bar{C} \subset H^{++} \cup \{0\}$

oder

- vom euklidischen oder affinen Typ, d. h.  $\text{Rang}(A) = l-1$ ,  $l = |I|$ , und  $\bar{C} = K = \mathbb{Z}h$  für ein  $h \in H^{++}$ ,

oder

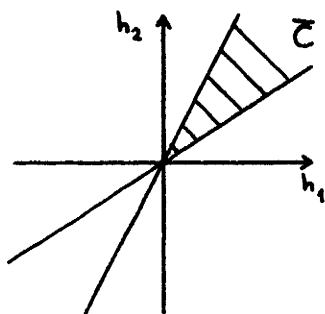
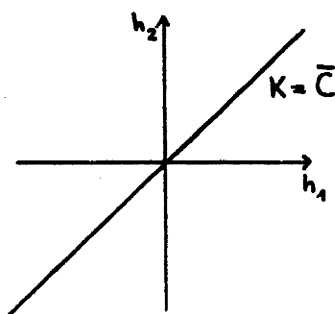
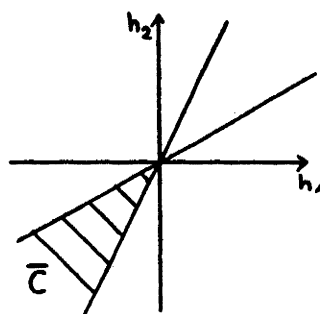
- vom allgemeinen Typ, d. h. es gibt ein  $h \in H^{++}$  mit  $-h \in C$ , und  $H^+ \cap \bar{C} = \{0\}$ .

Beispiele: Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -d \\ -d & 2 \end{pmatrix}$$

mit  $d = 1, 2, \geq 3$ . Dann ist A entsprechend der Reihenfolge von endlichem, affinem oder allgemeinem Typ.



$d = 1$  $d = 2$  $d \geq 3$ 

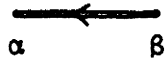
Jede Cartanmatrix von endlichem oder affinem Typ ist symmetrisierbar. Die symmetrisierte Matrix ist definit im ersten und semidefinit im zweiten Fall. Die Symmetrisierung einer symmetrisierbaren Matrix von allgemeinem Typ ist immer indefinit.

Die zusammenhängenden verallgemeinerten Cartanmatrizen von endlichem Typ sind genau die üblichen Cartanmatrizen der Typen  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  aus der Theorie der einfachen endlichdimensionalen komplexen Liealgebren.

Ähnlich lassen sich auch noch die verallgemeinerten Cartanmatrizen von affinem Typ aufzählen. Wie im endlichen Fall läßt sich ihre Information vollständig in einem Dynkindiagramm verschlüsseln. Dazu modifizieren wir das jedem Wurzeldatum  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  mit Strukturmatrix  $A$  zugeordnete Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  in der folgenden Weise:

Zwei Eckpunkte  $\alpha, \beta \in \Delta$  werden nun durch eine  $(\alpha(h_\beta) \cdot \beta(h_\alpha))$ -fache Kante verbunden. Außerdem wird die von  $\alpha$  nach  $\beta$  führende Kante mit einem "<"-Zeichen versehen, falls  $\alpha(h_\beta) > \beta(h_\alpha)$  gilt.

Beispiel:



falls  $\alpha(h_\beta) = -1$  ,  $\beta(h_\alpha) = -2$  .

Die zusammenhängenden Cartanmatrizen vom affinen Typ entsprechen nun den Dynkindiagrammen der folgenden Listen:

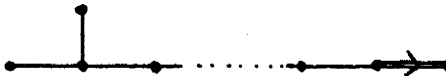
$A_1^{(1)}$



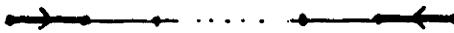
$A_n^{(1)}$  ,  $n \geq 2$



$B_n^{(1)}$  ,  $n \geq 3$



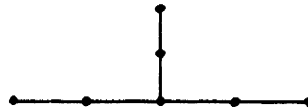
$C_n^{(1)}$  ,  $n \geq 2$



$D_n^{(1)}$  ,  $n \geq 4$



$E_6^{(1)}$



$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$



$F_4^{(1)}$

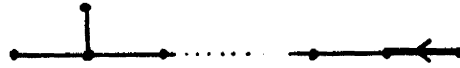


$G_2^{(1)}$



(Die Zahl 1 der Eckpunkte in der obigen Liste ist gleich  $n + 1$  , wobei  $n$  der untere Index in der Bezeichnung  $X_n^{(1)}$  ist.)

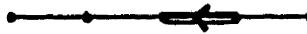
$$(B_n^{(1)})^* = A_{2n-1}^{(2)}, \quad n \geq 3$$



$$(C_n^{(1)})^* = D_{n+1}^{(2)}, \quad n \geq 2$$



$$(F_4^{(1)})^* = E_6^{(2)}$$



$$(G_2^{(1)})^* = D_4^{(3)}$$



$$A_2^{(2)}$$



$$A_{2n}^{(2)}, \quad n \geq 2$$



(Die Zahl 1 der Eckpunkte ist gleich  $n + 1$ , wenn  $n$  im unteren Index der Bezeichnung  $x_{f(n)}^{(k)}$  auftritt.)

Der obere Index  $(k)$  in den obigen Bezeichnungen ist die sogenannte "tier number" ( $[Moody_2]$ ). Sie ist eng mit der Konstruktion der zugehörigen Kac-Moody-Liealgebren verknüpft (vgl.  $[Kac_1]$ ).

Bemerkungen: Bei verallgemeinerten Cartanmatrizen von allgemeinem Typ läßt sich die Information der Matrix im allgemeinen nicht mehr in einem Dynkin-diagramm der obigen Art verschlüsseln. Man betrachte z. B. die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

die das gleiche Dynkindiagramm liefern. Die Konventionen für Schnittdiagramme von Singularitäten (1.10) sind nicht konform mit denen für Dynkindiagramme.

So entspricht der Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  das

Dynkindiagramm

und das

Schnittdiagramm

Wir hoffen durch die unterschiedliche Namensgebung eine Konfusion vermeiden zu können.

Wir nennen eine zusammenhängende Wurzelbasis von endlichem, affinen, oder allgemeinen Typ, wenn ihre Strukturmatrix diese Eigenschaft hat.

### 3.6 Kontragrediente und Kac-Moody-Liealgebren

Sei  $R$  ein Ring mit  $\mathbb{Z} \subset R \subset \mathbb{C}$  und  $(H, \nabla, \Delta) = (H, (h_i)_{i \in I}, (\alpha_i)_{i \in I})$  eine  $R$ -Wurzelbasis. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht frei, so benutzen wir im folgenden die in 3.1 eingeführten Konventionen betreffend  $\nabla$  und  $\Delta$ .

Sei  $\tilde{f}$  die freie komplexe Liealgebra, die erzeugt wird von dem komplexen Vektorraum  $\underline{h} = H \otimes_R \mathbb{C}$  sowie Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , und  $\underline{f}$  der Quotient von  $\tilde{f}$  nach dem von den folgenden Relationen erzeugten Ideal:

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0, & h, h' \in \underline{h}, \\ [h, e_\alpha] &= \alpha(h)e_\alpha, & h \in \underline{h}, \alpha \in \pm\Delta, \\ [e_\alpha, e_{-\beta}] &= \delta_{\alpha\beta} h_\alpha, & \alpha, \beta \in \Delta. \end{aligned}$$

Sei  $\Gamma$  das Wurzelgitter zu  $(H, \nabla, \Delta)$  (vgl. 3.1). Durch die Vorschrift  $\text{Grad}(e_\alpha) = \alpha$  und  $\text{Grad}(h) = 0$ ,  $h \in \underline{h}$ , wird  $\underline{f}$  zu einer  $\Gamma$ -graduierten Liealgebra

$$\underline{f} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \underline{f}_\gamma.$$

Sei  $\underline{r} \subset \underline{f}$  das größte  $\Gamma$ -graduierte Ideal, das  $\underline{f}_0$  nur in  $\{0\}$  schneidet.

Dann heißt

$$\underline{g} = \underline{f}/\underline{r}$$

die kontragrediente Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$ . Ist die Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  Cartansch, so heißt  $\underline{g}$  auch die Kac-Moody-Liealgebra oder die GCM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Beispiel: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  eine unzerlegbare Cartansche Wurzelbasis von endlichem Typ, so ist  $\underline{g}$  die entsprechende endlichdimensionale einfache Liealgebra. Ist diese Basis nicht von endlichem Typ, so ist  $\underline{g}$  unendlichdimensional. Für Beispiele vom affinen Typ vgl. [Kac<sub>1</sub>], [Moody<sub>2</sub>] und 3.11.

Das Ideal  $\underline{r} \subset \underline{f}$  heißt das Radikal von  $\underline{f}$ . Mit  $\underline{f}$  und  $\underline{r}$  ist  $\underline{g}$  ebenfalls  $\Gamma$ -graduiert

$$\underline{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \underline{g}_{\gamma} .$$

Die Menge  $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} \mid \underline{g}_{\gamma} \neq \{0\}\}$  heißt die Menge der Wurzeln von  $\underline{g}$ . Es gilt nun (vgl. [Kac<sub>1</sub>], [Moody<sub>1</sub>]):

1) Die Projektion  $\underline{f} \rightarrow \underline{g}$  ist injektiv auf  $\underline{h} \cup \{e_{\alpha} \mid \alpha \in \pm\Delta\}$ .

Wir bezeichnen die Bilder dieser Menge daher mit den gleichen Symbolen.

2)  $\underline{g}_0 = \underline{h}$

3)  $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ , wobei  $\Sigma^- = -\Sigma^+$  und  $\Sigma^+ = \Sigma \cap \mathbb{N} \cdot \Delta$

4)  $\Delta \subset \Sigma$ , also auch  $-\Delta \subset \Sigma$ , und  $\underline{g}_{\alpha} = \mathbb{C} e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ .

Sei  $\underline{u}^{\pm} := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^{\pm}} \underline{g}_{\pm\alpha}$ . Dann ist  $\underline{u}^{\pm}$  eine Unter-algebra von  $\underline{g}$ , und

$$\underline{g} = \underline{u}^{-} \bullet \underline{h} \bullet \underline{u}^{+} .$$

Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so bettet sich das Wurzelgitter  $\Gamma$  in  $H^*$  ein. Es gilt dann

$$\underline{f}_\gamma = \{x \in \underline{f} \mid [h, x] = \gamma(h)x \text{ für alle } h \in \underline{h}\}$$

$$\underline{g}_\gamma = \{x \in \underline{g} \mid [h, x] = \gamma(h)x \text{ für alle } h \in \underline{h}\} .$$

Die Zerlegung von  $\underline{f}$  (bzw.  $\underline{g}$ ) in die  $\Gamma$ -homogenen Bestandteile ist dann also die Eigenraumzerlegung bezüglich der adjungierten Aktion von  $\underline{h}$  auf  $\underline{f}$  (bzw.  $\underline{g}$ ). Insbesondere ist nun jedes Ideal in  $\underline{f}$  automatisch  $\Gamma$ -graduiert.

Sei  $(\phi, \sigma) : (H, \nabla, \Delta) \rightarrow (H', \nabla', \Delta')$  ein Morphismus von R-Wurzelbasen. Sei  $\underline{g}$  (bzw.  $\underline{g}'$ ) die kontragrediente Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  (bzw. zu  $(H', \nabla', \Delta')$ ) erzeugt von  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$  (bzw.  $\underline{h}' = H' \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_{\alpha'}$ ,  $\alpha' \in \pm\Delta'$ ). Nach Definition induziert die transponierte Abbildung  $\phi : H' \rightarrow H$  ein Bijektion

$$\Delta' \rightarrow \Delta .$$

Durch die Vorschrift

$$\phi|_H = \phi$$

$$\phi(e_{\pm\alpha}) = e_{\pm\phi^{-1}(\alpha)} , \quad \alpha \in \Delta$$

wird ein Liealgebrenhomomorphismus

$$\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}'$$

induziert. Es gilt dann

$$\text{Kern } \phi = \text{Kern } \phi|_{\underline{h}}$$

und das Bild von  $\phi$  ist ein Ideal in  $\underline{g}'$ , das die von den Elementen

$$e_{\alpha'} , \quad \alpha' \in \pm\Delta' ,$$

$$h_{\alpha'} , \quad \alpha' \in \Delta' ,$$

erzeugte Lieunteralgebra  $\underline{g}'^C \subset \underline{g}$  enthält. Die Inklusion  $\underline{h}' \rightarrow \underline{g}'$  induziert einen Isomorphismus

$$\text{Kokern } \phi|_{\underline{h}} \xrightarrow{\sim} \text{Kokern } \phi ,$$

und ist  $\underline{d} \subset \underline{h}'$  ein Supplement zu  $\phi(\underline{h})$ , i.e.

$$\underline{h}' = \phi(\underline{h}) \oplus \underline{d} ,$$

so schreibt sich  $\underline{g}'$  als semidirektes Produkt

$$\underline{g}' = \phi(\underline{g}) \rtimes \underline{d} .$$

Ist insbesondere  $H = \mathbb{R} \cdot \{h_i | i \in I\}$  und  $\phi$  die Inklusion  $H \rightarrow H'$ , so ist

$$\phi(\underline{g}) = \underline{g}'^C .$$

Sind alle Diagonaleingänge  $\alpha'(h_{\alpha_i})$  der Strukturmatrix von  $(H', \nabla', \Delta')$  ungleich 0, so ist  $\underline{g}'^C$  die Kommutatorunteralgebra von  $\underline{g}'$ .

Aus den Resultaten über Wurzeldata (3.1) folgt nun, daß jede kontragrediente Liealgebra Subquotient einer kontragredienten Liealgebra mit freiem Wurzeldatum ist.

Zerfällt die Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  in eine direkte Summe

$(H', \nabla', \Delta') \oplus (H'', \nabla'', \Delta'')$ , so zerfällt  $\underline{g}$  in die direkte Summe

$$\underline{g} = \underline{g}' \oplus \underline{g}''$$

der entsprechenden kontragredienten Liealgebren  $\underline{g}'$  und  $\underline{g}''$ .

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  zusammenhängend und Cartansch (oder zusammenhängend und symmetrisierbar). Dann ist  $\underline{g}$  im wesentlichen einfach, d. h. ein  $\Gamma$ -homogenes Ideal von  $\underline{g}$  enthält entweder die Kommutatoralgebra  $\underline{g}^C$  oder ist im Zentrum

$\underline{z}(\mathfrak{g}) \subset \underline{h}$  enthalten. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so entfällt der Zusatz "Γ-homogen" (vgl. die frühere Bemerkung).

Ist die Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar und  $(, )$  eine invariante Form auf  $H$  (vgl. 3.2), so läßt sich diese zu einer  $\underline{g}$ -invarianten symmetrischen Bilinearform

$$(, ) : \underline{g} \times \underline{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$([z, x], y) + (x, [z, y]) = 0$$

für alle  $x, y, z \in \underline{g}$ , ausdehnen (vgl. [Kac<sub>1</sub>]). Das Radikal dieser Form

$$\{z \in \underline{g} \mid (z, x) = 0 \text{ für alle } x \in \underline{g}\}$$

ist im Zentrum von  $\underline{g}$  enthalten (loc. cit.).

Bemerkung: Nichtisomorphe Wurzelbasen können gelegentlich isomorphe kontragrediente Liealgebren liefern. Zum Beispiel läßt sich jede solche Algebra durch eine Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  realisieren, für die die Diagonaleingänge  $\alpha(h_\alpha)$ ,  $\alpha \in \Delta$ , der Strukturmatrix nur die Werte 0 und 2 annehmen. (Ist  $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ , so ist die von  $e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}$  in  $\underline{g}$  erzeugte Unteralgebra isomorph zu  $sl_2$  (andernfalls zur dreidimensionalen Heisenbergalgebra).)

### 3.7 Struktur des Radikals und Leviunteralgebren

Für den Fall, daß  $(H, \nabla, \Delta)$  Cartansch oder symmetrisierbar ist, läßt sich die Struktur des Radikals  $\underline{r} \subset \underline{f}$  und damit die Präsentation von  $\underline{g}$  explizit machen.



Sei  $(H, V, \Delta)$  Cartansch. Für die Strukturmatrix  $A = ((A_{\alpha\beta}))_{\alpha, \beta \in \Delta}$ ,  $A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha)$ , gilt dann  $A_{\alpha\beta} \leq 0$  falls  $\alpha \neq \beta$ . Somit sind die Elemente

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha\beta}^+ &= \text{ad}(e_\alpha)^{1-A_{\alpha\beta}}(e_\beta) \\ \theta_{\alpha\beta}^- &= \text{ad}(e_{-\alpha})^{1-A_{\alpha\beta}}(e_{-\beta})\end{aligned}$$

für  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , in  $\underline{f}$  wohldefiniert. Sei  $\underline{r}^0 \subset \underline{f}$  das von den Elementen

$$\theta_{\alpha\beta}^+, \theta_{\alpha\beta}^-, \alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta,$$

in  $\underline{f}$  erzeugte Ideal. Dann gilt

$$\underline{r}^0 \subset \underline{r}.$$

Seit Beginn der Theorie ist die Gleichheit vermutet worden ([Kac<sub>1</sub>]). Ist  $(H, V, \Delta)$  Cartansch und symmetrisierbar, so gilt tatsächlich

$$\underline{r}^0 = \underline{r}$$

nach den Resultaten von Gabber und Kac ([Gabber-Kac]).

Die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra  $\underline{g}$  läßt sich somit als der Quotient der freien Liealgebra auf  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , nach den folgenden Relationen definieren:

$$\begin{aligned}[h, h'] &= 0, & h, h' \in \underline{h}, \\ [h, e_\alpha] &= \alpha(h)e_\alpha, & h \in \underline{h}, \alpha \in \pm\Delta, \\ [e_\alpha, e_{-\beta}] &= \delta_{\alpha\beta} h_\alpha, & \alpha, \beta \in \Delta, \\ \text{ad}(e_\alpha)^{1-A_{\alpha\beta}}(e_\beta) &= 0, & \alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta, \\ \text{ad}(e_{-\alpha})^{1-A_{\alpha\beta}}(e_{-\beta}) &= 0, & \alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta.\end{aligned}$$

Ist die Matrix  $A$  eine Cartanmatrix von endlichem Typ, so ist dies der Satz von Serre ([Serre<sub>2</sub>] VI App.).

Zur einfacheren Beschreibung der Inklusionsverhältnisse bei Kac-Moody-Liealgebren führen wir für nichtsymmetrisierbare Cartansche Wurzelbasen den Begriff einer Prä-Kac-Moody-Liealgebra ein. Darunter wollen wir, in den vorausgehenden Notationen, eine Quotientenalgebra

$$\underline{f}/\underline{r}^1$$

für ein Ideal  $\underline{r}^1$  mit  $\underline{r}^0 \subset \underline{r}^1 \subset \underline{r}$  verstehen. Ist  $\underline{r}^0 = \underline{r}^1$ , so nennen wir  $\underline{f}/\underline{r}^0$  auch die universelle Prä-Kac-Moody-Liealgebra zur Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche Wurzelbasis und  $\underline{g} = \underline{f}/\underline{r}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra mit Erzeugern  $\underline{h}$ ,  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Sei  $\Delta' \subset \Delta$  eine Teilmenge und  $\nabla' = (\Delta')^\vee = \{h_\alpha \mid \alpha \in \Delta'\}$ . Dann ist  $(H, \nabla', \Delta')$  wieder eine Cartansche Wurzelbasis. Sei  $\underline{g}' = \underline{f}'/\underline{r}'$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra mit Erzeugern  $\underline{h}$ ,  $e'_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ .

Ist  $(H, \nabla', \Delta')$  symmetrisierbar, so folgt aus der obigen Beschreibung der Radikale  $\underline{r}$  und  $\underline{r}'$ , daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} \underline{h} &\xrightarrow{\text{id}} \underline{h} \\ e'_\alpha &\longmapsto e_\alpha, \quad \alpha \in \pm\Delta', \end{aligned}$$

einen Isomorphismus von  $\underline{g}'$  auf die von  $\underline{h}$  und den Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ , erzeugte Untereralgebra induziert.

Ist  $(H, \nabla', \Delta')$  nicht mehr symmetrisierbar, also auch  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht, so erhalten wir auf ähnliche Weise einen Homomorphismus der universellen Prä-Kac-Moody-Liealgebren

$$\tilde{\mathfrak{g}}' = \underline{\mathfrak{f}}'/\underline{\mathfrak{r}}^{\circ'} \rightarrow \underline{\mathfrak{f}}/\underline{\mathfrak{r}}^{\circ} = \tilde{\mathfrak{g}} \quad .$$

Die von  $\underline{h}$  und den Elementen  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ , in  $\underline{\mathfrak{g}}$  erzeugte Untereralgebra erweist sich somit wenigstens als eine Prä-Kac-Moody-Liealgebra zu  $(H, \nabla', \Delta')$ .

Die Resultate in [Gabber-Kac] beziehen sich auf die allgemeinere Situation, daß  $(H, \nabla, \Delta)$  nur symmetrisierbar, also nicht notwendig Cartansch ist. Dieser Fall ist nicht von direktem Interesse für uns, wegen späterer Gegenüberstellungen wollen wir jedoch ein Beispiel aufführen.

Beispiel: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte zweidimensionale  $\mathbb{E}$ -Wurzelbasis mit Strukturmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist  $\underline{\mathfrak{r}} = \{0\}$ , also  $\underline{\mathfrak{g}} = \underline{\mathfrak{f}}$ . Dies impliziert, daß die Untereralgebren

$$\underline{\mathfrak{u}}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^{\pm}} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

freie Liealgebren über zwei Erzeugern  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , (bzw.  $e_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ ) sind.

### 3.8 Die adjungierte Gruppe

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $\underline{\mathfrak{g}}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra. Sei  $\alpha \in \Delta$ . Dann erzeugen die drei Elemente

$$e_{\alpha} \quad , \quad h_{\alpha} \quad , \quad e_{-\alpha}$$

eine dreidimensionale Untereralgebra von  $\underline{\mathfrak{g}}$ , die isomorph zu  $sl_2$  ist, und die wir mit  $sl_{2, \alpha}$  bezeichnen werden.

Die Einschränkung

$$\text{ad} : \mathfrak{sl}_{2,\alpha} \rightarrow \text{End}(\underline{\mathfrak{g}})$$

der adjungierten Darstellung auf  $\mathfrak{sl}_{2,\alpha}$  zerfällt in eine direkte Summe endlichdimensionaler  $\mathfrak{sl}_{2,\alpha}$ -Moduln. Dies folgt aus der Tatsache, daß  $e_\alpha$  und  $e_{-\alpha}$  lokal nilpotent auf  $\underline{\mathfrak{g}}$  operieren, d. h. daß es zu jedem  $x \in \underline{\mathfrak{g}}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$\text{ad}(e_{\pm\alpha})^n(x) = 0 .$$

Es genügt diese Eigenschaft für die Erzeuger von  $\underline{\mathfrak{g}}$  zu verifizieren (vgl. [Serre<sub>2</sub>] VI App.), und dafür folgt sie aus den  $\underline{\mathfrak{g}}$  definierenden Relationen (3.6, 3.7):

$$e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha} \text{ erzeugen eine Liealgebra isomorph zu } \mathfrak{sl}_2 ,$$

und

$$\left. \begin{aligned} [e_{\pm\alpha}[e_{\pm\alpha}, h]] &= 0 && \text{für } h \in \underline{\mathfrak{h}} \\ [e_\alpha, e_{-\beta}] &= 0 \\ \text{ad}(e_\alpha)^{1-A_{\alpha\beta}}(e_\beta) &= 0 \\ \text{ad}(e_{-\alpha})^{1-A_{\alpha\beta}}(e_{-\beta}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta .$$

Die adjungierte Darstellung

$$\text{ad} : \mathfrak{sl}_{2,\alpha} \rightarrow \text{End}(\underline{\mathfrak{g}})$$

läßt sich somit zu einer Darstellung der entsprechenden komplexen Liegruppe  $SL_2$  integrieren

$$\text{Ad} : SL_{2,\alpha} \rightarrow \text{Aut}(\underline{\mathfrak{g}}) .$$

Ebenso läßt sich die adjungierte Darstellung von  $\underline{h}$

$$\text{ad} : \underline{h} \rightarrow \text{End}(\underline{g})$$

zu einer Darstellung

$$\text{Ad} : T \rightarrow \text{Aut}(\underline{g})$$

des Torus  $T = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*, \mathbb{C}^*)$  integrieren. Die Charaktergruppe von  $T$  ist  $H^*$ , und es gilt

$$\text{Ad}(t)x = \alpha(t)x$$

für alle  $t \in T$ ,  $x \in \underline{g}_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Sigma \cup \{0\}$  (mittels der Abbildung  $\Sigma \rightarrow \Gamma \rightarrow H^*$  fassen wir die Wurzeln als Charaktere von  $T$  auf).

Sei  $G^{\text{Ad}}$  die von den Untergruppen

$$\text{Ad}(T), \quad \text{Ad}(SL_{2,\alpha}), \quad \alpha \in \Delta$$

in  $\text{Aut}(\underline{g})$  erzeugte Gruppe. Dann heißt  $G^{\text{Ad}}$  die adjungierte Gruppe von  $\underline{g}$ .

Bemerkung: Ist  $\bar{\Gamma}$  das Bild von  $\Gamma$  in  $H$ , so gilt  $\text{Ad}(T) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{\Gamma}, \mathbb{C}^*)$ . Daher hängt  $G^{\text{Ad}}$  nur von  $\underline{g}$  und nicht von der  $\mathbb{Z}$ -Struktur der Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ab.

Von nun setzen wir  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei voraus und identifizieren  $\Sigma$  als Teilmenge von  $H^*$ . Zu jeder einfachen Wurzel  $\alpha \in \Delta$  sei  $r_{\alpha} \in G^{\text{Ad}}$  das Bild von  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_{2,\alpha}$  unter  $\text{Ad}$ , d. h.

$$r_{\alpha} = \exp(\text{ad } e_{\alpha}) \exp(-\text{ad } e_{-\alpha}) \exp(\text{ad } e_{\alpha}).$$

Aus der endlichdimensionalen Darstellungstheorie der Gruppe  $SL_{2,\alpha}$  folgt dann

$$r_\alpha(\underline{h}) = \underline{h} \quad \text{und} \quad r_\alpha|_{\underline{h}} = s_\alpha$$

$$r_\alpha(\underline{g}_\gamma) = \underline{g}_{s_\alpha(\gamma)} \quad , \quad \gamma \in \Sigma$$

wobei  $s_\alpha \in W$  die Spiegelung zu  $\alpha$  ist (vgl. 3.4).

Sei  $\text{Ad}(N)$  die von den  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , und  $\text{Ad}(T)$  in  $G^{\text{Ad}}$  erzeugte Untergruppe. Dann ist  $\text{Ad}(N)$  eine Erweiterung von  $W$  durch  $\text{Ad}(T)$

$$1 \rightarrow \text{Ad}(T) \rightarrow \text{Ad}(N) \rightarrow W \rightarrow 1 \quad .$$

Die von den  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , in  $\text{Ad}(N)$  erzeugte Untergruppe ist eine Erweiterung von  $W$  durch die von den Elementen  $r_\alpha^2 \in \text{Ad}(T)$ ,  $\alpha \in \Delta$ , erzeugte elementarabelsche 2-Gruppe.

Bemerkungen: 1) Alle Aussagen dieses Abschnitts übertragen sich unmittelbar auf Prä-Kac-Moody-Liealgebren.

2) Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht Cartansch, so operieren die Elemente  $e_{\pm\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , im allgemeinen nicht mehr lokal nilpotent auf der zugehörigen kontragredienten Liealgebra (vgl. das in 3.7 gegebene Beispiel mit Strukturmatrix  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , die Relationen  $\theta_{\alpha\beta}^\pm = 0$  sind nicht mehr erfüllt). Daher läßt sich für diese Liealgebren eine adjungierte Gruppe  $G^{\text{Ad}}$  oder  $\text{Ad}(N)$  nicht mehr konstruieren. Es entfallen damit viele Eigenschaften des Wurzelsystems wie sie im nächsten Abschnitt beschrieben werden. Unter anderem ist die Menge der Wurzeln nicht mehr stabil unter der Aktion der "Weylgruppe" auf  $H$  (vgl. 3.4 Bemerkung 2).

### 3.9 Eigenschaften des Wurzelsystems

Wir betrachten die gleiche Situation wie in 3.8, und wir setzen  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei voraus. Sei  $\Sigma \subset H^*$  die Menge der Wurzeln von  $\mathfrak{g}$ . Aus den Eigenschaften der Transformationen  $r_\alpha \in G^{\text{Ad}}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , folgt nun:

$\Sigma$  ist stabil unter der Aktion der Weylgruppe  $W$ ,

$$\dim \mathfrak{g}_\gamma = \dim \mathfrak{g}_{w(\gamma)} \quad \text{für alle } \gamma \in \Sigma, w \in W.$$

Die Menge  $\Sigma^R = W \cdot \Delta$  der zu den einfachen Wurzeln  $W$ -konjugierten Wurzeln heißt (in Übereinstimmung mit 3.4) die Menge der reellen oder Weyl-Wurzeln. Das Komplement  $\Sigma^I = \Sigma \setminus \Sigma^R$  heißt die Menge der imaginären oder komplementären Wurzeln.

Es gilt  $\Sigma^I = \emptyset$  genau dann, wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  von endlichem Typ ist. Wegen  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha$  für  $\alpha \in \Delta$ , folgt  $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$  für  $\gamma \in \Sigma^R$ . Für  $\gamma \in \Sigma^I$  gilt  $\dim \mathfrak{g}_\gamma \geq 1$ , und die Gleichheit tritt nur in einigen Randfällen auf.

Wir definieren die Höhe einer Wurzel  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$  durch

$$\text{ht}(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha.$$

Das Wurzelsystem  $\Sigma$  ist durch die folgenden Eigenschaften als Untermenge von  $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot \Delta$  eindeutig festgelegt:

- 1)  $\Delta \subset \Sigma$
- 2)  $\Sigma = \Sigma^+ \cup -\Sigma^+$ , wobei  $\Sigma^+ = \Sigma \cap \mathbb{N} \cdot \Delta$
- 3)  $\gamma \in \Sigma^+ \setminus \Delta \Rightarrow$  es gibt ein  $\alpha \in \Delta$  mit  $\gamma - \alpha \in \Sigma^+$

4)  $\gamma \in \Sigma$ ,  $\alpha \in \Delta$ ,  $\gamma \neq \alpha$ , dann gibt es  $p, q \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft:

$$i) \quad p - q = \gamma(h_\alpha)$$

$$ii) \quad \gamma + k\alpha \in \Sigma \Leftrightarrow -p \leq k \leq q, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Dabei ist die Eigenschaft 4) wieder eine Konsequenz der endlichdimensionalen Darstellungstheorie von  $sl_{2,\alpha}$ .

Weiter gilt für  $\gamma \in \Sigma$ :

$$\gamma \in \Sigma^R \Leftrightarrow (\mathbb{Z} \cdot \alpha) \cap \Sigma = \{\pm\alpha\}$$

$$\gamma \in \Sigma^I \Leftrightarrow k\alpha \in \Sigma \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

Ist  $w \in W$  und  $l(w)$  die Länge von  $w$  bezüglich der Erzeugenden  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , von  $W$ , so gilt

$$l(w) = \text{card}\{\alpha \in \Sigma^+ \mid w(\alpha) \in \Sigma^-\} .$$

Dann folgt

$$\gamma \in \Sigma^I \cap \Sigma^+ \Leftrightarrow w(\gamma) \in \Sigma^+ \text{ für alle } w \in W$$

und entsprechend

$$\gamma \in \Sigma^I \cap \Sigma^- \Leftrightarrow w(\gamma) \in \Sigma^- \text{ für alle } w \in W .$$

Zusätzliche Charakterisierungen der reellen und imaginären Wurzeln gibt es für den Fall, daß  $(\mathfrak{H}, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar ist. Ist  $A$  die Strukturmatrix und  $D$  eine strikt positive ganzzahlige Diagonalmatrix, so daß  $D \cdot A$  symmetrisch ist, so sei

$$b : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$$



die durch  $b(\alpha, \beta) = d_{\alpha} A_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \Delta$ , definierte symmetrische Bilinearform. Für eine Wurzel  $\gamma \in \Sigma$  gilt dann

$$\gamma \in \Sigma^R \Leftrightarrow b(\gamma, \gamma) > 0$$

$$\gamma \in \Sigma^I \Leftrightarrow b(\gamma, \gamma) \leq 0 .$$

Ist  $A$  schon symmetrisch, so kann man  $D = 1$  wählen. Es gilt dann

$$\gamma \in \Sigma^R \Leftrightarrow b(\gamma, \gamma) = 2 .$$

Für Details und weitere Charakterisierungen in Spezialfällen vergleiche man  $[Kac_5]$ ,  $[Moody_3]$ .

Bemerkung: Die Aussagen über das Wurzelsystem bleiben auch für Prä-Kac-Moody-Liealgebren gültig. Eine Differenz ergibt sich höchstens bei den Multiplizitäten der imaginären Wurzeln.

### 3.10 Konjugationssätze

Im folgenden zitieren wir einige neuere Resultate von Peterson und Kac ( $[Peterson-Kac]$ ), die zeigen, daß die adjungierte Gruppe  $G^{Ad}$  "hinreichend" groß ist.

Sei  $(H, V, \Delta)$  eine Cartansche Wurzelbasis,  $\mathfrak{g}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra und  $G = G^{Ad}$  die adjungierte Gruppe von  $\mathfrak{g}$  (vgl. 3.8). Wir zerlegen

$$\mathfrak{g} = \underline{u}^- \oplus \underline{h} \oplus \underline{u}^+$$

(vgl. 3.6), und wir setzen

$$\underline{b}^{\pm} = \underline{h} \oplus \underline{u}^{\pm}$$

Sei  $\underline{a} \subset \underline{g}$  eine Unteralgebra. Wir bezeichnen die Einschränkung der adjungierten Darstellung von  $\underline{g}$  auf  $\underline{a}$  mit

$$\text{ad}_{\underline{a}} : \underline{a} \rightarrow \text{End}(\underline{g})$$

$$\text{ad}_{\underline{a}}(a)(x) = [a, x] \quad , \quad a \in \underline{a} \quad , \quad x \in \underline{g} \quad .$$

Eine Unteralgebra  $\underline{a} \subset \underline{g}$  heißt diagonalisierbar, wenn  $\underline{g}$  bezüglich  $\text{ad}_{\underline{a}}$  in eine direkte Summe eindimensionaler  $\underline{a}$ -stabiler Teilräume zerfällt.

Eine Unteralgebra  $\underline{a} \subset \underline{g}$  heißt vollständig auflösbar falls es eine  $\text{ad}_{\underline{a}}$ -stabile Filtrierung

$$\dots \supset \underline{a}_i \supset \underline{a}_{i+1} \supset \dots \quad , \quad i \in \mathbb{Z}$$

von  $\underline{g}$  gibt mit den Eigenschaften

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \underline{a}_i = \underline{g} \quad , \quad \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \underline{a}_i = \{0\} \quad ,$$

$$\underline{a}_0 = \underline{a} \quad \text{und} \quad \dim \underline{a}_i / \underline{a}_{i+1} = 1 \quad .$$

Eine maximale diagonalisierbare (bzw. maximale vollständig auflösbare) Unter- algebra von  $\underline{g}$  heißt eine Cartanunteralgebra (bzw. Borelunteralgebra) von  $\underline{g}$ .

Es gilt nun ([Peterson-Kac]):

Jede Cartanunteralgebra von  $\underline{g}$  ist  $G$ -konjugiert zu  $\underline{h}$ . Jede Borelunteralgebra von  $\underline{g}$  ist  $G$ -konjugiert zu  $\underline{b}^+$  oder  $\underline{b}^-$ .

Als ein Korollar ergibt sich das folgende Eindeutigkeitsresultat:

Seien  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  Kac-Moody-Liealgebren zu  $\mathbb{Q}$ -Wurzelbasen  $(\underline{H}, \underline{V}, \underline{\Delta})$  und  $(\underline{H}', \underline{V}', \underline{\Delta}')$ . Sind  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  isomorph, so sind auch  $(\underline{H}, \underline{V}, \underline{\Delta})$  und  $(\underline{H}', \underline{V}', \underline{\Delta}')$

isomorph, insbesondere stimmen ihre Cartanmatrizen (bezüglich einer Bijektion  $\Delta \xrightarrow{\sim} \Delta'$ ) überein.

### 3.11 Affine Liealgebren

Eine Kac-Moody-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  heißt vom affinen Typ, wenn ihre Wurzelbasis vom affinen Typ ist (vgl. 3.5). Sie heißt zerfallend affin (bzw. quasizerfallend oder getwisted affin) wenn die zugehörige Cartanmatrix vom Typ  $X_n^{(k)}$  mit  $k = 1$  (bzw.  $k = 2, 3$ ) ist (vgl. 3.5;  $X_n$  ist die Bezeichnung einer Cartanmatrix von endlichem Typ). Neben den endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebren besitzen zur Zeit einzig die affinen Liealgebren eine von der allgemeinen Konstruktion (3.6) unabhängige Beschreibung. Auf diese wollen wir im folgenden kurz eingehen. Für Details vergleiche man [Kac<sub>1</sub>], [Moody<sub>2</sub>], [Frenkel-Kac], [Garland<sub>2</sub>], [Tits<sub>5</sub>].

Wir betrachten zunächst den zerfallenden Fall. Sei also  $X_n$  eine zusammenhängende Cartanmatrix vom endlichen Typ,  $(H, \nabla, \Delta)$  eine minimale freie  $\mathbb{C}$ -Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $X_n$ , und  $\mathfrak{g}$  die zugehörige einfache komplexe Liealgebra, erzeugt von  $\mathfrak{h} = H$  und Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Sei  $n = \dim H = \text{card}(\Delta)$  der Rang von  $(H, \nabla, \Delta)$ . Eine minimale freie  $\mathbb{C}$ -Wurzelbasis  $(\tilde{H}, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  mit der erweiterten Cartanmatrix  $X_n^{(1)}$  als Strukturmatrix hat dann den halbeinfachen Rang  $l = n+1$ , und den reduktiven Rang  $r = n+2$ . Wir wollen nun die Kac-Moody-Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  zu  $(\tilde{H}, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  ausgehend von  $\mathfrak{g}$  beschreiben. Dazu fixieren wir die folgenden Notationen und Konventionen betreffend  $\mathfrak{g}$ : Es sei  $\Sigma \subset H^*$  das Wurzelsystem,  $\theta \in \Sigma$  die höchste Wurzel und  $h_\theta$  die entsprechende Kowurzel (vgl. 3.4). Es seien  $e_\theta \in \mathfrak{g}_\theta$  und  $e_{-\theta} \in \mathfrak{g}_{-\theta}$  Elemente mit  $[e_\theta, e_{-\theta}] = h_\theta$ . Wir normalisieren die Killingform

$$(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

durch die Bedingung  $(h_\theta, h_\theta) = 2$ .

Sei  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  die  $\mathbb{C}$ -Algebra der Laurentpolynome

$$\sum_{i=-k}^k a_i z^i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist nun  $\tilde{\mathfrak{g}}$  isomorph zu

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Das Lieprodukt ist dann wie folgt festgelegt:

- $c$  ist zentrales Element in  $\tilde{\mathfrak{g}}$ ,
- $[d, x \otimes z^m] = mx \otimes z^m, \quad x \in \mathfrak{g}, \quad m \in \mathbb{Z},$
- $[x \otimes z^m, y \otimes z^n] = [x, y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m, -n} \cdot (x, y) \cdot c, \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$

Damit ist  $\tilde{\mathfrak{g}}$  ein semidirektes Produkt

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}^c \rtimes \underline{d}$$

ihrer Kommutatorunteralgebra

$$\tilde{\mathfrak{g}}^c = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

und der Unteralgebra

$$\underline{d} = \mathbb{C} \cdot d.$$

Zudem realisiert die Projektion

$$\tilde{\mathfrak{g}}^c \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

$\tilde{\mathfrak{g}}^c$  als universelle zentrale Erweiterung von  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$  (versehen mit der

$\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -linearen Lieklammer, vgl. [Garland<sub>2</sub>]).

Im folgenden identifizieren wir  $\mathfrak{g}$  mit der Unteralgebra  $\mathfrak{g} \otimes 1$  von  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Als Cartanunteralgebra von  $\tilde{\mathfrak{g}}$  können wir

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}c \otimes \mathbb{C}d$$

wählen. Das Wurzelsystem  $\tilde{\Sigma} \subset (\tilde{\mathfrak{h}})^*$  von  $\tilde{\mathfrak{h}}$  in  $\tilde{\mathfrak{g}}$  bestimmt sich dann folgendermaßen:

Nach trivialer Ausdehnung auf  $c$  und  $d$  definiert jede Wurzel  $\alpha \in \Sigma \subset \mathfrak{h}^*$  ein Element in  $(\tilde{\mathfrak{h}})^*$ , das wir ebenfalls mit  $\alpha$  bezeichnen. Sei  $\delta \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$  durch  $\delta(d) = 1$  und  $\delta(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}c) = \{0\}$  definiert. Dann ist  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^R \cup \tilde{\Sigma}^I$  gegeben durch

$$\tilde{\Sigma}^R = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\tilde{\Sigma}^I = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Die entsprechenden Wurzelräume sind

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} = \mathfrak{g}_{\alpha} \otimes z^n$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{n\delta} = \mathfrak{h} \otimes z^n$$

mit den Dimensionen 1 bzw.  $n$ . Als  $\mathbb{C}$ -Wurzelbasis für  $\tilde{\mathfrak{g}}$  können wir

$$(\tilde{\mathfrak{H}}, \tilde{\mathfrak{V}}, \tilde{\Delta})$$

nehmen, wobei

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \tilde{\mathfrak{h}}$$

$$\tilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V} \cup \{h_0\}$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta \cup \{\alpha_0\}$$

mit

$$\begin{aligned} h_0 &= c - h_\theta \\ \alpha_0 &= \delta - \theta \\ h_0 &= (\alpha_0)^\vee \end{aligned}$$

Entsprechend können wir als Erzeuger von  $\tilde{\mathfrak{g}}$  den Vektorraum  $\tilde{\mathfrak{h}}$  und die Elemente

$$e_\alpha, \quad \alpha \in \pm\tilde{\Delta}$$

wählen, wobei

$$\begin{aligned} e_{\alpha_0} &= e_{-\theta} \otimes z \\ e_{-\alpha_0} &= e_\theta \otimes z^{-1} \end{aligned}$$

gilt.

Die Menge der positiven Wurzeln  $\Sigma^+$  ist

$$\{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Sigma \cup \{0\}, n > 0\} \cup \Sigma^+.$$

Die entsprechende Borelunteralgebra

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{b}} &= \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{u}}^+ \\ &= \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{u}}^+ \oplus (\mathfrak{g} \otimes z\mathbb{C}[z]) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathfrak{u}}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$$

heißt auch Iwahoriunteralgebra von  $\mathfrak{g}$  (vgl. dazu [Iwahori-Matsumoto]).

Sei  $G^{\text{Ad}}$  die adjungierte Gruppe von  $\mathfrak{g}$  und  $\tilde{G} = G^{\text{Ad}}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$  die Gruppe ihrer Punkte über  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Dann ist die adjungierte Gruppe  $\tilde{G}^{\text{Ad}}$  von  $\tilde{\mathfrak{g}}$

ein semidirektes Produkt

$$\tilde{\mathfrak{G}} \rtimes \mathfrak{C}^*$$

wobei  $\mathfrak{C}^*$  auf  $\tilde{\mathfrak{G}}$  mittels der "Galoisaktion" von  $\mathfrak{C}^*$  auf  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  operiert:

$$c \cdot p(z) = p(zc)$$

für  $c \in \mathfrak{C}^*$  und  $p(z) = \sum a_i z^i \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$  (vgl. [Garland<sub>2</sub>], [Tits<sub>5</sub>]).

Bemerkung: Wir können die Liealgebren  $\tilde{\mathfrak{g}}^c$ ,  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ ,  $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]) \rtimes \mathfrak{d}$  als Kac-Moody-Liealgebren zu nichtfreien Wurzelbasen auffassen. Eine Wurzelbasis zu  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$  ist z. B. durch  $(\underline{h}, \bar{\nabla}, \bar{\Delta})$  mit

$$\bar{\nabla} = \nabla \cup \{-h_\theta\}$$

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{-\theta\}$$

gegeben. Wir überlassen es dem Leser Wurzelbasen für die anderen beiden Liealgebren zu konstruieren.

Sei nun  $X_n^{(k)}$ ,  $k = 2$  oder  $3$ , eine zusammenhängende Cartanmatrix vom quasi-zerfallenden affinen Typ,  $X_n$  die entsprechende Cartanmatrix von endlichem Typ. Seien  $(\underline{h}, \nabla, \Delta)$ ,  $\mathfrak{g}$  wie im zerfallenden Fall und  $\underline{\Delta}$  das Dynkindiagramm von  $\mathfrak{g}$ . In der jetzigen Situation besitzt  $\underline{\Delta}$  einen (im Fall  $X_n = D_4$  im wesentlichen) eindeutig bestimmten nichttrivialen Automorphismus der Ordnung  $k$ . Dieser liftet sich zu einem Automorphismus

$$\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

der Ordnung  $k$ , der  $\underline{h} \subset \mathfrak{g}$  und die Menge  $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  stabilisiert.

Bezüglich der Aktion von  $\sigma$  zerlegt sich  $\mathfrak{g}$  in eine direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathfrak{g}_i$$

von Eigenräumen  $\mathfrak{g}_i$ , auf denen  $\sigma$  durch Multiplikation mit der  $i$ -ten Potenz einer fest gewählten  $k$ -ten Einheitswurzel  $\varepsilon$  operiert. Dann ist  $\mathfrak{g}_0$  eine einfache Liealgebra, und die natürlichen Darstellungen von  $\mathfrak{g}_0$  auf  $\mathfrak{g}_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , sind irreduzibel. Sei  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$  und  $\Delta_0 \subset (\mathfrak{h}_0)^*$  die Menge der Restriktionen  $\alpha|_{\mathfrak{h}_0}$  der einfachen Wurzeln  $\alpha \in \Delta$ . Sei  $\omega \in (\mathfrak{h}_0)^*$  das dominante Gewicht der Darstellung von  $\mathfrak{g}_0$  auf  $\mathfrak{g}_1$  (bezüglich  $\Delta_0$ ) und  $\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0 \cup \{-\omega\}$ . Dann lassen sich  $\mathfrak{h}_0$  und  $\tilde{\Delta}_0$  zu einer (nichtfreien) Wurzelbasis  $(\mathfrak{h}_0, \tilde{\mathfrak{v}}_0, \tilde{\Delta}_0)$  mit Strukturmatrix  $X_n^{(k)}$  ergänzen (vgl. [Kac<sub>1</sub>], [Tits<sub>5</sub>] p. 94, "moyenne arithmétique" in l. 10 ist durch "somme" zu ersetzen).

Die Einheitswurzel  $\varepsilon$  operiere auf  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  durch die "Galoisaktion"

$$\varepsilon \cdot p(z) = p(\varepsilon^{-1}z)$$

$p(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Sei  $\tilde{\mathfrak{g}}$  die Fixpunktalgebra

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}])^{\sigma \otimes \varepsilon} = \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathfrak{g}_i \otimes z^i \mathbb{C}[z^k, z^{-k}] .$$

Dann ist  $\tilde{\mathfrak{g}}$  die Kac-Moody-Liealgebra zur Wurzelbasis  $(\mathfrak{h}_0, \tilde{\mathfrak{v}}_0, \tilde{\Delta}_0)$ .

Die Kac-Moody-Liealgebra zu einer minimalen freien Wurzelbasis vom Typ  $X_n^{(k)}$  erhält man, analog zum zerfallenden Fall, durch Bildung des semidirekten Produktes

$$\tilde{\mathfrak{g}} \rtimes \mathbb{C} d ,$$

wobei  $d$  als Ableitung  $z \frac{d}{dz}$  über den Faktor  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  operiert, und anschließende eindimensionale zentrale Erweiterung.

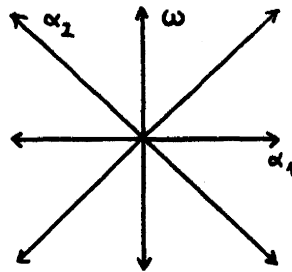


Die Bestimmung des Wurzelsystems sowie von Standarderzeugern in  $\tilde{\mathfrak{g}}$  ist ebenfalls ähnlich wie im zerfallenden Fall (vgl. loc. cit.). Wegen einer späteren Bezugnahme wollen wir dies an einem Beispiel ausführen.

Beispiel: Wir betrachten den Fall  $A_3^{(2)}$ . In diesem Fall zerlegt sich  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$  bezüglich  $\sigma$  in die Summe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

wobei  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_5$  und  $\mathfrak{g}_1$  der natürliche fünfdimensionale Modul von  $\mathfrak{so}_5$  ist. Das Wurzelsystem  $\Sigma_0$  von  $\mathfrak{h}_0$  in  $\mathfrak{g}_0$  hat die folgende Gestalt



und

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\alpha_1, \alpha_2\} & \tilde{\Delta}_0 &: \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \\ \longleftarrow \end{array} \\ \tilde{\Delta}_0 &= \{\alpha_1, \alpha_2, -\omega\} & \tilde{\tilde{\Delta}}_0 &: \begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad -\omega \\ \longleftarrow \longrightarrow \end{array} \end{aligned}$$

Die Gewichte von  $\mathfrak{h}_0$  in  $\mathfrak{g}_1$  sind  $0, \pm\alpha_1, \pm\omega$  (mit Multiplizität 1).

Für das Wurzelsystem  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^R \cup \tilde{\Sigma}^I$  von  $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{d}$  in  $\tilde{\mathfrak{g}}$  folgt nun (mit  $\delta(\mathfrak{d}) = 1$ ,

$\delta(\mathfrak{h}_0) = \{0\}$ ):

$$\tilde{\Sigma}^I = \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

$$\tilde{\Sigma}^R = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \text{ ist kurze Wurzel in } \Sigma_0, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cup \{\alpha + 2k\delta \mid \alpha \text{ ist lange Wurzel in } \Sigma_0, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  wird erzeugt von den Standarderzeugern  $e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}$  von  $\mathfrak{so}_5$  sowie von  $v_{-\omega} \otimes z, v_{\omega} \otimes z^{-1}$ , wobei  $v_{\pm\omega}$  ein nicht-trivialer Vektor zum Gewicht  $\pm\omega$  in  $\mathfrak{g}_1$  ist.

KAPITEL 4: EINE NEUE KLASSE VON LIEALGEBREN4.1. Verallgemeinerte Schnittmatrizen

Sei  $I$  eine endliche Menge und

$$A = ((A_{ij}))_{i,j \in I}$$

eine ganzzahlige Matrix. Wir nennen  $A$  eine verallgemeinerte Schnittmatrix oder kurz GIM (für "generalized intersection matrix"), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$A_{ii} = 2$$

$$A_{ij} < 0 \Leftrightarrow A_{ji} < 0$$

$$A_{ij} > 0 \Leftrightarrow A_{ji} > 0$$

für alle  $i, j \in I$ .

Ist eine solche Matrix  $A$  zudem symmetrisch, so nennen wir sie einfach eine Schnittmatrix, oder kurz IM (ohne daß eine Singularität mit Schnittmatrix  $A$  existieren muß, vgl. 1.10).

Eine  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit einer Strukturmatrix  $A$ , die eine (verallgemeinerte) Schnittmatrix ist, nennen wir eine IM-Wurzelbasis (bzw. GIM-Wurzelbasis).

Auch in Kapitel 4 folgen wir den zu Ende von Abschnitt 3.1 festgelegten Konventionen für Wurzelbasen (insbesondere wenn diese nicht frei sein sollten).

Beispiel: Sei  $X$  eine zweidimensionale Hyperflächensingularität mit Milnorgitter  $(H, \langle, \rangle)$ ,  $H = H_2(F, \mathbb{Z})$ , wobei  $F$  eine Milnorfaser für  $X$  ist. Sei

$$\nabla = (h_1, \dots, h_\mu) \quad , \quad h_i \in H$$

eine (schwach) ausgezeichnete Basis. Sei  $A = ((A_{ij}))_{i,j=1,\dots,\mu}$  mit

$$A_{ij} = - \langle h_i, h_j \rangle$$

die negative der Matrix der Schnittform  $\langle , \rangle$  bezüglich der Basis  $\nabla$ . Dann ist  $A$  eine Schnittmatrix im oben definierten Sinn. Sei

$$\Delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_\mu) \quad , \quad \alpha_i \in H^* = H^2(F, \mathbb{Z}) \quad ,$$

wobei  $\alpha_i : H \rightarrow \mathbb{Z}$  durch

$$\alpha_i(h_j) = A_{ij} = - \langle h_i, h_j \rangle$$

definiert sei. Dann ist  $(H, \nabla, \Delta)$  eine IM-Wurzelbasis.

Diese Wurzelbasis ist frei genau dann, wenn  $\det(A) \neq 0$ , also  $\langle , \rangle$  nicht entartet ist. Gilt  $\det(A) = 0$ , so erhält man eine freie Wurzelbasis nach Erweiterung

$$H \oplus D$$

von  $H$  durch einen freien  $\mathbb{Z}$ -Modul  $D$  vom Rang = Korang  $(A)$ . Die  $\alpha_i \in H^*$  lassen sich dann zu einer linear unabhängigen Menge von Funktionalen auf  $H \oplus D$  fortsetzen. (Die resultierende  $\mathbb{Q}$ -Wurzelbasis  $((H \oplus D) \otimes \mathbb{Q}, \nabla, \Delta)$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Für die  $\mathbb{Z}$ -Basis gilt dies nicht!)

#### 4.2. Coxeter- und Schnittdiagramme

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis. Das Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  ist wie folgt definiert:

$\Delta$  ist ein Graph mit Eckenmenge  $\Delta$ , und zwei Eckpunkte  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , werden durch eine durchgezogene (bzw. unterbrochene) Kante verbunden, falls  $A_{\beta\alpha} = \beta(h_\alpha) < 0$  (bzw.  $A_{\beta\alpha} = \beta(h_\alpha) > 0$ ) gilt. Zusätzlich wird eine solche Kante mit einem Coxeterkoeffizienten  $m_{\alpha\beta} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  entsprechend der in 3.3 aufgeführten Tabelle bewertet. Die Bewertung mit  $m_{\alpha\beta} = 3$  wird wie üblich unterdrückt.

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  zudem eine IM-Wurzelbasis, so definieren wir das Schnitttdiagramm von  $(H, \nabla, \Delta)$  ähnlich wie in 1.10: Menge der Eckpunkte ist  $\Delta$ , und  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , werden durch  $|A_{\alpha\beta}| = |\beta(h_\alpha)|$  durchgezogene (bzw. unterbrochene) Kanten verbunden falls  $A_{\alpha\beta} \leq 0$  (bzw.  $A_{\alpha\beta} > 0$ ) gilt.

Coxeter- und Schnitttdiagramm hängen nur von der Strukturmatrix  $A = ((A_{\alpha\beta}))$  ab. Wir benutzen daher auch die Bezeichnung: Coxeter- oder Schnitttdiagramm von  $A$ .

### Beispiele:

A	Coxeterdiagramm	Schnitttdiagramm
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\bullet \overset{4}{\text{---}} \bullet$	(nicht definiert)
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\bullet \text{---} \bullet$	$\bullet \text{---} \bullet$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\bullet \text{---} \bullet$	$\bullet \text{---} \bullet$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\bullet \overset{\infty}{\text{---}} \bullet$	$\bullet \text{---} \bullet$

### 4.3. Weylgruppen

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis. Wir definieren die Weylgruppe  $W$  dieser Basis analog zum Cartanschen Fall:

$W$  ist die von den Spiegelungen

$$s_{\alpha} : H \rightarrow H$$

$$s_{\alpha}(h) = h - \alpha(h)h_{\alpha} \quad , \quad h \in H \quad ,$$

in  $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(H)$  erzeugte Gruppe. Die kontragrediente Aktion auf  $H$  ist durch

$$s_{\alpha} : H \rightarrow H$$

$$s_{\alpha}(\gamma) = \gamma - \gamma(h_{\alpha})\alpha \quad , \quad \gamma \in H^* \quad ,$$

gegeben.

Wie in 3.4 sieht man, daß die Struktur von  $W$  bei freien Wurzelbasen unabhängig von der Wahl der freien Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ist.

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, und seien  $m_{\alpha\beta}$  ,  $\alpha, \beta \in \Delta$  ,  $\alpha \neq \beta$  , die Coxeterkoeffizienten von  $(H, \nabla, \Delta)$  . Dann erfüllen die Spiegelungen  $s_{\alpha} \in W$  ,  $\alpha \in \Delta$  , die "Coxeterrelationen":

$$s_{\alpha}^2 = 1 \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad ,$$

$$(s_{\alpha}s_{\beta})^{m_{\alpha\beta}} = 1 \quad , \quad \alpha, \beta \in \Delta \quad , \quad \alpha \neq \beta \quad .$$

Dies folgt aus der Betrachtung der Wurzelbasis  $(H, \{h_{\alpha}, h_{\beta}\}, \{\alpha, \beta\})$  vom halbeinfachen Rang 2 . Im allgemeinen genügen diese Relationen jedoch nicht zur Definition von  $W$  , d. h. im allgemeinen ist  $(W, \{s_{\alpha} | \alpha \in \Delta\})$  kein Coxetersystem.

Gegenbeispiel: Wir betrachten eine IM-Wurzelbasis vom Rang 3 zur positiv definiten Strukturmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Schnittdiagramm



Die Coxeterrelationen definieren nun eine unendliche Gruppe, nämlich die affine Weylgruppe vom Typ  $A_2^{(1)}$  :

$$W(A_2^{(1)}) \cong \sigma_3 \ltimes \mathbb{Z}^2 .$$

Dagegen ist  $W$  endlich, nämlich isomorph zur Weylgruppe vom Typ  $A_3$  :

$$W(A_3) \cong \sigma_4 \cong \sigma_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 .$$

Zusätzliche Relationen, die in  $W$  erfüllt sind, sind z. B. die folgenden

$$(s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\beta)^2 = (s_\beta s_\alpha s_\beta s_\gamma)^2 = (s_\gamma s_\alpha s_\gamma s_\beta)^2 = 1 .$$

In diesem Beispiel ist  $W$  noch eine Coxetergruppe bezüglich eines anderen Erzeugendensystems. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn die Wurzelbasis zopfäquivalent (im Sinne von 4.9) zu einer Cartanschen Wurzelbasis ist (im obigen Beispiel zu einer vom Typ  $A_3$ ). Es ist zweifelhaft ob dergleichen auch auf den allgemeinen Fall zutrifft.

#### 4.4. GIM-Liealgebren

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis und  $\underline{f}$  die freie komplexe Liealgebra, die erzeugt wird von dem komplexen Vektorraum

$$\underline{h} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

und Elementen

$$e_{\alpha}, e_{-\alpha}, \alpha \in \Delta.$$

Sei  $\underline{g}$  die Quotienten-Liealgebra von  $\underline{f}$ , die durch die folgenden Relationen definiert wird:

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0, & h, h' \in \underline{h}, \\ [h, e_{\alpha}] &= \alpha(h) e_{\alpha}, & h \in \underline{h}, \alpha \in \pm\Delta, \\ [e_{\alpha}, e_{-\alpha}] &= h_{\alpha}, & \alpha \in \Delta, \\ \text{ad}(e_{\alpha})^{\max(1, 1-\beta(h_{\alpha}))}(e_{\beta}) &= 0, & \alpha, \beta \in \pm\Delta. \end{aligned}$$

Hierbei, wie auch im folgenden, benutzen wir die Konvention  $h_{\alpha} = -h_{-\alpha}$  falls  $\alpha \in -\Delta$ .

Wir nennen  $\underline{g}$  die Verallgemeinerte-Schnittmatrix-Liealgebra, oder GIM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Sei  $\Gamma = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \alpha$  das Wurzelgitter zu  $(H, \nabla, \Delta)$ . Durch  $\text{Grad } e_{\alpha} = \alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , und  $\text{Grad } h = 0$  für  $h \in \underline{h}$  wird  $\underline{g}$  zu einer  $\Gamma$ -graduierten Liealgebra

$$\underline{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \underline{g}_{\gamma}$$

(denn die definierenden Relationen sind  $\Gamma$ -homogen).



Die Menge  $\Sigma := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \neq 0, \underline{g}_\gamma \neq \{0\}\}$  heißt die Menge der Wurzeln von  $\underline{g}$ .

**Bemerkung 1:** Die letzte der  $\underline{g}$  definierenden Relationen ist für  $\beta = \pm\alpha$  automatisch aufgrund der vorhergehenden Relationen erfüllt.

**Beispiel:** Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  Cartansch und symmetrisierbar, so ist  $\underline{g}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra (vgl. 3.6, 3.7). In diesem Fall ist nämlich  $A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha) \leq 0$  für  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , und somit (für  $\beta \neq \pm\alpha$ ):

$$\max(1, 1 - \beta(h_\alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \in \Delta, \beta \in -\Delta \\ 1 & \text{falls } \alpha \in -\Delta, \beta \in \Delta \\ 1 - A_{\alpha\beta} & \text{falls } \alpha \in \Delta, \beta \in \Delta \\ 1 - A_{-\alpha-\beta} & \text{falls } \alpha \in -\Delta, \beta \in -\Delta \end{cases} .$$

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  Cartansch, aber nicht symmetrisierbar, so ist der Quotient von  $\underline{g}$  nach dem Radikalideal  $\underline{r}$  eine Kac-Moody-Liealgebra (Dabei ist  $\underline{r} \subset \underline{g}$  wie in 3.6 als das größte  $\Gamma$ -graduierte Ideal definiert, das  $\underline{h}$  trivial schneidet. In der jetzigen Situation gilt  $\underline{h} = \underline{g}_0$ !). Wir werden später sehen, daß  $\underline{g}$  eine Kac-Moody-Liealgebra auch dann sein kann, wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht Cartansch ist.

**Bemerkung 2:** In Abschnitt 4.8 werden wir zeigen, daß  $\underline{g}$  nicht trivial, i. e. daß die natürliche Abbildung

$$\underline{h} \cup \{\dot{e}_\alpha \mid \alpha \in \pm\Delta\} \rightarrow \underline{g}$$

injektiv ist. Dabei spielen die "schwachen" Symmetrieforderungen an die Strukturmatrix

$$A_{\alpha\beta} < 0 \iff A_{\beta\alpha} < 0$$

$$A_{\alpha\beta} > 0 \iff A_{\beta\alpha} > 0$$

eine wesentliche Rolle. Bei zusammenhängender Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit  $H = \mathbb{Z} \cdot \nabla$  kann bei Verletzung der obigen Bedingungen die entsprechend definierte Liealgebra zu  $0$  entarten.

Sei  $\phi : (H, \nabla, \Delta) \rightarrow (H', \nabla', \Delta')$  ein Morphismus von GIM-Wurzelbasen, und seien  $\underline{g}$ ,  $\underline{g}'$  die zugehörigen GIM-Liealgebren. Dann induziert  $\phi$  einen Homomorphismus

$$\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}'$$

von Liealgebren ähnlich wie im kontragredienten Fall, vgl. 3.6. Die dort aufgeführten Eigenschaften von  $\phi$  übertragen sich unmittelbar auf die jetzige Situation, insbesondere ist jede GIM-Liealgebra ein Subquotient einer GIM-Liealgebra zu einer freien GIM-Wurzelbasis.

Ist  $(H, \nabla, \Delta) = (H', \nabla', \Delta') \oplus (H'', \nabla'', \Delta'')$  eine direkte Summe von GIM-Wurzelbasen, so ist  $\underline{g}$  die direkte Summe

$$\underline{g} = \underline{g}' \oplus \underline{g}''$$

der den Summanden entsprechenden GIM-Liealgebren.

Durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \omega(h) &= -h & , & & h \in \underline{h} & , \\ \omega(e_\alpha) &= e_{-\alpha} & , & & \alpha \in \pm\Delta & , \end{aligned}$$

auf den Erzeugenden von  $\underline{g}$  wird ein Liealgebrenautomorphismus

$$\omega : \underline{g} \rightarrow \underline{g}$$

mit der Eigenschaft

$$\omega(\underline{g}_\gamma) = \underline{g}_{-\gamma}, \quad \gamma \in \Sigma,$$

induziert. Damit folgt

$$\Sigma = -\Sigma.$$

Wir werden auf weitere Eigenschaften des Wurzelsystems  $\Sigma$  im Abschnitt 4.11 eingehen.

Bemerkung 3: Für eine allgemeine GIM-Liealgebra läßt sich das Wurzelsystem  $\Sigma$  nicht mehr in der Form

$$\Sigma = \Sigma^+ \cup -\Sigma^+$$

mit  $\Sigma^+ = \Sigma \cap N \cdot \Delta$  zerlegen, d. h. es kann Wurzeln  $\gamma \in \Sigma$  mit positiven und negativen Koeffizienten in  $\Delta$  geben.

#### 4.5 Lokale Orientierungswechsel

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$ . Sei  $\alpha \in \Delta$ . Die bezüglich  $\alpha$  umorientierte Wurzelbasis

$$(H', \nabla', \Delta') = \tau_\alpha(H, \nabla, \Delta)$$

ist wie folgt definiert:

$$H' = H$$

$$\Delta' = (\Delta \setminus \{\alpha\}) \cup \{\alpha'\}$$

$$\nabla' = (\nabla \setminus \{h_\alpha\}) \cup \{h_{\alpha'}\}$$

mit  $\alpha' = -\alpha$ ,  $h_{\alpha'} = h_{-\alpha} = -h_\alpha$ .

Die Strukturmatrix  $A'$  von  $(H', \nabla', \Delta')$  geht somit aus  $A$  hervor durch Multiplikation der  $\alpha$ -Zeile und  $\alpha$ -Spalte mit  $-1$ . Insbesondere ist  $(H', \nabla', \Delta')$  wieder eine GIM-Wurzelbasis.

Sei nun  $\underline{g}$  (bzw.  $\underline{g}'$ ) die GIM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  (bzw.  $(H', \nabla', \Delta')$ ) mit Erzeugenden

$$\underline{h} = H \otimes \mathbb{C} \quad , \quad e_\gamma \quad , \quad \gamma \in \pm\Delta$$

(bzw.  $\underline{h}' = H' \otimes \mathbb{C} \quad , \quad e'_\gamma \quad , \quad \gamma \in \pm\Delta'$  ).

Lemma: Die Liealgebren  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  sind isomorph.

Beweis: (Durch "Umbenennung"). Wir definieren einen offensichtlichen Isomorphismus

$$\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}'$$

durch die folgende Vorschrift auf den Erzeugenden

$$\begin{aligned} \phi|_{\underline{h}} &= \text{id} : \underline{h} + \underline{h}' = \underline{h} \\ \phi(e_\gamma) &= e'_\gamma \quad , \quad \gamma \in \pm(\Delta \setminus \{\alpha\}) \\ \phi(e_\alpha) &= e'_{-\alpha} \\ \phi(e_{-\alpha}) &= e'_\alpha \end{aligned}$$

#### 4.6 Orientierbarkeit

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$  und Coxeterdiagramm  $\Delta$ . Die Orientierungsüberlagerung  $\tilde{\Delta}$  von  $\Delta$  ist wie folgt definiert:

$\tilde{\Delta}$  ist ein Graph mit  $\tilde{\Delta} = \Delta \cup -\Delta$  als Menge der Eckpunkte. Zwei Ecken  $\gamma, \delta \in \tilde{\Delta}$  werden durch eine Kante verbunden, falls gilt

$$\gamma \neq \pm\delta \quad \text{und} \quad \delta(h_\gamma) < 0 .$$

(Man beachte  $\delta(h_\gamma) < 0 \Leftrightarrow \gamma(h_\delta) < 0$ ; hier gehen die "schwachen" Symmetrieforderungen an  $A$  ein.)

Durch die Abbildung

$$\pi(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{falls } \gamma \in \Delta \\ -\gamma & \text{falls } \gamma \in -\Delta \end{cases}$$

erhalten wir eine doppelte Überlagerung (von eindimensionalen Komplexen)

$$\pi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$$

mit Decktransformation

$$\tau : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}$$

$$\tau(\gamma) = -\gamma \quad , \quad \gamma \in \tilde{\Delta} = \Delta \cup -\Delta .$$

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  eine IM-Wurzelbasis, so können wir in analoger Weise eine Orientierungsüberlagerung des Schnittdiagrammes definieren. Allgemeiner als dies wollen wir die Strukturmatrizen betrachten.

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$ . Sei

$$\tilde{A} = ((\tilde{A}_{\gamma\delta}))_{\gamma, \delta \in \tilde{\Delta}} \quad , \quad \tilde{\Delta} = \Delta \cup -\Delta \quad ,$$

die folgende ganzzahlige Matrix:

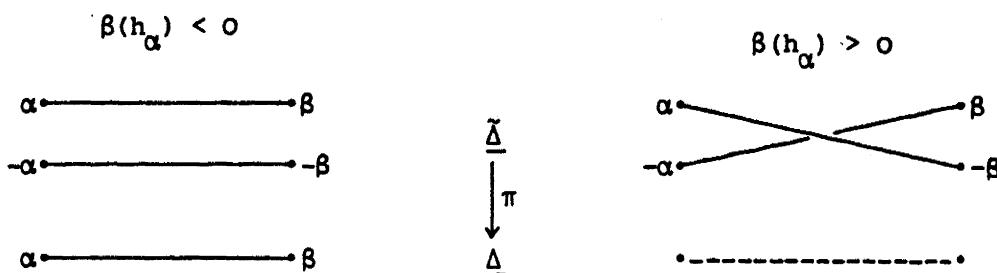
$$\tilde{A}_{\gamma\delta} = \begin{cases} 2 & \text{falls } \gamma = \delta \quad , \\ \delta(h_\gamma) & \text{falls } \gamma \neq \pm\delta \quad \text{und} \quad \delta(h_\gamma) < 0 \quad , \\ 0 & \text{sonst} \quad . \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{A}$  eine verallgemeinerte Cartanmatrix. Wir nennen sie die Cartan-Überlagerung von  $A$ . Offensichtlich ist  $\tilde{\Delta}$  das unbewertete Coxeterdiagramm zu  $\tilde{A}$ . Mittels der Partition  $\tilde{\Delta} = \Delta \cup -\Delta$  läßt sich  $A$  aus  $\tilde{A}$  zurückgewinnen. Es gilt offensichtlich

$$A_{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\alpha\beta} - \tilde{A}_{-\alpha\beta}$$

für  $\alpha, \beta \in \Delta$ .

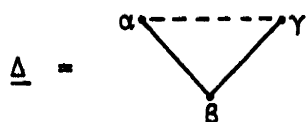
Beispiel:  $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ ,  $\tilde{\Delta} = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$



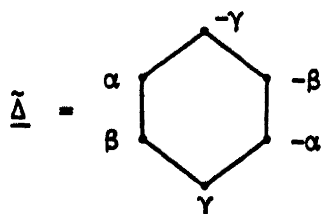
Eine GIM-Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  heißt orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung  $\tilde{\Delta}$  von  $\Delta$  über jeder Zusammenhangskomponente von  $\Delta$  in zwei Komponenten zerfällt.

Beispiele: 1) Ist das Coxeterdiagramm  $\Delta$  ein Wald, d. h. sind alle Komponenten von  $\Delta$  Bäume, so ist  $(H, \nabla, \Delta)$  orientierbar.

2) Sei  $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,



Dann ist ein Wurzeldatum zu  $\Delta$  nicht orientierbar:



Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine orientierbare GIM-Wurzelbasis. Dann zerfällt  $\tilde{\Delta}$  in zwei zueinander isomorphe Diagramme

$$\tilde{\Delta} = \underline{\Delta}^{\circ} \cup \tau(\underline{\Delta}^{\circ}) ,$$

die durch  $\pi$  jeweils homöomorph auf  $\underline{\Delta}$  abgebildet werden. Sei  $\nabla^{\circ} = \{h_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta^{\circ}\}$ . Dann ist  $(H, \nabla^{\circ}, \Delta^{\circ})$  eine Cartansche Wurzelbasis, die Cartansche Umorientierung von  $(H, \nabla, \Delta)$ . (Man beachte, daß der Isomorphietyp von  $(H, \nabla^{\circ}, \Delta^{\circ})$  unabhängig von den getroffenen Wahlen ist.)

Proposition: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine orientierbare GIM-Wurzelbasis,  $(H, \nabla^{\circ}, \Delta^{\circ})$  ihre Cartansche Umorientierung,  $\underline{\mathfrak{g}}$  und  $\underline{\mathfrak{g}}^{\circ}$  die zugehörigen GIM-Liealgebren. Dann sind  $\underline{\mathfrak{g}}$  und  $\underline{\mathfrak{g}}^{\circ}$  isomorph. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  zudem symmetrisierbar, so ist  $\underline{\mathfrak{g}}$  eine Kac-Moody-Liealgebra.

Beweis: Die Basis  $(H, \nabla^{\circ}, \Delta^{\circ})$  entsteht aus  $(H, \nabla, \Delta)$  durch sukzessive lokale Umorientierungen. Somit folgt die erste Behauptung aus 4.5, Lemma. Die zweite Behauptung folgt aus 4.4, Beispiel.

Korollar: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis und  $\underline{\mathfrak{g}}$  die zugehörige GIM-Liealgebra. Ist das Coxeterdiagramm  $\underline{\Delta}$  ein Wald, so ist  $\underline{\mathfrak{g}}$  eine Kac-Moody-Liealgebra.

Beweis: In der vorliegenden Situation ist  $(H, \nabla, \Delta)$  sowohl orientierbar als auch symmetrisierbar.

Im übernächsten Abschnitt werden wir auch die Situation betrachten, daß  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht orientierbar ist.

#### 4.7 Ein Hilfssatz über Involutionsen

Sei  $(H, V, \Delta)$  eine freie Cartansche Wurzelbasis und  $\underline{g}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra erzeugt von  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$  und  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Sei

$$\underline{g} = \underline{u}^- \oplus \underline{h} \oplus \underline{u}^+$$

die Zerlegung von  $\underline{g}$  mit  $\underline{u}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^\pm} \underline{g}_{\pm\alpha}$ .

Sei  $\sigma : \underline{g} \rightarrow \underline{g}$  ein involutorischer Automorphismus mit  $\sigma(\underline{h}) = \underline{h}$  und  $\sigma(\underline{u}^+) = \underline{u}^-$ . Bezeichnen wir mit  $\sigma$  auch die kontragrediente Aktion von  $\sigma$  auf  $\underline{h}^*$ , so gilt  $\sigma(\underline{g}_\alpha) = \underline{g}_{\sigma(\alpha)}$  für alle Wurzeln  $\alpha \in \Sigma \subset \underline{h}^*$ . Für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Delta$  folgt dann  $\sigma(\alpha) \in -\Delta$ .

Lemma: Die Liealgebra  $\underline{g}^\sigma = \{x \in \underline{g} \mid \sigma(x) = x\}$  der Fixpunkte von  $\sigma$  wird erzeugt von

$$\underline{h}^\sigma = \underline{h} \cap \underline{g}^\sigma$$

und den Elementen

$$E_\alpha = e_\alpha + \sigma(e_\alpha), \quad \alpha \in \Delta.$$

Beweis: Sei  $\underline{f} \subset \underline{g}^\sigma$  die von  $\underline{h}^\sigma$  und den Elementen  $E_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , erzeugte Unteralgebra. Wegen  $\underline{g}^\sigma = \underline{h}^\sigma \oplus (\text{id} + \sigma)(\underline{u}^+)$  und  $\underline{u}^+ = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma^+} \underline{g}_\gamma$  genügt es zu zeigen, daß der Raum  $(\text{id} + \sigma)(\underline{g}_\gamma)$  für alle  $\gamma \in \Sigma^+$  in  $\underline{f}$  liegt. Dazu führen wir eine Induktion über die Höhe  $\text{ht}(\gamma)$  von  $\gamma$ . Ist  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ , so ist

$$\text{ht}(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha.$$

Sei zunächst  $\text{ht}(\gamma) = 1$ . Dann folgt  $\gamma \in \Delta$  und

$$(\text{id} + \sigma)(\underline{g}_\gamma) = \mathbb{C} \cdot E_\gamma \subset \underline{f}.$$



Sei nun  $x \in \mathfrak{g}_\gamma$  mit  $\text{ht}(\gamma) = k \geq 2$ . Dann ist  $x$  eine Linearkombination von Termen der Form

$$[e_\alpha, y]$$

für gewisse  $\alpha \in \Delta$  und  $y \in \mathfrak{g}_{\gamma-\alpha}$ ,  $\text{ht}(\gamma-\alpha) = k-1$ . O.B.d.A. können wir  $x = [e_\alpha, y]$  annehmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x + \sigma(x) &= [e_{\alpha+\sigma(e_\alpha)}, y+\sigma(y)] - [\sigma(e_\alpha), y] - [e_\alpha, \sigma(y)] \\ &= [E_\alpha, y+\sigma(y)] - (\text{id}+\sigma)([\sigma(e_\alpha), y]) . \end{aligned}$$

Wegen  $\sigma(\alpha) \in -\Delta$  liegt  $[\sigma(e_\alpha), y]$  in  $\mathfrak{h}$  (falls  $k = 2$ ) oder in einem Wurzelraum  $\mathfrak{g}_\delta$  mit  $\text{ht}(\delta) = k-2$  (falls  $k > 2$ ). Nach Induktionsvoraussetzung liegen  $y + \sigma(y)$  und  $(\text{id}+\sigma)([\sigma(e_\alpha), y])$  in  $\mathfrak{f}$ , daher auch  $x + \sigma(x)$ .

#### 4.8 Zur Realisation von GIM-Liealgebren

Ist  $\mathfrak{g}$  eine GIM-Liealgebra zu einer orientierbaren Wurzelbasis, so ist  $\mathfrak{g}$  (nach möglicher Ausdivision des Radikals im nichtsymmetrisierbaren Fall) isomorph zu einer Kac-Moody-Liealgebra. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß eine beliebige GIM-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  im wesentlichen isomorph zur Fixpunktalgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$  einer Involution  $\sigma$  auf einer Kac-Moody-Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  ist (wie im vorherigen Abschnitt 4.7). Insbesondere folgt daraus die Nichttrivialität von  $\mathfrak{g}$ . Da jede GIM-Liealgebra Subquotient einer GIM-Liealgebra zu einer freien Wurzelbasis mit der gleichen Strukturmatrix ist, beschränken wir uns von jetzt ab auf den Fall einer freien Wurzelbasis, die wir zudem in einer technisch vorteilhaften Form annehmen können.

Sei  $A = ((A_{\alpha\beta}))_{\alpha, \beta \in \Delta}$  eine verallgemeinerte Schnittmatrix und  $(H, \nabla, \Delta)$  die folgende freie Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$  :

$$H := \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{Z} h_{\alpha} \oplus \mathbb{Z} d_{\alpha}) ,$$

$$\nabla = (h_{\alpha})_{\alpha \in \Delta} ,$$

und  $\alpha \in \Delta$  werde als Element von  $H$  aufgefaßt mittels

$$\alpha(h_{\beta}) = A_{\beta\alpha}$$

$$\alpha(d_{\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Sei  $\tilde{\Delta} = \Delta \cup -\Delta$  und  $\tilde{A} = ((\tilde{A}_{\gamma\delta}))_{\gamma, \delta \in \tilde{\Delta}}$  die Cartansche Überlagerungsmatrix zu  $A$  (vgl. 4.6). Zu  $\tilde{A}$  betrachten wir die freie Cartansche Wurzelbasis  $(\tilde{H}, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  mit

$$\tilde{H} = \bigoplus_{\delta \in \tilde{\Delta}} (\mathbb{Z} \tilde{h}_{\gamma} \oplus \mathbb{Z} \tilde{d}_{\gamma}) ,$$

$$\tilde{\nabla} = (\tilde{h}_{\gamma})_{\gamma \in \tilde{\Delta}} ,$$

und der folgenden Realisation von  $\tilde{\Delta}$  in  $\tilde{H}$  : Sei  $\gamma \in \tilde{\Delta}$ , dann sei

$$\gamma(\tilde{h}_{\delta}) = \tilde{A}_{\delta\gamma}$$

$$\gamma(\tilde{d}_{\delta}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma = \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Vermeidung von Konfusionen identifizieren wir die Elemente von  $\tilde{\Delta}$  mit denen von  $\Delta \cup -\Delta$  von nun an mittels einer expliziten Bijektion

$$\iota : \Delta \cup -\Delta \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta} .$$

Es gilt also

$$\tilde{\Delta} = \iota(\Delta) \cup \iota(-\Delta) \quad .$$

Man beachte  $\iota(-\alpha) \neq -\iota(\alpha)$  in  $\tilde{H}^*$ ; beide Elemente sind linear unabhängig in  $\tilde{H}^*$ . Die Decktransformation

$$\tau : \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}$$

$$\tau(\iota(\alpha)) = \iota(-\alpha)$$

liftet sich durch die Vorschrift

$$\tau(\tilde{h}_\gamma) = \tilde{h}_{\tau(\gamma)}$$

$$\tau(\tilde{d}_\gamma) = \tilde{d}_{\tau(\gamma)}$$

zu einem involutorischen Automorphismus

$$\tau : (\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\Delta}) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\Delta})$$

der Wurzelbasis. Mit  $\tau$  bezeichnen wir auch die kontragrediente Abbildung

$$\tilde{H}^* \rightarrow \tilde{H}^* \quad .$$

Sei  $\sigma : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$  der Automorphismus

$$\sigma(\tilde{h}) = -\tau(\tilde{h}) \quad , \quad \tilde{h} \in \tilde{H} \quad .$$

Mit  $\sigma$  bezeichnen wir auch die zu  $\sigma$  kontragrediente Abbildung  $\sigma : \tilde{H}^* \rightarrow \tilde{H}^*$ .

Es gilt dann  $\sigma(\gamma) = -\tau(\gamma)$  für  $\gamma \in \tilde{H}^*$ , also

$$\sigma(\tilde{\Delta}) = -\tilde{\Delta} \quad .$$

Sei  $\tilde{H}^\sigma := \{\tilde{h} \in \tilde{H} \mid \sigma(\tilde{h}) = \tilde{h}\}$ . Wir bezeichnen die Einschränkung  $\gamma|_{\tilde{H}^\sigma}$  eines Elementes  $\gamma \in \tilde{H}^*$  auf  $\tilde{H}^\sigma$  mit  $\bar{\gamma}$ . Es gilt dann

$$\bar{\gamma} = \overline{\sigma(\gamma)} = -\overline{\tau(\gamma)}$$

für alle  $\gamma \in \tilde{H}^*$ .

Sei  $(\tilde{H}^\sigma, \tilde{V}^\sigma, \tilde{\Delta}^\sigma)$  die folgende Wurzelbasis:

$$\tilde{V}^\sigma = ((\text{id} + \sigma)(h_{1(\alpha)}))_{\alpha \in \Delta}$$

$$\tilde{\Delta}^\sigma = (\overline{\tau(\alpha)})_{\alpha \in \Delta}$$

Lemma: Durch die Vorschrift

$$\phi(h_\alpha) = (\text{id} + \sigma)(\tilde{h}_{1(\alpha)}) \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad ,$$

$$\phi(d_\alpha) = (\text{id} + \sigma)(\tilde{d}_{1(\alpha)}) \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad ,$$

wird ein Isomorphismus

$$\phi : (H, V, \Delta) \rightarrow (\tilde{H}^\sigma, \tilde{V}^\sigma, \tilde{\Delta}^\sigma)$$

von Wurzeldaten induziert.

Beweis: Offensichtlich erhalten wir mit der obigen Vorschrift einen Isomorphismus

$$\phi : H \rightarrow \tilde{H}^\sigma \quad ,$$

der  $h_\alpha \in V$  in die  $\alpha$  entsprechende Kowurzel  $(\text{id} + \sigma)(\tilde{h}_{1(\alpha)}) \in \tilde{V}^\sigma$  überführt. Es bleibt zu zeigen, daß die transponierte Abbildung  $\phi^* : (\tilde{H}^\sigma)^* \rightarrow H^*$  die Bedingung

$$\phi^*(\overline{\tau(\beta)}) = \beta$$

für alle  $\beta \in \Delta$  erfüllt. Dies überprüfen wir durch eine Verifikation auf den Basiselementen  $h_\alpha, d_\alpha, \alpha \in \Delta$ , von  $H$ :

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \phi^* (\overline{1(\beta)}) (d_\alpha) &= 1(\beta) (\tilde{d}_{1(\alpha)} - \tilde{d}_{1(-\alpha)}) \\
 &= \delta_{1(\alpha)1(\beta)} - \delta_{1(-\alpha)1(\beta)} \quad (\text{Kronecker} - \delta) .
 \end{aligned}$$

Wegen  $\alpha, \beta \in \Delta$  gilt aber  $1(-\alpha) \neq 1(\beta)$ , also

$$\phi^* (\overline{1(\beta)}) (d_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} = \beta(d_\alpha) .$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \phi^* (\overline{1(\beta)}) (h_\alpha) &= 1(\beta) (\tilde{h}_{1(\alpha)} - \tilde{h}_{1(-\alpha)}) \\
 &= \tilde{A}_{1(\alpha)1(\beta)} - \tilde{A}_{1(-\alpha)1(\beta)} \\
 &= A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha)
 \end{aligned}$$

nach 4.6 (Rekonstruktion von  $A$  aus  $\tilde{A}$ ).

Bemerkung: Wegen  $\overline{\gamma} = -\tau(\gamma)$  für  $\gamma \in \tilde{H}^*$  folgt  $\overline{1(-\alpha)} = -\overline{1(\alpha)}$  für  $\alpha \in \pm\Delta$ . Die Einschränkungen  $\overline{1(-\alpha)}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , liefern somit die negativen der einfachen Wurzeln von  $(\tilde{H}^\sigma, \tilde{V}^\sigma, \tilde{\Delta}^\sigma)$ .

Sei nun  $\tilde{\mathfrak{g}}$  die Kac-Moody-Liealgebra zur Wurzelbasis  $(\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\Delta})$ , erzeugt von  $\tilde{h} = \tilde{H} \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $\tilde{e}_\gamma$ ,  $\gamma \in \pm\tilde{\Delta}$ , und sei  $\mathfrak{g}$  die GIM-Liealgebra zur Wurzelbasis  $(H, V, \Delta)$ , erzeugt von  $h = H \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ .

Der Isomorphismus  $\sigma = -\tau : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$  liftet sich zu einem involutorischen Liealgebrenautomorphismus

$$\sigma : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$$

durch die Ausdehnungsvorschrift

$$\sigma(\tilde{e}_\gamma) := \tilde{e}_{\sigma(\gamma)} = \tilde{e}_{-\tau(\gamma)}, \quad \gamma \in \tilde{\Delta} .$$

Sei  $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \sigma(x) = x\}$  die Liealgebra der Fixpunkte von  $\sigma$ .

Im folgenden bezeichnen wir mit  $\phi$  auch die  $\mathbb{C}$ -lineare Fortsetzung

$$\underline{h} \rightarrow \tilde{h}^\sigma \rightarrow \tilde{h}$$

der Einbettung

$$H \rightarrow \tilde{H}^\sigma \rightarrow \tilde{H} .$$

Satz: Durch die Vorschrift

$$\phi|_{\underline{h}} = \phi$$

$$\phi(e_\alpha) = (\text{id} + \sigma)(\tilde{e}_{\iota(\alpha)}) , \quad \alpha \in \pm\Delta ,$$

wird ein Liealgebrenhomomorphismus

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$$

mit Bild  $\phi = \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$  induziert.

Beweis: Aus 4.7 Lemma folgt, daß  $\phi(h) = \tilde{h}^\sigma$  und  $\phi(e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , die Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$  erzeugen. Es genügt also zu zeigen, daß  $\phi(h)$  und  $\phi(e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , die definierenden Relationen von  $\mathfrak{g}$  erfüllen. Wegen  $\phi(\underline{h}) \subset \tilde{h}$  ist die Relation

$$[\phi(\underline{h}), \phi(\underline{h})] = 0$$

trivialerweise erfüllt.

Sei  $h \in \underline{h}$ ,  $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$  und  $\gamma = \iota(\alpha)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [\phi(h), \phi(e_\alpha)] &= [\phi(h), \tilde{e}_\gamma + \tilde{e}_{\sigma(\gamma)}] \\ &= \overline{\gamma}(\phi(h))\tilde{e}_\gamma + \overline{\sigma(\gamma)}(\phi(h))\tilde{e}_{\sigma(\gamma)} \\ &= \overline{\gamma}(\phi(h))(\tilde{e}_\gamma + \tilde{e}_{\sigma(\gamma)}) \\ &= \alpha(h)\phi(e_\alpha) \end{aligned}$$

da  $\overline{\iota(\alpha)}(\phi(h)) = \alpha(h)$  nach dem Lemma.

Sei  $\alpha \in \Delta$  und  $\gamma = \iota(\alpha)$ , also  $\iota(-\alpha) = \tau(\gamma) = -\sigma(\gamma)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 [\phi(e_\alpha), \phi(e_{-\alpha})] &= [\tilde{e}_\gamma + \tilde{e}_{\sigma(\gamma)}, \tilde{e}_{-\sigma(\gamma)} + \tilde{e}_{-\gamma}] \\
 &= [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\tau(\gamma)}] + [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{-\gamma}] \\
 &\quad + [\tilde{e}_{\sigma(\gamma)}, \tilde{e}_{-\sigma(\gamma)}] + [\tilde{e}_{-\tau(\gamma)}, \tilde{e}_{-\gamma}] \\
 &= 0 + \tilde{h}_\gamma + \tilde{h}_{\sigma(\gamma)} + 0 \\
 &\quad \text{(wegen der Relationen in } \tilde{\mathfrak{g}} \text{)} \\
 &= \phi(h_\alpha)
 \end{aligned}$$

Seien schließlich  $\alpha, \beta \in \Delta \cup -\Delta$ ,  $\alpha \neq \pm\beta$ , und  $\gamma = \iota(\alpha)$ ,  $\delta = \iota(\beta)$ . Wir haben noch zu zeigen:

$$\text{ad}(\phi(e_\alpha))^{\max(1, 1-\beta(h_\alpha))}(\phi(e_\beta)) = 0.$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $\beta(h_\alpha) \geq 0$ . Es ist dann zu zeigen

$[\phi(e_\alpha), \phi(e_\beta)] = 0$ . Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 [\phi(e_\alpha), \phi(e_\beta)] &= [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_\delta] + [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\sigma(\delta)}] + [\tilde{e}_{\sigma(\gamma)}, \tilde{e}_\delta] + [\tilde{e}_{\sigma(\gamma)}, \tilde{e}_{\sigma(\delta)}] \\
 &= (\text{id} + \sigma)([\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_\delta] + [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\sigma(\delta)}]) .
 \end{aligned}$$

Nach Definition der Matrix  $\tilde{A}$  (vgl. 4.6) gilt

$$\begin{aligned}
 \delta(\tilde{h}_\gamma) &= \tilde{A}_{\gamma\delta} = 0, \quad \text{da } \beta(h_\alpha) \geq 0 \\
 \sigma(\delta)(\tilde{h}_\gamma) &= -\tau(\delta)(\tilde{h}_\gamma) = -\tilde{A}_{\gamma\tau(\delta)} = -(-\beta(h_\alpha)) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Also folgt mit den Relationen in  $\tilde{\mathfrak{g}}$ :

$$[\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_\delta] = [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\sigma(\delta)}] = 0$$

und damit  $[\phi(e_\alpha), \phi(e_\beta)] = 0$ .

Sei nun  $\beta(h_\alpha) < 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \delta(\tilde{h}_\gamma) &= \sigma(\delta)(\tilde{h}_{\sigma(\gamma)}) = \beta(h_\alpha) < 0 \\
 \sigma(\delta)(\tilde{h}_\gamma) &= \delta(\tilde{h}_{\sigma(\gamma)}) = -\delta(\tilde{h}_{\tau(\gamma)}) = 0,
 \end{aligned}$$

da  $\bar{\delta}(\frac{h_\alpha}{\tau(\gamma)}) = -\beta(h_\alpha) > 0$  (vgl. 4.6, Def. von  $\tilde{A}$ ).

Dies impliziert

$$[\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\sigma(\delta)}] = [\tilde{e}_{\sigma(\gamma)}, \tilde{e}_\delta] = 0.$$

Berücksichtigen wir zudem

$$[\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{\sigma(\gamma)}] = [\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_{-\tau(\gamma)}] = 0$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{ad}(\phi(e_\alpha)) &^{\max(1, 1-\beta(h_\alpha))} (\phi(e_\beta)) = \\ &= \text{ad}(\tilde{e}_\gamma + \tilde{e}_{\sigma(\gamma)})^{1-\delta(\tilde{h}_\gamma)} (\tilde{e}_\delta + \tilde{e}_{\sigma(\delta)}) \\ &= (\text{id} + \sigma)(\text{ad}(\tilde{e}_\gamma)^{1-\delta(\tilde{h}_\gamma)} (\tilde{e}_\delta)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach den Relationen von  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Damit ist der Satz bewiesen.

**Korollar:** Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis und  $\mathfrak{g}$  die zugehörige GIM-Liealgebra erzeugt von  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Dann ist die natürliche lineare Abbildung

$$i : \underline{h} \otimes \bigoplus_{\alpha \in \pm\Delta} \mathbb{C}e_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$$

eine Injektion.

**Beweis:** O.B.d.A. können wir  $(H, \nabla, \Delta)$  frei und so wie im vorhergehenden wählen. Dann ist aber die Komposition

$$\phi \circ i : \underline{h} \otimes \bigoplus_{\alpha \in \pm\Delta} \mathbb{C}e_\alpha \rightarrow \mathfrak{g} + \tilde{\mathfrak{g}}$$

injektiv, also auch  $i$  ( $\tilde{\mathfrak{g}}$  ist Kac-Moody-Liealgebra!).



Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  orientierbar und symmetrisierbar, so ist der Homomorphismus

$$\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}^{\sigma}$$

ein Isomorphismus. In diesem Fall ist nämlich  $\tilde{g} \cong \underline{g} \oplus \underline{g}$  und  $\phi$  identifiziert sich mit  $\text{id} \oplus \omega$ , wobei  $\omega : \underline{g} \rightarrow \underline{g}$  der in 4.4 eingeführte involutorische Automorphismus von  $\underline{g}$  ist. Ist  $\phi$  immer ein Isomorphismus (falls  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar ist)?

#### 4.9 Schwache Zopftransformationen

Die Schnittmatrix einer isolierten Singularität ist nicht eindeutig definiert, sondern nur bis auf die in 1.9 beschriebenen Transformationen von Basen des Milnorgitters. Sofern diese Transformationen keinen Bezug zur Reihenfolge der Basiselemente haben, übertragen sie sich unmittelbar auf Wurzelbasen.

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine symmetrisierbare GIM-Wurzelbasis. Seien  $\alpha, \beta \in \Delta$ . Dann überführt die (schwache) Zopftransformation  $\zeta_{\alpha\beta}$  die Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  in die Wurzelbasis

$$\zeta_{\alpha\beta} (H, \nabla, \Delta) = (H', \nabla', \Delta'),$$

wobei

$$H' = H$$

$$\Delta' = (\Delta \setminus \{\beta\}) \cup \{s_{\alpha}(\beta)\}$$

$$\nabla' = (\nabla \setminus \{h_{\beta}\}) \cup \{s_{\alpha}(h_{\beta})\}$$

ist.

Man verifiziert, daß  $(H', \nabla', \Delta')$  wieder eine symmetrisierbare GIM-Wurzelbasis ist. Ist die Strukturmatrix von  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisch, so auch die von  $(H', \nabla', \Delta')$ .

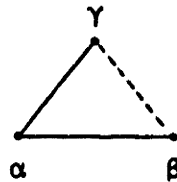
**Bemerkungen:** 1) Die Zopftransformation einer nichtsymmetrisierbaren GIM-Wurzelbasis ist i. a. keine GIM-Wurzelbasis mehr (die Bedingungen  $A_{\alpha\beta} \leq 0 \Leftrightarrow A_{\beta\alpha} \leq 0$  können verletzt werden).

2) Im Fall  $\alpha = \beta$  stimmt  $\zeta_{\alpha\beta}$  mit der in 4.5 eingeführten lokalen Umorientierung  $\tau_{\alpha}$  überein.

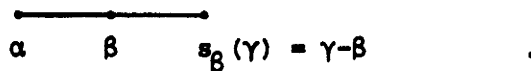
Zwei Wurzelbasen  $(H, \nabla, \Delta)$  und  $(H', \nabla', \Delta')$  heißen (schwach) zopfäquivalent wenn sie durch iterierte Anwendung von schwachen Zopftransformationen ineinander überführt werden können.

Im allgemeinen sind GIM-Liealgebren zu Zopfäquivalenten Wurzelbasen nicht isomorph.

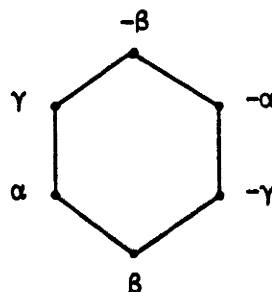
**Beispiele:** 1) Wir betrachten eine (freie) IM-Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit symmetrischer Strukturmatrix entsprechend dem Schnittdiagramm:



Unter der Transformation  $\zeta_{\beta\gamma}$  geht diese Wurzelbasis über in eine Cartansche  $(H', \nabla', \Delta')$  vom Typ  $A_3$ :



Die Cartansche Überlagerung zu  $(H, \nabla, \Delta)$  ist vom Typ  $A_5^{(1)}$ :



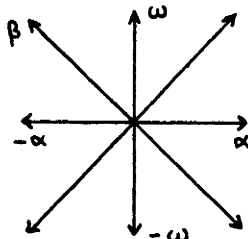
Sei  $\mathfrak{g}$  (bzw.  $\mathfrak{g}'$ ) die GIM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  (bzw.  $(H', \nabla', \Delta')$ ).

Dann ist  $\mathfrak{g}$  unendlichdimensional, denn nach 4.8, Satz, läßt sich  $\mathfrak{g}$  surjektiv auf eine unendlichdimensionale Fixpunktalgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$  einer affinen Liealgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  vom Typ  $A_5^{(1)}$  abbilden. Andererseits ist  $\mathfrak{g}'$  endlichdimensional vom Typ  $A_3$ . Somit sind  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}'$  nicht isomorph. Ebenfalls sind  $\tilde{\mathfrak{g}}$  ( $\cong A_5^{(1)}$ ) und  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  ( $\cong A_3 \times A_3$ ) nicht isomorph.

2) Im obigen Beispiel läßt sich eine Surjektion  $\mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$  konstruieren. Wir wollen jetzt zwei zopfäquivalente Wurzelbasen angeben, deren zugehörige GIM-Liealgebren vermutlich keine nichttrivialen isomorphen Quotienten besitzen. Sei dazu  $(H, \nabla_0, \Delta_0)$  eine  $\mathbb{C}$ -Wurzelbasis vom Typ  $B_2$ :

$$\Delta_0 = \{\alpha, \beta\}$$

$$\Delta_0 : \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \longleftarrow \end{array}$$



Sei

$$\Delta = \Delta_0 \cup \{-\omega\}$$

$$\nabla = \nabla_0 \cup \{h_{-\omega}\}$$

$$\Delta' = \Delta_0 \cup \{-\alpha\} = (\Delta \setminus \{-\omega\}) \cup \{s_\beta(-\omega)\}$$

$$\nabla' = \nabla_0 \cup \{h_{-\alpha}\}$$

Dann ist die GIM-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  zu  $(H, \nabla, \Delta)$  eine quasizerfallende affine Kac-Moody Liealgebra vom Typ  $A_3^{(2)}$  (vgl. 3.11). Andererseits sehen wir in 4.15, daß die GIM-Liealgebra  $\mathfrak{g}'$  zu  $(H, \nabla', \Delta')$  auf eine affine Liealgebra

vom Typ  $B_2^{(1)}$  projiziert. Daher sind  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  nicht isomorph. Wir vermuten, daß es auch keine Projektion von  $\underline{g}'$  auf eine Liealgebra vom Typ  $A_3^{(2)}$  oder  $A_3$  geben kann.

In Anbetracht der obigen Beispiele werden wir im nächsten Abschnitt eine Modifikation der GIM-Liealgebren zu IM-Wurzelbasen einführen.

#### 4.10 IM-Liealgebren

Von jetzt ab sind alle betrachteten Strukturmatrizen symmetrisch.

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine IM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$ . Sei  $\Gamma = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \cdot \alpha$  das Wurzelgitter, das wir als Untergitter von  $H^*$  auffassen, sobald  $\Delta$  frei ist. Auf  $\Gamma$  definieren wir eine symmetrische Bilinearform (die Schnittform)

$$(\ , \ ) : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$$

durch

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \\ &= \beta(h_\alpha) = \alpha(h_\beta) \end{aligned}$$

für  $\alpha, \beta \in \Delta$ . Es gilt also

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) = 2$$

für alle  $\alpha \in \Delta$ .

Nehmen wir  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei an, so operiert die Weylgruppe  $W$  auf  $H$  und stabilisiert  $\Gamma$ . (Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht frei, so erklärt man eine  $W$ -Aktion auf  $\Gamma$  mit den gleichen Formeln wie auf  $H^*$  im freien Fall.). Für die einfachen Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , gilt dann

$$\begin{aligned} s_\alpha(\gamma) &= \gamma - \gamma(h_\alpha)\alpha \\ &= \gamma - (\gamma, \alpha)\alpha \quad , \quad \gamma \in \Gamma \quad . \end{aligned}$$

Insbesondere läßt  $W$  die Form  $(, )$  auf  $\Gamma$  invariant.

Sei nun  $\underline{f}$  die freie komplexe Liealgebra, die erzeugt wird von

$$\begin{aligned} &\text{dem Vektorraum } \underline{h} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \text{ und} \\ &\text{Elementen } e_\alpha \text{ , } \alpha \in \Delta \cup -\Delta \text{ .} \end{aligned}$$

Wir definieren auf  $\underline{f}$  eine  $\Gamma$ -Graduierung durch

$$\begin{aligned} \text{Grad } e_\alpha &= \alpha \quad , \quad \alpha \in \Delta \cup -\Delta \\ \text{Grad } h &= 0 \quad , \quad h \in \underline{h} \quad , \end{aligned}$$

und wir zerlegen  $\underline{f}$  in seine  $\Gamma$ -homogenen Bestandteile

$$\underline{f} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \underline{f}_\gamma \quad .$$

Sei  $\underline{r} \subset \underline{f}$  das  $\Gamma$ -graduierte Ideal von  $\underline{f}$ , das von den folgenden Elementen erzeugt wird:

$$\begin{aligned} [h, h'] & \quad \quad \quad h, h' \in \underline{h} \\ [h, e_\alpha] - \alpha(h)e_\alpha & \quad \quad \quad h \in \underline{h} \quad , \quad \alpha \in \pm\Delta \\ [e_\alpha, e_{-\alpha}] - h_\alpha & \quad \quad \quad \alpha \in \Delta \\ x & \quad \quad \quad x \in \underline{f}_\gamma \quad \text{mit} \quad (\gamma, \gamma) > 2 \quad . \end{aligned}$$

Sei  $\underline{g} = \underline{f}/\underline{r}$  der  $\Gamma$ -graduierte Quotient von  $\underline{f}$  nach  $\underline{r}$ . Dann heißt  $\underline{g}$  die Schnittmatrix- oder IM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Wir haben eine Zerlegung

$$\underline{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \underline{g}_\gamma \quad ,$$

und wir nennen  $\Sigma = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\gamma \neq \{0\}\}$  die Menge der Wurzeln von  $\mathfrak{g}$ .

Offensichtlich gilt

$$\gamma \in \Sigma \Rightarrow (\gamma, \gamma) \leq 2 .$$

Lemma 1: Sei  $\mathfrak{g}'$  die GIM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  und

$$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}'_\gamma$$

die Wurzelraumzerlegung von  $\mathfrak{g}'$ . Sei  $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{g}'$  das Ideal von  $\mathfrak{g}'$ , das von allen  $x \in \mathfrak{g}'_\gamma$  mit  $(\gamma, \gamma) > 2$  erzeugt wird. Dann gilt  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'/\mathfrak{r}'$ .

Beweis: Die Liealgebra  $\mathfrak{g}'$  ist ein  $\Gamma$ -graduierter Quotient von  $\mathfrak{f}$  nach einem Ideal  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{f}$ , das ebenfalls die Elemente  $[h, h']$ ,  $[h, e_\alpha] - \alpha(h)e_\alpha$ ,  $[e_\alpha, e_{-\alpha}] - h_\alpha$  enthält. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es zu zeigen, daß die Elemente

$$\theta_{\alpha\beta} = \text{ad}(e_\alpha)^{\max(1, 1-\beta(h_\alpha))}(e_\beta) \quad , \quad \alpha, \beta \in \pm\Delta \quad ,$$

in homogenen Komponenten  $\mathfrak{f}_\gamma$  mit  $(\gamma, \gamma) > 2$  liegen. Nun gilt  $\theta_{\alpha\beta} \in \mathfrak{f}_\gamma$  mit

$$\gamma = \beta + \max(1, 1-\beta(h_\alpha))\alpha \quad .$$

Sei zunächst  $\beta(h_\alpha) = (\alpha, \beta) \geq 0$ , also  $\max(1, 1-\beta(h_\alpha)) = 1$ . Dann gilt

$$(\gamma, \gamma) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \geq 4 \quad .$$

Ist dagegen  $\beta(h_\alpha) = (\alpha, \beta) < 0$ , also  $\max(1, 1-\beta(h_\alpha)) = 1 - (\alpha, \beta)$ , so gilt

$$\gamma = \beta - (\alpha, \beta)\alpha + \alpha = s_\alpha(\beta - \alpha)$$

und somit

$$(\gamma, \gamma) = (\beta - \alpha, \beta - \alpha) = (\alpha, \alpha) - 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) > 4 \quad .$$

Proposition: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche IM-Wurzelbasis,  $\underline{g}$  die zugehörige IM-Liealgebra und  $\underline{g}'$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra. Dann sind  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  isomorph.

Beweis: Die Liealgebra  $\underline{g}'$  ist nun die GIM-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$ , vgl. 4.4. Also folgt mit dem Lemma  $\underline{g} = \underline{g}' / \underline{r}'$ . Für die Wurzeln  $\gamma$  in der Kac-Moody-Liealgebra  $\underline{g}'$  gilt jedoch  $(\gamma, \gamma) \leq 2$  (vgl. 3.9) und damit  $\underline{r}' = \{0\}$ .

Bemerkung: Für Kac-Moody-Liealgebren mit symmetrisierbaren, aber nicht symmetrischen Cartanmatrizen wird es im allgemeinen keine Präsentation geben, die neben den Relationen

$$(R) : \begin{aligned} [h, h'] &= 0 \\ [h, e_\alpha] &= \alpha(h) e_\alpha \\ [e_\alpha, e_{-\alpha}] &= h_\alpha \end{aligned}$$

nur solche Relationen zwischen Wurzelvektoren enthält, die sich in Termen der Bilinearform  $(, )$  auf dem Wurzelgitter  $\Gamma$  (zur Definition vgl. 3.9) ausdrücken lassen. Das Problem läuft darauf hinaus zu entscheiden, wann die Summe zweier orthogonaler (kurzer) Wurzeln eine (lange) Wurzel ist, d. h. wann die Elemente der zugehörigen Wurzelräume kommutieren oder nicht. Dieses Problem tritt schon auf im Fall  $C_n$ ,  $n \geq 4$ . Ein interessantes Beispiel liefern die quasizerfallenden affinen Liealgebren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den in 3.11 ausführlicher behandelten Fall  $A_3^{(2)}$ . Wir übernehmen die dortigen Notationen: Sei  $e_{-\omega} \in \underline{g}_0$  (Typ  $B_2$ ) ein nichttrivialer Vektor zur Wurzel  $-\omega$ . Dann gilt in  $\underline{g}$ :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, -\omega) = 0 \text{ und } [e_{\alpha_1}, e_{-\omega}] &= c \cdot e_{-\alpha_2}, \quad c \neq 0 \\ (\alpha_1, \delta - \omega) = 0 \text{ und } [e_{\alpha_1}, v_{-\omega} \otimes z] &= 0. \end{aligned}$$

Ausgehend von einer Wurzelbasis vom Typ  $A_3^{(2)}$  und den Relationen (R) läßt sich durch Zufügung geeigneter Relationen eine affine Liealgebra vom Typ  $B_2^{(1)}$  konstruieren (vgl. 4.15):

$$\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] .$$

In dieser Liealgebra gilt nun

$$(\alpha_1, -\omega) = 0 \text{ und } [e_{\alpha_1}, e_{-\omega}] = c e_{-\alpha_2}, \quad c \neq 0$$

$$(\alpha_1, \delta - \omega) = 0 \text{ und } [e_{\alpha_1}, e_{-\omega} \otimes z] = c e_{-\alpha_2} \otimes z, \quad c \neq 0,$$

und die Wurzelgitter von  $A_3^{(2)}$  und  $B_2^{(1)}$  stimmen überein!

Für eine IM-Algebra  $\mathfrak{g}$  gelten ähnliche Aussagen über Zerlegung in direkte Summen, semidirekte Produkte, Kommutatorunteralgebren, ... wie für GIM- oder GCM-Liealgebren. Eine wichtige Frage, die noch für uns offen ist, ist die nach der allgemeinen Nichttrivialität.

Lemma 2: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine zusammenhängende GIM- oder IM-Wurzelbasis und sei  $\mathfrak{g}$  die zugehörige GIM- oder IM-Liealgebra. Sei  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$  ein Ideal, das eines der Elemente  $e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}$  für ein  $\alpha \in \Delta$  enthalte. Dann enthält  $\mathfrak{s}$  die Kommutatorunteralgebra  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  von  $\mathfrak{g}$ . Insbesondere ist  $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$  kommutativ.

Beweis: Mit einem der Elemente  $e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}$  liegen auch die anderen in  $\mathfrak{s}$ :

$$[e_\alpha, h_\alpha] = -2e_\alpha$$

$$[e_{-\alpha}, h_\alpha] = 2e_{-\alpha}$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha .$$



Nun gilt  $\Delta = \{\alpha\}$  oder es gibt ein  $\beta \neq \alpha$ ,  $\beta \in \Delta$ , mit  $\beta(h_\alpha) \neq 0 \neq \alpha(h_\beta)$ .

Im ersten Fall folgt  $\underline{s} \supset [g, g] = \langle e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha} \rangle_{\mathfrak{g}}$ , im zweiten sehen wir

$$[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha)e_\beta \in \underline{s}$$

ähnlich  $e_{-\beta}$ ,  $h_\beta \in \underline{s}$ . Da  $(H, \nabla, \Delta)$  zusammenhängend ist, folgt schließlich

$$e_\alpha, h_\alpha \in \underline{s} \quad \text{für alle } \alpha \in \Delta \cup -\Delta,$$

dies impliziert aber  $[g, g] \subset \underline{s}$ .

In Bezug auf die Nichttrivialität einer IM-Liealgebra  $\underline{g}$  mit zusammenhängendem Wurzeldatum besagt dieses Lemma, daß entweder die Aussage von 4.8, Korollar, für  $\underline{g}$  gilt, oder  $\underline{g}$  kommutativ von endlicher Dimension und somit trivial ist.

#### 4.11 Die adjungierten Gruppen

Im folgenden können wir den Fall der GIM-Liealgebra und den der IM-Liealgebren gleichzeitig betrachten.

Es sei daher  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM- oder IM-Wurzelbasis und  $\underline{g}$  die zugehörige GIM- oder IM-Liealgebra.

Wir nehmen im folgenden an, daß für jedes  $\alpha \in \Delta$  die Elemente

$$e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}$$

ungleich Null in  $\underline{g}$  sind. Im GIM-Fall folgt dies aus 4.7 Korollar. Im IM-Fall besagt 4.10, Lemma 2, daß andernfalls  $\underline{g}$  (oder das Ideal von  $\underline{g}$ , das der Zusammenhangskomponente von  $\alpha$  in  $\Delta$  entspricht) ohnehin trivial ist und keiner Untersuchung bedarf. (Vgl. auch die Bemerkung zum Schluß

dieses Abschnitts.)

Die definierenden Relationen von  $\underline{g}$  implizieren nun, daß  $e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha}$  für jedes  $\alpha \in \Delta$  eine dreidimensionale Unter algebra von  $\underline{g}$  isomorph zu  $sl_2$  erzeugen. Wir bezeichnen diese Algebra im folgenden mit  $sl_{2,\alpha}$ .

Wie im Kac-Moody-Fall (vgl. 3.8) zerfällt  $\underline{g}$  bezüglich der auf  $sl_{2,\alpha}$  eingeschränkten adjungierten Darstellung in eine direkte Summe endlichdimensionaler  $sl_{2,\alpha}$ -Moduln. Die  $\underline{g}$  definierenden Relationen implizieren nämlich, daß  $e_\alpha$  und  $e_{-\alpha}$  lokal nilpotent auf  $\underline{g}$  operieren (vgl. die Argumentation in 3.8 oder [Serre<sub>2</sub>] VI App.). Die adjungierte Darstellung

$$\text{ad} : sl_{2,\alpha} \rightarrow \text{End}(\underline{g})$$

integriert sich daher zu einer Darstellung

$$\text{Ad} : SL_{2,\alpha} \rightarrow \text{Aut}(\underline{g})$$

der komplexen Liegruppe  $SL_2$ .

Sei  $T := H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*, \mathbb{C}^*)$  der Torus mit Charaktergruppe  $H^*$ . Dann operiert  $T$  auf  $\underline{g}$  durch

$$\text{Ad}(t)(x) = \alpha(t) \cdot x$$

für  $t \in T, x \in \underline{g}_\alpha, \alpha \in \Sigma \cup \{0\}$ . Wir fassen  $\alpha \in \Sigma$  mittels der Abbildung  $\Sigma \rightarrow \Gamma \rightarrow H$  als Charakter auf  $T$  auf. Ist  $\bar{\Gamma}$  das Bild von  $\Gamma$  in  $H^*$  ( $\bar{\Gamma} \neq \Gamma$  falls  $\Delta$  nicht frei ist!), so gilt

$$\text{Ad}(T) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{\Gamma}, \mathbb{C}^*).$$

Die von

$$\text{Ad}(T), \text{Ad}(SL_{2,\alpha}), \alpha \in \Delta$$

in  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  erzeugte Gruppe  $G^{\text{Ad}}$  heißt die adjungierte Gruppe von  $\mathfrak{g}$ .

Von nun an setzen wir  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei voraus. Wir fassen dann die Wurzeln  $\Sigma$  als Untermenge von  $H$  auf.

Zu jedem  $\alpha \in \Delta$  sei  $r_\alpha \in G^{\text{Ad}}$  das Bild von  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}_{2,\alpha}$  unter  $\text{Ad}$ , d. h.

$$r_\alpha = \exp(\text{ad } e_\alpha) \exp(-\text{ad } e_{-\alpha}) \exp(\text{ad } e_\alpha) .$$

Aus der endlichdimensionalen Darstellungstheorie der Gruppe  $\text{SL}_{2,\alpha}$  folgt nun

$$\begin{aligned} r_\alpha(\underline{h}) &= \underline{h} \\ r_\alpha|_{\underline{h}} &= s_\alpha = \text{id} - \alpha \otimes h_\alpha \\ r_\alpha(\underline{g}_\gamma) &= \underline{g}_{s_\alpha(\gamma)} \quad , \quad \gamma \in \Sigma . \end{aligned}$$

Als Konsequenz erhalten wir die Stabilität der Wurzeln unter der Aktion der Weylgruppe:

$$W \cdot \Sigma = \Sigma$$

und

$$\dim \underline{g}_\gamma = \dim \underline{g}_{w(\gamma)}$$

für alle  $\gamma \in \Sigma$ ,  $w \in W$ .

Wir nennen  $\Sigma^{\text{R}} := W \cdot \Delta$  die Menge der reellen oder Weylwurzeln. Das Komplement  $\Sigma^{\text{I}} = \Sigma \setminus \Sigma^{\text{R}}$  nennen wir die imaginären oder komplementären Wurzeln.

Eine weitere Konsequenz aus der endlichdimensionalen Darstellungstheorie der Gruppe  $\text{SL}_{2,\alpha}$  ist die folgende. Sei  $\beta \in \Sigma \setminus \{\pm\alpha\}$ , und seien  $\beta + k\alpha$  und  $\beta + l\alpha$ ,  $k \leq 1$ , Wurzeln. Dann sind auch alle  $\beta + m\alpha$ ,  $k \leq m \leq 1$ , Wurzeln.

Im Fall der IM-Algebren erhält man mehr:

$$\beta + k\alpha \in \Sigma \iff -p \leq k \leq q \text{ für gewisse } p, q \in \mathbb{N}$$

$$\text{mit } p-q = \beta(h_\alpha) .$$

(Im GIM-Fall sind zwar alle  $SL_{2,\alpha}$ -Moduln in  $\mathfrak{g}$  endlichdimensional. A priori könnte es jedoch zu einer gegebenen Kette  $\beta + k\alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , unendlich viele solcher Moduln mit unbeschränkter Dimension geben. Es wäre dann

$\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = \infty$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Im IM-Fall gilt dagegen  $(\beta+k\alpha, \beta+k\alpha) > 2$ , also  $\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 0$ , für  $|k|$  genügend groß.)

Sei  $Ad(N)$  die von den  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , und  $Ad(T)$  erzeugte Untergruppe von  $G^{Ad}$  und  $\bar{W}$  das Bild von  $W$  in der Automorphismengruppe des Wurzelgitters  $\Gamma$ . (Die Gruppe  $\bar{W}$  kann ein echter Quotient von  $W$  sein; dies folgt aus den Beispielen in 4.14.) Dann ist  $Ad(N)$  eine Erweiterung von  $\bar{W}$  durch  $Ad(T)$ :

$$1 \rightarrow Ad(T) \rightarrow Ad(N) \rightarrow \bar{W} \rightarrow 1 .$$

Bemerkung: Obwohl wir im vorhergehenden den Fall ausgeschlossen haben, daß die Elemente  $e_\alpha$ ,  $h_\alpha$ ,  $e_{-\alpha}$  gleich Null werden, können wir natürlich auch in diesem Fall  $G^{Ad}$  definieren. Dazu berücksichtigen wir nur, daß diese drei Elemente einen trivialen Homomorphismus

$$sl_2 \rightarrow \mathfrak{g}$$

definieren. Die zugehörige Untergruppe  $Ad(SL_{2,\alpha})$  in  $G^{Ad}$  ist dann ebenfalls trivial. Ist zudem die Wurzelbasis von  $\mathfrak{g}$  zusammenhängend, so folgt natürlich  $G^{Ad} = \{1\}$ .

#### 4.12 Zopf-invarianz der IM-Liealgebren

Satz: Seien  $(H, \nabla, \Delta)$ ,  $(H', \nabla', \Delta')$  schwach zopfäquivalente IM-Wurzelbasen und  $\underline{g}, \underline{g}'$  die zugehörigen IM-Liealgebren. Dann sind  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  isomorph.

Beweis: Es genügt die Behauptung für den Fall einer einfachen Zopftransformation

$$(H', \nabla', \Delta') = \zeta_{\alpha\beta}(H, \nabla, \Delta) \quad , \quad \alpha, \beta \in \Delta \quad ,$$

zu beweisen. Es gilt dann

$$\begin{aligned} H &= H' \\ \Delta' &= (\Delta \setminus \{\beta\}) \cup \{s_{\alpha}(\beta)\} \\ \nabla' &= (\nabla \setminus \{h_{\beta}\}) \cup \{s_{\alpha}(h_{\beta})\} \end{aligned}$$

und die Wurzelgitter  $\Gamma, \Gamma'$  zu beiden Wurzeldaten identifizieren sich mitsamt den darauf definierten Schnittformen  $(, )$ ,  $(, )'$ :

$$(\Gamma, (, )) = (\Gamma', (, )') \quad ,$$

und den Weylgruppen:

$$W = W'$$

(vgl. dazu 1.9).

Ist  $\alpha = \beta$ , so liegt mit  $\zeta_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha}$  eine lokale Umorientierung wie in 4.5 vor. Der dort für GIM-Liealgebren geführte Beweis (4.5, Proposition) überträgt sich unmittelbar auf die vorliegende Situation der IM-Liealgebren. Zur Vermeidung weiterer Fallunterscheidungen können wir daher im folgenden  $\alpha \neq \beta$  annehmen.

Sei  $\underline{f}$  (bzw.  $\underline{f}'$ ) die freie komplexe Liealgebra, die von  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $e_\gamma$ ,  $\gamma \in \pm\Delta$ , (bzw.  $\underline{h}' = H' \otimes \mathbb{C} = \underline{h}$  und Elementen  $e'_\gamma$ ,  $\gamma \in \pm\Delta'$ ) erzeugt wird. Wir betrachten  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  als  $\Gamma$ -graduierte Quotienten

$$\underline{g} = \underline{f}/\underline{r} \quad , \quad \underline{g}' = \underline{f}'/\underline{r}'$$

wie in 4.10. Wir bezeichnen die Bilder von  $\underline{h}$ ,  $e_\gamma$  in  $\underline{g}$  bzw. von  $\underline{h}'$ ,  $e'_\gamma$  in  $\underline{g}'$  mit den gleichen Symbolen, obwohl die Bilder a priori gleich Null sein können. Dies wird zu keiner Konfusion führen.

Sei  $\phi : \underline{f} \rightarrow \underline{g}'$  der wie folgt auf den Erzeugenden von  $\underline{f}$  vorgeschriebene  $\Gamma$ -homogene Liealgebrenhomomorphismus:

Eingeschränkt auf  $\underline{h}$  ist  $\phi$  die Komposition

$$\underline{h} \rightarrow \underline{h}' \rightarrow \underline{g}'$$

wobei der erste Pfeil die Identifikation von  $\underline{h}$  mit  $\underline{h}'$  und der zweite Pfeil die natürliche Abbildung nach  $\underline{g}'$  ist. Für  $\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}$  sei

$$\phi(e_{\pm\gamma}) = e'_{\pm\gamma} \quad ,$$

und es sei

$$\phi(e_{\pm\beta}) = r'_\alpha(e'_{\pm s_\alpha(\beta)})$$

wobei  $r'_\alpha$  die Liftung

$$\exp(\text{ad } e'_\alpha) \exp(-\text{ad } e'_{-\alpha}) \exp(\text{ad } e'_\alpha)$$

von  $s_\alpha \in W'$  in der adjungierten Gruppe von  $\underline{g}'$  ist.

Wir zeigen nun, daß  $\phi$  über einen  $\Gamma$ -homogenen Homomorphismus

$$\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}'$$

faktoriisiert. Dazu müssen wir zeigen, daß  $\phi$  das  $\mathfrak{g}$  definierende Ideal  $\underline{r} \subset \underline{f}$  annulliert.

Für die folgenden Elemente

$$\begin{aligned} [h, h'] & \quad , \quad h, h' \in \underline{h} \quad , \\ [h, e_\gamma] - \gamma(h)e_\gamma & \quad , \quad h \in \underline{h} \quad , \quad \gamma \in \pm(\Delta \setminus \{\beta\}) \quad , \\ [e_\gamma, e_{-\gamma}] - h_\gamma & \quad , \quad \gamma \in \Delta \setminus \{\beta\} \quad , \end{aligned}$$

in  $\underline{r}$  folgt unmittelbar aus der Definition von  $\phi$  und  $\mathfrak{g}'$ , daß sie von  $\phi$  annulliert werden. Weiter gilt

$$\phi([h, e_{\pm\beta}] \mp \beta(h)e_{\pm\beta}) = [h, r'_\alpha(e'_{\pm s_\alpha(\beta)})] \mp \beta(h)r'_\alpha(e'_{\pm s_\alpha(\beta)}) = 0$$

da  $r'_\alpha(e'_{\pm s_\alpha(\beta)})$  den Grad  $\pm\beta$  hat, und

$$\begin{aligned} \phi([e_\beta, e_{-\beta}] - h_\beta) &= [r'_\alpha(e'_{s_\alpha(\beta)}), r'_\alpha(e'_{-s_\alpha(\beta)})] - h_\beta \\ &= r'_\alpha(s_\alpha(h_\beta)) - h_\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

da  $r'_\alpha|_{\underline{h}} = s_\alpha$  ist.

Ist schließlich  $x \in \underline{f}_\gamma$  mit  $(\gamma, \gamma) > 2$ , so liegt  $\phi(x)$  in  $\underline{g}'_\gamma = \{0\}$  wegen der  $\Gamma$ -Homogenität von  $\phi$ .

In ähnlicher Weise definieren wir einen Liealgebrenhomomorphismus

$$\Psi : \underline{g}' \rightarrow \underline{g}$$

indem wir zunächst einen  $\Gamma$ -homogenen Homomorphismus

$$\psi : \underline{f}' \rightarrow \underline{g}$$

wie folgt definieren:

$$\psi|_{\underline{h}'} = \underline{h}' \rightarrow \underline{h} \rightarrow \underline{g}$$

$$\psi(e'_{\pm\gamma}) = e_{\pm\gamma} \quad \text{für } \gamma \in \Delta' \setminus \{s_\alpha(\beta)\}$$

$$\psi(e'_{\pm s_\alpha(\beta)}) = r_\alpha^{-1}(e_{\pm\beta})$$

wobei  $r_\alpha$  die Liftung

$$\exp(\text{ad } e_\alpha) \exp(-\text{ad } e_{-\alpha}) \exp(\text{ad } e_\alpha)$$

von  $s_\alpha \in W$  in der adjungierten Gruppe von  $\underline{g}$  ist. Der Beweis, daß  $\psi$  über  $\Psi: \underline{g}' \rightarrow \underline{g}$  faktorisiert, ist ähnlich dem für  $\phi$  (man beachte  $r_\alpha^{-1}|_{\underline{h}} = s_\alpha$ ).

Für die Kompositionen gilt nun

$$\Psi \circ \phi = \text{id}_{\underline{g}}$$

$$\phi \circ \Psi = \text{id}_{\underline{g}'}, \quad .$$

Diese Relationen sind klar für die Einschränkungen von  $\Psi \circ \phi$  auf (die Bilder in  $\underline{g}$  von)  $\underline{h}$  und  $e_\gamma$ ,  $\gamma \in \pm(\Delta \setminus \{\beta\})$ , bzw. von  $\phi \circ \Psi$  auf (die Bilder in  $\underline{g}'$  von)  $\underline{h}'$ ,  $e'_\gamma$ ,  $\gamma \in \pm(\Delta' \setminus \{s_\alpha(\beta)\})$ . Andererseits gilt

$$\Psi \circ \phi(e_{\pm\beta}) = \Psi(r'_\alpha(e'_{\pm s_\alpha(\beta)})) ,$$

und wegen

$$\Psi([e'_{\pm\alpha}, x]) = [e_{\pm\alpha}, \Psi(x)] \quad \text{für alle } x \in \underline{g}'$$

folgt

$$\Psi \circ r'_\alpha = r_\alpha \circ \Psi$$

("  $\Psi$  ist  $SL_{2,\alpha}$ -äquivariant") also



$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi(e_{\pm\beta}) &= r_{\alpha} \circ \Psi(e'_{\pm s_{\alpha}(\beta)}) \\
&= r_{\alpha} \circ r_{\alpha}^{-1}(e_{\pm\beta}) \\
&= e_{\pm\beta}
\end{aligned}$$

Ähnlich sieht man

$$\phi \circ \Psi(e'_{\pm s_{\alpha}(\beta)}) = e'_{\pm s_{\alpha}(\beta)} .$$

Damit ist bewiesen, daß  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  isomorph sind.

Bemerkung: Als unmittelbares Korollar erhält man die Tatsache, daß eine IM-Liealgebra zu einer IM-Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$ , die schwach zopfäquivalent zu einer Cartanschen Wurzelbasis ist, nichttrivial im Sinne von 4.7, Korollar, ist.

Korollar: Seien  $(H, \nabla, \Delta)$  und  $(H', \nabla', \Delta')$  Cartansche IM-Wurzelbasen. Sind diese Wurzelbasen schwach zopfäquivalent, so sind sie über  $\mathbb{Q}$  isomorph. Insbesondere stimmen ihre Strukturmatrizen und Schnittdiagramme überein (bezüglich einer geeigneten Bijektion  $\Delta \rightarrow \Delta'$ ).

Beweis: Seien  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  die zugehörigen Kac-Moody-Liealgebren. Nach 4.10, Proposition, und dem obigen Satz sind dann  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  isomorph. Jetzt folgt die Behauptung aus den Resultaten von Kac und Peterson, vgl. 3.10.

Bemerkung: Vermutlich sind die Basen  $(H, \nabla, \Delta)$  und  $(H', \nabla', \Delta')$  im obigen Korollar schon über  $\mathbb{Z}$  isomorph.

### 4.13 Affinisierungen von Wurzelbasen

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis. Zur Vermeidung von Konfusionen betrachten wir im folgenden wieder eine "Fremdindizierung"

$$\nabla = (h_i)_{i \in I}$$

$$\Delta = (\alpha_i)_{i \in I}$$

durch die Indexmenge  $I = \{1, 2, \dots, l\}$  (man beachte dennoch die in 3.1 festgelegten Konventionen).

Sei  $\gamma = \alpha_k$  für ein  $k \in I$ , entsprechend  $h_\gamma = h_k$ . Die Affinisierung von  $(H, \nabla, \Delta)$  bezüglich  $\gamma$  ist dann die folgende Wurzelbasis  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  mit

$$\hat{\nabla} = (h_i)_{i \in \hat{I}}$$

$$\hat{\Delta} = (\alpha_i)_{i \in \hat{I}}$$

$$\hat{I} = \{0, 1, \dots, l\}$$

$$h_0 = h_\gamma$$

$$\alpha_0 = \gamma$$

Sei

$$\hat{A} = ((A_{ij}))_{i, j \in \hat{I}}$$

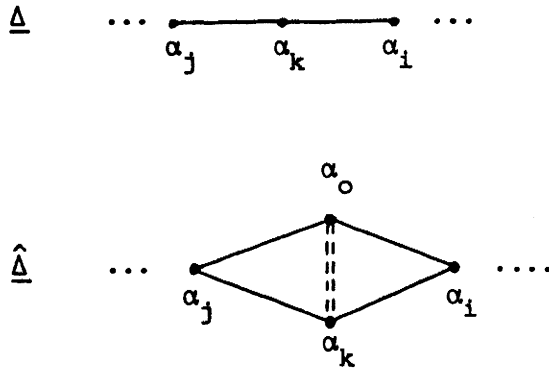
$$A_{ij} = \alpha_j(h_i)$$

die Strukturmatrix von  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$ . Wir nennen  $\hat{A}$  eine Erweiterung der Strukturmatrix  $A = ((A_{ij}))_{i, j \in I}$  von  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Mit  $A$  ist auch  $\hat{A}$  eine (verallgemeinerte) Schnittmatrix. Daher ist

$(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  wieder eine GIM-Wurzelbasis und eine IM-Wurzelbasis falls  $(H, \nabla, \Delta)$  es ist.

Beispiel: Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine IM-Wurzelbasis mit Schnittdiagramm  $\underline{\Delta}$ . Das Schnittdiagramm  $\hat{\Delta}$  von  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  entsteht dann aus  $\underline{\Delta}$  durch "Verdopplung" des  $k$ -ten Eckpunktes:



(Es gilt:  $\alpha_0(h_i) = \alpha_i(h_0) = \alpha_i(h_k) = \alpha_k(h_i) = 1$ .)

Die Affinisierung  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  ist nach Konstruktion niemals frei. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so liefert die folgende Konstruktion eine freie Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $\hat{A}$ .

Die freie Affinisierung  $(\tilde{H}, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  sei die folgendermaßen definierte Wurzelbasis:

$$\tilde{H} = H \oplus \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d,$$

$\delta \in (\tilde{H})^*$  sei durch  $\delta(d) = 1$  und  $\delta(H \oplus \mathbb{Z}c) = \{0\}$  definiert,  $\Delta \subset H^*$  durch triviale Fortsetzung auf  $\mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d$  nach  $(\tilde{H})^*$  geliftet, und

$$\tilde{\nabla} = (h_i)_{i \in \hat{I}}$$

$$\tilde{\Delta} = (\alpha_i)_{i \in \hat{I}}$$

mit

$$h_0 = h_\gamma + c$$

$$\alpha_0 = \gamma + \delta$$

Andere Wurzelbasen mit Strukturmatrix  $\hat{A}$  erhalten wir mit

$$(H \otimes \mathbb{C}c, \tilde{V}, \hat{\Delta})$$

$$(H \otimes \mathbb{C}d, \hat{V}, \tilde{\Delta}) \quad ,$$

wobei

$$\tilde{V} = (h_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad h_0 = h_k + c$$

$$\hat{\Delta} = (\alpha_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad \alpha_0 = \alpha_k$$

$$\hat{V} = (h_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad h_0 = h_k$$

$$\tilde{\Delta} = (\alpha_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad \alpha_0 = \alpha_k + \delta$$

(mit analogen Konventionen wie oben).

Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  von endlichem Typ und  $\tilde{\alpha}$  die höchste Wurzel im zugehörigen Wurzelsystem  $\Sigma$ , so nennt man üblicherweise

$$(H, \nabla', \Delta')$$

mit

$$\nabla' = \nabla \cup \{h_0\}$$

$$\Delta' = \Delta \cup \{\alpha_0\}$$

$$\alpha_0 = -\tilde{\alpha}$$

$$h_0 = -h_{\tilde{\alpha}}$$

die Affinisierung oder Erweiterung von  $(H, \nabla, \Delta)$ . Das Dynkindiagramm von  $(H, \nabla', \Delta')$  ist dann die Erweiterung des Dynkindiagramms von  $(H, \nabla, \Delta)$ . Da alle langen Wurzeln in  $\Sigma$  zueinander konjugiert sind, sieht man, daß  $(H, \nabla', \Delta')$  zopfäquivalent ist zur Affinisierung  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  bezüglich einer langen Wurzel  $\gamma \in \Delta$ . Besitzt  $\Sigma$  nur gleichlange Wurzeln, so folgt daraus die Isomorphie

der zugehörigen GIM-Liealgebren. Für den Fall, daß  $\Sigma$  Wurzeln verschiedener Länge besitzt, vergleiche man 4.15 (und 4.9, Beispiel 2 für die Grenzen des Konzeptes der Zopfäquivalenz in diesem Fall).

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  jetzt auch symmetrisierbar und  $(\Gamma, ( , ))$  das zugehörige Wurzelgitter

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z} \alpha_i$$

mit der Form

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_{ij} A_{ij}, \quad i, j \in I,$$

wobei  $D \cdot A$  eine symmetrisierung der Strukturmatrix  $A$  ist. Ist  $A$  symmetrisch, so sei  $D = 1$ . Sei  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  die Affinisierung von  $(H, \nabla, \Delta)$  bezüglich  $\alpha_k$ . Dann ist die Strukturmatrix  $\hat{A}$  symmetrisierbar mittels einer Diagonalmatrix  $\hat{D}$ , deren Eingänge für  $i \in I$  mit denen von  $D$  übereinstimmen (es gilt dann  $d_0 = d_k$ ). Sei  $(\hat{\Gamma}, ( , )^\wedge)$  das zugehörige Wurzelgitter. Dann liegt  $\delta = \alpha_0 - \alpha_k$  im Radikal der Form  $( , )^\wedge$ , und wir erhalten eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$(\hat{\Gamma}, ( , )^\wedge) = (\Gamma, ( , )) \oplus (\mathbb{Z} \delta, 0).$$

Läßt sich  $H$  mit einer nichtentarteten invarianten Form

$$( , ) : H \times H \rightarrow \mathbb{Q}$$

versehen (vgl. 3.2), so läßt sich diese auf die freie Affinisierung  $(\tilde{H}, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  ausdehnen:

$$( , )^\sim : \tilde{H} \times \tilde{H} \rightarrow \mathbb{Q}$$

sei die durch die Forderungen

$$(h, h_i)^\sim = \frac{1}{2} (h_i, h_i) \alpha_i(h) \quad , \quad h \in \tilde{H} \quad , \quad i \in \hat{I} \quad ,$$

$$(d, d)^\sim = 0$$

festgelegte Fortsetzung von  $(\cdot, \cdot)$ . Dann ist  $(\cdot, \cdot)^\sim$  nicht entartet. Es folgt

$$(c, c)^\sim = 0 \quad , \quad (c, d)^\sim = \frac{1}{2} (h_k, h_k) \quad .$$

#### 4.14 Weylgruppen von Affinisierungen

Sei  $(H, \tilde{V}, \tilde{\Delta})$  eine zusammenhängende GIM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$  und  $(H, \hat{V}, \hat{\Delta})$  ihre Affinisierung mit Strukturmatrix  $\hat{A}$ . Aus den Definitionen folgt unmittelbar, daß die Weylgruppe  $W$  von  $(H, \hat{V}, \hat{\Delta})$  mit der Weylgruppe  $W_0$  übereinstimmt. Im folgenden wollen wir die Weylgruppe zu anderen Wurzelbasen mit Strukturmatrix  $\hat{A}$  untersuchen.

Sei zunächst  $(\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\Delta})$  die freie Affinisierung

$$\tilde{H} = H \oplus \mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}d$$

$$\tilde{V} = (h_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad h_0 = h_k + c \quad ,$$

$$\tilde{\Delta} = (\alpha_i)_{i \in \hat{I}} \quad , \quad \alpha_0 = \alpha_k + \delta \quad .$$

Dann wird die Weylgruppe  $W$  erzeugt von den Elementen  $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_1}, \tau$ , wobei  $\tau$  die Transformation  $s_{\alpha_0} \circ s_{\alpha_k}$  ist, die wie folgt auf  $H$  (bzw.  $H^*$ ) operiert:

$$\tau(h) = h - \delta(h)h_k + (\alpha_k - \delta)(h) \cdot c \quad , \quad h \in H \quad ,$$

$$\tau(\omega) = \omega - \omega(c)\alpha_k + \omega(h_k - c) \cdot \delta \quad , \quad \omega \in H^* \quad .$$

Die Transformationen  $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_e}$  erzeugen eine zu  $W_0$  isomorphe Untergruppe von  $W$ . Sei  $Q$  die von den Elementen  $w\tau w^{-1}$ ,  $w \in W_0$ , erzeugte Untergruppe. Dann zerlegt sich  $W$  in das semidirekte Produkt

$$W = W_0 \rtimes Q,$$

wie man leicht verifiziert. Die Gruppe  $Q$  ist abelsch genau dann, wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar ist. (Die Bedingung für die Kommutativität von  $Q$  führt auf die Bedingung:  $\alpha_k(w(h_k)) = \alpha_k(w^{-1}(h_k))$  für alle  $w \in W_0$ . Diese ist genau dann erfüllt, wenn  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar ist.) In diesem Fall ist  $Q$  eine freie abelsche Gruppe, die sich mit dem von den Elementen  $w(h_k)$ ,  $w \in W_0$ , erzeugten Untergitter von  $H$  identifiziert, sofern die  $h_i$ ,  $i \in I$ , linear unabhängig sind. ( $Q$  kann ein echtes Untergitter des Kowurzelgitters  $L$  sein!)

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht symmetrisierbar, so ist  $Q$  eine zentrale Erweiterung dieses Gitters.

Für die Wurzelbasis  $(H \oplus \mathbb{C}c, \tilde{\nabla}, \tilde{\Delta})$  ergibt sich mit  $\tau = s_{\alpha_0} \circ s_{\alpha_k}$

$$\tau(h) = h + \alpha_k(h) \cdot c, \quad h \in H \oplus \mathbb{C}c,$$

$$\tau(\omega) = \omega - \omega(c)\alpha_k, \quad \omega \in (H \oplus \mathbb{C}c)^*$$

Es gilt nun

$$W = W_0 \rtimes Q^*,$$

wobei  $W_0$  die Weylgruppe von  $(H, \nabla, \Delta)$  und  $Q^*$  das von den Elementen  $w(\alpha_k)$ ,  $w \in W_0$ , erzeugte Untergitter von  $(H \oplus \mathbb{C}c)^*$  ist. Ein Element  $q \in Q^* \subset W$  operiert dabei durch die Transformation

$$h \mapsto h + q(h) \cdot c \quad \text{auf} \quad H \otimes \mathbb{C}c$$

und

$$\omega \mapsto \omega - \omega(c)q \quad \text{auf} \quad (H \otimes \mathbb{C}c)^*$$

Betrachten wir die Wurzelbasis  $(H \otimes \mathbb{C}d, \hat{\nu}, \tilde{\Delta})$ , so erhalten wir zum obigen Fall duale Formeln:

$$\tau(h) = h - \delta(h)h_k, \quad h \in H \otimes \mathbb{C}d,$$

$$\tau(\omega) = \omega + \omega(h_k) \cdot \delta, \quad \omega \in (H \otimes \mathbb{C}d)^*.$$

Die Weylgruppe  $W$  ist nun das semidirekte Produkt

$$W_0 \ltimes Q,$$

wobei  $Q$  das von den Elementen  $w(h_k)$ ,  $w \in W_0$ , erzeugte Untergitter von  $H$  ist. Für die Aktion von  $Q$  gelten die zu den im letzten Fall betrachteten dualen Formeln.

Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  mit einer nichtentarteten invarianten Form versehen, so resultiert die Dualität der beiden zuletzt betrachteten Fälle auch aus der in 4.13 betrachteten Form

$$(\cdot, \cdot)^{\sim} : \tilde{H} \times \tilde{H} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Diese identifiziert nämlich den Dualraum von  $H \otimes \mathbb{C}c$  mit  $H \otimes \mathbb{C}d$ , und umkehrt.

#### 4.15 Schleifenalgebren

Sei  $\mathfrak{g}$  eine GIM- oder IM-Liealgebra zu einer zusammenhängenden Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  mit Erzeugenden  $\underline{h} = H \otimes \mathbb{C}$ ,  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Sei  $\underline{g} = [\underline{g}, \underline{g}]$ . Mit



$\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  bezeichnen wir die  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -Liealgebra

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] ,$$

die durch  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -lineare Fortsetzung der Lieklammer aus  $\mathfrak{g}$  hervorgeht. Wir nennen  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  die Schleifenalgebra zu  $\mathfrak{g}$ . Wir identifizieren  $\mathfrak{g}$  mit der Unteralgebra

$$\mathfrak{g} \otimes 1 \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) .$$

Lemma: Sei  $\gamma \in \Delta$ . Dann wird  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  erzeugt von  $\underline{h}$  und den Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ ,  $e_\gamma \otimes z$ ,  $e_{-\gamma} \otimes z^{-1}$ .

Beweis: Sei  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  die von den besagten Elementen erzeugte Lieunteralgebra von  $\hat{\mathfrak{g}}$ . Dann enthält  $\mathfrak{g}'$  die Algebra  $\mathfrak{g}$ . Mit der  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -Linearität der Lieklammer und 4.10, Lemma 2, folgt, daß  $\mathfrak{g}'$  mit  $\mathfrak{g}$  und  $e_\gamma \otimes z$  auch den Vektorraum  $\mathfrak{g} \otimes z$  enthält. Ähnlich sieht man  $\mathfrak{g} \otimes z^{-1} \subset \mathfrak{g}'$ .

Wegen

$$[h_\gamma \otimes z, e_\gamma \otimes z^n] = 2e_\gamma \otimes z^{n+1}$$

$$[h_\gamma \otimes z^{-1}, e_\gamma \otimes z^{-n}] = 2e_\gamma \otimes z^{-(n+1)}$$

erhalten wir induktiv mit den gleichen Argumenten

$$\mathfrak{g} \otimes z^n \subset \mathfrak{g}'$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ .

Sei nun  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$  die Affinisierung von  $(H, \nabla, \Delta)$  bezüglich  $\gamma \in \Delta$  und  $\hat{\mathfrak{g}}$  die GIM-Liealgebra (bzw. IM-Liealgebra, falls  $\mathfrak{g}$  eine ist) zu  $(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$ .

Wir übernehmen die Notationen von 4.13.

Proposition: Es gibt einen surjektiven Homomorphismus von Liealgebren

$$\phi : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) .$$

Beweis: Sei  $\hat{\mathfrak{f}}$  die freie komplexe Liealgebra erzeugt von  $\underline{h} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$  und Elementen  $\hat{e}_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\hat{\Delta}$ , und

$$\phi : \hat{\mathfrak{f}} \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$$

der durch

$$\phi|_{\underline{h}} = \text{id}_{\underline{h}}$$

$$\phi(\hat{e}_{\pm\alpha_i}) = \begin{cases} e_{\pm\alpha_i} & i \in I = \{1, \dots, l\} \\ e_{\pm\alpha_k} \otimes z^{\pm 1} & i = 0 \end{cases}$$

definierte Homomorphismus. Dann ist  $\phi$  surjektiv nach dem vorausgehenden Lemma. Wir haben zu zeigen, daß  $\phi$  über  $\hat{\mathfrak{g}}$  faktorisiert, d. h. die  $\hat{\mathfrak{g}}$  definierenden Relationen annulliert. Im GIM-Fall folgt dies unmittelbar, u. a. wegen der  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -Linearität der Lieklammer in  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ . Im IM-Fall beachte man zusätzlich, daß  $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$  durch

$$\text{Grad } x = \gamma + n\delta \quad \text{für } x \in \mathfrak{g}_\gamma \otimes z^n$$

eine  $\hat{\Gamma}$ -Graduierung erhält, bezüglich der  $\phi$  homogen ist. Für alle  $\beta = \gamma + n\delta$  mit  $(\beta, \beta) > 2$  folgt dann

$$\phi(\hat{\mathfrak{f}}_\beta) \subset \mathfrak{g}_\gamma \otimes z^n = \{0\} ,$$

da mit  $(\gamma, \gamma) = (\beta, \beta) > 2$  die Trivialität  $\mathfrak{g}_\gamma = \{0\}$  folgt.

Bemerkung: Wir vermuten, daß  $\phi$  ein Isomorphismus ist, zumindest im

GIM-Fall. Ist  $\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale einfache Liealgebra, so ist diese

Vermutung ein bekanntes Resultat von Kac und Moody ( $[Kac_1]$ ,  $[Moody_2]$ ). Wenn überhaupt, dann lassen sich die in diesen Arbeiten benutzten Argumente nur dann auf die vorliegende Situation ausdehnen, wenn weitere Einsichten in die Struktur der IM- und GIM-Liealgebren vorliegen.

Besitzt  $\underline{g}$  eine  $\underline{g}$ -invariante symmetrische Bilinearform

$$(\ , \ ) : \underline{g} \times \underline{g} \rightarrow \mathbb{C} \ ,$$

so läßt sich diese auf  $\underline{\mathfrak{L}}(\underline{g})$  ausdehnen: Es sei

$$(\ , \ )_z : \underline{\mathfrak{L}}(\underline{g}) \times \underline{\mathfrak{L}}(\underline{g}) \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

die  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ -lineare Fortsetzung von  $(\ , \ )$  auf  $\underline{\mathfrak{L}}(\underline{g})$  und

$$k : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$k\left(\sum a_i z^i\right) = a_0$$

die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung "konstanter Term". Dann ist

$$k \circ (\ , \ )_z : \underline{\mathfrak{L}}(\underline{g}) \times \underline{\mathfrak{L}}(\underline{g}) \rightarrow \mathbb{C}$$

eine  $\underline{\mathfrak{L}}(\underline{g})$ -invariante symmetrische Bilinearform auf  $\underline{\mathfrak{L}}(\underline{g})$ . Ist die Form  $(\ , \ )$  auf  $\underline{g}$  nicht entartet, so gilt dies auch für die Form  $k \circ (\ , \ )_z$  auf  $\underline{\mathfrak{L}}(\underline{g})$ .

Sei  $\underline{\tilde{g}}$  die GIM- (bzw. IM-) Liealgebra zu der freien Affinisierung  $(\tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{\Delta})$  von  $(H, V, \Delta)$ . Dann erhalten wir eine zentrale Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{C}c \rightarrow \underline{\tilde{g}} \rightarrow \hat{\underline{g}} \rtimes \mathbb{C}d \rightarrow 0 \ .$$

Dabei ist  $\hat{\underline{g}} \rtimes \mathbb{C}d$  die GIM- (bzw. IM-) Liealgebra zu der Wurzelbasis  $(H \oplus \mathbb{Z}d, \hat{V}, \hat{\Delta})$ . Ähnlich ist  $\underline{\tilde{g}}^c = [\underline{\tilde{g}}, \underline{\tilde{g}}]$  die GIM- (bzw. IM-) Liealgebra zu

der Wurzelbasis  $(H \otimes \mathbb{Z} c, \tilde{V}, \hat{\Delta})$ , vgl. 4.13.

Bemerkungen: 1) Ist  $(H, V, \Delta)$  symmetrisierbar, also  $\mathfrak{g}$  mit einer invarianten Form  $(, ) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  versehen, so läßt sich eine zentrale Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{C}c \rightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

wie folgt definieren:

Als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}c ,$$

und das Lieprodukt wird durch die Vorschriften

- $c$  ist zentral
  - $[x \otimes z^m, y \otimes z^n] = [x, y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m,-n} \cdot (x, y) \cdot c$
- $x, y \in \mathfrak{g} , m, n \in \mathbb{Z}$

festgelegt.

Vermutlich ist die zentrale Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}^c \rightarrow \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow 0$$

identisch mit der obigen (oder davon induziert falls  $\hat{\mathfrak{g}} \neq \mathcal{L}(\mathfrak{g})$  sein sollte), ähnlich wie im Fall der affinen Kac-Moody-Liealgebren (vgl. [Garland<sub>2</sub>], aufgrund möglicher imaginärer Wurzeln oder unbekannter Wurzelmultiplizitäten in  $\mathfrak{g}$  lassen sich Garland's Argumente nicht unmittelbar übertragen).

2) Von K. Saito wurden "erweiterte affine Wurzelsysteme" eingeführt und klassifiziert ([Saito<sub>3</sub>]). Die mit  $x_n^{(1,k)}$  oder  $x_n^{(k,1)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , be-

zeichneten Systeme lassen sich als Systeme der "reellen" Wurzeln in Schleifenalgebren  $\hat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$  interpretieren, wobei  $\mathfrak{g}$  eine affine Kac-Moody-Liealgebra ist. Es stellt sich die Frage, ob sich auch die anderen von Saitos Wurzelsystemen mittels Schleifen-, IM- oder GIM-Liealgebren interpretieren lassen. Zu den von Saito angegebenen "Dynkindiagrammen" lassen sich immer GIM-Liealgebren assoziieren. Das betreffende System der reellen Wurzeln weicht jedoch von dem entsprechenden System Saitos ab.

#### 4.16 Ein Reduktionssatz

Dieser Abschnitt handelt von der Klassifikation gewisser Konjugationsklassen in (modifizierten) Schleifenalgebren  $\hat{\mathfrak{g}}$  von endlichdimensionalen, algebraischen Liealgebren  $\mathfrak{g}$ . Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine Umformulierung klassischer Resultate über lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten (Satz von Floquet, vgl. [Dieudonné]). Ihre Anwendung auf die Untersuchung von Konjugationsklassen wurde von I. Frenkel [Frenkel<sub>1</sub>] und G. Segal [Segal] entdeckt.

Für eine Kac-Moody- oder GIM-Liealgebra haben die Resultate vorerst nur heuristische Bedeutung. Möglicherweise lassen sich jedoch die für die Beweise erforderlichen Voraussetzungen wenigstens partiell oder in geeignet komplementierten Liealgebren realisieren (vgl. auch die Bemerkungen am Schluß).

Sei nun  $\mathfrak{g}$  eine algebraische Lieunteralgebra der Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraumes komplexen Vektorraums  $V$

$$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) \ .$$

Die übliche Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow GL(V)$$

liefert dann eine Surjektion

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

von  $\mathfrak{g}$  auf eine zusammenhängende algebraische Untergruppe

$$G \subset GL(V) \quad .$$

Sei  $A$  die  $\mathbb{C}$ -Algebra der holomorphen Abbildungen  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir können dann  $A$  auch als die Algebra der periodischen holomorphen Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten: Auf  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{C}^*$  wählen wir Koordinaten  $y$  bzw.  $z$  mit  $z = \exp(2\pi iy)$ . Ist  $f \in A$ , so gilt für  $\tilde{f}(y) = f(\exp(2\pi iy))$

$$\tilde{f}(y+1) = \tilde{f}(y) \quad .$$

Sei

$$\hat{G} = G(A) = \{L : \mathbb{C}^* \rightarrow G \mid L \text{ holomorph}\} \quad .$$

und

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes A = \{X : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathfrak{g} \mid X \text{ holomorph}\} \quad .$$

Die eindimensionale Liealgebra  $\mathfrak{e} = \mathbb{C} \cdot D$  mit  $D = z \frac{d}{dz}$  operiert auf  $\hat{\mathfrak{g}}$  durch Derivation auf dem Faktor  $A$ . Das semidirekte Produkt

$$\hat{\mathfrak{g}} \rtimes \mathfrak{e}$$

liftet sich zu einem semidirekten Produkt

$$\hat{G} \rtimes E \quad , \quad E \cong \mathbb{C}^* \quad .$$

Daher operiert  $\hat{G}$  als Untergruppe von  $\hat{G} \rtimes E$  durch Konjugation auf  $\hat{\mathfrak{g}} \rtimes \mathfrak{e}$ .

Betrachten wir  $X \in \hat{\mathfrak{g}}$  und  $L \in \hat{G}$  als Abbildung von  $\mathbb{C}^*$  nach  $\text{End}(V)$ , so gilt in  $(\text{End}(V) \otimes A) \rtimes \underline{e}$ :

$$L(X+\lambda D)L^{-1} = LXL^{-1} + \lambda(D(L))L^{-1} + \lambda D, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

oder, falls wir  $X$  und  $L$  als periodische Abbildungen auf  $\mathbb{C}$  auffassen,

$$L(X+\lambda \frac{d}{dy})L^{-1} = LXL^{-1} + \lambda(\frac{d}{dy} L)L^{-1} + \lambda \frac{d}{dy}.$$

Die Konjugation von  $\hat{G}$  läßt die Projektion

$$\hat{\mathfrak{g}} \rtimes \underline{e} \rightarrow \underline{e}$$

invariant. Da  $\hat{G}$  mit der Skalarmultiplikation auf  $\hat{\mathfrak{g}} \rtimes \underline{e}$  kommutiert, erhält man eine vollständige Beschreibung aller Konjugationsklassen durch eine Beschreibung der Klassen in

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \oplus 0$$

und

$$\hat{\mathfrak{g}}_1 = \hat{\mathfrak{g}} \oplus D.$$

Uns interessiert hier nur der Fall  $\hat{\mathfrak{g}}_1$ , der von Frenkel und Segal für den Fall differenzierbarer Abbildungen  $S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$  behandelt worden ist (loc. cit.).

Die Argumente im holomorphen Fall sind "mutatis mutandis" die gleichen wie im differenzierbaren Fall. Wir beschränken uns daher auf eine Formulierung der Ergebnisse ohne erneuten Beweis.

Sei

$$m : \hat{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \mathfrak{G}$$

die folgendermaßen definierte Abbildung: Sei  $X + D \in \hat{\mathfrak{g}}_1$ . Wir fassen  $X \in \hat{\mathfrak{g}}$

als periodische Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  auf. Dann gibt es genau eine holomorphe Abbildung

$$S : \mathbb{C} \rightarrow G ,$$

die die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dy} S = X \cdot S$$

und die Anfangsbedingung

$$S(0) = 1_G$$

erfüllt. Wir setzen dann

$$m(X+D) = S(1) .$$

Satz (Floquet, Frenkel, Segal): Sei  $L \in \hat{G}$ ,  $X_1 = X+D \in \hat{\mathfrak{g}}_1$ . Dann gilt:

i)  $m(LX_1L^{-1}) = L(0)m(X_1)L(0)^{-1}$  .

ii) Jede  $\hat{G}$ -Konjugationsklasse in  $\hat{\mathfrak{g}}_1$  ist das Urbild unter  $m$  einer  $G$ -Konjugationsklasse in  $G$  .

iii)  $X_1$  ist  $\hat{G}$ -konjugiert zu einem "konstanten" Element  $Y_1 = Y+D$  mit  $Y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{1} \subset \hat{\mathfrak{g}}$  .

iv) Sei  $\hat{G}_{X_1} = \{L \in \hat{G} \mid LX_1L^{-1} = X_1\}$  und

$G_{m(X_1)} = \{g \in G \mid gm(X_1)g^{-1} = m(X_1)\}$  . Dann induziert die Abbildung  $L \mapsto L(0)$  einen Isomorphismus

$$\hat{G}_{X_1} \rightarrow G_{m(X_1)} .$$

Bemerkungen: 1) Sei  $P \rightarrow \mathbb{C}^*$  das triviale  $G$ -Rechts-Prinzipalbündel  $\mathbb{C}^* \times G$  . Nach Einschränkung auf den Eins-Schnitt von  $\mathbb{C}^* \times G$  identifiziert sich jeder



$G$ -Zusammenhang auf  $P$  mit einem Element  $X_1 = X+D \in \hat{\mathfrak{g}}_1$ . Die Gruppe  $\hat{G}$  operiert auf  $P$  (von links) als Gruppe der Eichtransformationen. Die dadurch induzierte Aktion auf den Zusammenhängen geht unter der obigen Identifikation über in die Konjugation von  $\hat{G}$  auf  $\hat{\mathfrak{g}}_1$ . Die Abbildung  $m : \hat{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow G$  ordnet nun jedem Zusammenhang seine Monodromie zu.

2) Will man den obigen Satz auf Kac-Moody- oder GIM-Liealgebren  $\mathfrak{g}$  verallgemeinern, so benötigt man dazu eine surjektive Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

auf eine zugehörige Gruppe  $G$ , eine analytische Struktur auf  $G$ , sowie die Integrierbarkeit der Differentialgleichung  $\dot{S} = X \cdot S$ . Keine dieser Eigenschaften ist jedoch für die von uns betrachteten Liealgebren  $\mathfrak{g}$  und Gruppen  $G$  erfüllt. Andererseits sind diese Eigenschaften für proalgebraische Gruppen und ihre Liealgebren erfüllt, die als Untergruppen und Unteralgebren von geeigneten Gruppen  $G$  und Algebren  $\mathfrak{g}$  auftreten (vgl. Kap. 5). Wir glauben, daß das obige Resultat in diesen Fällen für einen "hinreichend" großen Teil von  $\hat{\mathfrak{g}}_1$  erhalten bleibt. Einen Anhaltspunkt dafür sehen wir in der folgenden Überlegung. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß  $\mathfrak{g}$  die IM-Liealgebra zu einer zusammenhängenden IM-Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ist. Wir nehmen auch an, daß das Kowurzelgitter  $Q$  mit  $H$  übereinstimmt. Die Weylgruppe der Affinisierung  $(H \oplus \mathbb{Z}D, \hat{\nabla}, \tilde{\Delta})$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  bezüglich einer Wurzel  $\alpha \in \Delta$  ist dann ein semidirektes Produkt

$$W \ltimes H$$

der Weylgruppe  $W$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  und des Gitters  $H$  (vgl. 4.14).

Die "halbeinfachen" Konjugationsklassen in

$$\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g} \oplus A \oplus D$$

(Notationen wie im Hauptteil dieses Abschnittes) sollten dann durch den Quotienten von  $\underline{h} \oplus D$ ,  $\underline{h} = H \oplus \mathbb{C}$ , nach  $W \rtimes H$  parametrisiert werden. Dieser läßt sich identifizieren mit dem Quotienten

$$(\underline{h}/H)/W .$$

Der partielle Quotient  $\underline{h}/H$  identifiziert sich jedoch mit einem maximalen Torus  $T$  einer  $\mathfrak{g}$  zugeordneten "einfach zusammenhängenden" Gruppe  $G$  (für den GCM-Fall vgl. Kap. 5). Die "halbeinfachen"  $G$ -Konjugationsklassen in  $G$  sollten nun durch  $T/W$  parametrisiert werden. Ein gutes Zentralisatorverhalten in  $\hat{\mathfrak{g}}_1$  und  $G$  vorausgesetzt, ließe sich somit eine Bijektion der "Jordanzerlegbaren" Konjugationsklassen in  $\hat{\mathfrak{g}}_1$  zu den "Jordanzerlegbaren" Klassen in  $G$  über den Isomorphismus

$$\underline{h}/W \rtimes H \cong T/W$$

erstellen.

Ist  $\mathfrak{g}$  halbeinfach und endlichdimensional, so sind diese Vermutungen durch den obigen Satz bewiesen. (Für eine allgemeine IM-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  oder zugehörige Gruppe  $G$  sind die Terme "halbeinfaches" oder "Jordanzerlegbares" Element mittels der adjungierten Darstellung zu definieren.)

3) Ist die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  halbeinfach, so besitzt sie eine nichtentartete, invariante, symmetrische Bilinearform. Zu  $\hat{\mathfrak{g}}$  gibt es dann eine mittels dieser Form definierbare zentrale Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow 0 .$$

Die  $\hat{G}$ -Aktion auf dem Dual  $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$  identifiziert sich nun mit der  $\hat{G}$ -Aktion auf  $\hat{\mathfrak{g}} \rtimes \mathfrak{e}$ , vgl dazu 4.14, 4.15. Insofern überträgt sich der obige Satz auf die Konjugationsklassen der koadjungierten Darstellung.

#### 4.17 Offene Fragen

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch einige Fragen erwähnen, deren Beantwortung mehr Einsicht in die Struktur der GIM- und IM-Liealgebren bringen würde.

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine GIM-Wurzelbasis mit Strukturmatrix  $A$  und Wurzelgitter  $\Gamma$ . Sei  $\mathfrak{g}$  die zugehörige GIM-Liealgebra.

1) Die kommutative Unteralgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  ist in dem Eigenraum

$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0, h \in \mathfrak{h}\}$  trivialerweise enthalten. Ist  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-algebra, d. h. gilt  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  ?

2) Was ist die Dimension der Wurzelräume  $\mathfrak{g}_\alpha$  ? Gilt  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  für alle reellen Wurzeln  $\alpha$  ?

Man beachte, daß die Beantwortung der Fragen 1 und 2 nicht so einfach wie im Fall der Kac-Moody-Liealgebren ist, da die Wurzeln  $\alpha$  von  $\mathfrak{g}$  sowohl positive als auch negative Koeffizienten in den einfachen Wurzeln haben können.

Eine positive Antwort auf die Fragen 1) und 2) ermöglichte die Berechnung der Zentralisatoren von Elementen aus  $\mathfrak{h}$ . Diese sind von Wichtigkeit bei der Beschreibung der Konjugationsklassen in  $\mathfrak{g}$ .

3) Gilt die Gleichheit  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ , so ist die Summe zweier  $\Gamma$ -homogener Ideale  $\mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{s}$  von  $\mathfrak{g}$  mit der Eigenschaft

$$\underline{r} \cap \underline{h} = \underline{s} \cap \underline{h} = \{0\}$$

wieder ein solches

$$(\underline{r} + \underline{s}) \cap \underline{h} = \{0\} .$$

Daher gibt es ein maximales  $\Gamma$ -homogenes Ideal  $\underline{m} \subset \underline{g}$  mit  $\underline{m} \cap \underline{h} = \{0\}$ . In Analogie zur Theorie der Kac-Moody-Liealgebren könnte man sich dann zunächst auf die Untersuchung des Quotienten  $\underline{g}/\underline{m}$  beschränken.

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei und zusammenhängend, so ist die Kommutatorunteralgebra von  $\underline{g}/\underline{m}$  einfach (vgl. 4.10, Lemma 2).

4) Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar. Läßt sich dann eine invariante Form auf  $H$  zu einer  $\underline{g}$ -invarianten Form auf  $\underline{g}$  fortsetzen?

5) Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  eine IM-Wurzelbasis, so stellen sich die obigen Fragen sinngemäß für die zugehörige IM-Liealgebra  $\underline{g}$ . Wichtiger ist hier allerdings die Frage nach der Nichttrivialität von  $\underline{g}$  (vgl. 4.10). Die von uns als nicht-trivial erkannten Fälle basieren letztlich auf Kac-Moody-Liealgebren (4.12, 4.15).

6) Sei  $\underline{g}$  eine GIM- oder IM-Liealgebra und  $G$  die adjungierte Gruppe von  $\underline{g}$  (4.11). Dann wird  $G$  erzeugt von den Untergruppen

$$\text{Ad}(T) , \text{Ad}(SL_{2,\alpha}) , \alpha \in \Delta .$$

Sei  $G_c$  die Untergruppe von  $G$ , die erzeugt wird von den Gruppen

$$\text{Ad}(T_c) , \text{Ad}(SU_{2,\alpha}) , \alpha \in \Delta ,$$

wobei  $SU_{2,\alpha}$  die "Standard"-Kompakte-Form von  $SL_{2,\alpha}$ , und  $T_c \subset T$  eine verträgliche kompakte Form von  $T$  ist.

Wie mir V. Kac mündlich mitgeteilt hat, kann er der Strukturmatrix  $A$  von  $(\mathfrak{H}, \nabla, \Delta)$  eine "algebraisch kompakte" Gruppe  $G_K$  in Analogie zur Konstruktion in seiner Arbeit [Kac<sub>2</sub>] zuordnen. Gibt es eine Beziehung zwischen  $G_K$  und  $G_C$  ?

KAPITEL 5: KAC-MOODY-LIEGRUPPEN5.1 Tits-Systeme

Im folgenden erinnern wir an den Begriff eines Tits-Systems. Für Details vergleiche man [LIE] IV, [Serre<sub>3</sub>], [Tits<sub>2</sub>].

Ein Tits-System ist ein Viertupel  $(G, B, N, S)$ , wobei  $G$  eine Gruppe ist,  $B$  und  $N$  Untergruppen von  $G$  sind, und  $S$  eine Teilmenge von  $N/(B \cap N)$  ist, die den folgenden Bedingungen genügen:

- 1) Die Untergruppen  $B$  und  $N$  erzeugen  $G$ .
- 2) Der Durchschnitt  $B \cap N$  ist normal in  $N$ .
- 3) Die Menge  $S$  erzeugt die Gruppe  $W = N/(B \cap N)$ .
- 4) Für alle  $s \in S$ ,  $w \in W$  gilt:

$$sBw \subset BwB \cup BswB \quad .$$

- 5) Für alle  $s \in S$  gilt:

$$sBs^{-1} \neq B \quad .$$

Statt zu sagen  $(G, B, N, S)$  sei ein Tits-System, sagt man gelegentlich auch  $(B, N)$  sei ein Tits-System oder BN-Paar in  $G$ .

Die Cardinalität  $|S|$  von  $S$  heißt der Rang, und  $W$  die Weylgruppe des Systems. Die Elemente von  $S$  haben die Ordnung 2 in  $W$ , und  $(W, S)$  bildet ein Coxeter-System. Die Gruppe  $B$  sowie ihre Konjugierten in  $G$  heißen Boreluntergruppen von  $G$ .

Bezüglich der Doppelnebenklassen von  $B$  erhalten wir eine "Bruhatzerlegung":

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB .$$

Es gilt  $BwB = Bw'B$  genau dann, wenn  $w = w'$ . Wegen seiner späteren Nützlichkeit erwähnen und beweisen wir das folgende elementare Lemma (vgl. [Tits<sub>3</sub>] Ende von 5.4).

Lemma: Sei  $\phi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Gruppen, dessen Einschränkung auf  $B \cup N$  injektiv ist. Dann ist auch  $\phi$  injektiv.

Beweis: Sei  $g \in G$  im Kern von  $\phi$ . Für die Bruhatzerlegung  $g = bnb'$ ,  $b, b' \in B$ ,  $n \in N$ , von  $g$  folgt dann

$$\phi(n) = \phi(b)^{-1} \phi(b')^{-1} = \phi((b'b)^{-1})$$

also

$$n = b^{-1}(b')^{-1}$$

d. h.  $bnb' = 1$ , w.z.z.w. .

Sei  $S'$  eine Teilmenge von  $S$  und  $W_{S'}$  die von  $S'$  erzeugte Untergruppe in  $W$ . Dann ist

$$P_{S'} = BW_{S'}B = \bigcup_{w \in W_{S'}} BwB$$

eine Untergruppe von  $G$ . Man nennt  $P_{S'}$  die Standard-parabolische Untergruppe vom Typ  $S'$  und  $|S'|$  den Rang von  $P_{S'}$ . Es ist dann  $(P_{S'}, B, N \cap P_{S'}, S')$  wieder ein Tits-System (mit Weylgruppe  $W_{S'}$  und Rang  $|S'|$ ). Die Abbildung

$$S' \mapsto P_{S'}$$

induziert eine inklusionstreue Bijektion von der Potenzmenge von  $S$  auf die Menge der Untergruppen von  $G$ , die  $B = P_\emptyset$  enthalten. Wir setzen  $P_s = P_{\{s\}}$  für alle  $s \in S$ .

Unter einem System von Gruppen verstehen wir ein Paar  $(\mathcal{G}, \Phi)$  bestehend aus einer Familie  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in I}$  von Gruppen und einer Familie  $\Phi = \bigcup_{i,j \in I} \phi_{ij}$  von Homomorphismen,  $\phi_{ij} \subset \text{Hom}(G_i, G_j)$ .

Im Hinblick auf die speziellen Systeme von Gruppen, die wir betrachten werden, nennen wir den induktiven Limes

$$\varinjlim (\mathcal{G}, \Phi)$$

eines solchen Systems (in der Kategorie der Gruppen) auch das Amalgam dieses Systems. Unter der Vereinigung des Systems  $(\mathcal{G}, \Phi)$  verstehen wir einfach den induktiven Limes in der Kategorie der Mengen.

Jede Menge  $\{H_k \mid k \in K\}$  von Untergruppen einer Gruppe  $G$  erzeugt ein natürliches System  $(\mathcal{G}, \Phi)$  von Gruppen, bestehend aus der Familie  $\mathcal{G}$  aller Durchschnitte der Gruppen  $H_k$  und der Familie  $\Phi$  der natürlichen Inklusionen. Wir nennen das Amalgam von  $(\mathcal{G}, \Phi)$  dann das Amalgam der Gruppen  $H_k$ ,  $k \in K$ , entlang ihrer Durchschnitte.

Theorem ([Tits<sub>2</sub>]): Sei  $(G, B, N, S)$  ein Tits-System. Dann ist  $G$  das Amalgam der Untergruppen  $N$  und  $P_s$ ,  $s \in S$ , entlang ihrer Durchschnitte.

Aufgrund der Präsentation von  $W$  als Coxetergruppe ergeben sich unmittelbar die folgenden Korollare (vgl. [Serre<sub>3</sub>], [Tits<sub>2</sub>]).

Korollar 1: Sei  $|S| \geq 2$ . Dann ist  $G$  das Amalgam der Standard-parabolischen Untergruppen vom Rang 2 entlang ihrer Durchschnitte.



Korollar 2: Sei  $|S| = 2$ ,  $S = \{s, s'\}$ , und  $W$  unendlich. Dann ist  $W$  das freie Produkt

$$W = \langle 1, s \rangle * \langle 1, s' \rangle,$$

und  $G$  ist das Amalgam

$$G = P_S *_B P_{S'}$$

der Standard-parabolischen Untergruppen  $P_S$  und  $P_{S'}$ , vom Rang 1 entlang ihres Durchschnitts  $B = P_S \cap P_{S'}$ .

Sei  $S' \subset S$ . Wir nennen  $S'$  und die Gruppe  $P_{S'}$  von endlichem Typ, falls die von  $S'$  erzeugte Untergruppe  $W_{S'}$  endlich ist.

Aus Korollar 2 folgt nun unmittelbar:

Korollar 3: Sei  $|S| \geq 2$ . Dann ist  $G$  das Amalgam der Standard-parabolischen Untergruppen von endlichem Typ und Rang  $\leq 2$ .

Eine Abschwächung davon ist:

Korollar 4: Sei  $|S| \geq 2$ . Dann ist  $G$  das Amalgam der Standard-parabolischen Untergruppen von endlichem Typ.

## 5.2 Proalgebraische Gruppen

In diesem Abschnitt stellen wir Definitionen und elementare Eigenschaften von komplex proalgebraischen Gruppen zusammen. Details, Beweise und weitere Erörterungen findet man in den Artikeln von Serre [Serre<sub>1</sub>] und Kovacic [Kovacic]. Alle von uns in diesem und dem nächsten Abschnitt betrachteten algebraischen Gruppen setzen wir als komplex und linear voraus.

Eine proalgebraische Gruppe ist ein Paar  $(G, \mathcal{S})$  bestehend aus einer Gruppe  $G$  und einer nichtleeren Familie  $\mathcal{S}$  von Normalteilern von  $G$  mit der Struktur einer algebraischen Gruppe auf jedem Quotienten  $G/H$ ,  $H \in \mathcal{S}$ , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1)  $H, H' \in \mathcal{S} \Rightarrow H \cap H' \in \mathcal{S}$  .
- 2) Sei  $H \in \mathcal{S}$ ,  $H'$  Normalteiler von  $G$  mit  $H \subset H'$ . Dann gilt  $H' \in \mathcal{S}$  genau dann, wenn  $H'$  das Urbild einer algebraischen Untergruppe von  $G/H$  unter der Abbildung  $G \rightarrow G/H$  ist.
- 3) Seien  $H, H' \in \mathcal{S}$ ,  $H \subset H'$ . Dann ist der natürliche Homomorphismus  $G/H \rightarrow G/H'$  ein Morphismus algebraischer Gruppen.
- 4) Die natürliche Abbildung  $G \rightarrow \varprojlim_{H \in \mathcal{S}} G/H$  ist eine Bijektion von  $G$  auf den projektiven Limes der Gruppen  $G/H$ ,  $H \in \mathcal{S}$ .

Die Menge  $\mathcal{S}$  heißt eine saturierte Definitionsmenge für die proalgebraische Struktur auf  $G$ . Erfüllt eine Menge  $\mathcal{S}'$  von Normalteilern von  $G$  nur die Bedingungen 3) und 4) und ist  $\mathcal{S}'$  absteigend filtrierend, so gibt es genau eine Menge  $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}'$  von Normalteilern von  $G$ , die die Bedingungen 1) bis 4) erfüllt. Eine solche Menge  $\mathcal{S}'$  heie eine Definitionsmenge,  $\mathcal{S}$  ihre Satura-  
rierung. Die Gruppe  $G$  identifiziert sich dann auch mit dem projektiven Limes  $\varprojlim_{H \in \mathcal{S}'} G/H$ . Ist vom Kontext klar, welche proalgebraische Struktur auf einer Gruppe  $G$  vorliegt, so bezeichnen wir  $(G, \mathcal{S})$  auch einfach mit  $G$ .

Beispiel: Sei  $G = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G_i$  projektiver Limes eines Systems  $\dots G_{i+1} \rightarrow G_i \dots$  algebraischer Gruppen  $G_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{S}$  die Menge der Kerne der (nicht unbedingt surjektiven) Homomorphismen  $G \rightarrow G_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , für eine kofinale Teilmenge  $I \subset \mathbb{N}$ . Dann ist  $\mathcal{S}$  eine Definitionsmenge für eine proalgebraische Struktur auf  $G$ . Insbesondere ist jede algebraische Gruppe in natürlicher Weise ( $\mathcal{S} = \{1\}$ ) eine proalgebraische Gruppe.

Seien  $(G, \mathcal{S})$  und  $(K, \mathcal{T})$  proalgebraische Gruppen. Ein Homomorphismus  $\phi : G \rightarrow K$  heißt ein Morphismus proalgebraischer Gruppen, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

- Für jedes  $L \in \mathcal{T}$  ist  $\phi^{-1}(L) \in \mathcal{S}$ , und der natürliche Homomorphismus  $G/\phi^{-1}(L) \rightarrow K/L$  ist ein Morphismus algebraischer Gruppen.

Bemerkung: Sind  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  nicht notwendig saturierte Definitionsmengen für  $(G, \mathcal{S})$  und  $(K, \mathcal{T})$ , so ist die obige Bedingung äquivalent zu der schwächeren:

- Für jedes  $L \in \mathcal{T}'$  enthält  $\phi^{-1}(L)$  ein  $H \in \mathcal{S}'$ , so daß die natürliche Abbildung  $G/H \rightarrow K/L$  ein Morphismus algebraischer Gruppen ist.

Sei  $(G, \mathcal{S})$  eine proalgebraische Gruppe und  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  ein Definitionssystem. Die Zariski-Topologien auf den Quotienten  $G/H$ ,  $H \in \mathcal{S}'$ , induzieren auf  $G$  die Projektive-Limes-Topologie, die wir ebenfalls Zariski-Topologie nennen.

Eine Untergruppe  $K \subset G$  heißt proalgebraische Untergruppe, wenn  $K$  in  $G$  Zariski-abgeschlossen ist.

Für  $H \in \mathcal{S}'$  bezeichne  $p_H : G \rightarrow G/H$  die natürliche Projektion. Sei  $K \subset G$  abgeschlossene Untergruppe. Dann ist  $K_H = p_H(K)$  eine abgeschlossene Untergruppe in  $G/H$  für alle  $H \in \mathcal{S}'$ , und ist  $H' \supset H$ ,  $H' \in \mathcal{S}'$ , so ist  $K_{H'} \subset G/H'$  gleich dem Bild von  $K_H$  unter der Abbildung  $G/H \rightarrow G/H'$ . Es gilt nun

$$K = \bigcap_{H \in \mathcal{S}'} p_H^{-1}(K_H) = \varprojlim_{H \in \mathcal{S}'} K_H .$$

Umgekehrt definiert jedes System  $K_H$  mit den obigen Eigenschaften eine abgeschlossene Untergruppe  $K = \varprojlim_{H \in \mathcal{S}'} K_H$ . Ein Definitionssystem für  $K$  wird

durch  $\{K \cap H \mid H \in \mathcal{S}'\}$  geliefert, und die natürliche Inklusion  $K \hookrightarrow G$  ist ein Morphismus proalgebraischer Gruppen. Eine abgeschlossene Untergruppe  $K \subset G$  ist normal genau dann, wenn die Bilder  $K_H = p_H(K)$  normal in  $G_H = G/H$  sind für alle  $H \in \mathcal{S}'$ . In diesem Fall identifiziert sich der Quotient  $G/K$  mit dem projektiven Limes  $\varprojlim G_H/K_H$  und erhält somit eine proalgebraische Struktur, bezüglich der die natürliche Projektion  $G \rightarrow G/K$  ein Morphismus proalgebraischer Gruppen wird.

Ist  $\phi : G \rightarrow G'$  ein Morphismus proalgebraischer Gruppen, so sind  $K = \text{Kern } \phi$  und  $B = \text{Bild } \phi$  abgeschlossene Untergruppen von  $G$  bzw.  $G'$ , und  $\phi$  induziert einen Isomorphismus proalgebraischer Gruppen

$$G/K \cong B .$$

Insbesondere ist jeder bijektive Morphismus  $\phi : G \rightarrow G'$  ein Isomorphismus (Char = 0!) .

Eine proalgebraische Gruppe  $(G, \mathcal{S})$  heißt (einfach) zusammenhängend (bzw. proendlich, bzw. unipotent, bzw. auflösbar) falls alle Quotienten  $G/H$ ,  $H \in \mathcal{S}$ , (einfach) zusammenhängend (bzw. endlich, bzw. unipotent, bzw. auflösbar) sind.

### 5.3 Die Liealgebra einer proalgebraischen Gruppe

Eine Pro-Liealgebra ist ein Paar  $(\mathfrak{g}, \mathcal{S})$  bestehend aus einer komplexen Liealgebra  $\mathfrak{g}$  und einer nichtleeren Familie  $\mathcal{S}$  von Idealen endlicher Kodimension in  $\mathfrak{g}$ , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \quad \underline{h}, \underline{h}' \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \underline{h} \cap \underline{h}' \in \mathcal{S} .$$

$$2) \quad \text{Sei } \underline{h} \in \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \underline{h}' \supset \underline{h} \quad \text{ein Ideal in } \mathfrak{g} . \quad \text{Dann gilt } \underline{h}' \in \mathcal{S} .$$

3) Die natürliche Abbildung  $\underline{g} \rightarrow \varprojlim_{\underline{h} \in \mathcal{S}} \underline{g}/\underline{h}$  ist ein Isomorphismus von  $\underline{g}$  auf den projektiven Limes der Liealgebren  $\underline{g}/\underline{h}$ ,  $\underline{h} \in \mathcal{S}$ .

Die Menge  $\mathcal{S}$  heie eine saturierte Definitionsmenge fur die Struktur einer Pro-Liealgebra auf  $\underline{g}$ . Jede absteigend filtrierende Familie  $\mathcal{S}'$  von Idealen endlicher Kodimension in  $\underline{g}$ , die die obige Bedingung 3) erfullt, lat sich in natürlicher Weise zu einer saturierten Definitionsmenge  $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}'$  erweitern. Wir nennen eine solche Familie  $\mathcal{S}'$  Definitionsmenge oder Definitionssystem fur die Struktur einer Pro-Liealgebra auf  $\underline{g}$ .

Beispiel: Jeder projektive Limes eines absteigend filtrierenden Systems endlichdimensionaler Liealgebren definiert in offensichtlicher Weise eine Pro-Liealgebra.

Seien  $\underline{g}$  und  $\underline{g}'$  Pro-Liealgebren mit Definitionsmengen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$ . Ein Homomorphismus  $\phi : \underline{g} \rightarrow \underline{g}'$  heißt ein Morphismus von Pro-Liealgebren, wenn es zu jedem  $\underline{h}' \in \mathcal{S}'$  ein  $\underline{h} \in \mathcal{S}$  mit  $\underline{h} \subset \phi^{-1}(\underline{h}')$  gibt.

Eine Unteralgebra  $\underline{k}$  einer Pro-Liealgebra  $(\underline{g}, \mathcal{S})$  heißt abgeschlossen oder Pro-Lieunteralgebra, wenn die natürliche Abbildung  $\underline{k} \rightarrow \varprojlim_{\underline{h} \in \mathcal{S}} \underline{k}/\underline{k} \cap \underline{h}$  ein Isomorphismus ist.

Ist  $\underline{k} \subset \underline{g}$  ein Ideal und abgeschlossen, so ist der Quotient  $\underline{g}/\underline{k}$  wieder in natürlicher Weise eine Pro-Liealgebra.

Eine Pro-Liealgebra  $(\underline{g}, \mathcal{S})$  heißt nilpotent, falls die endlichdimensionalen Quotienten  $\underline{g}/\underline{h}$ ,  $\underline{h} \in \mathcal{S}$ , nilpotent sind.

Sei  $(G, \mathcal{S})$  eine proalgebraische Gruppe und

$$\mathfrak{g}_H = \text{Lie}(G/H) \quad , \quad H \in \mathcal{S} \quad ,$$

die Familie der Liealgebren der algebraischen Quotienten. Dann ist

$$\mathfrak{g} = \varprojlim_{H \in \mathcal{S}} \mathfrak{g}_H$$

eine Pro-Liealgebra. Wir nennen  $\mathfrak{g}$  die Liealgebra  $\text{Lie}(G)$  von  $G$ .

Jeder Morphismus  $\phi : G \rightarrow G'$  proalgebraischer Gruppen induziert dann einen Homomorphismus

$$\text{Lie}(\phi) : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G')$$

der zugehörigen Liealgebren.

Im allgemeinen läßt sich einer Pro-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  nicht unbedingt eine proalgebraische Gruppe  $G$  mit  $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$  zuordnen (man betrachte kommutative Liealgebren). Dies ist jedoch anders, wenn wir uns, entsprechend den späteren Anwendungen, auf die Betrachtung unipotenter Gruppen und nilpotenter Liealgebren beschränken.

Bekanntlich definiert die Campbell-Hausdorff-Formel auf jeder endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebra  $\mathfrak{u}$  die Struktur einer unipotenten algebraischen Gruppe (vgl. [LIE] III § 9, n° 5):

$$\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u} \quad , \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y \quad .$$

Bezeichnen wir diese Gruppe mit  $U$ , so gilt  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$ , und die Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{u} \rightarrow U$  identifiziert sich mit der Identität.

Jeder Homomorphismus  $\psi : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{v}$  endlichdimensionaler nilpotenter

Liealgebren liftet sich in eindeutiger Weise zu einem Morphismus

$$\phi : U \rightarrow V$$

der zugehörigen Gruppen,  $\text{Lie}(\phi) = \psi$ . Dabei kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{u} & \xrightarrow{\text{Lie}(\phi)} & \underline{v} \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ U & \xrightarrow{\phi} & V \end{array}$$

Ist nun

$$\underline{u} = \varprojlim_{\underline{h} \in \mathcal{S}} \underline{u}/\underline{h}$$

eine nilpotente Pro-Liealgebra, so entspricht jedem natürlichen Homomorphismus

$$\underline{u}/\underline{h} \rightarrow \underline{u}/\underline{h}' \quad , \quad \underline{h}, \underline{h}' \in \mathcal{S} \quad , \quad \underline{h} \subset \underline{h}' \quad ,$$

ein eindeutig bestimmter Morphismus

$$\underline{U}_{\underline{h}} \rightarrow \underline{U}_{\underline{h}'}$$

der zugehörigen unipotenten Gruppen. Für die proalgebraische Gruppe

$$U = \varprojlim_{\underline{h} \in \mathcal{S}} \underline{U}_{\underline{h}}$$

gilt dann

$$\text{Lie}(U) = \underline{u} \quad ,$$

und der projektive Limes

$$\varprojlim_{\underline{h} \in \mathcal{S}} (\exp : \underline{u}/\underline{h} \xrightarrow{\sim} U_{\underline{h}})$$

definiert einen Isomorphismus "proalgebraischer" Varietäten

$$\exp : \underline{u} \rightarrow U ,$$

d. h.  $\exp$  induziert eine Bijektion von der Menge der abgeschlossenen Unter-  
algebren von  $\underline{u}$  auf die Menge der abgeschlossenen Untergruppen von  $U$  .

Ein Morphismus nilpotenter Pro-Liealgebren

$$\psi : \underline{u} \rightarrow \underline{v}$$

liftet sich in offensichtlicher und eindeutiger Weise zu einem Morphismus

$$\phi : U \rightarrow V$$

der zugeordneten proalgebraischen Gruppen. Es gilt dann

$$\text{Lie}(\phi) = \psi$$

und das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \underline{u} & \xrightarrow{\psi} & \underline{v} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ U & \xrightarrow{\phi} & V \end{array}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

**Proposition:** Der Funktor  $\text{Lie}$  definiert eine Äquivalenz von der Kategorie der unipotenten proalgebraischen Gruppen auf die Kategorie der nilpotenten Pro-Liealgebren.



Beispiel: Sei  $V$  ein Vektorraum mit einer Fahne  $\mathcal{F}$  :

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

endlichdimensionaler Untervektorräume  $V_i \subset V$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = V .$$

Sei

$$U(\mathcal{F}) = \{g \in GL(V) \mid (g - \text{id})(V_i) \subset V_{i-1} \text{ für alle } i\}$$

$$\underline{u}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(V_i) \subset V_{i-1} \text{ für alle } i\} .$$

Dann ist  $U(\mathcal{F})$  eine unipotente proalgebraische Gruppe bezüglich des Definitionssystems

$$\mathcal{S} = \{U^i(\mathcal{F}) \mid i=1, 2, \dots\}$$

$$U^i(\mathcal{F}) = \{g \in U(\mathcal{F}) \mid g|_{V_i} = \text{id}\} ,$$

und  $\underline{u}(\mathcal{F})$  ist die Liealgebra von  $U(\mathcal{F})$ . Die Exponentialabbildung

$$\exp : \underline{u}(\mathcal{F}) \rightarrow U(\mathcal{F})$$

ist nun durch die übliche Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} , \quad x \in \underline{u}(\mathcal{F}) ,$$

gegeben.

#### 5.4 Eine Kompletterung von Kac-Moody-Liealgebren

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $\mathfrak{g}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra. In diesem Abschnitt betrachten wir eine Kompletterung  $\overline{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$ , die als Basis für die später zu konstruierenden Gruppen dienen wird.

Sei  $\Sigma$  die Menge der Wurzeln von  $\underline{\mathfrak{h}} = H \otimes \mathbb{C}$  in  $\mathfrak{g}$ . Für  $\beta \in \Sigma \cup \{0\}$ ,

$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \alpha$ , war dann die Höhe durch

$$\text{ht}(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha}$$

definiert. Sei  $x \in \mathfrak{g}$  und  $x = \sum_{\beta \in \Sigma \cup \{0\}} x_{\beta}$  die Zerlegung von  $x$  gemäß den Wurzelräumen. Dabei sei  $x_0 \in \mathfrak{g}_0 = \underline{\mathfrak{h}}$ . Wir definieren

$$|x| = 2^{-i}$$

wobei  $i = \min\{\text{ht}(\beta) \mid x_{\beta} \neq 0\}$ . Dann gilt

$$|cx| = |x|, \quad c \in \mathbb{C},$$

$$|x+y| \leq \sup(|x|, |y|)$$

$$|[x, y]| \leq |x||y|.$$

Die Kompletterung  $\overline{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich der Metrik

$$d(x, y) = |x-y|, \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

ist daher wieder eine Liealgebra. Jedes Element  $x \in \overline{\mathfrak{g}}$  schreibt sich in eindeutiger Weise als möglicherweise unendliche Summe

$$x = \sum_{\beta \in \Sigma \cup \{0\}} x_{\beta},$$

in der für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  nur endlich viele Terme  $x_\beta \neq 0$  mit  $ht(\beta) < i$  auftreten. Entsprechend zerlegt sich  $\bar{\mathfrak{g}}$  in eine direkte Summe

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{u}}^- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{u}}^+ ,$$

wobei  $\bar{\mathfrak{u}}^i$  der Abschluß von  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^+$  in  $\bar{\mathfrak{g}}$  ist. Für  $i \in \mathbb{N}$  sei

$$\bar{\mathfrak{u}}^{-i} = \{x \in \bar{\mathfrak{u}}^- \mid |x| < 2^{-i}\} .$$

Dann bilden die  $\bar{\mathfrak{u}}^{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , ein Definitionssystem für die Struktur einer nilpotenten Pro-Liealgebra auf  $\bar{\mathfrak{u}}^-$ .

Beispiel: Wir betrachten eine affine Liealgebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] .$$

Dann identifiziert sich  $\bar{\mathfrak{g}}$  mit

$$\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}((z)) ,$$

wobei  $\mathbb{C}((z))$  der lokale Körper der nach unten beschränkten Laurentreihen

$$\sum_{i \geq i_0} a_i z^i , \quad i_0 \in \mathbb{Z}$$

ist. Unsere Kompletzierung stimmt daher mit der von Garland im affinen Fall betrachteten überein ([Garland<sub>2</sub>] 5.).

Bemerkung: Ist  $(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}, \Delta)$  nicht symmetrisierbar, so erhält man mit den gleichen Definitionen wie oben eine Kompletzierung für jede Prä-Kac-Moody-Liealgebra zu  $(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}, \Delta)$ , vgl. 3.7.

### 5.5 Die Gruppe U

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $\overline{\mathfrak{g}}$  die zugehörige komplet-  
tierte Kac-Moody-Liealgebra. In den folgenden Abschnitten werden wir dieser  
Situation eine Gruppe  $G$  mit Tits-System  $(B, N)$  zuordnen. Für diese Gruppe  
 $G$  gibt es, außer im affinen Fall, keine unmittelbare "ganzheitliche" Be-  
schreibung, sondern nur eine indirekte über gewisse ausgezeichnete Untergrup-  
pen, die  $G$  erzeugen. In diesem Abschnitt betrachten wir das unipotente Ra-  
dikal  $U$  einer Boreluntergruppe  $B$ . Die Gruppe  $U$  sei die unipotente pro-  
algebraische Gruppe, deren Liealgebra die in 5.4 eingeführte Pro-Liealgebra  
 $\overline{\mathfrak{u}}$  ist.

Jedes  $x \in \overline{\mathfrak{u}}$  definiert eine eindimensionale Unteralgebra

$$\langle x \rangle = \mathbb{C} \cdot x$$

in  $\overline{\mathfrak{u}}$ , der mittels der Exponentialabbildung

$$\exp : \overline{\mathfrak{u}} \rightarrow U$$

eine additive, abgeschlossene Einparameteruntergruppe

$$\mathbb{C} \cong \exp(\langle x \rangle) \hookrightarrow U$$

entspricht. Ist  $\alpha \in \Sigma^R \cap \Sigma^+$  eine positive reelle Wurzel, und  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  
also  $\langle x \rangle = \mathfrak{g}_\alpha$ , so bezeichnen wir  $\exp(\langle x \rangle)$  auch mit  $U_\alpha$ . Eine Teilmenge  
 $\Omega \subset \Sigma$  von Wurzeln heißt abgeschlossen, wenn für alle  $\alpha, \beta \in \Omega$  mit  $\alpha + \beta \in \Sigma$   
auch  $\alpha + \beta \in \Omega$  gilt.

Sei  $\Omega$  nun eine abgeschlossene Teilmenge der positiven Wurzeln,

$\mathfrak{u}_\Omega$  die Unteralgebra  $\bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathfrak{g}_\alpha$  von  $\overline{\mathfrak{u}}$ ,

$\bar{u}_\Omega$  der Abschluß von  $u_\Omega$  in  $\bar{u}$ , und

$U_\Omega$  das Bild von  $\bar{u}_\Omega$  unter  $\exp : \bar{u} \rightarrow U$ .

Dann ist  $U_\Omega$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $U$ .

Beispiel: Ist  $\alpha \in \Sigma^R \cap \Sigma^+$ , so ist  $\Omega = \{\alpha\}$  abgeschlossen (vgl. 3.9). Es gilt dann

$$U_\Omega = U_\alpha .$$

Ist das Komplement  $(\Omega)$  von  $\Omega$  in  $\Sigma^+$  ebenfalls abgeschlossen, so ergeben sich Zerlegungen in Unteralgebren

$$\underline{u} = \underline{u}_\Omega \oplus \underline{u}_{(\Omega)}$$

$$\bar{u} = \bar{u}_\Omega \oplus \bar{u}_{(\Omega)} .$$

Mit [LIE] III § 9, n° 5, Prop. 17 und Übergang zum projektiven Limes erhalten wir dann eine Zerlegung

$$U = U_\Omega \cdot U_{(\Omega)}$$

$$U_\Omega \cap U_{(\Omega)} = \{1\}$$

von  $U$  in die entsprechenden Untergruppen. Erfüllt  $(\Omega)$  die zusätzliche Bedingung:

$$(I) \quad \alpha \in \Sigma^+, \beta \in (\Omega), \alpha + \beta \in \Sigma^+ \Rightarrow \alpha + \beta \in (\Omega) ,$$

so ist  $U_{(\Omega)}$  normal in  $U$ , und  $U$  schreibt sich als semidirektes Produkt

$$U = U_\Omega \ltimes U_{(\Omega)} .$$

Jedes Weylgruppenelement  $w \in W$  bestimmt mit

$$\Sigma(w) = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in \Sigma^-\}$$

$$(\Sigma(w)) = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in \Sigma^+\}$$

eine Partition von  $\Sigma$  in zwei abgeschlossene Teilmengen. Wir setzen

$$\underline{u}_w = \underline{u}_{\Sigma(w)} \quad , \quad U_w = U_{\Sigma(w)} \quad ,$$

$$\underline{u}_{(w)} = \underline{u}_{(\Sigma(w))} \quad , \quad U_{(w)} = U_{(\Sigma(w))} \quad .$$

Also gilt

$$U = U_w \cdot U_{(w)} \quad .$$

Ist  $w = s_\alpha$  für ein  $\alpha \in \Delta$ , so ist  $U_w = U_\alpha$  und  $U_{(w)} = U_{(\{\alpha\})}$ . Wir setzen  $U_{(\alpha)} = U_{(\{\alpha\})}$ .

Die Cardinalität  $|\Sigma(w)|$  der Menge  $\Sigma(w)$  ist gleich der Länge  $l(w)$  von  $w$  bezüglich der einfachen Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , und alle Wurzeln in  $\Sigma(w)$  sind reell (vgl. 3.9). Wiederum mit [LIE] III § 9, n° 5, Prop. 17 erhalten wir dann

**Proposition:** Für jede Anordnung  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l(w)}$  der Wurzeln von  $\Sigma(w)$  induziert die Produktabbildung

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_{l(w)}} &\rightarrow U_w \\ (u_1, \dots, u_{l(w)}) &\mapsto u_1 \cdot \dots \cdot u_{l(w)} \end{aligned}$$

einen Isomorphismus algebraischer Varietäten.

Sei nun  $w$  ein Element größter Länge in einer endlichen Weyluntergruppe

$W_{\Delta'} = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta' \rangle$ ,  $\Delta' \subset \Delta$ . Dann gilt  $\Sigma(w) = \Sigma^+ \cap N \cdot \Delta'$ ,

und  $(\Sigma(w))$  erfüllt die Bedingung (I). In diesem Fall erhalten wir also ein semidirektes Produkt

$$U = U_w \rtimes U_{(w)} .$$

Der Spezialfall  $|\Delta'| = 1$  liefert

$$U = U_\alpha \rtimes U_{(\alpha)}$$

für jede einfache Wurzel  $\alpha \in \Delta$  .

Bemerkung: Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht symmetrisierbar und  $\tilde{\mathfrak{g}}$  eine Prä-Kac-Moody-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  , so übertragen sich sämtliche Konstruktionen dieses Abschnitts auf  $\tilde{\mathfrak{g}}$  .

### 5.6. Die Gruppen T und N

Wir behalten die Voraussetzungen und Notationen von 5.5 bei und definieren

$$T := H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*, \mathbb{C}^*) .$$

Dann ist T ein Torus mit Charaktergruppe  $H^*$  und vom Rang  $r = \text{Rang}(H)$  .

Im folgenden sei  $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$  die Weylgruppe von  $(H, \nabla, \Delta)$  , falls diese Basis frei ist. Andernfalls realisiere man  $(H, \nabla, \Delta)$  als Subquotient einer freien Basis  $(H_1, \nabla_1, \Delta_1)$  zur gleichen Cartanmatrix. Es sei dann  $W$  die (von der Wahl von  $(H_1, \nabla_1, \Delta_1)$  unabhängige) Weylgruppe von  $(H_1, \nabla_1, \Delta_1)$  . In beiden Fällen operiert  $W$  in natürlicher Weise auf  $H, H^*$  und  $T = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*, \mathbb{C}^*)$  .

Sei nun

$$N' = \{n_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$$

eine durch  $\Delta$  indizierte Menge. Wir definieren  $N$  als die von  $T$  und  $N'$  mit den folgenden Relationen erzeugte Gruppe:

$$\begin{aligned} n_\alpha t n_\alpha^{-1} &= s_\alpha(t) \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad , \quad t \in T \\ n_\alpha^2 &= (-1)^{h_\alpha} \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad , \\ \underbrace{n_\alpha n_\beta n_\alpha \dots}_{m_{\alpha\beta} \text{ Faktoren}} &= \underbrace{n_\beta n_\alpha n_\beta \dots}_{m_{\alpha\beta} \text{ Faktoren}} \quad , \quad \alpha \neq \beta \in \Delta \quad . \end{aligned}$$

Dabei seien  $m_{\alpha\beta}$  die Coxeterkoeffizienten (vgl. 3.3), und  $(-1)^{h_\alpha} \in T = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*, \mathbb{C}^*)$  sei das Element

$$\omega \mapsto (-1)^{\omega(h_\alpha)} \quad , \quad \omega \in H \quad .$$

Dann injiziert sich  $T \cup N'$  nach  $N$ , und die Abbildung

$$\begin{aligned} n_\alpha &\mapsto s_\alpha \quad , \quad \alpha \in \Delta \quad , \\ t &\mapsto 1 \quad , \quad t \in T \quad , \end{aligned}$$

induziert einen surjektiven Homomorphismus  $\pi : N \rightarrow W$  mit Kern  $T$ :

$$1 \rightarrow T \rightarrow N \rightarrow W \rightarrow 1$$

(für Details vgl. [Tits<sub>1</sub>], [Tits<sub>4</sub>]).

Sei  $\Delta' \subset \Delta$  eine Teilmenge. Wir setzen

$$W_{\Delta'} = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta' \rangle \quad ,$$

die von den Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta'$ , erzeugte Untergruppe von  $W$ , und

$$\begin{aligned} N_{\Delta'} &= \pi^{-1}(W_{\Delta'}) \\ &= \langle T, n_\alpha \mid \alpha \in \Delta' \rangle \quad . \end{aligned}$$



Beispiel: Es sei  $\Delta' = \{\alpha\}$  für ein  $\alpha \in \Delta$ . Wir schreiben  $W_\alpha$  und  $N_\alpha$  statt  $W_{\{\alpha\}}$  und  $N_{\{\alpha\}}$ . Es gilt dann

$$W_\alpha = \{1, s_\alpha\}$$

und

$$N_\alpha = \langle T, n_\alpha \rangle = T \cup n_\alpha T .$$

Eine Teilmenge  $\Delta' \subset \Delta$  heie von endlichem Typ wenn die Gruppe  $W_{\Delta'}$  endlich ist. Eine Untergruppe  $W_{\Delta'} \subset W$  oder  $N_{\Delta'} \subset N$  nennen wir von endlichem Typ falls  $\Delta'$  von endlichem Typ ist.

Aufgrund der definierenden Relationen von  $W$  und  $N$  gilt dann:

Die Gruppe  $W$  (bzw.  $N$ ) ist das Amalgam ihrer Untergruppen  $W_{\Delta'}$  (bzw.  $N_{\Delta'}$ ) vom Rang  $\leq 2$ , d. h.  $|\Delta'| \leq 2$ , entlang ihrer Durchschnitte. Ist  $\Delta' = \{\alpha, \beta\}$ ,  $\alpha, \beta \in \Delta$ , nicht von endlichem Typ, so ist  $W_{\Delta'}$  das freie Produkt

$$\langle 1, s_\alpha \rangle * \langle 1, s_\beta \rangle .$$

Es genügt daher, in der obigen Amalgamation von  $W$  und  $N$  die Untergruppen von endlichem Typ und Rang  $\leq 2$ , oder alle Untergruppen von endlichem Typ zu betrachten (vgl. dazu auch 5.1).

### 5.7 Parabolische Gruppen von endlichem Typ

Sei  $\Delta' \subset \Delta$  eine (möglicherweise leere) Teilmenge von endlichem Typ. Dann ist  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{V}', \Delta')$  mit  $\mathfrak{V}' = \{h_\alpha \mid \alpha \in \Delta'\}$  eine Wurzelbasis von endlichem Typ. Sei  $\mathfrak{l}_{\Delta'}$ , die von  $\mathfrak{h}$  und den Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ , in  $\mathfrak{g}$  erzeugte Unter- algebra. Dann ist  $\mathfrak{l}_{\Delta'}$  endlichdimensional reduktiv, und  $\mathfrak{g}$  zerfällt bezg-

lich der auf  $\underline{1}_{\Delta}$ , eingeschränkten adjungierten Darstellung in eine direkte Summe endlichdimensionaler  $\underline{1}_{\Delta}$ -Moduln (lokale Nilpotenz der  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ , Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem und Weyl's vollständige Reduzibilität; vgl. auch [Garland-Lepowsky] Prop: 5.1).

Für eine Wurzel  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \alpha$  sei die  $\Delta'$ -relative Höhe definiert als

$$\text{ht}'(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta'} c_{\alpha} .$$

Wir setzen

$$\underline{g}(0) = \underline{h} \otimes \bigoplus_{\text{ht}'(\gamma) = 0} \underline{g}_{\gamma} \quad \text{und} \quad \underline{g}(n) = \bigoplus_{\text{ht}'(\gamma) = n} \underline{g}_{\gamma} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

Es gilt dann  $\underline{g}(0) = \underline{1}_{\Delta}$ , und die adjungierte Aktion von  $\underline{g}(0)$  stabilisiert jeden der Räume  $\underline{g}(n)$ .

Lemma 1: Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $\underline{g}(n)$  endlichdimensional.

Beweis: Aus Symmetriegründen und wegen  $\underline{g}(0) = \underline{1}_{\Delta}$ , genügt es den Fall  $n > 0$  zu betrachten. Aus der Tatsache, daß  $\underline{u} \subset \underline{g}$  als Liealgebra von den Elementen  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , erzeugt wird, erhält man, daß  $\underline{g}(1)$  (bzw.  $\underline{g}(n+1)$ ) als  $\underline{g}(0)$ -Modul von den Elementen  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'$ , (bzw. von den Produkten  $[x, e_{\alpha}]$ ,  $x \in \underline{g}(n)$ ,  $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'$ ) erzeugt wird. Die Behauptung folgt nun, da  $\underline{g}(0)$  auf allen Räumen  $\underline{g}(n)$  lokal endlich operiert.

Korollar 1: Sei  $i \in \mathbb{N}$ , dann ist die Menge aller positiven Wurzeln  $\gamma$  mit  $\text{ht}'(\gamma) \leq i$  endlich.

Sei  $\Sigma' \subset \Sigma$  das von  $\Delta'$  erzeugte Unterwurzelsystem mit positivem Teil  $\Sigma'^+ = \Sigma' \cap \Sigma^+$ . In der Notation von 5.5 gilt nun

$$\bigoplus_{n > 0} \mathfrak{g}(n) = \underline{u}_{(\Sigma', +)}, \quad \text{und} \quad \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}(n) = \underline{l}_{\Delta'} \ltimes \underline{u}_{(\Sigma', +)}$$

ist die Standard-parabolische Unteralgebra  $\mathfrak{p}_{\Delta'}$  vom Typ  $\Delta'$  in  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\overline{\mathfrak{p}}_{\Delta'}$  der Abschluß von  $\mathfrak{p}_{\Delta'}$ , und  $\overline{u}_{(\Sigma', +)}^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , der Abschluß von  $\bigoplus_{n > i} \mathfrak{g}(n)$  in der Kompletzierung  $\overline{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  (vgl. 5.4). Es gilt dann  $\overline{\mathfrak{p}}_{\Delta'} = \underline{l}_{\Delta'} \ltimes \overline{u}_{(\Sigma', +)}$  mit  $\overline{u}_{(\Sigma', +)} = \overline{u}_{(\Sigma', +)}^0$ , und  $\overline{u}_{(\Sigma', +)}^i$  ist ein Ideal endlicher Kodimension in  $\overline{\mathfrak{p}}_{\Delta'}$ ,  $\overline{u}_{(\Sigma', +)}$  und  $\overline{u}$  (Lemma 1).

**Lemma 2:** Das System der Ideale  $\{\overline{u}_{(\Sigma', +)}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist ein Definitionssystem für die Pro-Liealgebrastruktur auf  $\overline{u}$  und auf der abgeschlossenen Unteralgebra  $\overline{u}_{(\Sigma', +)}$ .

**Beweis:** Das obige System ist kofinal mit dem Definitionssystem  $\{\overline{u}^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  für  $\overline{u}$  aus 5.4. Dies folgt aus der Tatsache, daß jedes Ideal  $\overline{u}^j$  bzw.  $\overline{u}_{(\Sigma', +)}^i$  fast alle Wurzelräume  $\mathfrak{g}_{\gamma}$ ,  $\gamma \in \Sigma^+$ , (d. h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen) enthält, vgl. Korollar 1.

**Korollar 2:** Das System  $\{\overline{u}_{(\Sigma', +)}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist ein Definitionssystem für die Struktur einer Pro-Liealgebra auf  $\overline{\mathfrak{p}}_{\Delta'}$ .

Wir wollen nun  $\overline{\mathfrak{p}}_{\Delta'}$ , eine proalgebraische Gruppe  $\mathfrak{P}_{\Delta'}$ , zuordnen. Zunächst sei  $L_{\Delta'}$ , die komplexe reductive Gruppe zur Wurzelbasis  $(\mathfrak{H}, \mathfrak{V}', \Delta')$  (d. h. zum Wurzeldatum  $(\mathfrak{H}^*, \Sigma', \Sigma'^+)$ ) in der Terminologie von Grothendieck-Demazure und Springer, vgl. [Springer] 9.16, 12.1). Dann ist  $\underline{l}_{\Delta'}$ , die Liealgebra von  $L_{\Delta'}$ .

Aufgrund der Inklusion  $\Sigma \subset H^*$  und der lokalen Endlichkeit liftet sich die adjungierte Darstellung von  $\underline{l}_{\Delta}$ , auf  $\underline{g}$  zu einer Darstellung

$$L_{\Delta} \longrightarrow \text{Aut}(\underline{g})$$

der Gruppe  $L_{\Delta}$ . Diese Darstellung stabilisiert die Unterräume  $\underline{g}(n)$  von  $\underline{g}$  und setzt sich somit fort zu einer Darstellung von  $L_{\Delta}$ , durch stetige Automorphismen auf der Kompletzierung  $\overline{\underline{g}}$  von  $\underline{g}$ . Insbesondere erhalten wir eine Darstellung

$$L_{\Delta} \longrightarrow \text{Aut}(\overline{\underline{u}}_{(\Sigma,+)})$$

von  $L_{\Delta}$ , in die Automorphismengruppe der Pro-Liealgebra  $\overline{\underline{u}}_{(\Sigma,+)}$ . Mittels der Exponentialabbildung  $\exp : \overline{\underline{u}}_{(\Sigma,+)} \xrightarrow{\sim} U_{(\Sigma,+)}$  liftet sich diese zu einer Aktion von  $L_{\Delta}$ , auf der proalgebraischen Untergruppe  $U_{(\Sigma,+)}$  von  $U$ . Wir nennen das semidirekte Produkt

$$P_{\Delta} = L_{\Delta} \rtimes U_{(\Sigma,+)}$$

die zu  $\Delta'$  assoziierte parabolische Gruppe (von endlichem Typ), und wir bezeichnen  $U_{(\Sigma,+)}$  auch mit  $U_{(\Delta')}$ . Besteht  $\Delta'$  aus einem Element  $\alpha \in \Delta$ , so setzen wir  $L_{\alpha} = L_{\{\alpha\}}$  und  $P_{\alpha} = P_{\{\alpha\}} = L_{\alpha} \rtimes U_{(\alpha)}$ .

Sei  $U_{(\Sigma,+) }^i \subset U_{(\Sigma,+) } \subset U$  die  $\overline{\underline{u}}_{(\Sigma,+) }^{-i}$  entsprechende normale Untergruppe von  $P_{\Delta}$ . Mittels Korollar 2 erhalten wir dann:

Korollar 3: Die Familie  $\{U_{(\Sigma,+) }^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist ein Definitionssystem für eine proalgebraische Struktur auf der Gruppe  $P_{\Delta}$ .

Zu jeder Wurzel  $\gamma \in \Sigma'$  gibt es eine additive Einparametergruppe  $U_\gamma \subset L_{\Delta'}$ , die wir als Bild von  $\underline{g}_\gamma$  unter einer Exponentialabbildung  $\exp: \underline{l}_{\Delta'} \rightarrow L_{\Delta'}$  auffassen können. Das Produkt  $\prod_{\gamma \in \Sigma'+} U_\gamma$  in  $L_{\Delta'}$  ist dann isomorph zu  $U_{\Sigma'+} \subset U$ , und die Zerlegung  $U = U_{\Sigma'+} \rtimes U_{(\Sigma'+)} \subset L_{\Delta'} \rtimes U_{(\Sigma'+)}$  liefert uns eine Einbettung  $U \hookrightarrow P_{\Delta'}$ .

Wir haben eine offensichtliche Identifikation von  $T$  mit dem  $\underline{h} \subset \underline{l}_{\Delta'}$ , entsprechenden maximalen Torus von  $L_{\Delta'}$ .

Die auf den Erzeugenden von  $N_{\Delta'}$  (vgl. 5.6) folgendermaßen definierte Abbildung

$$t \mapsto t, \quad t \in T,$$

$$n_\alpha \mapsto \exp(e_\alpha) \exp(-e_{-\alpha}) \exp(e_\alpha), \quad \alpha \in \Delta',$$

induziert einen Isomorphismus

$$N_{\Delta'} \xrightarrow{\sim} N_{L_{\Delta'}}(T)$$

der Untergruppe  $N_{\Delta'} \subset N$  auf den Normalisator  $N_{L_{\Delta'}}(T)$  von  $T$  in  $L_{\Delta'}$  (vgl. [Tits<sub>1</sub>]). Mittels dieses Isomorphismus fassen wir  $N_{\Delta'}$  als Untergruppe von  $P_{\Delta'}$  auf. Nach Konstruktion gilt

$$n U_\beta n^{-1} = U_{w(\beta)}$$

für alle  $\beta \in \Sigma^+ \cup \Sigma'$ ,  $n \in N_{\Delta'}$ , und  $w = \pi(n)$  das Bild von  $n$  in der Weylgruppe  $W_{\Delta'} \subset W$ .

Sei  $\Delta'' \subset \Delta' \subset \Delta$  eine Teilmenge von  $\Delta'$ . Dann liefert die natürliche Einbettung

$$L_{\Delta''} \hookrightarrow L_{\Delta'}$$

eine weitere solche

$$P_{\Delta''} \hookrightarrow P_{\Delta'},$$

die mit den Inklusionen von  $T$  und  $U$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} P_{\Delta''} & \hookrightarrow & P_{\Delta'} \\ & \searrow & \nearrow \\ & T & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P_{\Delta''} & \hookrightarrow & P_{\Delta'} \\ & \searrow & \nearrow \\ & U & \end{array}$$

Die der leeren Menge  $\emptyset$  zugeordnete parabolische Gruppe  $P_{\emptyset}$  bezeichnen wir mit  $B$ . Es gilt dann

$$L_{\emptyset} = T, \quad U_{(\emptyset)} = U$$

also

$$B = T \rtimes U.$$

Jede Untergruppe von  $U$  der Form  $U_{\Omega}$  für eine abgeschlossene Teilmenge  $\Omega \subset \Sigma^+$  wird von  $T$  normalisiert.

Fixieren wir für alle Wurzeln  $\beta \in \Sigma^+ \cap \Sigma^R$  oder  $\beta \in \Sigma \cap \mathbb{Z} \cdot \Delta'$ ,  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ, einen Isomorphismus algebraischer Gruppen

$$u_{\beta} : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} U_{\beta}$$

(z. B. mittels  $\exp : \mathfrak{g}_{\beta} \xrightarrow{\sim} U_{\beta}$ ), so gilt

$$t u_{\beta}(c) t^{-1} = u_{\beta}(\beta(t)c)$$

für alle  $t \in T$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

Für jede Teilmenge  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ bilden die Viertupel

$$(P_{\Delta'}, B, N_{\Delta'}, \{s_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta'\})$$

und

$$(L_{\Delta'}, B \cap L_{\Delta'}, N_{\Delta'}, \{s_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta'\})$$

Tits-Systeme mit Weylgruppe  $W_{\Delta'}$ , (dies folgt aus der Theorie der endlich-dimensionalen Gruppe  $L_{\Delta'}$ , vgl. [Tits<sub>2</sub>] 5.2).

Bemerkung: Alle Konstruktionen dieses Abschnittes lassen sich wieder für Prä-Kac-Moody-Liealgebren durchführen. Ein Unterschied liegt, wenn überhaupt, nur in der Gruppe  $U$ .

### 5.8 Kac-Moody-Liegruppen

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $(\mathfrak{p}^f, \Phi)$  das System von Gruppen bestehend aus

$$\mathfrak{p}^f = \{P_{\Delta'} \mid \Delta' \subset \Delta \text{ von endlichem Typ}\}$$

und

$$\Phi = \{P_{\Delta''} \hookrightarrow P_{\Delta'} \mid \Delta'' \subset \Delta'\}$$

wobei  $P_{\Delta'}$  die in 5.7 konstruierten parabolischen Gruppen sind, und  $\Phi$  die Menge der zwischen diesen Gruppen bestehenden Inklusionen ist. Es sei  $(\mathfrak{p}^2, \Phi)$  das aus den Gruppen vom Rang  $\leq 2$  gebildete Untersystem von  $(\mathfrak{p}^f, \Phi)$ .

Sei  $G = \varinjlim (\mathfrak{p}^f, \Phi)$  das Amalgam dieses Systems. Wir nennen  $G$  die Kac-Moody-Liegruppe zur Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$ .

Aufgrund der Existenz der Tits-Systeme  $(B, N_{\Delta'})$  in  $P_{\Delta'}$  erhalten wir mit 5.1, Korollar 3:

Proposition 1: Die Gruppe  $G$  ist isomorph zum Amalgam des Systems  $(\mathfrak{p}^2, \Phi)$  der Gruppen  $P_{\Delta'}$ ,  $|\Delta'| \leq 2$ .

Nach 5.6 ist die Gruppe  $N$  das Amalgam des Systems aller Untergruppen  $N_\Delta$ , von endlichem Typ längs ihrer Durchschnitte. Über die Inklusionen  $N_\Delta \hookrightarrow P_\Delta$ , erhalten wir dann eine natürliche Abbildung

$$N \rightarrow G .$$

Wenden wir 5.1, Theorem an auf die Gruppen  $P_\Delta$ , so erhalten wir nun:

Proposition 2: Die natürlichen Abbildungen

$$N \rightarrow G \quad \text{und} \quad P_\alpha \rightarrow G, \quad \alpha \in \Delta,$$

induzieren einen Isomorphismus des Amalgams des Systems von Gruppen

$$N \supset N_\alpha \subset P_\alpha \supset B, \quad \alpha \in \Delta,$$

auf die Gruppe  $G$ .

Im folgenden sei  $\bigcup (N, P_\alpha, \alpha \in \Delta)$  die Vereinigung des Systems von Gruppen aus Proposition 2 (vgl. 5.1).

Theorem ([Tits<sub>4</sub>]): Sei  $G$  die Kac-Moody-Liegruppe zu einer Cartanschen Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$ . Dann gilt:

i) Die natürliche Abbildung

$$\bigcup (N, P_\alpha, \alpha \in \Delta) \rightarrow G$$

ist injektiv.

Wir können somit die Gruppen  $N$  und  $B$  als Untergruppen von  $G$  auffassen.

Es gilt nun weiter:

ii) Das Quadrupel  $(G, B, N, \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\})$  ist ein Tits-System.



iii) Jedes Element  $g \in G$  besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$g = u n u'$$

mit  $u' \in U$ ,  $n \in N$ ,  $u \in U_w$ ,  $w = \pi(n)$  (wobei  $\pi$  die Projektion  $N \rightarrow W$  auf die Weylgruppe bezeichnet).

Anmerkungen: 1) Das obige Theorem ist ein Spezialfall eines Resultates von Tits [Tits<sub>3</sub>], das die Konstruktion von Gruppen mit Tits-System in viel allgemeineren Situationen erlaubt, und das von Tits zur Konstruktion von Gruppen zu Kac-Moody-Liealgebren in beliebiger Charakteristik und mit variablen Gruppen  $U$  benutzt wurde [Tits<sub>4</sub>]. In Anbetracht des technischen Charakters der Arbeit [Tits<sub>3</sub>] wollen wir noch einige Erläuterungen anfügen. Die in loc. cit. geforderten Bedingungen (1), (2), (3) erweisen sich in unserer Situation leicht als erfüllt (man vgl. loc. cit. § 4 für Reduktionen und 5.5, 5.7 für die benötigten Eigenschaften). Die "verfeinerte" Bruhatzerlegung in Aussage iii) ist nicht explizit in loc. cit. formuliert, ergibt sich jedoch direkt aus der Interpretation des dortigen Beweises in der vorliegenden Situation. (Die in loc. cit. 5.1 definierte Menge  $X$  läßt sich nämlich mit der disjunkten Vereinigung  $\bigcup_{w \in W} U_w B$  identifizieren. Idee des Beweises ist es, diese Menge mit einer Gruppenstruktur zu versehen, um sie dann mit dem Amalgam des Systems  $N \supset N_\alpha \subset P_\alpha \supset B$  zu identifizieren.)

2) Dem Konstruktionsprozeß der Gruppe  $G$  können wir (aufgrund der Allgemeinheit des Tits'schen Verfahren) auch eine Prä-Kac-Moody-Liealgebra (vgl. 3.7) zugrundelegen. In diesem Fall besitzt  $G$  einen in der Gruppe  $U$  enthaltenen Normalteiler (vgl. auch die diesbezüglichen Bemerkungen in 5.5 und 5.7).

3) Diverse Gruppen zu Kac-Moody-Liealgebren wurden eingeführt und untersucht in [Moody-Teo], [Marcuson], [Garland<sub>2</sub>], [Kac<sub>4</sub>], [Peterson-Kac]. Dabei wurde

ebenfalls die Existenz eines Tits-Systems nachgewiesen. Alle diese Gruppen lassen sich mittels des Tits'schen Verfahrens rekonstruieren, vgl. [Tits<sub>4</sub>]. Die den genannten Arbeiten gemeinsam zugrundeliegende Idee geht auf die klassische Arbeit [Chevalley] von Chevalley zurück: Bezüglich einer geeigneten treuen Darstellung der Liealgebra

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

werden die "integrablen" Unterhalbgruppen von  $\mathfrak{g}$  zu Untergruppen von  $GL(V)$  integriert. Das Erzeugnis dieser Untergruppen ist dann die betrachtete Gruppe. Im Abschnitt 5.12 werden wir diesem Ansatz folgen, um einen alternativen Beweis des obigen Theorems zu geben. In der Arbeit [Kac<sub>2</sub>] (Schlußbemerkung) schlägt Kac eine Amalgamationskonstruktion für eine "kompakte Form" einer Kac-Moody-Liegruppe vor. Nach einer mündlichen Mitteilung von V. Kac liefert diese Konstruktion tatsächlich die "kompakte Form" der Arbeit [Peterson-Kac].

Beispiel: Gruppen zu affinen Wurzelbasen sind ausführlich von Garland und Tits ([Garland<sub>2</sub>], [Tits<sub>5</sub>]) untersucht worden. Sei z. B.  $(H, \nabla, \Delta)$  die  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis einer komplexen einfachen Gruppe  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ . Sei  $\tilde{\alpha}$  die höchste Wurzel und  $h_{\tilde{\alpha}}$  die entsprechende Kowurzel. Die Gruppe  $G$  zu der affinen Wurzelbasis

$$(H, \hat{\nabla}, \hat{\Delta})$$

mit

$$\hat{\Delta} = \Delta \cup \{-\tilde{\alpha}\}$$

$$\hat{\nabla} = \nabla \cup \{-h_{\tilde{\alpha}}\}$$

ist dann die Gruppe

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}((z)))$$

der Punkte von  $\mathcal{L}_\gamma$  über dem Körper der formalen Potenzreihen

$$\mathbb{C}((z)) = \left\{ \sum_{i \geq i_0} a_i z^i \mid i_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\} .$$

Die Boreluntergruppe  $B \subset G$  ist dann eine Iwahoriuntergruppe (vgl. auch [Iwahori-Matsumoto], hier wurden diese Gruppen zum ersten Mal mit einem affinen Tits-System versehen). Ersetzt man  $(H, \hat{V}, \hat{\Delta})$  durch eine freie Affinisierung (vgl. 4.13) so ist die zugehörige Gruppe  $G$  eine zentrale Erweiterung

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow G \rightarrow \mathcal{L}_\gamma(\mathbb{C}((z))) \rtimes \mathbb{C}^* \rightarrow 1 ,$$

eines semidirekten Produktes. Dabei operiert  $\mathbb{C}^*$  auf  $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{C}((z)))$  mittels der Körperautomorphismen

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda : \mathbb{C}((z)) &\rightarrow \mathbb{C}((z)) , \quad \lambda \in \mathbb{C}^* , \\ p(z) &\mapsto p(\lambda z) \end{aligned}$$

und die zentrale Erweiterung wird durch das zahme Symbol von  $\mathbb{C}((z))$  induziert (vgl. [Garland<sub>2</sub>]).

Im Fall affiner Wurzelbasen vom nichtzerfallenden Typ erhält man Gruppen über Unterkörpern  $\mathbb{C}((z^k))$ ,  $k = 2, 3$ , vom quasizerfallenden Typ. Diese zerfallen über  $\mathbb{C}((z))$ , vgl. [Tits<sub>5</sub>].

### 5.9 Diverse Untergruppen

Wir betrachten eine Gruppe  $G$  zu einer Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  wie in 5.8. Sei  $\beta \in \Sigma^R$  eine reelle Wurzel. Dann gibt es Elemente  $w \in W$ ,  $\alpha \in \Delta$  mit

$$\beta = w(\alpha) .$$

Sei  $n \in \pi^{-1}(w) \subset N$  ein Repräsentant von  $w$ . Wir setzen

$$U_\beta := n U_\alpha n^{-1} .$$

Dann ist  $U_\beta$  eine additive Einparameteruntergruppe von  $G$ , deren Definition von der Auswahl von  $w \in W$ ,  $\alpha \in \Delta$ ,  $n \in \pi^{-1}(w)$  unabhängig ist. Letzteres folgt mit dem

Lemma 1: Seien  $\alpha, \gamma \in \Sigma^{+,R}$  positive reelle Wurzeln,  $w \in W$  mit  $\gamma = w(\alpha)$  und  $n \in \pi^{-1}(w)$ . Dann gilt  $n U_\alpha n^{-1} = U_\gamma$ .

Beweis: Man benutze entweder eine Induktion über die Länge  $l(w)$  von  $w$  (vgl. [Tits<sub>3</sub>] 4.2) oder die durch die Untergruppen  $N_\Delta, \subset L_\Delta$ , auf  $\mathfrak{g}$  induzierte Aktion von  $N$ .

Bemerkung: In 5.11 werden wir die "adjungierte" Darstellung der vollen Gruppe  $G$  auf der komplettierten Liealgebra  $\overline{\mathfrak{g}}$  konstruieren.

Als Folgerung erhalten wir nun die allgemeinere Aussage:

Korollar: i) Seien  $\alpha, \beta \in \Sigma^R$ ,  $w \in W$  mit  $\beta = w(\alpha)$ . Dann gilt für alle  $n \in \pi^{-1}(w)$

$$n U_\alpha n^{-1} = U_\beta .$$

ii) Für jedes  $\beta \in \Sigma^R$  wird  $U_\beta$  von  $T$  normalisiert und bezüglich eines Gruppenisomorphismus

$$u_\beta : \mathbb{C} \rightarrow U_\beta$$

gilt

$$t u_{\beta}(c) t^{-1} = u_{\beta}(\beta(t) \cdot c)$$

für alle  $t \in T$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

Mit  $U^{-}$  bezeichnen wir diejenige Untergruppe von  $G$ , die von allen Gruppen  $U_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Sigma^{-} \cap \Sigma^R$  erzeugt wird.

Wir wollen nun das Zentrum  $Z(G)$  von  $G$  bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst die Untergruppe  $B$ .

Lemma 2: Das Zentrum  $Z(B)$  von  $B$  ist gleich der Gruppe

$$T^{\Delta} = \{t \in T \mid \alpha(t) = 1 \text{ für alle } \alpha \in \Delta\}.$$

Beweis: Offensichtlich ist  $T^{\Delta}$  der Durchschnitt  $T \cap Z(B)$ . Da  $Z(B)$  eine abgeschlossene Untergruppe der proalgebraischen Gruppe  $B$  ist, genügt es zu zeigen, daß das Zentrum der (nicht komplettierten) Liealgebra  $\underline{b} = \underline{h} \oplus \underline{u}$  in  $\underline{h}$  enthalten ist. Sei nun  $x$  im Zentrum von  $\underline{b}$ . Dann kommutiert  $x$  mit  $\underline{h}$  und den Erzeugern  $e_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Wegen der lokalen Endlichkeit der  $\langle e_{\alpha}, h_{\alpha}, e_{-\alpha} \rangle$ -Aktion auf  $\underline{g}$  kommutiert dann  $x$  auch mit allen  $e_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Damit liegt  $x$  im Zentrum von  $\underline{g}$ , welches bekanntlich in  $\underline{h}$  liegt (vgl. 3.6).

Korollar: Das Zentrum  $Z(G)$  von  $G$  ist gleich der Gruppe  $T^{\Delta}$ .

Beweis: Da jedes Weylgruppenelement die Elemente von  $T^{\Delta}$  punktweise fixiert, und  $G$  von  $B$  und  $N$  erzeugt wird, folgt  $T^{\Delta} \subset Z(G)$ . Wegen Lemma 2 genügt es nun zu zeigen, daß  $Z(G)$  in  $B$  enthalten ist. Sei dazu  $g = un u'$ ,  $u' \in U$ ,  $n \in N$ ,  $u \in U_w$ ,  $w = \pi(n)$  die Bruhatzerlegung eines zentralen Elementes  $g \in Z(G)$ . Ist  $w$  nichttrivial, so gibt es eine reelle positive Wurzel  $\alpha$  mit  $w^{-1}(\alpha) \in \Sigma^{-}$ . Für ein nichttriviales Element  $x$  der zugehörigen

Einparametergruppe  $U_\alpha$  ( $\subset U_w$ ) gilt dann

$$x u n u' = u n u' x$$

im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung  $g = u n u'$  (vgl. 5.8 Theorem, iii) ).

Bemerkung: Der obige Beweis ist analog zu dem in [Steinberg<sub>1</sub>] für den endlichdimensionalen Fall. Lemma 2 wird dort durch ein darstellungstheoretisches Argument ersetzt. Ein solches läßt sich auch hier verwenden falls  $G$  genügend Darstellungen besitzt (vgl. 5.10 und [Garland<sub>2</sub>] § 9).

Im folgenden seien

$$N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} \subset T\}$$

$$Z_G(T) = \{g \in G \mid gtg^{-1} = t \text{ für alle } t \in T\}$$

$$Z_U(T) = U \cap Z_G(T)$$

$$Z_N(T) = N \cap Z_G(T) \quad .$$

Lemma 3: i) Die Gruppe  $N_G(T)$  ist gleich dem semidirekten Produkt  $N \ltimes Z_U(T)$  .

ii) Die Gruppe  $Z_G(T)$  ist das semidirekte Produkt  $Z_N(T) \ltimes Z_U(T)$  .

iii) Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so gilt  $Z_U(T) = 1$  ,  $N_G(T) = N$  , und  $Z_G(T) = Z_N(T) = T$  .

Beweis: Sei  $g \in N_G(T)$  und  $g = unu' \in U_w n U$  ,  $\pi(n) = w$  , seine verfeinerte Bruhatzerlegung. Zu jedem  $t \in T$  gibt es dann ein  $s \in T$  mit

$$u n u' t = s u n u'$$

oder

$$u n t \cdot (t^{-1} u' t) = (s u s^{-1}) s n u' .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned} u &= s u s^{-1} \\ s &= n t n^{-1} \\ u' &= t^{-1} u' t . \end{aligned}$$

Diese Bedingungen müssen für alle  $t \in T$  (oder für alle  $s \in T$ ) erfüllt sein, d. h. es muß gelten

$$\begin{aligned} u &\in U_W \cap Z_G(T) \\ u' &\in U \cap Z_G(T) = Z_U(T) . \end{aligned}$$

Da keine reelle Wurzel auf  $T$  verschwindet, gilt  $U_W \cap Z_G(T) = 1$ . Also wird  $N_G(T)$  von  $N$  und  $Z_U(T)$  erzeugt. Sei  $\exp : \bar{u} \rightarrow U$  die Exponentialabbildung. Dann ist  $\exp^{-1}(Z_U(T))$  der Abschluß in  $\bar{u}$  der von den Wurzelräumen

$$\mathfrak{g}_\gamma , \quad \gamma \in \Sigma^+ \quad \text{und} \quad \gamma(\underline{h}) = \{0\} ,$$

aufgespannten Unteralgebra. Wegen  $\gamma(\underline{h}_\alpha) = 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  werden die entsprechenden Wurzeln  $\gamma$  von  $W$  fixiert. Also stabilisiert  $N$  die Räume  $\mathfrak{g}_\gamma$  und damit  $Z_U(T)$ .

Die Aussage ii) folgt unmittelbar aus i).

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so gibt es keine Wurzeln  $\gamma$  mit  $\gamma(\underline{h}) = \{0\}$ , also ist  $Z_U(T) = 1$  und  $N_G(T) = N$ . Ebenfalls operiert nun  $W$  treu auf  $H$ , also auf  $T$ . Daraus folgt  $Z_G(T) = Z_N(T) = T$ , womit auch Aussage iii) bewiesen ist.

Sei  $\Delta' \subset \Delta$  eine Teilmenge,  $S' = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta'\}$  die zugeordnete Menge fundamentaler Spiegelungen,  $W_{S'}$  die von  $S'$  erzeugte Untergruppe der Weylgruppe und

$$P_{S'} = \bigcup_{w \in W_{S'}} B w B$$

die Standard-parabolische Untergruppe von  $G$  vom Typ  $S'$ . Ist  $\Delta'$  von endlichem Typ, so induziert die natürliche Abbildung

$$P_{\Delta'} \rightarrow G$$

wegen der Injektivität auf  $B \cup N_{\Delta'}$  einen Isomorphismus  $P_{\Delta'} \xrightarrow{\cong} P_{S'}$  (vgl. 5.1 Lemma). Statt des Index  $S'$  werden wir daher, auch für  $\Delta'$  von nicht-endlichem Typ, den Index  $\Delta'$  verwenden, wie z. B. bei  $W_{\Delta'}$ ,  $P_{\Delta'}$ .

Ist  $\Delta'$  von endlichem Typ, so besitzt  $P_{\Delta'}$  gemäß 5.7 eine "Levi-Zerlegung"

$$P_{\Delta'} = L_{\Delta'} \rtimes U_{(\Delta')}$$

Im folgenden wollen wir diese Zerlegung auch für beliebige  $\Delta' \subset \Delta$  etablieren.

Dazu betrachten wir zunächst die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  zu  $(H, \nabla, \Delta)$  mit Erzeugern  $\underline{h}$  und  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ . Sei  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  die von  $\underline{h}$  und den Elementen  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \pm\Delta'$ , erzeugte Unteralgebra.

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar, so ist dies eine Kac-Moody-Liealgebra, andernfalls möglicherweise eine Prä-Kac-Moody-Liealgebra (vgl. 3.7 und für das folgende die Bemerkungen zu Ende der Abschnitte 5.5, 5.7, 5.8). Sei  $G'$  die  $(H, \nabla', \Delta')$  und  $\mathfrak{g}'$  zugeordnete Gruppe. Dann besitzt  $G'$  ein Tits-System  $(B', N')$ , in dem sich  $N'$  mit  $N_{\Delta'}$  identifiziert und  $B'$  die Form  $B' = T \rtimes U'$  hat. Wegen der Zerlegungen



$$\underline{g} = \underline{u}^{-} \otimes \underline{h} \otimes \underline{u}$$

$$\underline{g}' = \underline{u}'^{-} \otimes \underline{h} \otimes \underline{u}'$$

können wir  $U'$  als die abgeschlossene Untergruppe  $U_{\Sigma',+} \subset U$ ,

$\Sigma'^+ = \Sigma^+ \cap \mathbb{Z} \cdot \Delta'$ , auffassen (vgl. 5.5).

Seien  $P'_\alpha = B' \cup B' n'_\alpha B'$ ,  $\alpha \in \Delta'$ , die minimalen echten parabolischen Untergruppen von  $G'$ . Wir erhalten dann natürliche Inklusionen

$$N' \hookrightarrow N \hookrightarrow G$$

$$P'_\alpha \hookrightarrow P_\alpha \hookrightarrow G, \quad \alpha \in \Delta',$$

die eine Einbettung  $G' \hookrightarrow G$  induzieren (vgl. 5.1, Theorem und Lemma).

Wir werden das Bild von  $G'$  in  $G$  im folgenden auch mit  $L_{\Delta'}$  bezeichnen.

Sei  $(\Sigma'^+)$  das Komplement von  $\Sigma'^+$  in  $\Sigma^+$ . Dann erfüllt  $(\Sigma'^+)$  die Bedingung (I) aus 5.5, so daß sich  $U$  als semidirektes Produkt

$$U = U' \rtimes U_{(\Delta')}$$

mit

$$U' = U_{\Sigma',+}$$

$$U_{(\Delta')} = U_{(\Sigma'^+)}$$

zerlegt (vgl. 5.5).

**Lemma 4:** Die Gruppe  $L_{\Delta'}$  normalisiert  $U_{(\Delta')}$ .

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, daß die Erzeugenden  $n_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta'$ , von  $N_{\Delta'}$  die Gruppe  $U_{(\Delta')}$  normalisieren. Nach Konstruktion von  $U_{(\Delta')}$  folgt dies aus der Tatsache, daß die Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta'$ , die Menge

$(\Sigma', +) = \Sigma' \setminus \mathbb{Z} \cdot \Delta'$  in sich überführen, vgl. 5.5 und 5.7.

Nach Definition von  $P_{\Delta'}$ , erzeugen nun  $L_{\Delta'}$  und  $U_{(\Delta')}$  die Gruppe  $P_{\Delta'}$ . Wendet man 5.1 Lemma auf die natürliche Abbildung  $L_{\Delta'} \rtimes U_{(\Delta')} \rightarrow P_{\Delta'}$  an, so erhält man deren Injektivität, also:

Korollar: Für jede Teilmenge  $\Delta' \subset \Delta$  besitzt  $P_{\Delta'}$  eine Levi-Zerlegung

$$P_{\Delta'} = L_{\Delta'} \rtimes U_{(\Delta')} .$$

Sei nun  $\phi : (H_1, \nabla, \Delta) \rightarrow (H_2, \nabla, \Delta)$  ein Morphismus Cartanscher  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasen (vgl. 3.1;  $\phi$  bzw.  $\phi^*$  vermittelt eine Bijektion der einfachen Kowurzeln bzw. Wurzeln, daher haben wir die entsprechenden Mengen in beiden Basen identifiziert.) Dann induziert  $\phi$  einen Homomorphismus

$$\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$$

der entsprechenden Kac-Moody-Liealgebren. Wir wollen nun sehen, daß  $\phi$  auch ein Homomorphismus

$$\Psi : G_1 \rightarrow G_2$$

der zugehörigen Kac-Moody-Liegruppen zugeordnet werden kann.

Dazu beachten wir, daß  $\psi$  zunächst einen Isomorphismus

$$U_1 \rightarrow U_2$$

der unipotenten Gruppen (5.5) induziert.

Für jede Teilmenge  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ liefert die "Einschränkung" von  $\phi$

$$(H_1, \nabla', \Delta') \rightarrow (H_2, \nabla', \Delta')$$

einen Homomorphismus der dazugehörigen reductiven Gruppen

$$L_{1,\Delta'} \rightarrow L_{2,\Delta'}$$

der mit den adjungierten Aktionen auf den Gruppen  $U_{1,(\Delta')} \xrightarrow{\sim} U_{2,(\Delta')}$  und Restriktion bezüglich Teilmengen  $\Delta'' \subset \Delta'$  verträglich ist. Wir erhalten daher einen Homomorphismus

$$\{P_{1,\Delta'} \rightarrow P_{2,\Delta'} \mid \Delta' \subset \Delta \text{ von endlichem Typ}\}.$$

des Systems der parabolischen Untergruppen endlichen Typs von  $G_1$  auf das entsprechende System von  $G_2$ . Nach Konstruktion von  $G_1$  und  $G_2$  erhalten wir damit den gewünschten Homomorphismus

$$\Psi : G_1 \rightarrow G_2 .$$

Wir wissen, daß aufgrund der Idealstruktur von  $\mathfrak{g}_1$  der Kern von  $\psi$  im Zentrum  $\mathfrak{z}_1 \subset \mathfrak{h}_1$  von  $\mathfrak{g}_1$  enthalten ist (vgl. 3.6). Ein analoges Resultat gilt auch für  $\Psi$ .

**Lemma 5:** Der Kern von  $\Psi$  ist im Zentrum von  $G_1$  enthalten.

**Beweis:** Da der Homomorphismus  $\Psi$  die Bruhatzerlegungen

$$G_i = \bigcup_{w \in W} B_i w B_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

$$W = N_i/T_i$$

respektiert, erhalten wir Kern  $\Psi \subset B_i$ . Da  $\Psi$  auch die Zerlegungen  $B_i = T_i \times U_i$  erhält und injektiv auf  $U_i$  ist, folgt Kern  $\Psi \subset T_i$ . Aus der Normalität von Kern  $\Psi$  ergibt sich schließlich

$$\text{Kern } \Psi \subset T_1^\Delta = Z(G_1) .$$

Lemma 6: Das Bild von  $\Psi$  ist normal in  $G_2$ , und  $G_2$  zerlegt sich als semidirektes Produkt

$$G_2 \cong (\text{Bild } \Psi) \rtimes (\text{Kokern } \Psi) .$$

Beweis: Es gilt  $G_1 = \langle N_1, U_1 \rangle$  und  $N_1/T_1 = W$  für  $i = 1, 2$ . Da  $\Psi$  einen Isomorphismus  $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$  induziert, folgt  $G_2 = \langle \text{Bild } \Psi, T_2 \rangle$  und  $\text{Kokern } \Psi = T_2/T_2 \cap \text{Bild } \Psi$ . Außerdem normalisiert  $T_2$   $\text{Bild } \Psi$ . Nach [Borel] III, 8.5 lifftet sich der Torus  $\text{Kokern } \Psi$  zu einem Untertorus  $T'$  von  $T_2$  mit

$$T_2 = (T_2 \cap \text{Bild } \Psi) \times T' .$$

Dann gilt auch

$$G_2 = (\text{Bild } \Psi) \rtimes T' ,$$

was zu zeigen war.

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  eine beliebige Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $H'$  das Untergitter  $H \cap (\mathbb{Q} \cdot \nabla)$  von  $H$ . Wir erhalten dann einen offensichtlichen Morphismus

$$(H', \nabla, \Delta) \longrightarrow (H, \nabla, \Delta)$$

Cartanscher Wurzelbasen. Sei

$$\Psi : G' \longrightarrow G$$

der resultierende Homomorphismus der zugeordneten Gruppen. Da  $H/H'$  keine Torsion besitzt, ist die Einschränkung von  $\Psi$  auf den maximalen Torus  $T' = H' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  von  $G'$  injektiv. Also ist  $\Psi$  injektiv nach Lemma 5.

Wir nennen  $G'$  die abgeleitete Gruppe von  $G$  und bezeichnen sie auch mit  $DG$ . (Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  frei, so ist  $G'$  der Abschluß der Kommutatoruntergruppe von  $G$  bezüglich der durch ein Definitionssystem von  $U$  auf  $G$  induzierten Topologie).

Nach Lemma 6 zerlegt sich  $G$  als semidirektes Produkt

$$G = DG \rtimes (G/DG) .$$

### 5.10 Darstellungen der Liealgebra

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $\underline{\mathfrak{g}}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra.

In diesem Abschnitt werden wir gewisse Darstellungen von  $\underline{\mathfrak{g}}$  betrachten, die sich zu Darstellungen der entsprechenden Kac-Moody-Liegruppe  $G$  liften lassen.

Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  von endlichem Typ, so sind diese Darstellungen gerade die endlichdimensionalen Darstellungen von  $\underline{\mathfrak{g}}$ .

Der Einfachheit halber setzen wir zunächst  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei voraus. Der allgemeine Fall reduziert sich leicht auf diesen (vgl. die Bemerkung zu Ende dieses Abschnitts).

Wir nennen ein Element  $\omega \in H^*$  auch ein Gewicht des Wurzeldatums. Ein Gewicht  $\omega \in H^*$  heißt dominant, falls  $\omega(h_\alpha) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  gilt. Ein dominantes Gewicht  $\omega$  heißt zudem fundamental bzgl. einer Wurzel  $\alpha$ , falls  $\omega(h_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$  für alle  $\beta \in \Delta$  gilt.

Enthält  $H^*$  fundamentale Gewichte bezüglich aller einfachen Wurzeln  $\alpha \in \Delta$ , so sagen wir  $(H, \nabla, \Delta)$  sei einfach zusammenhängend.

Im folgenden wollen wir jedem dominanten Gewicht  $\omega$  einen irreduziblen  $\underline{\mathfrak{g}}$ -Modul  $V^\omega$  zuordnen (vgl. [Kac<sub>3</sub>], [Kac<sub>4</sub>], [Garland-Lepowsky]).

Wir erinnern an die Zerlegung

$$\underline{\mathfrak{g}} = \underline{\mathfrak{u}}^- \oplus \underline{\mathfrak{h}} \oplus \underline{\mathfrak{u}}^+$$

$$\underline{\mathfrak{b}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \underline{\mathfrak{u}}^+$$

und bezeichnen mit  $\mathcal{U}(\underline{\mathfrak{g}})$ ,  $\mathcal{U}(\underline{\mathfrak{b}})$ ,  $\mathcal{U}(\underline{\mathfrak{u}}^-)$  die universellen einhüllenden Al-

gebren von  $\underline{g}$ ,  $\underline{b}$  und  $\underline{u}^-$ . Es gilt dann

$$\mathcal{U}(\underline{g}) = \mathcal{U}(\underline{u}^-) \cdot \mathcal{U}(\underline{b}) .$$

Jedes dominante Gewicht  $\omega \in \mathfrak{H}^*$  definiert nach Komposition mit der Projektion  $\underline{b} \rightarrow \underline{h}$  einen eindimensionalen  $\underline{b}$ -Modul  $\mathbb{C}_\omega$  :

$$\underline{b} \rightarrow \underline{h} \xrightarrow{\omega} \mathbb{C} = \text{End}(\mathbb{C}_\omega) .$$

Sei

$$v^{(\omega)} := \mathcal{U}(\underline{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\underline{b})} \mathbb{C}_\omega$$

der induzierte  $\underline{g}$ -Modul. Als  $\underline{h}$ -Modul ist dann  $v^{(\omega)}$  isomorph zu  $\mathcal{U}(\underline{u}^-) \otimes \mathbb{C}_\omega$ .

Sei nun  $I^{(\omega)} \subset v^{(\omega)}$  der größte  $\underline{g}$ -Untermodule von  $v^{(\omega)}$ , der die Gerade  $1 \otimes \mathbb{C}_\omega$  nicht enthält. Dann heißt

$$v^\omega := v^{(\omega)} / I^{(\omega)}$$

der irreduzible Modul zum Gewicht  $\omega$ . Es gilt dann:

- 1)  $v^\omega$  ist irreduzibel.
- 2) Als  $\underline{h}$ -Modul zerfällt  $v^\omega$  in eine direkte Summe endlichdimensionaler Eigenräume

$$v^\omega = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{H}^*} v_\mu^\omega ,$$

wobei

$$v_\mu^\omega = \{v \in v^\omega \mid h \cdot v = \mu(h)v \text{ für alle } v \in \underline{h}\} .$$

Ein Element  $\mu \in \mathfrak{H}^*$  mit  $v_\mu^\omega \neq \{0\}$  heißt ein Gewicht von  $v^\omega$ .

3) Jedes Gewicht  $\mu$  von  $V^\omega$  hat die Form

$$\mu = \omega - \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{N}.$$

4)  $V_\omega^\omega$  ist das Bild von  $1 \otimes \mathbb{C}_\omega$  in  $V^\omega$ , insbesondere  $\dim V_\omega^\omega = 1$ .

5) Bezüglich jeder Unteralgebra  $sl_{2,\alpha} = \langle e_\alpha, h_\alpha, e_{-\alpha} \rangle$ ,  $\alpha \in \Delta$ , zerfällt  $V^\omega$  in eine direkte Summe endlichdimensionaler  $sl_2$ -Moduln.

Die Eigenschaft 5) hat als Konsequenz

6) Die Menge der Gewichte von  $V^\omega$  ist stabil unter der Aktion der Weylgruppe  $W$  und  $\dim V_\mu^\omega = \dim V_{w(\mu)}^\omega$  für alle Gewichte  $\mu \in H^*$  und Elemente  $w \in W$ .

Entsprechend den Eigenschaften 3) und 4) heißt  $V^\omega$  auch der irreduzible Höchstgewichtsmodul zum höchsten Gewicht  $\omega$ . Ein Element  $v \in V_\omega^\omega$ ,  $v \neq 0$ , heißt Höchstgewichtsvektor. Nach Konstruktion von  $V^\omega$  gilt dann  $\underline{u}^+ \cdot v = 0$ . Mit  $P(\omega)$  bezeichnen wir die Menge aller Gewichte von  $V^\omega$ . Die Tiefe eines Gewichtes

$$\mu = \omega - \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$$

ist durch

$$\text{tf}^\omega(\mu) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$$

definiert.

Gelegentlich werden wir Operatoren auf den Moduln  $V^\omega$  bezüglich expliziter Basen betrachten. Wir definieren daher:

Eine Basis  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $V^\omega$  heißt adaptiert (an  $(\underline{h}, \underline{b})$ ) wenn die beiden

folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $v_i \in V_{\mu_i}^{\omega}$  für alle  $i$  und geeignete  $\mu_i \in P(\omega)$  ,  
 ii)  $j \geq i \Rightarrow \text{tf}^{\omega}(\mu_j) \geq \text{tf}^{\omega}(\mu_i)$  .

Die Eigenschaft 5) ist ein Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes von Kac-Weyl [Kac<sub>4</sub>], [Kac-Peterson<sub>1</sub>], Proposition 2.9, über die vollständige Reduzibilität gewisser Darstellungen von Kac-Moody-Liealgebren zu symmetrisierbaren Wurzelbasen. Wir erwähnen das folgende Korollar dieses Satzes:

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Wurzelbasis wie oben,  $\Delta' \subset \Delta$  ,  $\nabla' = \{h_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta'\}$  Teilmengen, so daß  $(H, \nabla', \Delta')$  symmetrisierbar ist. Die Kac-Moody-Liealgebra  $\mathfrak{g}'$  zu  $(H, \nabla', \Delta')$  bettet sich in natürlicher Weise in die Kac-Moody-Liealgebra zu  $(H, \nabla, \Delta)$  ein (vgl. 3.7). Jeder  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V^{\omega}$  zerfällt dann bezüglich  $\mathfrak{g}'$  in eine direkte Summe

$$V^{\omega} = \bigoplus V^{\mu}$$

von irreduziblen Höchstgewichtsmoduln  $V^{\mu}$  zu dominanten Gewichten  $\mu$  von  $(H, \nabla', \Delta')$  . Ist  $(H, \nabla', \Delta')$  von endlichem Typ (z. B. falls  $\nabla' = \{\alpha\}$  ,  $\Delta' = \{h_{\alpha}\}$  ,  $\alpha \in \Delta$  ) , so sind diese Moduln  $V^{\mu}$  endlichdimensional, und das Resultat ist eine Folgerung aus dem Weylschen Satz über die vollständige Reduzibilität der lokal-endlichen Darstellungen von  $\mathfrak{g}'$  .

Jeder Modul von  $\mathfrak{g}$  der Form  $V^{\omega}$  läßt sich auf natürliche Weise als Modul für die Kompletterung  $\overline{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  auffassen. Sei nämlich  $x \in \overline{\mathfrak{g}}$  ,

$$x = \sum_{\beta \in \Sigma \cup \{0\}} x_{\beta} \quad (\text{vgl. 5.4}) .$$

Für  $v \in V^{\omega}$  setzen wir dann

$$x(v) = \sum_{\beta \in \Sigma \cup \{0\}} x_{\beta}(v) .$$



Diese Summe ist endlich, denn ist  $v \in V^\omega$  und

$$v = \sum_{i=1}^n v_i, \quad v_i \in V_{\mu_i}^\omega,$$

die Zerlegung entsprechend den Gewichtsräumen, so wird  $v$  von allen  $x_\beta$  annulliert, für die gilt

$$\text{ht}(\beta) > \max\{\text{tf}^\omega(\mu_i) \mid i=1, \dots, n\}.$$

Dieser Sachverhalt läßt sich unter Berücksichtigung der Zerlegung

$$\underline{g} = \underline{u} \oplus \underline{h} \oplus \overline{u}$$

auch in den Begriffen des Abschnitts 5.3 formulieren. Sei dazu

$\mathcal{F} = (V_i)_{i=0,1,\dots}$  die durch

$$V_i = \bigoplus_{\text{tf}(\mu) \leq i} V_\mu^\omega$$

definierte Fahme in  $V^\omega$ . Diese erfüllt die Voraussetzungen von 5.3, Beispiel.

Der Darstellung von  $\underline{u}$  auf  $V^\omega$  entspricht ein Homomorphismus

$$\underline{u} \rightarrow \underline{u}(\mathcal{F}),$$

der sich wegen der "Vollständigkeit" von  $\underline{u}(\mathcal{F})$  auf die Kompletzierung  $\overline{u}$

von  $\underline{u}$  fortsetzen läßt

$$\overline{u} \rightarrow \underline{u}(\mathcal{F}).$$

**Lemma:** Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  zusammenhängend und  $\omega \in H^*$  ein dominantes Gewicht mit  $\omega(\nabla) \neq \{0\}$ . Dann ist die Darstellung  $\overline{u} \rightarrow \text{gl}(V^\omega)$  injektiv.

**Beweis:** Aufgrund der Voraussetzungen und der Idealstruktur von  $\underline{g}$  (vgl. 3.6,  $(H, \nabla, \Delta)$  ist frei) liegt der Kern der Darstellung  $\underline{g} \rightarrow \text{gl}(V^\omega)$  in  $\underline{h}$ . Daher

ist die Einschränkung

$$\underline{u} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^\omega)$$

injektiv. Insbesondere gibt es zu jedem  $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ ,  $\beta \in \Sigma^+$  ein  $\mu \in P(\omega)$  und ein  $v \in V_\mu^\omega$  mit

$$x_\beta(v) \neq 0.$$

Gäbe es nun ein Element  $x = \sum_{\beta \in \Sigma^+} x_\beta$ ,  $x \neq 0$ , im Kern der Darstellung

$$\underline{\bar{u}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^\omega),$$

so folgte mit  $x_\beta(V_\mu^\omega) \subset V_{\mu+\beta}^\omega$

$$x_\beta(v) = 0 \quad \text{für alle } \beta \in \Sigma^+, \mu \in P(\omega), v \in V_\mu^\omega,$$

im Widerspruch zu der obigen Feststellung.

Bemerkung: 1) Der einfachen Formulierung wegen haben wir bisher  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei vorausgesetzt. Für eine allgemeine Kac-Moody-Liealgebra  $\mathfrak{g}$  übertragen sich die Konstruktion der Darstellungen  $V^\omega$  und alle Aussagen, die von einer "Degeneration" des Wurzel- und Gewichtssystems nicht betroffen werden, insbesondere das obige Lemma. Für diese Übertragung kann man auch die Realisation von  $\mathfrak{g}$  als Subquotient einer Kac-Moody-Liealgebra mit freier Wurzelbasis benutzen (vgl. 3.6). Ist  $\phi : (H, \nabla, \Delta) \rightarrow (H', \nabla', \Delta')$  ein Morphismus von Wurzelbasen, so überführt  $\phi^* : H'^* \rightarrow H^*$  dominante Gewichte in solche. Ist  $\phi$  zudem injektiv, so besitzt jedes dominante Gewicht  $\omega \in H^*$  eine Liftung  $\omega' \in H'^*$ ,  $\phi^*(\omega') = \omega$ , zu einem dominanten Gewicht. Man beachte, daß es für eine nichtfreie Wurzelbasis  $(H', \nabla', \Delta')$  möglicherweise überhaupt keine dominanten Gewichte außer 0 gibt (wie im affinen Fall, falls die  $h_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , linear abhängig sind).

2) Sei  $\tilde{\mathfrak{g}}$  eine Prä-Kac-Moody-Liealgebra mit Projektion auf  $\mathfrak{g}$ . Dann lassen sich alle Moduln  $V^\omega$  als Moduln von  $\tilde{\mathfrak{g}}$  auffassen. Die Treueit der Darstellung von  $\underline{u}$  (vgl. Lemma, oben) geht dabei natürlich verloren.

### 5.11 Darstellungen der Gruppe

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis,  $\mathfrak{g}$  die zugehörige Kac-Moody-Liealgebra,  $G$  die dazu in 5.8 konstruierte Gruppe, und

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^\omega)$$

eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{g}$  zu einem dominanten Gewicht  $\omega$  (vgl. 5.10). Wir wollen nun zeigen, daß sich diese Darstellung zu einer Darstellung

$$R : G \rightarrow \mathrm{GL}(V^\omega)$$

"integrieren" läßt. Dazu genügt es zu zeigen, daß die parabolischen Untergruppen endlichen Typs  $P_{\Delta'}$ ,  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ, in einer mit den Inklusionen  $P_{\Delta''} \subset P_{\Delta'}$ ,  $\Delta'' \subset \Delta'$ , verträglichen Weise auf  $V^\omega$  operieren (nach 5.1, Korollar 3 genügt auch schon die Betrachtung aller  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ und Rang  $\leq 2$ ; dadurch ergibt sich jedoch keine formale Vereinfachung der folgenden Argumente).

Zunächst konstruieren wir die Aktion der Gruppe  $U$  auf  $V^\omega$ . Sei dazu  $\mathcal{F}$  die in 5.10 eingeführte Tiefenfiltrierung von  $V^\omega$ . Der durch  $\rho$  induzierte Homomorphismus

$$\bar{\underline{u}} \rightarrow \underline{u}(\mathcal{F}) \quad ( \subset \mathfrak{gl}(V^\omega) )$$

nilpotenter Pro-Liealgebren liftet sich dann zu einem Homomorphismus

$$U \rightarrow U(\mathcal{F}) \quad ( \subset \mathrm{GL}(V^\omega) )$$

der entsprechenden unipotenten proalgebraischen Gruppen. Durch Einschränkung erhalten wir für jede Teilmenge  $\Delta' \subset \Delta$  eine Darstellung

$$R_{(\Delta')} : U_{(\Delta')} \hookrightarrow U \rightarrow GL(V^\omega) .$$

Sei nun  $\Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ und  $\underline{1}_{\Delta'}$  die zugehörige reductive Unter- algebra von  $\underline{g}$ . Nach dem Weylschen Satz über vollständige Reduzibilität zer- fällt dann  $V^\omega$  in eine direkte Summe endlichdimensionaler  $\underline{1}_{\Delta'}$ -Moduln (vgl. 5.10). Daher liftet sich die Darstellung

$$\underline{1}_{\Delta'} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^\omega)$$

zu einer Darstellung der reductiven Gruppe  $L_{\Delta'}$ ,

$$R_{\Delta'} : L_{\Delta'} \rightarrow GL(V^\omega) .$$

Aufgrund des folgenden Lemmas kombinieren sich  $R_{\Delta'}$  und  $R_{(\Delta')}$  zu einer Darstellung der parabolischen Gruppe  $P_{\Delta'} = L_{\Delta'} \ltimes U_{(\Delta')}$

$$P_{\Delta'} \rightarrow GL(V^\omega) .$$

Lemma: Für alle  $g \in L_{\Delta'}$  und  $u \in U_{(\Delta')}$  gilt

$$R_{(\Delta')}(gug^{-1}) = R_{\Delta'}(g)R_{(\Delta')}(u)R_{\Delta'}(g)^{-1} .$$

Beweis: Wegen der Kommutativität der Exponentialabbildungen

$$\exp : \underline{u} \rightarrow U$$

$$\exp : \underline{u}(\mathcal{F}) \rightarrow U(\mathcal{F})$$

mit Automorphismen genügt es die infinitesimale Aussage

$$\rho(\text{Ad}(g)y) = R_{\Delta'}(g)\rho(y)R_{\Delta'}(g)^{-1}$$

für alle  $g \in L_{\Delta}$ , und  $y \in \bar{u}_{(\Delta')}$  zu beweisen.

Ist  $g \in U_{\beta}$ ,  $\beta \in \Sigma \cap \mathbb{Z} \cdot \Delta'$ , so folgt dies mit

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] \quad , \quad x, y \in \underline{g} \quad ,$$

und der bekannten Formel

$$\rho(\exp(\operatorname{ad} x)y) = \exp(\rho(x))\rho(y)\exp(\rho(x))^{-1} \quad ,$$

die für  $x \in \underline{g}_{\beta}$ ,  $\beta \in \Sigma \cap \mathbb{Z} \cdot \Delta'$ , und  $y \in \bar{u}$  sinnvoll ist (vgl. [Steinberg<sub>1</sub>] Lemma 14;  $\operatorname{ad} x$  und  $\rho(x)$  sind lokal nilpotent auf  $\underline{g}$  bzw.  $V^{\omega}$ , aus Stetigkeitsgründen ist  $\exp(\operatorname{ad} x)$  auch auf der Kompletterung  $\bar{\underline{g}}$  definiert).

Ist  $g \in T \subset L_{\Delta}$ , so kann man entweder wieder auf diese Formel zurückgreifen (indem man die analytische Exponentialabbildung  $\underline{h} \rightarrow T$  benutzt) oder, algebraisch, das folgende Argument benutzen:

Für  $y \in \underline{u}_{\beta}$ ,  $\beta \in \Sigma$ , und  $g \in T$  gilt

$$\rho(\operatorname{Ad}(g)y) = \beta(g) \cdot \rho(y) \quad .$$

Andererseits operiert  $R_{\Delta, (g)}$  auf jedem Gewichtsraum  $V_{\mu}^{\omega}$  durch den Skalar  $\mu(g)$ , und  $\rho(y)$  bildet  $V_{\mu}^{\omega}$  nach  $V_{\mu+\beta}^{\omega}$  ab. Also gilt

$$\begin{aligned} R_{\Delta, (g)}\rho(y)R_{\Delta, (g)}^{-1} &= (\mu+\beta)(g) \cdot \mu(g)^{-1}\rho(y) \\ &= \beta(g) \cdot \rho(y) \quad . \end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun, da  $L_{\Delta}$ , von den Gruppen  $T$  und  $U_{\beta}$ ,  $\beta \in \Sigma \cap \mathbb{Z} \cdot \Delta'$  erzeugt wird.

Es ist nach Konstruktion offensichtlich, daß die jetzt gewonnenen Darstellungen

$$P_{\Delta'} \rightarrow GL(V^{\omega})$$

verträglich sind mit den Restriktionen von  $P_{\Delta'}$  auf Untergruppen  $P_{\Delta''}$ ,  $\Delta'' \subset \Delta'$ . Daher induzieren sie eine Darstellung

$$R : G \rightarrow GL(V^{\omega}) .$$

Die Irreduzibilität von  $V^{\omega}$  bezüglich  $\mathfrak{g}$  impliziert auch die Irreduzibilität bezüglich  $G$ , da  $\mathfrak{g}$  von den Liealgebren zu den Untergruppen  $T, U_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Delta$ , aufgespannt wird.

Wir nennen  $R$  die irreduzible Höchstgewichtsdarstellung von  $G$  zum höchsten Gewicht  $\omega$ .

Abschließend fassen wir einige wesentliche Eigenschaften der Darstellung  $R$  zusammen.

- 1) Der Torus  $T$  stabilisiert die Gewichtsraumzerlegung  $V^{\omega} = \bigoplus_{\mu \in P(\omega)} V_{\mu}^{\omega}$ ,  
und

$$R(t) \cdot v = \mu(t) \cdot v$$

für alle  $t \in T$ ,  $v \in V_{\mu}^{\omega}$ .

- 2) Die Gruppe  $N$  permutiert die Gewichtsräume, und es gilt

$$R(n)(V_{\mu}^{\omega}) = V_{w(\mu)}^{\omega}$$

für alle  $n \in N$  mit  $w = \pi(n) \in W$ .

3) Bezüglich einer adaptierten Basis von  $V^{(u)}$  operiert die Gruppe  $U$  (bzw.  $U^-$ ) durch strikte obere (bzw. untere) Dreiecksmatrizen. (Dabei bedeutet "strikt": Einsen auf der Diagonalen.)

Mit den gleichen Argumenten wie oben sehen wir, daß  $G$  auch in natürlicher und stetiger Weise auf der komplettierten Liealgebra  $\bar{\mathfrak{g}}$  operiert. Wir nennen diese Operation die adjungierte Darstellung von  $G$ :

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\bar{\mathfrak{g}}) .$$

Für  $\text{Ad}$  gelten dann ebenfalls die obigen Eigenschaften 1) und 2). Nennt man eine Basis  $(x_n \mid n \in \mathbb{Z})$  von  $\mathfrak{g}$  adaptiert (an  $(\underline{b}, \underline{h})$ ) wenn jedes Element  $x_n$  in einem Wurzelraum  $\mathfrak{g}_{\beta(n)}$ ,  $\beta(n) \in \Sigma \cup \{0\}$ , liegt und  $n > m$  die Relation  $\text{ht}(\beta(n)) \leq \text{ht}(\beta(m))$  impliziert, so überträgt sich auch die Eigenschaft 3) (unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\text{Ad}$ ).

Bemerkung: Allgemeiner folgt mit den Argumenten dieses Abschnitts, daß  $G$  auf jedem integrablen  $\mathfrak{g}$ -Modul  $V$  (im Sinne von Tits [Tits<sub>4</sub>]) operiert, für den sich die  $u$ -Aktion zu einer Aktion der Gruppe  $U$  fortsetzen läßt. Dies ist Theorem 2 in [Tits<sub>4</sub>] (vgl. dazu auch [Tits<sub>5</sub>] p. 98, Fußnote (1)).

### 5.12 Rekonstruktion des Tits-Systems

Ziel dieses Abschnitts ist es, einen alternativen Beweis für 5.8 Theorem, d.h. für die Existenz eines Tits-Systems in einer Kac-Moody-Liegruppe  $G$  zu geben. Dabei werden wir die Darstellungen des letzten Abschnitts benutzen, und wir haben deswegen vorauszusetzen, daß die dominanten Gewichte unserer Cartanschen Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  den Charaktermodul  $H^*$  erzeugen. Die Idee des Beweises ist die "klassische" Idee von Chevalley [Chevalley] in der Form, die sie in den

Lectures Notes von Steinberg [Steinberg<sub>1</sub>] gefunden hat, und die den bisherigen Arbeiten über Kac-Moody-Liegruppen zugrunde lag ([Moody-Teo], [Marcuson], [Garland<sub>2</sub>], [Kac<sub>4</sub>], [Peterson-Kac]).

Sei also nun  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis mit genügend vielen dominanten Gewichten (s. o.) und  $G$  das Amalgam der parabolischen Gruppen  $P_{\Delta'}$ ,  $\Delta' \subset \Delta$ , von endlichem Typ. Aus 5.11 folgt, daß  $G$  auf der Liealgebra  $\bar{\mathfrak{g}}$  und auf jedem Höchstgewichtsmodul  $V^{\omega}$  in natürlicher Weise operiert. Seien  $\omega_1, \dots, \omega_n$  dominante Gewichte, die  $H$  erzeugen,  $V = \bigoplus_{i=1}^n V^{\omega_i}$  und

$$R : G \rightarrow GL(V) \quad \bullet$$

$$\text{(bzw. } \rho : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \text{ )}$$

die Darstellung von  $G$  (bzw.  $\bar{\mathfrak{g}}$ ) auf  $V$ .

Wir betrachten nun die natürlichen Homomorphismen

$$T \rightarrow G$$

$$U \rightarrow G$$

$$B \rightarrow G$$

$$N \rightarrow G$$

$$P_{\alpha} \rightarrow G, \quad \alpha \in \Delta.$$

Ihre Injektivität wollen wir als noch nicht bewiesen voraussetzen. Sie ergibt sich jedoch mit dem folgenden Lemma.

**Lemma 1:** Die Kompositionen der obigen Abbildungen mit der Darstellung

$R : G \rightarrow GL(V)$  sind treu.

**Beweis:** Wir bezeichnen die Kompositionen mit  $R_T$ ,  $R_U$ ,  $R_B$ ,  $R_N$  und  $R_{P_{\alpha}}$ .



Die Injektivität von  $R_T$  ergibt sich nun aus der Tatsache, daß die Gewichte  $\omega_1, \dots, \omega_n$  den Charaktermodul  $H^*$  von  $T$  erzeugen. Aus 5.10, Lemma, folgt die Injektivität der Darstellung

$$\bar{u} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \quad .$$

Daraus ergibt sich die Injektivität von  $R_U$  (der Kern von  $R_U$  ist eine proalgebraische zusammenhängende Untergruppe, die die Form  $\exp(\underline{u}')$  für eine Unteralgebra  $\underline{u}' \subset \bar{u}$  hat).

Bezüglich einer adaptierten Basis in den Räumen  $V^{\omega_i}$  (vgl. 5.10) operiert  $T$  durch diagonale und  $U$  durch strikte obere Dreiecksmatrizen (vgl. 5.11). Daher ist auch  $R_B$  treu. Die Injektivität von  $R_{P_\alpha}$  folgt dann, indem man zusätzlich die Einfachheit von  $SL_2$  oder  $PGL_2$  berücksichtigt.

Wir betrachten nun  $R_N$ . Wegen der Injektivität von  $R_T$  gilt für ein  $n \in \text{Kern}(R_N)$  notwendigerweise  $\pi(n) = w \neq 1$ . Deshalb gibt es eine positive reelle Wurzel  $\alpha$  mit  $w(\alpha) \in \Sigma^-$ . Wegen der Injektivität von  $R_U$  wird das Element

$$\exp(e_\alpha) \in U_\alpha \subset U$$

bezüglich einer adaptierten Basis von  $V$  durch eine nichttriviale strikte obere Dreiecksmatrix dargestellt. Wegen  $R_N(n) = 1$  und Konstruktion der Darstellung  $R$  gilt nun

$$R(\exp(e_\alpha)) \in R_N(n)R(U_\alpha)R_N(n)^{-1} = \exp(\rho(q_{w(\alpha)})) \quad .$$

Wegen  $w(\alpha) \in \Sigma^-$  werden die Elemente der letzteren Gruppe jedoch durch strikte untere Dreiecksmatrizen in  $GL(V)$  repräsentiert. Also kann es keine Elemente  $n \neq 1$  im Kern von  $R_N$  geben.

Wir identifizieren von nun an die Gruppen  $T, U, B, N, P_\alpha$  mit ihren Bildern in  $G$ . Wie in 5.9 können wir in eindeutiger Weise Untergruppen  $U_\beta$  für alle reellen Wurzeln  $\beta$  und  $U^- = \langle U_\beta \mid \beta \in \Sigma^- \cap \Sigma^R \rangle$  definieren. Die Elemente von  $B$  (bzw.  $U^-$ ) operieren dann bezüglich einer adaptierten Basis von  $V$  durch obere (bzw. strikt untere) Dreiecksmatrizen (vgl. das Ende des Beweises von Lemma 1), insbesondere folgt  $B \cap U^- = \{1\}$ .

Lemma 2: Die Gruppen  $B$  und  $N$  erzeugen  $G$ , und es gilt  $B \cap N = T$ .

Beweis: Da die Gruppen  $P_{\Delta'}, \Delta' \subset \Delta$  von endlichem Typ, von  $B$  und  $N_{\Delta'}$  erzeugt werden, folgt die erste Behauptung. Der Durchschnitt  $B \cap N$  enthält  $T$ . Es bleibt also zu zeigen, daß die Aussage  $n \in B$  für alle  $n \in N$  mit  $\pi(n) = w \neq 1$  falsch ist. Sei dazu  $\alpha \in \Sigma^{+,R}$  mit  $w(\alpha) \in \Sigma^-$ . Dann gilt

$$n U_\alpha n^{-1} = U_{w(\alpha)} \subset U^- .$$

Wäre  $n \in B$ , so folgte wegen  $U_\alpha \subset B$

$$n U_\alpha n^{-1} \subset B \cap U^- = \{1\} ,$$

was der Injektivität von  $U \rightarrow G$  widerspricht.

Nach Konstruktion ist der Quotient  $N/B \cap N = N/T$  die Weylgruppe  $W$  von  $(H, \nabla, \Delta)$  (vgl. 5.6). Zum Nachweis der Eigenschaften eines Tits-Systems für das Quadrupel  $(G, B, N, \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\})$  genügen uns jetzt die folgenden beiden Lemmata, deren wohlbekannte Beweise wir der Vollständigkeit halber noch einmal ausführen.

Lemma 3: Für alle  $w \in W, s_\alpha, \alpha \in \Delta$ , gilt

$$s_\alpha B w \subset B w B \cup B s_\alpha w B .$$

Beweis ([Steinberg<sub>1</sub>] Lemma 25): Wir betrachten zunächst den Fall  $w^{-1}(\alpha) > 0$ .

Dann gilt unter Benutzung von  $s_\alpha U_\alpha s_\alpha \subset U$  und  $w^{-1}U_\alpha w = U_{w^{-1}(\alpha)}$  :

$$\begin{aligned} s_\alpha B w &= T s_\alpha (U_\alpha) s_\alpha^{-1} s_\alpha (U_\alpha) w \\ &\subset B s_\alpha w w^{-1} (U_\alpha) w \\ &\subset B s_\alpha w B \end{aligned}$$

Ist dagegen  $w^{-1}(\alpha) < 0$ , also  $(s_\alpha w)^{-1}(\alpha) > 0$ , so folgt mit der Bruhatzerlegung  $B \cup B s_\alpha B$  der Gruppe  $P_\alpha$  und der Anwendung des ersten Falles:

$$\begin{aligned} s_\alpha B w &= s_\alpha B s_\alpha s_\alpha w \\ &\subset (B \cup B s_\alpha B) s_\alpha w \\ &\subset B s_\alpha w \cup B \cdot (s_\alpha B s_\alpha w) \\ &\subset B s_\alpha w \cup B (B s_\alpha s_\alpha w B) \\ &\subset B s_\alpha w B \cup B w B \end{aligned}$$

Lemma 4: Für alle  $\alpha \in \Delta$  gilt  $s_\alpha B s_\alpha \neq B$ .

Beweis: Dies folgt mit  $s_\alpha U_\alpha s_\alpha = U_{-\alpha} \subset U^-$  und

$$U^- \cap B = \{1\} .$$

Das folgende Lemma liefert uns die verfeinerte Bruhatzerlegung in  $G$ .

Lemma 5: Jedes Element  $g \in G$  hat eine eindeutige Darstellung

$$g = u n u'$$

mit  $u' \in U$ ,  $n \in N$ ,  $u \in U_w$ ,  $w = \pi(n)$ .

Beweis (vgl. [Steinberg<sub>1</sub>] Theorem 4'): Aus den Eigenschaften des Tits-Systems  $(G, B, N, \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\})$  folgt die disjunkte Zerlegung (vgl. [LIE] IV, § 2)

$$G = \bigcup_{w \in W} B w B .$$

Wegen  $U = U_w \cdot U_{(w)}$  und  $w^{-1}U_{(w)}w \subset U$  erhalten wir

$$B w B = U_w w B .$$

Seien nun  $unu'$  und  $vmv'$  zwei Darstellungen für  $g \in G$  mit  $u, v \in U_w$ ,  $u', v' \in U$ ,  $n, m \in \pi^{-1}(w)$ . Dann erhalten wir

$$n^{-1}v^{-1}un = n^{-1}mv'u'^{-1} \in T \times U = B .$$

Andererseits gilt

$$n^{-1}v^{-1}un \in n^{-1}U_w n \subset U^- .$$

Wegen  $U^- \cap B = \{1\}$  folgt daher

$$n^{-1}v^{-1}un = n^{-1}mv'u'^{-1} = 1$$

also  $u = v$ ,  $n = m$  und  $u' = v'$ .

Damit ist ein alternativer Beweis von 5.8, Theorem, erbracht.

### 5.13 Verallgemeinerte Flaggenmannigfaltigkeiten

Dieser Abschnitt erörtert einige Eigenschaften der homogenen Räume  $G/P$  für eine parabolische Untergruppe  $P$ . Für eingehendere Details vergleiche man [Peterson-Kac] und [Tits<sub>5</sub>], oder [Gutkin-Slodowy]. Wesentliches Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen ist die Darstellungstheorie von  $G$  (vgl. 5.10, 5.11). Da der maximale Torus  $T$  in jeder Standard-parabolischen Untergruppe enthalten ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einer freien, einfach zusammenhängenden Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ausgehen. Zu jeder Wurzel  $\alpha \in \Delta$  gibt es also ein fundamentales dominantes Gewicht  $\omega_\alpha \in H^*$

$$\omega_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \Delta \quad .$$

Sei  $\omega \in H^*$  ein dominantes Gewicht,  $V^\omega$  der zugehörige Höchstgewichtsmodul und  $\mathbb{P}^\omega = \mathbb{P}(V^\omega)$  dessen projektiver Raum. Dann operiert  $G$  in natürlicher Weise auf  $\mathbb{P}^\omega$ , und wir bezeichnen mit  $O^\omega$  den  $G$ -Orbit der Höchstgewichtsgeraden  $[V_\omega^\omega] \in \mathbb{P}^\omega$ .

Lemma: Sei  $\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \omega(h_\alpha) = 0\}$ . Dann induziert die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{P}^\omega \quad , \quad g \longmapsto g \cdot [V_\omega^\omega]$$

eine Bijektion  $G/P_{\Delta'} \xrightarrow{\sim} O^\omega$ .

Beweis: Die Gruppen  $N_{\Delta'}$  und  $B$  fixieren  $[V_\omega^\omega]$ , also auch  $P_{\Delta'}$ . Andererseits wird  $[V_\omega^\omega]$  von keiner Gruppe  $N_{\Delta''}$ ,  $\Delta'' \supset \Delta'$ ,  $\Delta'' \neq \Delta'$ , fixiert und somit von keiner Gruppe  $P \subset G$  mit  $P \supset P_{\Delta'}$ ,  $P \neq P_{\Delta'}$ , (vgl. 5.1).

Zu jeder Teilmenge  $\Delta'$  von  $\Delta$  können wir ein dominantes Gewicht  $\omega \in H^*$

mit  $\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \omega(h_\alpha) = 0\}$  finden (z. B.  $\omega = \sum_{\alpha \in \Delta'} \omega_\alpha$ ). Der wichtigste Fall für die Anwendungen ist der eines regulären Gewichtes, für das  $\Delta' = \emptyset$  also  $O^\omega \cong G/B$  ist.

Die Bruhatzerlegung von  $G$  liefert eine Zerlegung von  $G/P_{\Delta'}$  in affine Räume endlicher Dimension. Sei dazu  $W^{\Delta'} \subset W$  ein reduziertes Repräsentantensystem von  $W/W_{\Delta'}$  (im Sinne von [LIE] IV § 1, ex. 3). Dann gilt

$$G = \bigcup_{w \in W^{\Delta'}} U_w W_{\Delta'} \quad \text{und} \quad G/P_{\Delta'} = \bigcup_{w \in W^{\Delta'}} (U_w W_{\Delta'})/P_{\Delta'}$$

mit  $(U_w W_{\Delta'})/P_{\Delta'} \cong U_w \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$ .

Im folgenden bezeichne " $\leq$ " die Bruhatordnung auf  $W$ , i. e.

$w' \leq w \iff$  Es gibt eine reduzierte Zerlegung  $w = s_1 \cdots s_\ell$ ,  
 $s_i \in \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ , so daß  $w' = s_{i(1)} \cdots s_{i(k)}$   
für eine Teilfolge  $i(1), \dots, i(k)$  von  $1, \dots, \ell$ .

Für  $w \in W^{\Delta'}$  sei  $\text{Ab}(\Delta', w) = \{w' \in W^{\Delta'} \mid w' \leq w\}$  und

$$S(\Delta', w) = \bigcup_{w' \in \text{Ab}(\Delta', w)} (U_{w'} W_{\Delta'})/P_{\Delta'}$$

Es sei  $\phi : G/P_{\Delta'} \rightarrow \mathbb{P}^\omega$  die im Lemma beschriebene Abbildung von  $G/P_{\Delta'}$  auf  $O^\omega \subset \mathbb{P}^\omega$ . Dann gilt:

**Satz ([Tits<sub>5</sub>] 8.1):** Das Bild  $\phi(S(\Delta', w))$  in  $\mathbb{P}^\omega$  ist eine abgeschlossene algebraische Untervarietät eines endlichdimensionalen projektiven Unterraumes von  $\mathbb{P}^\omega$ .

Somit erweist sich  $O^\omega$  als induktiver Limes von projektiven algebraischen Varietäten.

Bemerkungen: Der obige Satz folgt aus einer "a priori"-Konstruktion der Bott-Samelson-Demazure-Hansen-Auflösung von  $\phi(S(\Delta', w))$ . Ist  $(H, V, \Delta)$  symmetrisierbar, so ist die algebraisch-geometrische Struktur von  $\phi(S(\Delta', w))$  und von  $O^\omega$  unabhängig von der Wahl von  $\omega$  (mit  $\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \omega(h_\alpha) = 0\}$ ) (vgl. [Tits<sub>5</sub>]). Für diesen Fall folgt der Satz auch aus den Resultaten in [Peterson-Kac].

Korollar 1: Sei  $\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}^\omega$  ein endlichdimensionaler projektiver Unterraum. Dann ist  $O^\omega \cap \mathbb{P}'$  eine abgeschlossene Untervarietät von  $\mathbb{P}'$ .

Sei  $g \in G$  ein Element, das auf  $V^\omega$  lokal-endlich operiere, d. h. so daß jedes  $v \in V^\omega$  in einem endlichdimensionalen,  $g$ -stabilen Teilraum  $V \subset V^\omega$  liegt. Dann induziert  $g$  einen algebraischen Automorphismus auf der endlichdimensionalen Untervarietät  $\mathbb{P}(V) \cap O^\omega \subset \mathbb{P}(V^\omega)$ . Insbesondere ist die Fixpunktmenge von  $g$  auf dieser Untervarietät wieder eine abgeschlossene Untervarietät. Da sich  $V^\omega$  als induktiver Limes endlichdimensionaler,  $g$ -stabiler Unterräume schreiben läßt, erhalten wir:

Korollar 2: Sei  $g \in G$  ein Element, das lokal endlich auf  $V^\omega$  operiere. Sei  $O^{\omega, g}$  die Menge der Fixpunkte von  $g$  auf  $O^\omega$  und  $\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}^\omega$  ein endlichdimensionaler projektiver Unterraum. Dann ist  $\mathbb{P}' \cap O^{\omega, g}$  eine abgeschlossene Untervarietät von  $\mathbb{P}'$ .

KAPITEL 6: GEOMETRIE DER WEYLGRUPPE UND DES TITS-GEBÄUDES6.1 Der Tits-Kegel

Sei  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $W$  die zugehörige Weylgruppe mit den fundamentalen Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Für das Studium der Geometrie der  $W$ -Aktion auf dem reellen Vektorraum  $V = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  haben wir  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  als frei vorauszusetzen (andernfalls könnte die Weylgruppe  $W$  oder ihre Aktion auf  $V$  (bzw. auf  $V^\vee \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ) degenerieren). Wir erweitern die Notation für die Dualität  $\vee : \Delta \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha^\vee = h_\alpha$ , auch auf deren Umkehrung  $\vee : \mathcal{V} \rightarrow \Delta$ ,  $h_\alpha \rightarrow h_\alpha^\vee = \alpha$  (vgl. 3.1). Beweise für die Aussagen dieses Abschnitts finden sich in den Untersuchungen [Looijenga<sub>5</sub>], [Vinberg], sowie in [LIE] v.

Wir nennen

$$C = \{ \omega \in V \mid \omega(h) > 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{V} \}$$

bzw.

$$\bar{C} = \{ \omega \in V \mid \omega(h) \geq 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{V} \}$$

die offene (bzw. abgeschlossene) Fundamentalkammer von  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  in  $V$ . Die abgeschlossene Kammer  $\bar{C}$  zerlegt sich als disjunkte Vereinigung

$$\bar{C} = \bigcup_{\theta \subset \mathcal{V}} F_\theta$$

der (offenen) Seiten  $F_\theta = \{ \omega \in V \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta, \omega(h) > 0 \text{ für alle } h \in \mathcal{V} \setminus \theta \}$ . Dabei durchläuft  $\theta$  alle Teilmengen von  $\mathcal{V}$ . Insbesondere ist  $F_\emptyset = C$ , und  $F_\mathcal{V}$  ist ein linearer Unterraum von  $V$  der Kodimension  $|\Delta|$ .



Für die abgeschlossenen Seiten  $\bar{F}_\theta = \{\omega \in V \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta, \omega(h) \geq 0 \text{ für alle } h \in V \setminus \theta\}$  erhalten wir

$$\bar{F}_\theta = \bigcup_{\theta < \theta' \subset \nabla} F_{\theta'} .$$

Wir nennen  $\theta$  den Typ von  $F_\theta$  und  $\bar{F}_\theta$ .

Der Tits-Kegel  $A$  ist die Vereinigung aller  $W$ -Translatierten von  $\bar{C}$ :

$$A = W \cdot \bar{C} .$$

Nach Konstruktion stabilisiert  $W$  die Teilmenge  $A \subset V$ . Die folgenden Eigenschaften sind nun erfüllt (vgl. loc. cit.):

- 1)  $A$  ist ein konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren  $\overset{\circ}{A}$ .
- 2) Die Kammer  $\bar{C}$  ist ein Fundamentalbereich für die  $W$ -Aktion auf  $A$  mit der folgenden Eigenschaft:  
Ist  $w \in W$  und  $F_\theta$  eine offene Seite von  $\bar{C}$  mit  $w(F_\theta) \cap \bar{C} \neq \emptyset$ , so liegt  $w$  in der Untergruppe  $W_\theta = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \theta^\vee \rangle$ , insbesondere fixiert  $w$  jeden Punkt von  $\bar{F}_\theta$ .

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die Facettierung von  $\bar{C}$  auf  $A$  in konsistenter Weise ausdehnen: Eine Teilmenge von  $A$  heißt offene (bzw. abgeschlossene) Seite vom Typ  $\theta$ ,  $\theta \subset \nabla$ , falls sie von der Form  $wF_\theta$  (bzw.  $\bar{w}\bar{F}_\theta$ ) für ein  $w \in W$  ist. Die offenen Seiten vom Typ  $\emptyset$  heißen auch die Kammern von  $A$ . Der Stabilisator in  $W$  einer Seite  $wF_\theta$ , oder auch eines Punktes  $\omega \in wF_\theta$ , ist genau die Gruppe  $wW_\theta w^{-1}$ . Gemäß dem Typ der Wurzelbasis  $(H, \theta, \theta^\vee)$  nennen wir  $\theta$ , als auch entsprechende Seiten, von endlichem oder unendlichem Typ. So ist  $\theta$  von endlichem (bzw. unendlichem) Typ genau dann, wenn  $W_\theta$  endlich (bzw. unendlich) ist. Wir nennen  $\theta$  zu-

sammenhängend, wenn  $(H, \theta, \theta^\vee)$  zusammenhängend ist (vgl. 3.1).

Weitere Eigenschaften von  $A$  sind die folgenden:

- 3) Es gilt  $A = \overset{\circ}{A}$  genau dann, wenn  $A = V$  gilt, und dies genau dann, wenn  $\Delta$  von endlichem Typ ist.
- 4) Das Innere  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  ist die Vereinigung der offenen Seiten von endlichem Typ.

Als Folgerung aus 4) ergibt sich:

- 5) Die Gruppe  $W$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $\overset{\circ}{A}$ .

Bemerkungen: 1) Für eine große Klasse von Wurzelbasen läßt sich zeigen, daß  $\overset{\circ}{A} \cup -\overset{\circ}{A}$  das größte Gebiet in  $V$  ist, auf dem  $W$  eigentlich diskontinuierlich operiert (vgl. [Looijenga<sub>6</sub>] II Theorem 1.5, Remark 1.6).

2) Alle bisher eingeführten Begriffe lassen sich mittels der Dualität  $\Delta \leftrightarrow V$ ,  $\alpha \leftrightarrow h_\alpha$ , auch für den Dualraum  $V^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  definieren. Die entsprechenden Objekte seien mit  $C^\vee$ ,  $\overline{C}^\vee$ ,  $A^\vee$ ,  $F_\Omega^\vee$  ( $\Omega \subset \Delta$ ), u.s.w. bezeichnet. Die Aussagen 1) - 5) behalten dann, mutatis mutandis, ihre Gültigkeit.

Mittels der imaginären Wurzeln (vgl. 3.9) der  $(H, V, \Delta)$  zugeordneten Kac-Moody-Liealgebra läßt sich der offene duale Tits-Kegel  $\overset{\circ}{A}^\vee$  charakterisieren.

Proposition: Es gilt  $\overset{\circ}{A}^\vee = \{h \in V^\vee \mid \gamma(h) > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Sigma^+ \cap \Sigma^I\}$ .

Beweis: Sei  $\gamma \in \Sigma^+ \cap \Sigma^I$ . Dann gilt  $w(\gamma)(h) > 0$  für alle  $w \in W$  und  $h \in \overline{C}^\vee \cap \overset{\circ}{A}^\vee$ , also  $\gamma(h') > 0$  für alle  $h'$  in  $W \cdot (\overline{C}^\vee \cap \overset{\circ}{A}^\vee) = \overset{\circ}{A}^\vee$ . Zum

Beweis der anderen Inklusion genügt es zu zeigen, daß der zu  $\overset{\circ}{A}^V$  konvexduale Kegel  $A^\# = \{\omega \in V \mid \omega(h) > 0 \text{ für alle } h \in \overset{\circ}{A}^V\}$  in der konvexen Hülle  $J$  von  $(\Sigma^+ \cap \Sigma^I) \cup \{0\}$  enthalten ist. Sei dazu  $V_+ = R_+ \cdot \Delta$  der von den einfachen Wurzeln erzeugte Kegel in  $V$ . Nach Definition von  $A^\#$  ist dann  $A^\#$  gerade die Menge der in  $R \cdot \Delta$  inneren Punkte von  $\bigcap_{w \in W} w \cdot V_+$ . Sei  $\phi : A^\# \rightarrow R_+$  die auf  $A^\# \subset V_+$  erweiterte Höhenfunktion,  $\phi(\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha$ . Da sich  $\phi(\omega)$  und  $\phi(w(\omega))$ ,  $w \in W$ , um eine ganze Zahl unterscheiden, nimmt  $\phi$  ein Minimum auf jedem  $W$ -Orbit in  $A^\#$  an. Das Minimum liegt dann notwendigerweise in  $-\bar{C}$ , der negativen Fundamentalkammer. Nach [Kac<sub>5</sub>] Lemma 1.6, Prop. 1.4, liegt jedoch  $A^\# \cap (-\bar{C})$  in  $J$ . Aus der  $W$ -Stabilität von  $J$  folgt dann  $A^\# \subset J$ , w.z.z.w.

Bemerkung: Die Argumentation des obigen Beweises ist der Arbeit [Kac<sub>5</sub>] (Lemma 1.5) entnommen, wo sie in einem leicht verschiedenen Kontext benutzt wird.

## 6.2 Randkomponenten des Tits-Kegels

Wir betrachten die gleiche Situation wie in 6.1. Nach Eigenschaft 4) besteht der Rand  $\partial A = A \setminus \overset{\circ}{A}$  des Tits-Kegels aus allen offenen Seiten von unendlichem Typ. Wir wollen die Geometrie dieses Randes hier genauer beschreiben.

Mit [Looijenga<sub>5</sub>] nennen wir eine Teilmenge  $\theta \subset V$  speziell, wenn entweder  $\theta = \emptyset$  oder alle Zusammenhangskomponenten von  $\theta$  von unendlichem Typ sind.

Ist  $\theta \subset V$  speziell, so existiert nach der Klassifikation der Cartanmatrizen (vgl. 3.5) ein Element  $c = \sum_{h \in \theta} n_h \cdot h \in N \cdot \theta \subset H$ ,  $n_h > 0$  für alle  $h \in \theta$ , mit der Eigenschaft

$$\alpha(c) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \theta^\vee ,$$

also mit

$$\alpha(c) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \Delta .$$

Umgekehrt impliziert die Existenz eines solchen Elementes  $c$ , daß  $\theta$  speziell ist.

Wir nennen  $c$  einen speziellen Ko-Charakter (oder eine spezielle Einparameteruntergruppe) vom Typ  $\theta$ .

Für eine Teilmenge  $\theta \subset \mathcal{V}$  sei das Orthokomplement  $\theta^\perp$  von  $\theta$  in  $\mathcal{V}$  die Menge

$$\theta^\perp = \{h \in \mathcal{V} \mid \alpha(h) = h^\vee(h_\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \theta^\vee\} .$$

Es sei entsprechend

$$W_{\theta^\perp} = W_{(\theta^\perp)^\vee} = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \text{ und } \alpha(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta \rangle .$$

Lemma ([Looijenga<sub>5</sub>] 2.2): Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell und  $c$  ein spezieller Ko-Charakter vom Typ  $\theta$ . Sei  $\omega \in A$  und  $\omega(c) \leq 0$ . Dann gilt  $\omega(c) = 0$  und  $\omega \in W_{\theta^\perp} \cdot \bar{F}_\theta$ .

Korollar 1: Seien  $\theta$  und  $c$  wie im Lemma,

$$A(c) = \{\omega \in A \mid \omega(c) = 0\} \quad \text{und}$$

$$A(\theta) = \{\omega \in A \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta\} .$$

Dann gilt  $A(c) = A(\theta) = W_{\theta^\perp} \cdot \bar{F}_\theta$ , insbesondere sind alle maximalen Seiten in  $A(\theta)$  vom gleichem Typ  $\theta$ .

Bemerkung: Die Aussagen dieses sowie der folgenden Korollare hängen wesentlich ab von der Annahme, daß  $\theta$  speziell ist. Ist  $\theta$  nicht speziell, so werden diese Aussagen im allgemeinen falsch.

Sei

$$H^*(\theta) = \{ \omega \in H^* \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta \} \quad ,$$

$$H(\theta) = (H^*(\theta))^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^*(\theta), \mathbb{Z}) \quad .$$

Dann ist  $H(\theta)$  natürlich isomorph zum Quotienten von  $H$  nach dem Annihilator von  $H^*(\theta)$  :

$$H \cap (\mathbb{Q} \cdot \theta) = \{ h \in H \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } \omega \in H^*(\theta) \} \quad .$$

Unter der Projektion  $H \rightarrow H(\theta)$  wird  $\theta^\perp$  bijektiv auf eine freie Menge abgebildet, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit  $\theta^\perp$  bezeichnen. Das duale Gitter  $H^*(\theta)$  enthält die zu  $\theta^\perp$  dualen einfachen Wurzeln  $\theta^{\perp, \vee}$  .

Also ist

$$(H(\theta), \theta^\perp, \theta^{\perp, \vee})$$

eine freie Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis. Die Weylgruppe dieser Basis identifiziert sich mit  $W_{\theta^\perp}$  , und die natürlichen Aktionen von  $W_{\theta^\perp}$  auf  $H(\theta)$  und  $H^*(\theta)$  stimmen mit den Aktionen dieser Weylgruppe überein. Als Konsequenz von Korollar 1 erhalten wir nun:

Korollar 2: Sei  $\theta$  speziell. Dann ist  $A(\theta)$  im Tits-Kegel von  $(H(\theta), \theta^\perp, \theta^{\perp, \vee})$  in  $H^*(\theta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  enthalten. Ist  $\theta^\circ \subset \theta^\perp$  von endlichem Typ, so liegt  $F_{\theta \cup \theta^\circ}$  im Inneren von  $A(\theta)$  .

Wir nennen eine Teilmenge  $A' \subset A$  eine Randkomponente von  $A$ , wenn es ein Funktional  $\phi \in V^*$  gibt mit:

$$\phi(\omega) \geq 0 \text{ für alle } \omega \in A \text{ und } A' = \{\omega \in A \mid \phi(\omega) = 0\} .$$

Ist  $\phi \neq 0$ , und somit  $A' \subset \partial A$ , so heißt  $A'$  eine echte Randkomponente.

Offensichtlich ist jede Randkomponente von  $A$  wieder ein konvexer Kegel.

Korollar 3: Eine Teilmenge  $A' \subset A$  ist genau dann eine Randkomponente von  $A$ , wenn es eine spezielle Teilmenge  $\theta \subset V$  und ein Element  $w \in W$  gibt mit  $A' = w \cdot A(\theta)$ .

Beweis: Nach Korollar 1 ist jede Teilmenge der Form  $w \cdot A(\theta)$  eine Randkomponente. Sei nun  $A'$  eine echte Randkomponente und  $F \subset A'$  eine offene Seite maximaler Dimension. Nach Konjugation mit einem Element aus  $W$  können wir annehmen, daß  $F$  die Form  $F_{\theta'}$  für eine Teilmenge  $\theta' \subset V$  von unendlichem Typ hat. Der kleinste  $A'$  enthaltende Unterraum  $V' \subset V$  hat dann die Form  $V' = \{\omega \in V \mid \omega(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta'\}$ . Nach Korollar 1 genügt es jetzt zu zeigen, daß  $\theta'$  speziell ist. Zerlegen wir dazu  $\theta' = \theta \cup \theta^{\circ}$  in die Vereinigung seiner maximalen speziellen Untermenge  $\theta$  ( $\theta \neq \emptyset$  da  $\theta'$  von unendlichem Typ ist) und der verbleibenden Zusammenhangskomponenten  $\theta^{\circ}$  von endlichem Typ. Nehmen wir an, daß  $\theta^{\circ} \neq \emptyset$  ist. Dann ist nach Korollar 2 jeder Punkt von  $F_{\theta'}$  ein innerer Punkt von  $A(\theta)$ . Wegen der Konvexität von  $A$  und wegen  $A' \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$  muß nun  $A'$  auch  $A(\theta)$  enthalten im Widerspruch zur Maximalität von  $F_{\theta'}$ . Also ist  $\theta' = \theta$  speziell, w.z.z.w..

Ist  $A' \subset A$  eine Randkomponente der Gestalt  $w \cdot A(\theta)$ , so nennen wir  $A'$  eine Randkomponente vom Typ  $\theta$ .

Als letzte Anwendung des Lemmas sowie von 6.1, 2) erhalten wir die Struktur der Normalisatoren

$$N_W(A(\theta)) = \{w \in W \mid w(A(\theta)) = A(\theta)\}$$

und der Zentralisatoren

$$Z_W(A(\theta)) = \{w \in N_W(A(\theta)) \mid w|_{A(\theta)} = \text{id}_{A(\theta)}\}$$

der Randkomponenten von  $A$ .

Korollar 4 ([Looijenga<sub>5</sub>] 2.3): Sei  $\theta \in \mathcal{V}$  speziell. Dann gilt

$$N_W(A(\theta)) = W_{\theta \cup \theta^\perp} = W_\theta \times W_{\theta^\perp} ,$$

$$Z_W(A(\theta)) = W_\theta .$$

### 6.3 Der Diskontinuitätsbereich im maximalen Torus

Sei nun  $T = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  der Torus zu  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  versehen mit der Aktion der Weylgruppe  $W$  (vgl. 5.6). In  $T$  betrachten wir die Teilmenge

$$\mathcal{T} = \{t \in T \mid |\gamma(t)| > 1 \text{ für alle } \gamma \in \Sigma^+ \cap \Sigma^I\} .$$

In Anbetracht von 6.1, Proposition erweist sich  $\mathcal{T}$  als das Bild des Tubengebietes

$$\mathcal{H} = \mathcal{V}^\vee + i \overset{\circ}{\Delta}^\vee \subset H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \underline{h}$$

unter der  $W$ -äquivarianten Exponentialabbildung

$$\text{id} \otimes_{\mathbb{Z}} \exp : \underline{h} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T ,$$

mit  $\exp(z) = e^{-2\pi iz}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Das semidirekte Produkt von  $W$  mit dem Kern  $H = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  der Exponentialabbildung  $h \rightarrow T$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathcal{H}$  (man benutze 6.1, 5) und beachte 6.1, Bemerkung 2). Also operiert  $W$  auch eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathcal{T}$ .

Wir nennen  $\mathcal{T}$  den (positiven) Diskontinuitätsbereich von  $W$  in  $T$ .

Bemerkungen: 1) Der Bereich  $\mathcal{T}$  in der Form des Urbildes  $\mathcal{H}$  in  $h$  wurde zuerst von [Looijenga<sub>5</sub>] eingeführt. Für hyperbolische Cartanmatrizen vom Rang 2 wurde er davon unabhängig in [Lepowsky-Moody] betrachtet.

2) Neben  $\mathcal{T}$  operiert  $W$  auch eigentlich diskontinuierlich auf dem "negativen" Bereich  $\mathcal{T}^{-1} = \{t \in T \mid t^{-1} \in \mathcal{T}\}$ , ansonsten vgl. 6.1, Bemerkung 1.

Nach [Cartan] erhält der Orbitraum  $\mathcal{T}/W$  eine natürliche Struktur eines analytischen Raumes. Ist die Wurzelbasis  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  einfach zusammenhängend, d. h. besitzt  $H/\mathbb{Z} \cdot \mathcal{V}$  keine Torsion, so werden alle Isotropiegruppen von  $W$  auf  $\mathcal{T}$  durch Spiegelungen erzeugt ([Looijenga<sub>5</sub>] 2.17). Nach Chevalley's Satz ([LIE] V, 5.3) ist dann  $\mathcal{T}/W$  sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit.

#### 6.4 Holomorphe Vervollständigung des Orbitraumes $\mathcal{T}/W$

Wir werden jetzt Looijenga's partielle Kompaktifizierung  $\widehat{\mathcal{T}/W}$  des Orbitraumes  $\mathcal{T}/W$  beschreiben ([Looijenga<sub>5</sub>]). Diese wird in der Untersuchung der Konjugationsklassen der  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  zugeordneten Gruppe  $G$  die Rolle des Raumes  $T/W$  der endlichdimensionalen Theorie übernehmen (Kapitel 7).

Ein Untertorus  $T' \subset T$  heiße speziell (vom Typ  $\theta$ ), wenn es eine Randkomponente  $A'$  des Tits-Kegels  $A \subset H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  (vom Typ  $\theta$ ) gibt, deren An-



nulator  $T'$  ist, d. h. so daß

$$T' = \{t \in T \mid \omega(t) = 1 \text{ für alle } \omega \in A' \cap H^*\} .$$

Um den Anschluß an [Looijenga<sub>5</sub>] herzustellen, beachte man, daß  $T' \subset T$  genau dann speziell ist, wenn die Lieunteralgebra  $\underline{h}' = \text{Lie}(T')$  von  $\underline{h} = \text{Lie}(T)$  die Form  $w \cdot (\mathbb{C} \cdot \theta)$  für eine spezielle Teilmenge  $\theta \subset \mathcal{V}$  und ein Element  $w \in W$  hat.

Für einen speziellen Untertorus  $T' \subset T$  bezeichne  $\mathcal{J}(T')$  das Bild von  $\mathcal{J}$  in  $T/T'$ . Wir setzen nun

$$\hat{T} = \bigcup_{\substack{T' \subset T \\ \text{speziell}}} T/T' \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{J}} = \bigcup_{\substack{T' \subset T \\ \text{speziell}}} \mathcal{J}(T') .$$

Dann operiert  $W$  in natürlicher Weise auf  $\hat{T}$  unter Respektierung der Teilmenge  $\hat{\mathcal{J}}$ . Zur Untersuchung der Aktion des Stabilisators  $N_W(\mathcal{J}(T')) = N_W(A')$  einer Randkomponente  $\mathcal{J}(T')$  auf  $\mathcal{J}(T')$  genügt es den Fall  $A' = A(\theta)$  für eine spezielle Teilmenge  $\theta \subset \mathcal{V}$  zu betrachten. Die Aktion von  $N_W(\mathcal{J}(T')) = W_\theta \times W_{\theta^\perp}$  auf  $T/T'$  faktorisiert dann über die Aktion der Weylgruppe  $W_{\theta^\perp}$  von  $(H(\theta), \theta^\perp, \theta^{\perp, \vee})$  auf dem zugehörigen Torus  $T(\theta) = H(\theta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong T/T'$ . Bezeichnen wir das Bild  $\mathcal{J}(T')$  von  $\mathcal{J}$  in  $T(\theta) = T/T'$  jetzt mit  $\mathcal{J}(\theta)$ , so liegt  $\mathcal{J}(\theta)$  im Diskontinuitätsbereich von  $W_{\theta^\perp}$  auf  $T(\theta)$ . Insbesondere existiert der Quotient  $\mathcal{J}(\theta)/W_{\theta^\perp}$  als analytischer Raum.

Die Menge  $\hat{\mathcal{J}}$  läßt sich nun mit einer  $W$ -invarianten Topologie versehen, bezüglich der der Orbitraum  $\hat{\mathcal{J}}/W$  lokal kompakt und Hausdorffsch wird (vgl. loc. cit. 2.19, 2.20). Dabei zerlegt sich  $\hat{\mathcal{J}}/W$  als disjunkte Vereinigung

endlich vieler analytischer Räume

$$\hat{\mathcal{T}}/W = \bigcup_{\theta \in \nabla} (\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)$$

speziell

mit

$$(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta) = \left( \bigcup_{T' \subset T} \mathcal{T}(T') \right) / W \cong \mathcal{T}(\theta)/W_{\theta^+}$$

vom Typ  $\theta$

und die Topologie auf  $(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)$  stimmt mit der natürlichen auf  $\mathcal{T}(\theta)/W_{\theta^+}$  überein.

Definiert man eine stetige Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad U \text{ offen in } \hat{\mathcal{T}}/W \quad ,$$

als analytisch, wenn jede ihrer Einschränkungen

$$f|_{U \cap (\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)}$$

analytisch ist, so wird  $\hat{\mathcal{T}}/W$  damit zu einem Steinschen analytischen Raum (loc. cit. § 3). Der Abschluß von  $(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)$  in  $\hat{\mathcal{T}}/W$  ist ein analytischer Unterraum der Kodimension  $|\theta|$  und gleich der disjunkten Vereinigung

$$\overline{(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)} = \bigcup_{\theta \subset \theta' \subset \nabla} (\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta') .$$

speziell

Ist zudem  $(H, \nabla, \Delta)$  einfach zusammenhängend, so sind alle Räume  $\overline{(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)}$ , insbesondere  $\hat{\mathcal{T}}/W = \overline{(\hat{\mathcal{T}}/W)(\emptyset)}$ , glatte Mannigfaltigkeiten (loc. cit. §§ 4,5).

Bemerkungen: 1) In der Arbeit [Slodowy<sub>4</sub>] 5.3 haben wir gezeigt, daß die Charaktersummen

$$\chi^\omega(t) = \sum_{\substack{\mu \in P(\omega) \\ \mu|_{T'} \equiv 1}} \mu(t) \cdot \dim V_\mu^\omega, \quad t \in \mathcal{T}(T'),$$

zu Höchstgewichtsmoduln  $V^\omega$  (vgl. 5.10 zur Notation) gegen analytische Funktionen auf einer Umgebung des kleinsten Stratum  $\mathcal{T}(V) \subset \hat{\mathcal{T}}/W$  konvergieren. Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar, so läßt sich der maximale Konvergenzbereich von  $\chi^\omega$  auf  $T$  (dieser ist i. a. ein echter Teil von  $\mathcal{T}$ ) exakt bestimmen (vgl. dazu [Kac-Peterson<sub>1</sub>] App. 2).

2) Analog zur bekannten Theorie der Torus-Einbettungen von lokal-endlichem Typ (vgl. [Kempf et alii]) kann man auch Torus-Einbettungen betrachten, die nicht unbedingt von lokal endlichem Typ sind. Dann läßt sich die Inklusion  $T \hookrightarrow \hat{T}$  realisieren als die durch den Tits-Kegel  $A \subset H^* \otimes \mathbb{R}$  definierte Torus-Einbettung

$$T = \text{Spec } \mathbb{C}[H^*] \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[A \cap H^*] = \hat{T}.$$

Es ist klar, daß die Bildung eines Orbitraumes für die  $W$ -Aktion auf  $\hat{T}$  höchstens für den Abschluß  $\hat{\mathcal{T}}$  von  $\mathcal{T}$  in  $\hat{T}$  sinnvoll ist. Sei nun  $c \in H$  ein spezieller Ko-Charakter vom Typ  $\nabla$ . Dann induziert die Einschränkung  $c : A \cap H^* \rightarrow \mathbb{N}$  eine Graduierung auf  $\mathbb{C}[A \cap H^*]$ , deren zugehörige Komplettierung  $\mathbb{C}[[A \cap H^*]]$  von  $c$  unabhängig ist. Enthält  $(H, \nabla, \Delta)$  keine Komponenten von affinem Typ, so ist der assoziierte graduierte Ring der Invarianten  $\mathbb{C}[[A \cap H^*]]^W$  isomorph zu  $\mathbb{C}[[\bar{C} \cap H^*]]$ . Der endlichen Erzeugbarkeit der Halbgruppe  $\bar{C} \cap H^*$  entspricht dann die lokale Endlichkeit von  $\hat{\mathcal{T}}/W$ . Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  einfach zusammenhängend, so folgt die Glattheit von  $\hat{\mathcal{T}}/W$  längs

des Stratums  $\mathcal{T}(V)$  aus der Tatsache, daß  $\bar{C} \cap H^*/F_{\mathbb{Q}} \cap H^*$  von den fundamentalen dominanten Gewichten erzeugt wird (für Details und die Sonderbehandlung des affinen Falls, vgl. [Looijenga<sub>5</sub>] §§ 4, 5).

### 6.5 Gebäude

Im folgenden erinnern wir kurz an einige Grundlagen aus der Theorie der Gebäude (vgl. [Tits<sub>2</sub>]).

Eine Menge  $\mathcal{X}$  mit einer Halbordnung  $\leq$  heißt ein Simplex, wenn es einen Ordnungsisomorphismus von  $\mathcal{X}$  auf die durch Inklusion geordnete Menge  $\mathcal{Q}(E)$  aller Teilmengen einer endlichen Menge  $E$  gibt.

Eine halbgeordnete Menge  $(\mathcal{X}, \leq)$  heißt ein Komplex, wenn gilt:

- i) Für jedes  $F \in \mathcal{X}$  ist die Menge  $\{F' \in \mathcal{X} \mid F' \leq F\}$  mit der induzierten Halbordnung ein Simplex;
- ii) Jedes Paar  $F, F' \in \mathcal{X}$  besitzt eine größte gemeinsame untere Schranke  $F \wedge F' \in \mathcal{X}$ .

Die Elemente  $F \in \mathcal{X}$  eines Komplexes heißen auch Seiten. Gilt  $F \leq F'$  für  $F, F' \in \mathcal{X}$ , so heißt  $F$  eine Seite von  $F'$ . Aus den Eigenschaften i) und ii) folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten minimalen Seite in  $\mathcal{X}$ . Diese wird mit  $0$  bezeichnet. Ein Eckpunkt von  $\mathcal{X}$  ist eine minimale Seite  $F$  mit der Eigenschaft  $F \neq 0$ . Der Rang einer Seite  $F'$  ist die Anzahl der Eckpunkte  $F \leq F'$ . Der Rang von  $0$  ist somit Null, der eines Eckpunktes Eins.

Eine Teilmenge  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  heißt ein Unterkomplex (mit der induzierten Halb-

ordnung), wenn für alle  $F' \in \mathcal{X}'$  und  $F \in \mathcal{X}$  mit  $F \leq F'$  auch  $F \in \mathcal{X}'$  folgt. Ist  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  eine beliebige Teilmenge, so nennen wir

$\overline{\mathcal{X}'} = \{F \in \mathcal{X} \mid \text{Es gibt ein } F' \in \mathcal{X}' \text{ mit } F \leq F'\}$  den simplizialen Abschluß von  $\mathcal{X}'$  in  $\mathcal{X}$ . Offensichtlich ist  $\overline{\mathcal{X}'}$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{X}$ .

Sei  $F \in \mathcal{X}$ . Der Stern  $\text{St}(F)$  von  $F$  in  $\mathcal{X}$  ist die Teilmenge  $\{F' \in \mathcal{X} \mid F \leq F'\}$ . Mit der induzierten Ordnung ist  $\text{St}(F)$  wieder ein abstrakter Komplex; dabei ist  $F$  das minimale Element. Im Gegensatz zum simplizialen Abschluß von  $\text{St}(F)$  ist  $\text{St}(F)$  selbst kein Unterkomplex von  $\mathcal{X}$  (es sei denn  $F = 0$ , also  $\text{St}(F) = \mathcal{X}$ ).

Der Rang einer Seite  $F'$  des (abstrakten) Komplexes  $\text{St}(F)$  heißt auch die Kodimension von  $F$  in  $F'$  und wird mit  $\text{codim}_{\mathbb{P}}(F)$  bezeichnet.

Ein Komplex  $(\mathcal{X}, \leq)$  heißt ein Kammerkomplex, wenn jede Seite  $F \in \mathcal{X}$  in einer maximalen Seite  $C \in \mathcal{X}$  enthalten ist, und wenn es zu jedem Paar  $C, C'$  maximaler Seiten von  $\mathcal{X}$  eine Folge

$$C = C_0, C_1, \dots, C_n = C'$$

von Elementen von  $\mathcal{X}$  gibt mit der Eigenschaft

$$\text{codim}_{C_{i-1}}(C_i \cap C_{i-1}) = \text{codim}_{C_i}(C_i \cap C_{i-1}) \leq 1$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Die maximalen Seiten eines Kammerkomplexes heißen Kammern. Ein Element  $F$  eines Kammerkomplexes hat die gleiche Kodimension in allen Kammern, die in  $\text{St}(F)$  liegen. Diese Kodimension heißt daher auch die Kodimension von  $F$  in  $\mathcal{X}$ , und die Kodimension von  $0$  in  $\mathcal{X}$  heißt der Rang von  $\mathcal{X}$ . Alle Seiten einer Folge  $C_0, C_1, \dots, C_n$  wie oben erweisen sich als Kammern. Eine

solche Folge heißt auch Galerie von  $C$  nach  $C'$  der Länge  $n$ .

Ein Kammerkomplex heißt dick (bzw. dünn), wenn jede Seite der Kodimension 1 in mindestens drei (bzw. in genau zwei) Kammern enthalten ist.

Ein Isomorphismus von Kammerkomplexen ist ein Isomorphismus der entsprechenden halbgeordneten Mengen.

Ein Gebäude besteht aus einem Komplex  $(\mathcal{P}, \leq)$  und einer Familie  $\mathcal{A}$  von Unterkomplexen von  $\mathcal{P}$  mit den vier folgenden Eigenschaften.

- i)  $\mathcal{P}$  ist ein dicker Kammerkomplex;
- ii) Jedes Element von  $\mathcal{A}$  ist ein dünner Kammerkomplex;
- iii) Je zwei Seiten von  $\mathcal{P}$  liegen in einem Element  $\lambda \in \mathcal{A}$ ;
- iv) Sind  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{A}$  und  $F, F'$  Seiten von  $\mathcal{P}$ , die sowohl in  $\lambda$  als auch in  $\lambda'$  liegen, so gibt es einen Isomorphismus von Kammerkomplexen  $\lambda \cong \lambda'$ , der  $F$  und  $F'$  invariant läßt.

Die Unterkomplexe  $\lambda \in \mathcal{A}$  heißen auch Appartements von  $\mathcal{P}$ . Alle Appartements erweisen sich als zueinander isomorph.

### 6.6 Das Gebäude eines Tits-Systems

Sei nun  $(G, B, N, S)$  ein Tits-System (vgl. 5.1) und  $\mathcal{P}$  die Menge aller parabolischen Untergruppen von  $G$ , geordnet durch die Umkehrung der Inklusion

$$P \leq P' : \iff P \supset P' .$$

Dann ist  $\mathcal{P}$  ein Komplex, auf dem die Gruppe  $G$  mittels Konjugation als Gruppe von Automorphismen operiert. Da der Normalisator  $N_G(P)$  einer para-

bolischen Untergruppe  $P$  gleich  $P$  ist, ist der Stabilisator einer Seite  $F \in \mathcal{P}$  die durch  $F$  repräsentierte Gruppe  $P$ . Fixiert  $g \in G$  eine Seite  $F$ , so auch alle Seiten  $F' \leq F$  von  $F$ . Da jede parabolische Untergruppe  $P \subset G$  in genau eine Standard-parabolische Untergruppe  $P_S, \supset B, S' \subset S$ , konjugiert ist, können wir jeder Seite  $F = P$  von  $\mathcal{P}$  eindeutig einen Typ,  $\text{Typ}(F) = S' \subset S$ , zuordnen, der nach Definition von der  $G$ -Aktion respektiert wird. Die Cardinalität  $|S'|$  ist dann gleich der Kodimension von  $F$  in  $\mathcal{P}$  oder i. a. W. gleich dem Rang des Sterns  $\text{St}(F)$  von  $F$ .

Für jede Teilmenge  $S' \subset S$  sei

$$\mathcal{P}(S') = \{F \in \mathcal{P} \mid \text{Typ}(F) = S'\} .$$

Wir erhalten dann eine disjunkte Zerlegung

$$\mathcal{P} = \bigcup_{S' \subset S} \mathcal{P}(S') .$$

Jede Inklusion  $S' \subset S''$  von Teilmengen von  $S$  induziert eine "Seitenabbildung"

$$\sigma_{S', S''} : \mathcal{P}(S') \rightarrow \mathcal{P}(S''),$$

die jedem Element  $F' \in \mathcal{P}(S')$  die eindeutig bestimmte Seite  $F'' \leq F'$  vom Typ  $S''$  zuordnet. Identifizieren wir  $\mathcal{P}(S')$  mit dem homogenen Raum  $G/P_{S'}$ , entsprechend  $\mathcal{P}(S'')$  mit  $G/P_{S''}$ , so geht  $\sigma_{S', S''}$  in die natürliche Abbildung  $G/P_{S'} \rightarrow G/P_{S''}$  über.

Wir werden nun eine Klasse von Unterkomplexen von  $\mathcal{P}$  als Appartements auszeichnen.

Sei dazu  $\mathcal{A}_0 = \{wPw^{-1} \mid w \in W, P \in \mathcal{P}, P \supset B\}$ . (Wegen  $N \cap B \subset B \subset P$  ist die

Schreibweise  $wPw^{-1}$ ,  $w \in W$ , eindeutig!). Dann ist  $\mathcal{A}_0$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{P}$ . Sei

$$\mathcal{A} = \{g\mathcal{A}_0g^{-1} \mid g \in G\}$$

die Menge aller zu  $\mathcal{A}_0$  konjugierten Unterkomplexe. Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$  ein Gebäude, nämlich das dem Tits-System  $(G, B, N, S)$  zugeordnete Gebäude ([Tits<sub>2</sub>] Th. 3.2.6). Die Kammern von  $\mathcal{P}$  sind die Elemente von  $\mathcal{P}(\emptyset)$ , d. h. die Boreluntergruppen von  $G$ , und  $G$  selbst ist die minimale Seite 0 von  $\mathcal{P}$ . Jedes Appartement  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$  ist ein Coxeterkomplex (i. S. von [Tits<sub>2</sub>] 2) mit Weylgruppe  $W$ , insbesondere stehen die Kammern eines Appartements in Bijektion zu den Elementen von  $W$ .

In 5.8 haben wir jeder Cartanschen  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  ein Tits-System  $(G, B, N, S)$  zugeordnet. Mit dem zugehörigen Gebäude  $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$  werden wir uns in den nächsten Abschnitten beschäftigen. Hier merken wir nur an, daß sich die Mengen  $\mathcal{P}(S')$ ,  $S' \subset S$ , in diesem Fall als induktive Limites vollständiger algebraischer Varietäten realisieren lassen (vgl. 5.13).

## 6.7 Konvexe Hüllen

Alle wesentlichen Aussagen dieses Abschnitts werden für beliebige Gebäude gültig sein (man vergleiche jeweils [Tits<sub>2</sub>]). Zur Vermeidung überflüssiger Konstruktionen und Notationen werden wir uns auf den für unsere Anwendungen einzig wichtigen Fall eines Gebäudes  $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$  beschränken, das einem Tits-System  $(G, B, N, S)$  zu einer Cartanschen Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  zugeordnet ist.

Insofern wir Teilmengen von  $S$  zur Indizierung benutzen, identifizieren wir  $S$  auf offensichtliche Weise mit  $\Delta$  oder  $\nabla$  (ist  $S' \subset S$ ,  $\Delta' \subset \Delta$ ,  $\theta \subset \nabla$ ,



und  $S' = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta'\}$ ,  $\theta = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta'\}$ , so sei z. B.  $P_{S'} = P_{\Delta'} = P_\theta$ , u. s. w.). Zur Vereinfachung nehmen wir zusätzlich  $(H, V, \Delta)$  frei an (andernfalls sind die den Tits-Kegel betreffenden Aussagen bezüglich einer zugeordneten freien Wurzelbasis zu interpretieren).

Sei  $A \subset V = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  der Tits-Kegel zu  $(H, V, \Delta)$  und

$$\mathfrak{F}(A) = \{w \cdot F_\theta \mid w \in W, \theta \in \Delta\}$$

die darauf definierte Facettierung (vgl. 6.1). Dann ist  $\mathfrak{F}(A)$  ein Komplex bezüglich der Inklusionsrelation der Abschlüsse der Seiten:

$$wF_\theta \subseteq w'F_{\theta'} \iff \overline{wF_\theta} \subset \overline{w'F_{\theta'}}.$$

Die Weylgruppe  $W$  operiert auf  $\mathfrak{F}(A)$  als Gruppe von Automorphismen, ebenso auf dem Appartement  $\mathcal{A}_O = \{wPw^{-1} \mid w \in W, P \supset B\}$  von  $\mathcal{P}$ . Es ist wohlbekannt (und trivial in Anbetracht des Stabilisatorverhaltens von  $W$  auf  $\mathfrak{F}(A)$  und  $\mathcal{A}_O$ , vgl. [LIE] V, § 4, ex. 2a), daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(A) &\rightarrow \mathcal{A}_O \\ w \cdot F_\theta &\mapsto wP_\theta w^{-1} \end{aligned}$$

ein  $W$ -äquivarianter Isomorphismus von Komplexen ist. Wir können somit den Tits-Kegel  $A$  als geometrische Realisation von  $\mathcal{A}_O$  auffassen.

Bemerkung: Diese Realisation ist i. a. weder die "minimale" noch die "übliche" Realisation des Komplexes  $\mathcal{A}_O$ . Eine minimale Realisation erhält man durch den Quotienten von  $A$  nach der minimalen Seite  $F_\vee$ . Die übliche Realisation verzichtet zudem auf eine Repräsentation der minimalen Seite von  $\mathcal{A}_O$  (entsprechend der Spitze  $O$  des Kegels  $A/F_\vee$ ) und identifiziert sich

mit dem Raum  $((A/F_V) \setminus \{0\}) / \mathbb{R}_+^*$  der Strahlen des Kegels  $A/F_V$  (vgl. etwa [Spanier] III, 1). Diese letzte Realisation erweist sich allerdings als wenig geeignet für die folgende Untersuchung "konvexer" Teilmengen von  $\mathcal{A}_0$ .

Seien  $F, F'$  Seiten eines Kammerkomplexes  $\mathcal{X}$  (z. B.  $\mathcal{P}$  oder  $\mathcal{A}_0$ ). Eine Galerie  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  von Kammern in  $\mathcal{X}$  heißt eine minimale Galerie von  $F$  nach  $F'$ , wenn gilt

$$i) \quad F \leq C_0 \quad \text{und} \quad F' \leq C_n$$

ii)  $n$  ist die kleinste Länge einer Galerie mit der Eigenschaft i) .

Jede Galerie  $(C_0, \dots, C_n)$  in  $\mathcal{X}$  definiert durch Übergang zum simplizialen Abschluß in  $\mathcal{X}$  (vgl. 6.5) einen Unterkomplex

$$\overline{(C_0, \dots, C_n)} = \{F'' \in \mathcal{X} \mid \text{Es gibt ein } i \in \{0, \dots, n\} \text{ mit } F'' \leq C_i\} .$$

Wir definieren nun die konvexe Hülle  $\text{conv}_{\mathcal{X}}(F, F')$  von  $F$  und  $F'$  in  $\mathcal{X}$  als den Durchschnitt

$$\bigcap \overline{(C_0, \dots, C_n)}$$

der simplizialen Abschlüsse aller minimalen Galerien von  $F$  nach  $F'$ . (Es ist trivial, daß diese Definition mit der allgemeineren Definition von [Tits<sub>2</sub>] 1.5 im vorliegenden Fall übereinstimmt.) Offensichtlich ist  $\text{conv}_{\mathcal{X}}(F, F')$  ein Unterkomplex von  $\mathcal{X}$ .

Im nächsten Abschnitt benötigen wir die folgenden Eigenschaften konvexer Hüllen in  $\mathcal{P}$ :

Lemma 1 ([Tits<sub>2</sub>] 3.18): Seien  $F$  und  $F'$  Seiten von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{A}$  ein Ap-

partment, das  $F$  und  $F'$  enthält. Dann liegt  $\text{conv}_{\mathcal{P}}(F, F')$  in  $\mathcal{A}$  und ist gleich der konvexen Hülle  $\text{conv}_{\mathcal{A}}(F, F')$  von  $F$  und  $F'$  in  $\mathcal{A}$ .

Lemma 2 ([Tits<sub>2</sub>] 2.29, 3.19): Seien  $F$  und  $F'$  Seiten von  $\mathcal{P}$ . Dann besitzt  $\text{St}(F) \cap \text{conv}_{\mathcal{P}}(F, F')$  (und ebenso  $\text{St}(F') \cap \text{conv}_{\mathcal{P}}(F, F')$ ) ein eindeutig bestimmtes maximales Element.

Das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte maximale Element in  $\text{St}(F) \cap \text{conv}_{\mathcal{P}}(F, F')$  heißt die Projektion von  $F'$  auf  $F$  und wird mit  $\text{proj}_F(F')$  bezeichnet.

Zur Untersuchung der konvexen Hülle zweier Seiten in  $\mathcal{P}$  genügt es nach Lemma 1 die Situation innerhalb eines Appartements, oder einfach innerhalb des Komplexes  $\mathfrak{F}(A)$  der Seiten des Tits-Kegels  $A$  zu betrachten; wir schreiben dann  $\text{conv}(F, F')$  anstelle von  $\text{conv}_{\mathfrak{F}(A)}(F, F')$ .

Für jede Teilmenge  $\mathcal{X}$  von  $\mathfrak{F}(A)$  bezeichne  $|\mathcal{X}|$  die geometrische Realisation von  $\mathcal{X}$  in  $A$

$$|\mathcal{X}| = \bigcup_{F \in \mathcal{X}} F .$$

Sei  $W \cdot \nabla \subset H$  die Menge der reellen Kowurzeln (vgl. 3.4). Für jede Teilmenge  $M \subset A$  setzen wir

$$\Sigma^{\vee}(M, +) = \{h \in W \cdot \nabla \mid \omega(h) \geq 0 \text{ für alle } \omega \in M\} .$$

Mit [Tits<sub>2</sub>] Th. 2.19 erhalten wir nun:

Lemma 3: Seien  $F$  und  $F'$  Seiten in  $\mathfrak{F}(A)$ . Dann gilt

$$|\text{conv}(F, F')| = \{ \omega \in A \mid \omega(h) \geq 0 \text{ für alle } h \in \Sigma^V(|F| \cup |F'|, +) \} .$$

Insbesondere ist  $|\text{conv}(F, F')|$  eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von  $A$  .

Bemerkung: Im allgemeinen ist die konvexe Hülle der abgeschlossenen Seiten  $|\overline{F}|$  und  $|\overline{F'}|$  in  $A$  eine echte Teilmenge von  $|\text{conv}(F, F')|$  .

Lemma 4: Seien  $F$  und  $F'$  Seiten in  $\mathfrak{F}(A)$  . Alle Kowurzeln  $h \in W \cdot \nabla$  , die auf  $|\text{proj}_F(F')|$  verschwinden, verschwinden auch auf  $|F'|$  .

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe eine Kowurzel  $h$  die auf  $|\text{proj}_F(F')|$  aber nicht auf  $|F'|$  verschwindet. Die konvexe Hülle von  $|F'|$  und  $|F|$  , und somit auch  $|\text{conv}(F, F')|$  (Lemma 3), ist dann nicht in der Hyperebene  $h^\perp = \{ \omega \in A \mid \omega(h) = 0 \}$  enthalten. Also trifft  $|\text{conv}(F, F')|$  den Stern  $|\text{St}(F)|$  in einer Seite  $|F''|$  ,  $F'' \in \text{St}(F)$  , die nicht in  $h^\perp$  , und damit auch nicht in  $|\text{proj}_F(F')|$  enthalten ist. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität von  $\text{proj}_F(F')$  in  $\text{St}(F) \cap \text{conv}(F, F')$  .

Korollar: Seien  $F$  und  $F'$  wie in Lemma 4. Dann haben  $\text{proj}_F(F')$  und  $\text{proj}_F(F)$  den gleichen Rang. Zudem erzeugen  $|\text{proj}_F(F')|$  und  $|\text{proj}_F(F)|$  den gleichen linearen Unterraum von  $V = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  .

Bemerkung: Induktiv erweitert sich die Aussage des Korollars auf alle maximalen Seiten von  $\text{conv}(F, F')$  .

### 6.8 Die parabolische Partition

Im nächsten Kapitel werden wir einen adjungierten Quotienten für eine Kac-Moody-Liegruppe  $G$  konstruieren. Basisraum dieses Quotienten wird der vervollständigte Orbitraum  $\hat{\mathcal{T}}/W$  sein. Ziel dieses Abschnittes ist es eine Partition von  $G$  in konjugationsinvariante Teilmengen zu konstruieren, die der Partition des Raumes  $\hat{\mathcal{T}}/W$  in die Strata  $(\hat{\mathcal{T}}/W)(\theta)$ ,  $\theta$  speziell, korrespondieren wird.

Sei dazu  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $(G, B, N, S)$  das zugehörige Tits-System mit Gebäude  $(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ . Wir übernehmen die Bezeichnungskonventionen von 6.7 und setzen (der Einfachheit halber)  $(H, \nabla, \Delta)$  als frei voraus.

Sei  $\theta \subset \nabla$  eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen die Vereinigung aller Komponenten von  $\theta$  von unendlichem (bzw. endlichem) Typ mit  $\theta^\infty$  (bzw.  $\theta^0$ ).

Lemma 1: Jedes Element der parabolischen Untergruppe  $P_\theta$  ist zu einem Element der Untergruppe  $P_{\theta^\infty}$  konjugiert.

Beweis: In Anbetracht der Levi-Zerlegung  $P_\theta = L_\theta \ltimes U_{(\theta)}$  (vgl. 5.9) genügt es zu zeigen, daß alle Elemente von  $L_\theta$  unter  $L_\theta$  nach  $L_\theta \cap P_{\theta^\infty}$  konjugiert sind. Dies folgt jedoch aus der Tatsache, daß alle Elemente der endlichdimensionalen reductiven Gruppe  $L_{\theta^0} \subset L_\theta$  nach deren Boreluntergruppe  $B \cap L_{\theta^0}$  konjugiert sind (vgl. [Borel] III. 10). Man beachte dabei, daß  $L_{\theta^0}$  die abgeleitete Gruppe  $DL_{\theta^0}$  von  $L_{\theta^0}$  (vgl. 5.9, Beispiel) normalisiert und  $L_\theta \cap P_{\theta^\infty}$  Produkt von  $B \cap L_{\theta^0}$  und  $DL_{\theta^0}$  in  $L_\theta$  ist.

Bemerkung: Die Aussage des Lemmas gilt i. a. nicht in beliebigen Tits-Systemen. Z. B. liegen die elliptischen Elemente der Gruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  in keiner Boreluntergruppe.

Sei nun  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell. Wir sagen ein Element  $g \in G$  sei vom parabolischen Typ  $\theta$ , wenn  $g$  zu einem Element der parabolischen Untergruppe  $P_\theta$ , aber zu keinem Element einer kleineren parabolischen Untergruppe  $P_{\theta'}$ ,  $\theta' \subset \theta$ ,  $\theta' \neq \theta$ , konjugiert ist. Die Menge aller Elemente  $g \in G$  vom parabolischen Typ  $\theta$  werde mit  $G(\theta)$  bezeichnet.

Warnung: Ein Element eines speziellen Untertorus  $T' \subset T$  (vgl. 6.4) ist immer parabolisch vom Typ  $\emptyset$  (und nicht vom Typ  $\theta$  dieses speziellen Torus, es sei denn  $\theta = \emptyset$ )!

Jede Teilmenge  $G(\theta)$ ,  $\theta$  speziell, ist nach Definition stabil unter Konjugation mit Elementen aus  $G$ .

Nach dem obigen Lemma gilt

$$G = \bigcup_{\substack{\theta \subset \mathcal{V} \\ \text{speziell}}} G(\theta) .$$

Beispiele: 1) Ist  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  von endlichem Typ, so gibt es nur eine spezielle Teilmenge in  $\mathcal{V}$ , nämlich  $\emptyset$ . Dies entspricht der Tatsache, daß jetzt alle Elemente von  $G$  in die Boreluntergruppe  $B = P_\emptyset$  konjugiert sind.

2) Sei  $(H, \hat{\mathcal{V}}, \hat{\Delta})$  die Affinisierung einer zusammenhängenden Wurzelbasis  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  von endlichem Typ (im Sinne von 4.14, 3.11). Dann ist  $G$  eine algebraische Gruppe über dem lokalen Körper  $\mathbb{C}((z))$ . Es gibt nun zwei spezielle Teilmengen von  $\hat{\mathcal{V}}$ , i.e.  $\emptyset$  und  $\hat{\mathcal{V}}$ . Die Elemente in  $G(\emptyset)$  sind ge-

nau diejenigen, deren "Eigenwerte über  $\mathbb{C}((z))$ " Einheiten in  $\mathbb{C}[z]$  sind. Alle anderen Elemente liegen in  $G(\hat{V})$ .

3) In Abschnitt 6.10 werden wir für jede Gruppe  $G$  und jede spezielle Teilmenge  $\theta \subset V$  Elemente in  $G(\theta)$  konstruieren.

Wir wollen nun zeigen, daß der parabolische Typ eines Elementes  $g \in G$  eindeutig bestimmt ist. Dazu interpretieren wir die Definition des parabolischen Typs in der Terminologie des Gebäudes  $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ . Ist  $g \in G$ , so ist die Fixpunktmenge

$$\mathcal{P}^g = \{P \in \mathcal{P} \mid gPg^{-1} = P\} = \{P \in \mathcal{P} \mid g \in P\}$$

von  $g$  auf  $\mathcal{P}$  ein Unterkomplex. Offensichtlich ist  $g$  vom parabolischen Typ  $\theta$  genau dann, wenn es eine maximale Seite  $F \in \mathcal{P}^g$  gibt, deren Typ  $\theta$  ist.

Satz (Looijenga): Sei  $\theta \subset V$  speziell und  $g \in G(\theta)$ . Dann gilt:

- i) Alle maximalen Seiten von  $\mathcal{P}^g$  sind vom gleichen Typ  $\theta$ ;
- ii) Es gibt genau eine Seite  $F_g \in \mathcal{P}^g$  vom Typ  $\theta \cup \theta^+$ ;
- iii)  $\mathcal{P}^g$  liegt im simplizialen Abschluß  $\overline{\text{St}(F_g)}$  des Sterns von  $F_g$ .

Beweis: Seien  $F$  und  $F'$  maximale Seiten von  $\mathcal{P}^g$  und  $\mathcal{C}$  die konvexe Hülle von  $F$  und  $F'$  in  $\mathcal{P}$ . Wir können annehmen, daß  $F$  vom Typ  $\theta$  ist. Dann überführt  $g$  die Menge  $\mathcal{C}$  in sich und fixiert dabei die Projektionen  $\text{proj}_F(F')$  und  $\text{proj}_{F'}(F)$  wegen deren Eindeutigkeit (vgl. 6.7, Lemma 2). Aufgrund der Maximalität von  $F$  und  $F'$  in  $\mathcal{P}^g$  folgt  $F = \text{proj}_F(F')$  und  $F' = \text{proj}_{F'}(F)$ . Nach 6.7, Lemma 1, liegen  $F$ ,  $F'$  und  $\mathcal{C}$  in einem

gemeinsamen Appartement  $\lambda$  von  $\mathcal{P}$ . Dieses können wir mit dem Seitenkomplex  $\overline{T}(A)$  des Tits-Kegels  $A$  identifizieren, ebenso  $F$  mit einer Seite  $F_\theta$ . Wegen 6.7, Korollar zu Lemma 4, liegen nun  $|F| = F_\theta$  und  $|F'|$  als maximale Seiten innerhalb der Randkomponente  $A(\theta)$  des Tits-Kegels  $A$ . Mit 6.2, Korollar 1, erhalten wir, daß  $F'$  ebenfalls eine Seite vom Typ  $\theta$  ist, und  $F$  und  $F'$  im Stern von  $F_g = F_\theta \cup \theta^\perp$  liegen.

Ist  $F''$  eine weitere maximale Seite von  $\mathcal{P}^g$ , so liefert die gleiche Argumentation, angewandt auf  $F$  und  $F''$ , daß  $F''$  ebenfalls im Stern der eindeutig bestimmten Seite  $F_g$  von  $F$  vom Typ  $\theta \cup \theta^\perp$  liegt. Damit sind alle Aussagen des Satzes bewiesen.

Korollar 1: Die Vereinigung  $G = \bigcup_{\theta \in \mathcal{V}} G(\theta)$  ist disjunkt.  
speziell

Korollar 2: Jedes Element  $g \in G(\theta)$  ist in genau einer parabolischen Untergruppe vom Typ  $\theta \cup \theta^\perp$  enthalten.

Wir betrachten nun eine parabolische Untergruppe  $P_\theta$ ,  $\theta \in \mathcal{V}$  beliebig, mit Tits-System  $(P_\theta, B, N_\theta, S_\theta)$  (wobei  $S_\theta = \{s_\alpha \mid \alpha \in \theta^\vee\}$ ) und Levi-Zerlegung  $P_\theta = L_\theta \ltimes U_{(\theta)}$  (vgl. 5.9). Die Gruppe  $L_\theta$  ist dabei assoziiert zur Wurzelbasis  $(H, \theta, \theta^\vee)$  und besitzt das Tits-System  $(L_\theta, L_\theta \cap B, N_\theta, S_\theta)$ . Jede parabolische Untergruppe von  $P_\theta$  enthält  $U_{(\theta)}$ . Daher operiert  $U_{(\theta)}$  trivial auf dem Gebäude  $\mathcal{P}_\theta$  von  $(P_\theta, B, N_\theta, S_\theta)$ , und die Abbildung

$$P \longmapsto P \cap L_\theta$$

induziert einen  $L_\theta$ -äquivarianten Isomorphismus von  $\mathcal{P}_\theta$  auf das Gebäude von



$(L_\theta, B \cap L_\theta, N_\theta, S_\theta)$ . Zudem identifiziert sich  $\mathcal{P}_\theta$  mit dem Stern  $\text{St}(P_\theta)$  der Seite  $P_\theta$  im Gebäude  $\mathcal{P}$  (vgl. [LIE] IV, 2, Th. 4).

Sei  $\theta' \subset \theta$  speziell. Wir nennen  $g \in P_\theta$  (bzw.  $L_\theta$ ) parabolisch vom Typ  $\theta'$  in  $P_\theta$  (bzw. in  $L_\theta$ ) genau dann, wenn  $g$  unter  $P_\theta$  (bzw.  $L_\theta$ ) in die parabolische Untergruppe  $P_{\theta'}$  (bzw.  $P_{\theta'} \cap L_\theta$ ) und in keine echt kleinere parabolische Untergruppe konjugiert ist. Wir setzen

$$P_\theta(\theta') = \{g \in P_\theta \mid g \text{ ist parabolisch vom Typ } \theta' \text{ in } P_\theta\} ,$$

$$L_\theta(\theta') = \{g \in L_\theta \mid g \text{ ist parabolisch vom Typ } \theta' \text{ in } L_\theta\} .$$

Sei  $\pi_\theta : P_\theta \rightarrow L_\theta$  die natürliche Projektion. Aufgrund des oben gesagten erhalten wir unmittelbar:

Lemma 2: Sei  $\theta' \subset \theta$  speziell und  $g \in P_\theta$ . Dann gilt:

- i)  $g \in P_\theta(\theta')$  genau dann, wenn  $\pi_\theta(g) \in L_\theta(\theta')$ ,
- ii)  $g \in L_\theta \cap P_\theta(\theta')$  genau dann, wenn  $g \in L_\theta(\theta')$ .

Eine weitere Anwendung des Satzes ist nun die folgende:

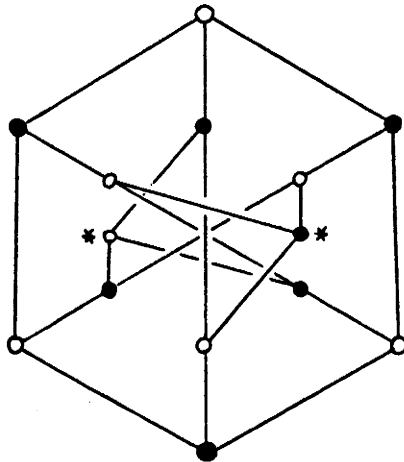
Korollar 3: Sei  $\theta' \subset \theta$  spezielle Teilmenge von  $\theta$  und  $g \in P_\theta$ . Dann gilt  $g \in G(\theta')$  genau dann, wenn  $g \in P_\theta(\theta')$ , und dies genau dann, wenn  $\pi_\theta(g) \in L_\theta(\theta')$ .

Beweis: Nach Lemma 2 bleibt nur die erste Äquivalenz zu zeigen. Wegen  $g \in P_\theta$  ist  $P_\theta$  eine Seite der Fixpunktmenge  $\mathcal{P}^g$ , insbesondere ist  $\mathcal{P}^g \cap \text{St}(P_\theta)$  nichtleer. Nach dem Satz besitzen alle maximalen Seiten von  $\mathcal{P}^g$  den gleichen Typ, insbesondere sind die maximalen Seiten in  $\mathcal{P}^g \cap \text{St}(P_\theta)$

vom gleichen Typ wie die maximalen Seiten von  $\mathcal{P}^g$ . Dies ist aber äquivalent zur Behauptung.

Bemerkungen: 1) Die Aussage des obigen Satzes wurde uns freundlicherweise von E. Looijenga mitgeteilt (Brief vom 30.03.83). Der Beweis in der jetzigen Form stammt von uns.

2) In Gebäuden zu beliebigen Tits-Systemen  $(G, B, N, S)$  können die maximalen Seiten der Fixpunktmenge  $\mathcal{P}^g$  eines Elementes  $g \in G$  verschiedenen Typ haben. Man betrachte zum Beispiel das Gebäude der einfachen Gruppe  $SL_3(\mathbb{F}_2)$  der Ordnung 168, bestehend aus 7 Punkten, 7 Geraden und 21 vollen Fahnen der projektiven Ebene über  $\mathbb{F}_2$ . (Wir verzichten auf die der Ebene selbst entsprechende minimale Seite 0.)



Sei  $c$  ein Coxeterelement in  $W \cong \sigma_3 \cong N$  ( $T = \{1\}$ ), das das "äußere" Appartement stabilisiert (und darauf durch "Drehung um  $120^\circ$ " operiert).

Dann fixiert  $c$  genau einen Punkt und genau eine Gerade (mit \* indiziert).

Ist  $g$  ein Element der Ordnung 7, so werden kein Punkt und keine Gerade von  $g$  fixiert.

### 6.9 Eine darstellungstheoretische Interpretation

In diesem Abschnitt wollen wir die parabolische Partition von  $G$  mittels der Höchstgewichtsmoduln (5.10, 5.11) von  $G$  interpretieren. (In den folgenden Abschnitten werden wir die Eigenschaften "irreduzibel" und "zu dominantem höchsten Gewicht" bei Höchstgewichtsmoduln der Einfachheit halber automatisch voraussetzen und nicht mehr explizit erwähnen.) Aufgrund des folgenden Lemmas werden wir dabei die Wurzelbasis  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  als frei und einfach zusammenhängend voraussetzen.

Lemma 1: Sei  $\phi : (H', \mathcal{V}, \Delta) \rightarrow (H, \mathcal{V}, \Delta)$  ein Morphismus Cartanscher  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasen und  $\Psi : G' \rightarrow G$  der entsprechende Homomorphismus der zugeordneten Gruppen. Für jede spezielle Teilmenge  $\theta \subset \mathcal{V}$  gilt dann  $\Psi(G'(\theta)) \subset G(\theta)$ .

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß Kern  $\Psi$  im Zentrum von  $G'$  enthalten ist (vgl. 5.9, Lemma 5).

Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell. Wir bezeichnen mit  $GE(\theta)$  alle Elemente  $g \in G$ , die die folgende Eigenschaft besitzen:

Das Element  $g$  hat einen Eigenvektor in dem Höchstgewichtsmodul  $V^\omega$  zum dominanten höchsten Gewicht  $\omega$  genau dann, wenn  $\omega(h) = 0$  für alle  $h \in \theta$  gilt.

Nach Definition ist jede Teilmenge  $GE(\theta)$  stabil unter Konjugation, und für  $\theta \neq \theta'$  sind  $GE(\theta)$  und  $GE(\theta')$  disjunkt.

Proposition 1: Es gilt  $GE(\theta) \subset \bigcup_{\theta' \supset \theta} G(\theta')$  .

speziell

Beweis: Sei  $g \in GE(\theta)$  und nehmen wir an,  $g$  sei in einer Teilmenge  $G(\theta')$  mit  $\theta \not\subset \theta'$  enthalten. Dann gibt es also ein  $h \in \theta$  mit  $h \notin \theta'$  und somit ein dominantes Gewicht  $\omega \in H^*$  mit  $\omega(h') = 0$  für alle  $h' \in \theta'$  aber  $\omega(h) \neq 0$ . Wegen  $g \in G(\theta')$  ist  $g$  in die parabolische Untergruppe  $P_{\theta}$ , konjugiert, die den Höchstgewichtsvektor in  $V^{\omega}$  als Eigenvektor besitzt (vgl. 5.13). Insbesondere hat auch  $g$  einen Eigenvektor in  $V^{\omega}$  im Widerspruch zur Annahme  $g \in GE(\theta)$  .

Korollar: Für alle speziellen Teilmengen  $\theta \subset \mathbb{V}$  gilt  $P_{\theta} \cap GE(\theta) \subset G(\theta)$  . Ist insbesondere  $\mathbb{V}$  selbst speziell, so gilt  $GE(\mathbb{V}) \subset G(\mathbb{V})$  .

Wir vermuten, daß die Gleichheit

$$GE(\theta) = G(\theta) \quad (*)$$

für alle speziellen Teilmengen  $\theta \subset \mathbb{V}$  gilt. Ist  $\mathbb{V}$  selbst speziell, so ist die Aussage

$$GE(\mathbb{V}) = G(\mathbb{V}) \quad (**)$$

ein Spezialfall dieser Vermutung. Zum Beweis von **(\*\*)** wäre nach dem obigen Korollar nur die Inklusion  $G(\mathbb{V}) \subset GE(\mathbb{V})$  zu zeigen. Diese ist äquivalent zu der folgenden Behauptung **(\*\*\*)** :

Sei  $v \neq 0$  ein Element in einem Höchstgewichtsmodul  $V^{\omega}$  zu einem dominanten Gewicht  $\omega$  mit  $\omega(\mathbb{V}) \neq \{0\}$ . Dann ist der Stabilisator  $G_{[v]} = \{g \in G \mid g \cdot (\mathbb{C} \cdot v) = \mathbb{C}v\}$  der Geraden durch  $v$  in einer echten parabolischen Untergruppe  $P \subset G$ ,  $P \neq G$ , enthalten.

Bemerkung: Die Eigenschaft (\*\*\*) ist sicher nicht erfüllt für die Darstellungen reductiver Gruppen, wie schon das Beispiel  $SL_2$  zeigt (man betrachte die Invarianten binärer Polyedergruppen in den symmetrischen Potenzen von  $\mathbb{C}^2$ ). Andererseits ist jeder Vektor  $v$  einer Höchstgewichtsdarstellung zu einer Kac-Moody-Liegruppe  $G$  mit spezieller Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  instabil im Sinne von [Mumford], und für instabile Vektoren reductiver Gruppen ist (\*\*\*) erfüllt aufgrund der Resultate von Kempf, Rousseau, oder Bogomolov (vgl. loc. cit. App. to Ch. 2, B). In einer späteren Arbeit werden wir auf die Verallgemeinerung dieser Resultate für Kac-Moody-Liegruppen eingehen. Hier wollen wir nur zeigen, wie die Aussage (\*\*) für alle Gruppen mit spezieller Wurzelbasis die Aussage (\*) impliziert (wenigstens im symmetrisierbaren Fall).

Lemma 2: Sei  $\theta \in \nabla$  speziell,  $g \in P_\theta = L_\theta \rtimes U_{(\theta)}$  und  $g = l \cdot u$  die entsprechende Zerlegung von  $g$ , i.e.  $l = \pi_\theta(g)$ . Hat dann  $g$  einen Eigenvektor in dem Höchstgewichtsmodul  $V^\omega$ , so auch  $l$ .

Beweis: Wir können ein Element  $h \in H$  finden mit der Eigenschaft  $\alpha(h) = 0$  für alle  $\alpha \in \theta^\vee$  und  $\alpha(h) > 0$  für alle  $\alpha \in \Delta \setminus \theta$ . Sei

$$V_m = \{v \in V^\omega \mid h \cdot v = m \cdot v\}$$

der Eigenraum von  $h$  in  $V^\omega$  zum Eigenwert  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann zerlegt sich  $V^\omega$  als direkte Summe

$$V^\omega = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m .$$

Die Gruppe  $L_\theta$  stabilisiert jeden der Eigenräume  $V_m$ , und ist

$$V^n = \bigoplus_{m \geq n} V_m, \quad n \in \mathbb{Z},$$

so gilt für alle  $u \in U_{(\theta)}$

$$(\text{id}-u)(V^n) \subset V^{n+1}.$$

Sei nun  $v \in V^\omega$  ein Eigenvektor von  $g$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $v = \sum_m v_m$ ,  $v_m \in V_m$ , die Zerlegung von  $v$  entsprechend der obigen direkten Summe. Sei  $k$  das Minimum aller  $m$  mit  $v_m \neq 0$ , und  $v = v_k + v'$ ,  $v' \in V^{k+1}$ . Wegen  $gv = \lambda v$  gilt nun

$$\lambda(v_k + v') = \ell u(v_k + v') = \ell v_k + v'' \quad \text{mit} \quad v'' \in V^{k+1},$$

also  $\ell v_k = v_k$ , d. h.  $v_k$  ist ein Eigenvektor für  $\ell$ .

**Lemma 3:** Sei  $\theta$  speziell und  $\omega \in H^*$  ein dominantes Gewicht mit  $\omega(\theta) \neq \{0\}$ . Für jedes Gewicht  $\mu \in P(\omega)$  des Moduls  $V^\omega$  gilt dann ebenfalls  $\mu(\theta) \neq \{0\}$ .

**Beweis:** Sei  $c \in H$  ein spezieller Ko-Charakter vom Typ  $\theta$ . Es gilt dann  $\alpha(c) \leq 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  (vgl. 6.2). Da  $c$  eine positive Linearkombination in  $\theta$  und  $\omega$  dominant ist, folgt mit der Voraussetzung  $\omega(c) > 0$ . Jedes Gewicht  $\mu \in P(\omega)$  hat nach 5.10 die Form

$$\mu = \omega - \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{N}.$$

Daher ist  $\mu(c)$  ebenfalls strikt größer als 0, insbesondere ist  $\mu(\theta) \neq \{0\}$ .

**Lemma 4:** Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  symmetrisierbar,  $\theta \in \nabla$  speziell, und  $V^\omega$  ein Höchstgewichtsmodul zu einem dominanten Gewicht  $\omega$  mit  $\omega(\theta) \neq \{0\}$ . Dann

zerfällt  $V^\omega$  bezüglich der Leviuntergruppe  $L_\theta$  in eine direkte Summe von Höchstgewichtsmoduln  $V^{\omega'}$  zu dominanten Gewichten  $\omega'$  mit  $\omega'(\theta) \neq \{0\}$ .

Beweis: Die Aussage folgt mit Lemma 3 aus dem Kac-Weylschen Satz über die vollständige Reduzibilität von  $V^\omega$  bezüglich  $L_\theta$  (vgl. 5.10).

Wir kommen nun zum Beweis der Implikation  $(**) \implies (*)$ . Man beachte, daß eine Leviuntergruppe  $L_\theta \subset G$  eine Kac-Moody-Liegruppe zur Wurzelbasis  $(H, \theta, \theta^\vee)$  ist.

Proposition 2: Sei  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  symmetrisierbar. Für alle speziellen Teilmengen  $\theta \in \mathcal{V}$  gelte  $L_\theta E(\theta) = L_\theta(\theta)$ . Dann gilt auch  $GE(\theta) = G(\theta)$ .

Beweis: Wegen der Disjunktheit der  $GE(\theta)$  für verschiedene  $\theta$  genügt es nach Proposition 1 nur noch die Inklusion  $G(\theta) \subset GE(\theta)$  zu zeigen. Sei also  $g \in G(\theta)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $g \in P_\theta(\theta)$  annehmen. Sei  $V^\omega$  ein Höchstgewichtsmodul von  $G$ . Gilt  $\omega(\theta) = \{0\}$ , so ist der Höchstgewichtsvektor in  $V^\omega$  ein Eigenvektor für  $P_\theta$  und daher für  $g$ . Besitzt umgekehrt  $g$  einen Eigenvektor in  $V^\omega$ , so auch der  $L_\theta$ -Anteil  $\pi_\theta(g) = \ell \in L_\theta(\theta)$  (Lemma 2). Nach Voraussetzung liegt  $\ell$  in  $L_\theta E(\theta)$ . Die Existenz des Eigenvektors von  $\ell$  impliziert nach Definition von  $L_\theta E(\theta)$  und mit Lemma 4 die Aussage  $\omega(\theta) = \{0\}$ . Somit liegt  $g$  in  $GE(\theta)$ , was zu zeigen war.

Bemerkung: Es ist zu vermuten, daß die Bedingung der Symmetrisierbarkeit umgangen werden kann.

Falls die Vermutung  $(*)$  sich als richtig erweist, erhält man eine weitere

Darstellungstheoretische Charakterisierung von  $G(\emptyset)$ . Sei dazu  $G^{le}$  die Menge aller Elemente von  $G$ , die auf allen Höchstgewichtsmoduln  $V^\omega$  durch lokalendliche Transformationen operieren (im Sinne von [Borel] I, 4.2). Jede solche Transformation hat einen Eigenvektor. Daher gilt

$$G^{le} \subset GE(\emptyset) \quad .$$

Andererseits respektiert jedes Element von  $B$  die Tiefenfiltrierung

$\mathcal{F} = (V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  auf einem Modul  $V^\omega$  (vgl. 5.10, 5.11). Daher operiert jedes Element  $g \in G(\emptyset)$  lokal-endlich auf einem Modul  $V^\omega$ . Also folgt

$$G(\emptyset) \subset G^{le} \subset GE(\emptyset) \quad .$$

Die Richtigkeit von (\*) ergäbe  $G(\emptyset) = GE(\emptyset)$  und damit  $G(\emptyset) = G^{le}$ .

Bemerkung: Sei  $g \in G^{le}$  und  $V^\omega$  ein Modul zu einem regulären dominanten Gewicht  $\omega$  (i.e.  $\omega(h) > 0$  für alle  $h \in \mathcal{V}$ ). Gibt es dann einen endlich-dimensionalen  $g$ -stabilen Unterraum  $V' \subset V^\omega$ , so daß  $\mathbb{P}(V')$  den  $G$ -Orbit  $\mathcal{O}$  der Höchstgewichtsgeraden trifft (vgl. 5.13) und die algebraische Hülle  $\mathcal{O}(g)$  von  $g$  in  $GL(V')$  (im Sinne von [Borel] II, 7.1) zusammenhängend ist, so folgt mit Borels Fixpunktsatz ([Borel] III, 10.4) die Existenz eines Fixpunktes von  $g$  auf  $\mathcal{O} \cong \mathcal{B} \cong G/B$ . Somit ist in diesem Fall  $g$  in einer Boreluntergruppe und damit in  $G(\emptyset)$  enthalten. (Für die analoge Problematik im Liealgebraischen Kontext ist diese Argumentation ausreichend, vgl. dazu [Peterson-Kac], Beweis von Lemma 6).

### 6.10 Existenz parabolischer Elemente

In diesem Abschnitt wollen wir unter Zuhilfenahme von 6.9, Korollar, parabo-



liche Elemente vom Typ  $\theta$  für jede spezielle Teilmenge  $\theta \subset \mathcal{V}$  konstruieren. Diese Elemente werden genau diejenigen Elemente in der Untergruppe  $N \subset G$  sein, die schon in der Arbeit [Słodowy<sub>4</sub>] betrachtet wurden und im dortigen Sinne vom Typ  $\theta$  sind.

Wir setzen  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  wieder als frei voraus. Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell.

Ein Element  $w \in W$  heie vom Typ  $\theta$ , falls die Fixpunktmenge  $A^W$  von  $w$  auf dem Titskegel  $A$  eine Randkomponente vom Typ  $\theta$  ist.

Mit  $W(\theta)$  bezeichnen wir alle Elemente in  $W$  vom Typ  $\theta$ . Ist  $\pi : N \rightarrow W$  die natürliche Projektion, so sei  $N(\theta) = \pi^{-1}(W(\theta))$ . Ein Element  $n \in N(\theta)$  heie ebenfalls vom Typ  $\theta$ .

Die Teilmengen  $W(\theta) \subset W$  (bzw.  $N(\theta) \subset N$ ) sind nach Definition stabil unter Konjugation mit  $W$  (bzw.  $N$ ).

Beispiel: Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell und  $w$  das Produkt der einfachen Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \theta^\vee$ , in irgendeiner Reihenfolge. Dann ist die Fixpunktmenge  $A^W$  genau die Randkomponente  $A(\theta)$  (vgl. auch loc. cit. 6.2).

Lemma 1: Sei  $\theta$  speziell und  $w \in W_\theta(\theta) = W_\theta \cap W(\theta)$ . Dann ist der Zentralisator  $Z_W(w)$  von  $w$  in  $W$  in  $W_{\theta \cup \theta^\perp}$  enthalten.

Beweis: Ist  $g \in Z_W(w)$ , so stabilisiert  $g$  die Fixpunktmenge  $A^W = A(\theta)$  von  $w$ . Somit gilt  $Z_W(w) \subset N_W(A(\theta)) = W_{\theta \cup \theta^\perp}$  (vgl. 6.2, Korollar 4).

Sei nun  $w \in W$  ein beliebiges Element und  $A(w, m) \subset A$  Fixpunktmenge von  $w^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 0$ . Die Familie  $\{A(w, m)\}$  ist bezüglich Inklusion auf-

aufsteigend filtrierend  $(A(w,m), A(w,n) \subset A(w,mn))$ , und wegen der Endlichdimensionalität von  $V = H^* \otimes \mathbb{R}$  gibt es ein  $n$ , so daß  $A(w,n)$  gleich dem induktiven Limes  $A(w,\infty) = \varinjlim A(w,m)$  dieser Familie ist.

Lemma 2:  $A(w,\infty)$  ist eine Randkomponente von  $A$ .

Beweis: Sei  $A' \subset A$  die kleinste Randkomponente von  $A$ , die  $A(w,\infty)$  enthält. Nach Konjugation in  $W$  können wir dann  $A'$  in der Form  $A(\theta)$ ,  $\theta \subset V$  speziell, und  $A(w,\infty)$  in der Form  $\{\mu \in A(\theta) \mid \mu(h) = 0 \text{ für alle } h \in \theta^\circ\}$  für eine Teilmenge  $\theta^\circ \subset \theta^\perp$  von endlichem Typ annehmen. Wegen  $A(w,\infty) = A(w,n)$  für ein  $n$ , gilt  $w^n \in W_\theta \times W_{\theta^\circ}$ . Da  $W_{\theta^\circ}$  endlich ist, gibt es eine Potenz  $w^q$  von  $w^n$ , so daß  $w^q$  in  $W_\theta$  liegt, also  $A(\theta)$  punktweise fixiert. Mit  $A(w,\infty) \subset A(\theta)$  und  $A(\theta) \subset A(w,q) \subset A(w,\infty)$  folgt nun  $A(w,\infty) = A(\theta)$ , was zu zeigen war.

Wir nennen  $w \in W$  asymptotisch vom Typ  $\theta$ , wenn die Randkomponente  $A(w,\infty) \subset A$  vom Typ  $\theta$  ist.

Da  $W$  treu auf  $A$  operiert, ist ein Element  $w \in W$  asymptotisch vom Typ  $\emptyset$  genau dann, wenn  $w$  endliche Ordnung hat. Im folgenden nehmen wir explizit an, daß  $(H, V, \Delta)$  von unendlichem Typ ist.

Lemma 3: Sei  $\theta \neq \emptyset$  speziell und  $w \in W(\theta)$ . Dann hat  $w$  unendliche Ordnung.

Beweis: Nehmen wir an,  $w$  sei von endlicher Ordnung  $k$ . Wegen der Konvexität von  $\overset{\circ}{A}$  ist dann für jedes  $\mu \in \overset{\circ}{A}$  das Element  $\bar{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} w^i(\mu)$  wieder in  $\overset{\circ}{A}$  und ungleich 0. Da  $\bar{\mu}$  ein Fixpunkt von  $w$  ist, erhalten

wir einen Widerspruch zu der Annahme, daß  $A^w$  eine echte Randkomponente von  $A$  ist.

Bemerkung: Für eine etwas allgemeinere Aussage vgl. loc. cit. 6.3, Proposition 2.

Lemma 4: Sei  $\theta$  speziell und  $w \in W(\theta)$ . Dann ist  $w$  asymptotisch vom Typ  $\theta$ .

Beweis: O.B.d.A. können wir  $w \in W_\theta$ , i.e.  $A^w = A(\theta)$  annehmen. Nach Konjugation in  $W_\theta$  können wir zudem erreichen, daß  $A(w, \infty)$  die Form  $A(\theta')$  für eine spezielle Teilmenge  $\theta' \subset \theta$  hat. Nach Lemma 3 und der diesem Lemma vorausgehenden Anmerkung ist  $\theta' = \emptyset$ , nur wenn  $\theta = \emptyset$ . Sei daher  $\theta \neq \emptyset$ , also auch  $\theta' \neq \emptyset$ . Nun gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , so daß  $A(w, \infty) = A(w, n)$ . Es gilt dann  $w^n \in W_\theta \cap W(\theta')$ . Da  $w$  mit  $w^n$  kommutiert, impliziert Lemma 1 die Aussage  $w \in (W_{\theta \cup \theta'^\perp}) \cap W_\theta = W_{\theta \cup (\theta'^\perp \cap \theta)}$ . Wegen  $A^w = A(\theta)$  und  $\theta' \neq \emptyset$  ist dies nur möglich, falls  $\theta' = \theta$  gilt. Dies war aber zu zeigen.

Korollar 1: Sei  $\theta$  speziell und  $w \in W(\theta)$ . Für alle  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ , gilt dann  $w^m \in W(\theta)$ .

Lemma 5: Sei  $V^\omega$  ein Höchstgewichtsmodul von  $G$ . Alle Gewichte  $\mu \in P(\omega)$  von  $V^\omega$  liegen dann in  $A \cap H^*$ .

Beweis: Vgl. [Garland-Lepowsky] 2.9 oder [Kac-Peterson<sub>1</sub>] 2.4 c).

**Satz:** Sei  $\theta$  speziell. Dann ist jedes Element  $n$  vom Typ  $\theta$  in  $N$  ein Element vom parabolischen Typ  $\theta$  in  $G$  :

$$N(\theta) \subset G(\theta) \quad .$$

**Beweis:** Sei  $n \in N(\theta)$  . Nach Konjugation in  $N$  können wir  $n \in N_\theta = N \cap P_\theta$  annehmen. Wegen 6.9, Korollar zu Proposition 1 genügt es nun zu zeigen, daß  $n$  in  $GE(\theta)$  liegt. Da  $P_\theta$  in jedem Höchstgewichtsmodul  $V^\omega$  mit  $\omega(\theta) = \{0\}$  die Höchstgewichtsgerade stabilisiert, müssen wir die Existenz eines Eigenvektors von  $n$  in Moduln  $V^\omega$  mit  $\omega(\theta) \neq \{0\}$  ausschließen. Nehmen wir an, es gäbe einen Eigenvektor  $v$  von  $n$  in einem solchen Modul. Sei

$$v = \sum_{i=1}^k v_i \quad , \quad v_i \in V_{\mu_i}^\omega \quad , \quad v_i \neq 0 \quad ,$$

die Zerlegung von  $v$  gemäß den Gewichtsräumen von  $V^\omega$  und  $w$  das Bild von  $n$  in  $W$  . Für alle  $\mu \in P(\omega)$  gilt dann  $n(V_\mu^\omega) = V_{w(\mu)}^\omega$  (vgl. 5.11). Da  $n$  den Vektor  $v$  in ein Vielfaches überführt, muß nun  $n$  die Gewichtsräume  $V_{\mu_i}^\omega$  miteinander vertauschen. Entsprechend permutiert  $w$  die endliche Menge  $\{\mu_1, \dots, \mu_k\} \subset P(\omega) \subset A$  . Insbesondere wird  $\mu = \mu_1$  von einer Potenz von  $w$  fixiert. Nach der Voraussetzung  $n \in N_\theta \cap N(\theta)$  und dem Korollar 1 muß  $\mu$  in  $A^W = A(\theta)$  liegen. Wegen der Voraussetzung  $\omega(\theta) \neq \{0\}$  erfüllt  $\mu$  nach 6.9, Lemma 3, aber auch die Bedingung  $\mu(\theta) \neq \{0\}$  , im Widerspruch zu  $\mu \in A(\theta)$  .

Für die spätere Verwendung in 7.7 - 7.10 merken wir noch eine Eigenschaft von  $N(\theta)$  an. Sei  $m_{\theta^*}$  die natürliche Abbildung

$$N_\theta \longrightarrow N_\theta / N_\theta \cap DL_\theta \simeq T(\theta) \quad ,$$

wobei  $DL_\theta$  die abgeleitete Gruppe der Leviuntergruppe  $L_\theta$  ist.

Korollar 2: Die Einschränkung von  $m_\theta^\wedge$  auf  $N_\theta(\theta) = N_\theta \cap N(\theta)$  ist surjektiv.

Bemerkungen: 1) Aufgrund von 6.8, Korollar 3, wäre es ausreichend gewesen, die Inklusion  $N(V) \subset G(V)$  für den Fall zu zeigen, daß  $V$  selbst speziell ist.

2) In den Beweis des obigen Satzes gehen wesentlich Eigenschaften ein, die nur für Wurzelbasen vom unendlichen Typ gültig sind. In diesem Zusammenhang vergleiche man das Beispiel in 6.8, Bemerkung 2. Das dortige Element  $c$  stabilisiert ein Appartement ohne (nichttrivialen) Fixpunkt. Dennoch besitzt  $c$  außerhalb dieses Appartements nichttriviale Fixpunkte!

3) Die in der Arbeit [Slodowy<sub>4</sub>] betrachteten Elemente in  $W$  von gemischtem ("mixed") Typ sind nach den obigen Ausführungen asymptotisch vom gleichen Typ wie ihre "unendliche" Komponente (vgl. loc. cit. 6.3).

KAPITEL 7: DER ADJUNGIERTE QUOTIENT FÜR KAC-MOODY-LIEGRUPPEN

7.1 Jordanzerlegung in proalgebraischen Gruppen

In einer algebraischen Gruppe  $K$  läßt sich jedes Element  $g$  zerlegen als Produkt

$$g = s \cdot u$$

eines halbeinfachen Elementes  $s$  und eines unipotenten Elementes  $u$ , so daß  $s$  und  $u$  miteinander kommutieren. Die Faktoren  $s$  und  $u$  sind dann eindeutig bestimmt und werden von Morphismen algebraischer Gruppen respektiert (vgl. [Borel] I. 4).

Diese sogenannte Jordanzerlegung läßt sich auf proalgebraische Gruppen im Sinne von Abschnitt 5.2 ausdehnen. Sei dazu  $(P, \mathcal{S})$  eine solche Gruppe, also  $\{P/Q \mid Q \in \mathcal{S}\}$  die Familie der algebraischen Quotienten von  $P$ . Sei  $g \in P$  und  $\{g_Q \mid Q \in \mathcal{S}\}$  die Familie der Bilder von  $g$  in den Gruppen  $P/Q$ . Wir sagen  $g$  sei halbeinfach (bzw. unipotent) wenn alle  $g_Q \in P/Q$  halbeinfach (bzw. unipotent) sind.

Sei  $g \in P$  ein beliebiges Element. Jedes Bild  $g_Q \in P/Q$ ,  $Q \in \mathcal{S}$ , besitzt dann eine Jordanzerlegung

$$g_Q = s_Q \cdot u_Q \quad .$$

Für  $Q' \subset Q$ ,  $Q, Q' \in \mathcal{S}$ , ist  $s_Q$  (bzw.  $u_Q$ ) gleich dem Bild von  $s_{Q'}$  (bzw.  $u_{Q'}$ ) unter dem natürlichen Morphismus  $P/Q' \rightarrow P/Q$ . Daher erhalten wir mit

$$s = \varprojlim_{Q \in \mathcal{S}} s_Q \quad (\text{bzw.} \quad u = \varprojlim_{Q \in \mathcal{S}} u_Q)$$

ein halbeinfaches (bzw. unipotentes) Element in  $P$  mit

$$g = \varprojlim g_Q = (\varprojlim s_Q) \cdot (\varprojlim u_Q) = s \cdot u$$

und  $s \cdot u = u \cdot s$ . Offensichtlich sind  $s$  und  $u$  mit diesen Eigenschaften eindeutig bestimmt. Wir nennen die Zerlegung  $g = s \cdot u$  die proalgebraische Jordanzerlegung von  $g$ .

Morphismen proalgebraischer Gruppen respektieren diese Jordanzerlegung. Da die Konjugation auf  $P$  ein solcher Morphismus ist, erhalten wir für beliebige  $x, y \in P$  mit Jordanzerlegung  $x = s \cdot u$ ,  $y = t \cdot v$ :

Lemma: Es gibt ein  $g \in P$  mit  $g \times g^{-1} = y$  genau dann, wenn es ein  $g \in P$  gibt mit  $g s g^{-1} = t$  und  $g u g^{-1} = v$ .

Das Problem der Untersuchung der Konjugationsklassen in proalgebraischen Gruppen erweist sich somit als analog dem entsprechenden Problem in algebraischen Gruppen.

Beispiel: Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum mit einer Fahne  $F$ :

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

endlichdimensionaler Unterräume  $V_i \subset V$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = V.$$

Sei

$$P(F) = \{g \in GL(V) \mid g(V_i) \subset V_i \text{ für alle } i\}$$

$$U^i(F) = \{g \in P(F) \mid g|_{V_i} = \text{id}\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Dann ist  $P(F)$  eine proalgebraische Gruppe bezüglich des Definitionssystems  $\mathcal{S} = \{U^i(F) \mid i = 1, 2, \dots\}$ .

Jedes Element  $g \in P(F)$  operiert auf  $V$  durch lokal-endliche Transformationen im Sinne von [Borel] I, 4.2 (Stabilität der Unterräume  $V_i$ !). Also besitzt  $g$  eine "lokal-endliche" Jordanzerlegung

$$g = s \cdot u = u \cdot s,$$

bei der  $s$  und  $u$  wieder Elemente von  $P(F)$  sind und  $s$  (bzw.  $u$ ) auf jedem Unterraum  $V_i$  einen halbeinfachen (bzw. unipotenten) Automorphismus induziert (loc. cit., vgl. auch [Humphreys] 15.1). Nach Definition der proalgebraischen Struktur auf  $P(F)$  stimmt diese "lokal-endliche" Jordanzerlegung mit der proalgebraischen Jordanzerlegung in  $P(F)$  überein.

## 7.2 Konjugationsklassen in Boreluntergruppen

Sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis,  $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{u}}^- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{u}}$  die zugehörige komplettierte Kac-Moody Liealgebra und  $G$  die in 5.8 zugeordnete Gruppe mit Boreluntergruppe  $B = T \rtimes U$ . Sei  $\mathcal{S} = \{\bar{\mathfrak{u}}^{-1} \mid i \in \mathbb{N}\}$  das in 5.4 konstruierte Definitionssystem für die Pro-Liealgebrastruktur auf  $\bar{\mathfrak{u}}$  und  $\{U^i = \exp(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$  das System der korrespondierenden proalgebraischen Normalteiler von  $U$ . Wir bezeichnen den endlichdimensionalen Quotienten



$U/U^1$  mit  $U_i$ . Nach Konstruktion von  $U$  (5.5, 5.3) schreibt sich dann  $U$  als projektiver Limes

$$U = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} U_i .$$

Da die  $T$ -Aktion auf  $U$  die Untergruppen  $U^1$  normalisiert, erhalten wir Aktionen von  $T$  auf den Quotienten  $U_i$ , und mit  $B_i = T \times U_i$  gilt dann in offensichtlicher Weise

$$B = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} B_i .$$

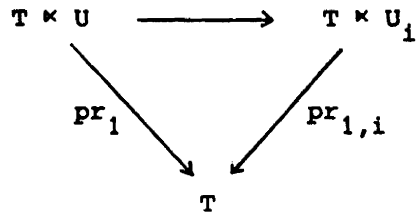
Lemma 1: i) Ein Element  $x \in B$  ist unipotent genau dann, wenn  $x \in U$  gilt.

ii) Jedes halbeinfache Element  $x \in B$  ist zu genau einem Element  $t \in T$  konjugiert.

Beweis: Wir bezeichnen das Bild von  $x$  unter der natürlichen Projektion  $B \rightarrow B_i$  mit  $x_i$ . Es gilt dann  $x = \varprojlim x_i$ . Die erste Aussage folgt nun aus der Tatsache, daß die unipotenten Elemente von  $B_i = T \times U_i$  genau die Elemente von  $U_i$  sind (vgl. [Borel] III, 10). Sei nun  $x$  halbeinfach. Dann sind alle Bilder  $x_i \in B_i$  von  $x$  halbeinfach und somit nach  $T$  konjugiert (loc. cit.):

$$g_i x_i g_i^{-1} \in T \quad \text{für geeignete} \quad g_i \in U_i \subset B_i .$$

Da die Projektionen auf  $T$  in dem natürlichen kommutativen Diagramm



invariant bezüglich Konjugation sind, gilt notwendigerweise

$$g_i x_i g_i^{-1} = \text{pr}_{1,i}(x_i) = \text{pr}_1(x) = x_0 \in B_0 = T$$

für alle  $i$ , und  $x$  kann, wenn überhaupt, nur zu  $t = x_0$  konjugiert sein.

Weiter unten konstruieren wir induktiv eine Folge von Elementen  $g_i \in U_i$ ,

$i \in \mathbb{N}$ , mit

$$1) \quad g_i x_i g_i^{-1} \in T, \quad \text{also} \quad g_i x_i g_i^{-1} = t,$$

und der Zusatzbedingung:

$$2) \quad \text{Das Bild von } g_{i+1} \text{ in } U_i \text{ ist gleich } g_i.$$

Dann ist  $g = \varprojlim g_i$  ein Element von  $U$  mit

$$g x g^{-1} = \varprojlim g_i x_i g_i^{-1} = t.$$

Für den Induktionsanfang wählen wir  $g_0 = 1$ . Seien nun Elemente  $g_i \in U_i$ ,

$i \leq n$ , mit den Eigenschaften 1) und 2) gefunden, es gilt also

$$g_n x_n g_n^{-1} \in T.$$

Sei  $k \in U_{n+1}$  ein Urbild von  $g_n$  in  $U_{n+1}$ . Dann liegt  $k x_{n+1} k^{-1}$  im

Urbild von  $T$  unter der Abbildung  $B_{n+1} \rightarrow B_n$ , d. h. in der auflösbaren

Gruppe  $T \times (U^n/U^{n+1})$ . Also gibt es ein  $h \in U^n/U^{n+1}$  mit

$$hk x_{n+1} k^{-1} h^{-1} \in T.$$

Setzen wir  $g_{n+1} = hk$ , so ist das Bild von  $g_{n+1}$  in  $U_n$  gleich dem Bild von  $k$ , d. h. gleich  $g_n$ , w.z.z.w..

Bemerkung: Mit der gleichen Argumentation wie oben zeigt man, daß alle maximalen Tori in  $B$  zu  $T$  konjugiert sind.

Sei  $t \in T$  und  $\Sigma^+(t) = \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha(t) = 1\}$  die Menge der auf  $t$  "verschwindenden" positiven Wurzeln. Dann ist  $\Sigma^+(t)$  abgeschlossen im Sinne von 5.5. Sei  $U(t) = U_{\Sigma^+(t)}$  die  $\Sigma^+(t)$  zugeordnete abgeschlossene Untergruppe von  $U$  (vgl. 5.5). Dann wird  $U(t)$  von  $T$  normalisiert. Wir setzen

$$B(t) = T \times U(t) \quad .$$

Aufgrund der  $T$ -Äquivarianz der Exponentialabbildung  $\exp : \bar{u} \rightarrow U$  und der Konstruktion von  $U(t)$  erhalten wir unmittelbar:

Lemma 2: Der Zentralisator  $Z_B(t)$  von  $t$  in  $B$  ist gleich  $B(t)$ . Die unipotenten Elemente in  $B(t)$  sind genau die Elemente von  $B(t) \cap U = U(t)$ .

Im folgenden sowie in den späteren Abschnitten werden wir einige elementare Eigenschaften assoziierter Faserbündel benutzen (Details dazu finden sich z. B. in [Slodowy<sub>2</sub>] 3.7): Ist  $G$  eine Gruppe,  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $V$  ein  $G$ -Raum, so schreiben wir  $G \times^H V$  für den Quotienten von  $G \times V$  nach der  $H$ -Aktion  $H \times (G \times V) \rightarrow G \times V$ ,  $(h, g, v) \mapsto (gh^{-1}, hv)$ , und nennen  $G \times^H V$  das zum Prinzipalbündel  $G \rightarrow G/H$  und zum  $H$ -Raum  $V$  assoziierte Bündel. Die Restklasse von  $(g, v)$  in  $G \times^H V$  wird mit  $g * v$  bezeichnet.

Für Anwendungen in 7.6 wollen wir die Fasern der Projektion  $B \rightarrow T$  als assoziierte Bündel beschreiben. Da diese Projektion invariant gegenüber Konjugation mit Elementen von  $B$  ist, ist jede Faser  $t \cdot U$  eine  $B$ -Menge bezüglich Konjugation.

Proposition: Für jedes  $t \in T$  ist die Abbildung

$$\beta_t : B \times^{B(t)} U(t) \rightarrow t \cdot U$$

$$\beta_t(b * u) = btub^{-1}$$

ein  $B$ -Isomorphismus. Dabei operiert  $B(t)$  durch Konjugation auf  $U(t)$ .

Beweis: Mit Lemma 1 folgt, daß alle halbeinfachen Elemente in  $t \cdot U$  zu  $t$  konjugiert sind. Durch Zuordnung des halbeinfachen Teiles  $x_s$  zu  $x \in t \cdot U$  erhalten wir somit eine  $B$ -äquivariante Abbildung

$$\sigma : t \cdot U \longrightarrow (B\text{-Orbit von } t) = B/B(t)$$

$$x \longmapsto x_s$$

Die Faser  $\sigma^{-1}(t)$  dieser Abbildung besteht gerade aus allen Elementen  $tu$ , bei denen  $u \in U$  mit  $t$  kommutiert, d. h.

$$\sigma^{-1}(t) = t \cdot U(t) .$$

Da der Stabilisator  $B(t)$  von  $t$  auf  $\sigma^{-1}(t) = t \cdot U(t)$  durch Konjugation operiert und  $t \cdot U(t)$  als  $B(t)$ -Raum isomorph zu  $U(t)$  ist, folgt die Behauptung (vgl. loc. cit., 3.7 Lemma 4).

Bemerkungen: 1) Definiert man in naheliegender Weise eine Kategorie proalgebraischer Varietäten, so induziert die Konjugation von  $B$  auf sich eine

proalgebraische Aktion. Man sieht dann leicht, daß  $B \rightarrow T$  der Quotient in dieser Kategorie von  $B$  nach der Konjugationsaktion ist. Die obige Proposition liefert dann auch einen Isomorphismus  $t \cdot U \xrightarrow{\sim} B \times^{B(t)} U(t)$  in der Kategorie der proalgebraischen Varietäten mit  $B$ -Aktion.

2) Ist  $\Delta' \subset \Delta$  eine Teilmenge von endlichem Typ, so ist die zugehörige parabolische Untergruppe  $P = P_{\Delta'} = L_{\Delta'} \times U_{(\Delta')}$  ebenfalls eine proalgebraische Gruppe (vgl. 5.7). Da  $L_{\Delta'}$  eine algebraische Gruppe mit Boreluntergruppe  $B \cap L_{\Delta'}$  ist, sind alle Elemente von  $P$  nach  $B$  konjugierbar.

Man erhält dann einen proalgebraischen adjungierten Quotienten

$q : P \rightarrow T/W_{\Delta'}$ , dessen Fasern  $q^{-1}(t \bmod W_{\Delta'})$  äquivariant isomorph zu den assoziierten Bündeln  $P \times^{P(t)} \text{Uni}(t)$  sind. Dabei bezeichnet  $P(t)$  den Zentralisator von  $t$  in  $P$  und  $\text{Uni}(t)$  die Varietät der unipotenten Elemente in  $P(t)$ .

### 7.3 Die lokal-endliche Jordanzerlegung für $G(\emptyset)$

Sei  $(H, \mathbb{V}, \Delta)$  eine Cartansche  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasis und  $G$  die zugehörige Gruppe wie in 7.2. Ist  $G$  nicht endlichdimensional, so trägt  $G$  selbst keine proalgebraische Struktur. Die Konjugationsklassen von  $G$  lassen sich aus diesem Grunde nur teilweise mit den bisherigen Methoden untersuchen. Sei  $B \subset G$  die in 5.7 konstruierte und in 7.2 betrachtete Boreluntergruppe. Wir definieren wie in 6.8

$$G(\emptyset) := \{gbg^{-1} \mid g \in G, b \in B\},$$

d. h.  $G(\emptyset)$  ist die Vereinigung aller Boreluntergruppen  $\mathcal{G}_B = gBg^{-1}$ ,  $g \in G$ , in  $G$ .

Im folgenden wollen wir eine Jordanzerlegung für alle Elemente von  $G(\emptyset)$  definieren, die auf der Boreluntergruppe  $B$  mit der proalgebraischen Zerlegung übereinstimmt.

Diese Zerlegung definieren wir mittels eines "Transportes der proalgebraischen Struktur" von  $B$  auf alle Konjugierten von  $B$ . Dazu beachten wir, daß der Normalisator  $N_G(B)$  von  $B$  in  $G$  gleich  $B$  ist (vgl. 5.1) und die Konjugation in  $B$  mit Elementen  $b \in B$  einen Automorphismus der proalgebraischen Struktur auf  $B$  induziert. Deshalb läßt sich jede Boreluntergruppe  $B' \subset G$  mit genau einer Struktur einer proalgebraischen Gruppe versehen, bezüglich der die Abbildung

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow B' \\ b &\longmapsto gbg^{-1} \end{aligned}$$

für jedes  $g \in \text{Tr}(B, B') = \{x \in G \mid xBx^{-1} = B'\}$  einen Isomorphismus proalgebraischer Gruppen induziert. Es gilt dann:

Lemma 1: Seien  $B_1$  und  $B_2$  Boreluntergruppen von  $G$ . Dann ist  $B_1 \cap B_2$  eine abgeschlossene Untergruppe in  $B_1$  und in  $B_2$ , und die von  $B_1$  und  $B_2$  auf  $B_1 \cap B_2$  induzierten proalgebraischen Strukturen stimmen überein.

Beweis: Nach dem oben gesagten können wir o.B.d.A. das Paar  $(B_1, B_2)$  durch ein  $G$ -konjugiertes ersetzen und, aufgrund der Bruhatzerlegung, in der Form  $(B, {}^n B)$  für ein  $n \in N$  annehmen. Durch Induktion über die Länge  $l(w)$  des Bildes  $w$  von  $n$  in  $W$  sehen wir, daß es genügt, den Fall einer einfachen Spiegelung  $w = s_\alpha$ , d. h.  $n = n_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , zu betrachten. Dann sind jedoch  $B$  und  ${}^n B$  abgeschlossene Untergruppen der proalgebraischen Gruppe  $P_\alpha$  (vgl. 5.7), und die behaupteten Aussagen sind somit trivialerweise richtig.

Aufgrund dieses Lemmas können wir nun in konsistenter Weise definieren:

Ein Element  $x \in G$  heie halbeinfach (bzw. unipotent) wenn  $g$  in einer Boreluntergruppe von  $G$  enthalten und in dieser halbeinfach (bzw. unipotent) ist.

Lemma 2: Sei  $\phi : (H', \nabla, \Delta) \rightarrow (H, \nabla, \Delta)$  ein Morphismus Cartanscher  $\mathbb{Z}$ -Wurzelbasen und  $\phi : G' \rightarrow G$  der zugehörige Homomorphismus der entsprechenden Gruppen. Dann gilt  $\phi(G'(\emptyset)) \subset G(\emptyset)$ , und  $\phi$  überführt halbeinfache (bzw. unipotente) Elemente in solche.

Beweis: Sei  $B' \subset G'$  die Standard-Boreluntergruppe von  $G'$ . Dann ist  $\phi(B')$  in der entsprechenden Untergruppe  $B \subset G$  enthalten, und  $\phi$  induziert einen Morphismus proalgebraischer Gruppen. Die Aussagen folgen jetzt mit 7.1.

Lemma 3: Seien  $s$  und  $u$  kommutierende Elemente in  $G(\emptyset)$ , und sei  $s$  halbeinfach und  $u$  unipotent. Dann liegen  $s$  und  $u$  in einer gemeinsamen Boreluntergruppe von  $G$ . Insbesondere liegt das Produkt  $s \cdot u$  wieder in  $G(\emptyset)$ .

Beweis: Aufgrund von Lemma 2 können wir annehmen, daß  $(H, \nabla, \Delta)$  frei und einfach zusammenhängend ist (man beachte auch, daß  $\text{Kern}(\phi)$  zentral in  $G'$  ist). Somit erhalten wir eine Einbettung  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{P}^\omega$  der Varietät  $\mathcal{B} \cong G/B$  aller Boreluntergruppen von  $G$  in den projektiven Raum einer Höchstgewichts-darstellung  $V^\omega$  mit regulärem höchstem Gewicht  $\omega$  (vgl. 5.13). Da  $s$  in einer Boreluntergruppe von  $G$  enthalten ist, ist die Untervarietät  $\mathcal{B}(s)$  der Fixpunkte von  $s$  auf  $\mathcal{B}$  nichtleer. Andererseits liegt  $u$  ebenfalls in

einer Boreluntergruppe von  $G$  und operiert daher lokal endlich auf  $V^\omega$ . Deshalb gibt es einen endlichdimensionalen  $u$ -stabilen projektiven Unterraum  $P' \subset \mathbb{P}^\omega$  so daß  $P' \cap \mathcal{B}(s)$  nichtleer ist. Da  $u$  mit  $s$  kommutiert, stabilisiert  $u$  diesen Durchschnitt. Als unipotente Transformation hat nun  $u$  einen Fixpunkt auf der projektiven Varietät  $P' \cap \mathcal{B}(s)$  (vgl. 5.13 Korollar 2 und Borels Fixpunktsatz [Borel] III, 10.4). Dieser Fixpunkt ist die Boreluntergruppe, die  $s$ ,  $u$  und das Produkt  $s \cdot u$  enthält.

Bemerkung: In den späteren Anwendungen werden wir im wesentlichen den Fall betrachten, daß der Zentralisator von  $s$  endlichdimensional ist. In diesem Fall folgt die Aussage von Lemma 3 leicht aus dem entsprechenden Resultat über endlichdimensionale Gruppen.

Satz: Jedes Element  $x \in G(\emptyset)$  besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung  $x = s \cdot u = u \cdot s$  in das Produkt eines halbeinfachen Elementes  $s \in G(\emptyset)$  mit einem kommutierenden unipotenten Element  $u \in G(\emptyset)$ .

Beweis: Wir erhalten die gesuchte Zerlegung mittels der proalgebraischen Jordanzerlegung in einer  $x$  enthaltenden Boreluntergruppe. Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt mit den Lemmata 1 und 3 sowie der Eindeutigkeit der Zerlegung in einer Boreluntergruppe.

Definition: Wir nennen die Zerlegung  $x = s \cdot u$  des obigen Satzes die Jordanzerlegung von  $x$  in  $G(\emptyset)$  und  $s$  (bzw.  $u$ ) den halbeinfachen (bzw. unipotenten) Teil von  $x$ , und wir schreiben auch

$$s = x_s \quad \text{und} \quad u = x_u .$$



Korollar 1: Zwei Elemente  $x, y \in G(\emptyset)$  sind konjugiert mittels eines Elementes  $g \in G$ ,  $y = gxg^{-1}$ , genau dann, wenn die halbeinfachen und unipotenten Teile mittels  $g$  konjugiert sind,  $y_s = gx_s g^{-1}$  und  $y_u = gx_u g^{-1}$ .

Sei nun  $R : G \rightarrow GL(V)$  eine irreduzible Höchstgewichtsdarstellung von  $G$ . Da die Boreluntergruppe  $B$  die Tiefenfiltrierung  $\mathfrak{F}$  von  $V$  respektiert (vgl. 5.10, 5.11), operiert jedes Element  $x \in B$ , und somit auch jedes Element  $x \in G(\emptyset)$ , auf  $V$  durch eine lokal-endliche Transformation  $R(x)$ , die eine "lokal-endliche" Jordanzerlegung

$$R(x) = R(x)_s \cdot R(x)_u$$

besitzt. Mit 7.1, Beispiel, erhalten wir nun unmittelbar aus den Definitionen:

Korollar 2: Für alle  $x \in G(\emptyset)$  und für jede Höchstgewichtsdarstellung  $R : G \rightarrow GL(V)$  gilt

$$R(x_s) = R(x)_s \quad \text{und} \quad R(x_u) = R(x)_u.$$

Bemerkung: Die Eindeutigkeit der Jordanzerlegung in  $G(\emptyset)$  kann jetzt auch mittels einer treuen Höchstgewichtsdarstellung  $R : G \rightarrow GL(V)$  aus der Eindeutigkeit der lokal-endlichen Jordanzerlegung in  $GL(V)$  gefolgert werden. (Lemma 2 und die Zentralität des Kerns der dortigen Abbildung  $\phi$  ermöglichen die Reduktion auf den Fall, daß  $G$  tatsächlich eine treue Höchstgewichtsdarstellung besitzt.)

Nach den obigen Resultaten reduziert sich das Problem der Beschreibung aller  $G$ -Konjugationsklassen in  $G(\emptyset)$  wie im Fall algebraischer oder proalgebrai-

scher Gruppen in die drei Teilprobleme der Bestimmung

- i) aller halbeinfachen Konjugationsklassen,
- ii) der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente,
- iii) der unipotenten Konjugationsklassen in solchen Zentralisatoren.

Diesen Problemen werden wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden.

#### 7.4 Halbeinfache Klassen und Zentralisatoren

Wir betrachten die gleiche Situation wie in 7.3. Nach Definition von  $G(\emptyset)$  ist jedes Element in  $G(\emptyset)$  mittels  $G$  nach  $B$  konjugiert. Weitergehend haben wir:

- Proposition 1:
- i) Jedes halbeinfache (bzw. unipotente) Element in  $G(\emptyset)$  ist  $G$ -konjugiert nach  $T$  (bzw.  $U$ ).
  - ii) Zwei Elemente  $s, t \in T$  sind  $G$ -konjugiert genau dann, wenn sie konjugiert sind unter der Aktion von  $W = N/T$ .

Beweis: Aussage i) folgt unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über  $B$  (7.2, Lemma 1).

Seien also  $s, t \in T$  und  $g \in G$  mit  $s = gtg^{-1}$ . Wir zerlegen  $g = unu' \in UnU$  gemäß der Bruhatzerlegung. Aus der Gleichung  $sg = tg$  erhalten wir dann

$$(sus^{-1})snu' = unt(t^{-1}u't) .$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des  $N$ -Anteils dieser Zerlegung folgt  $sn = nt$ ,

oder  $s = ntn^{-1}$ , w.z.z.w..

Korollar 1: Die Zuordnung

$$\xi \longmapsto \xi \cap T$$

liefert eine Bijektion der Menge der halbeinfachen Konjugationsklassen in  $G(\emptyset)$  auf die Quotientenmenge  $T/W$ .

Seien nun  $t \in T$  und  $\Sigma(t) = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(t) = 1\}$ ,  $U(t) = U_{\Sigma(t)} \cap \Sigma^+$  wie in 7.2. Nach dem dortigen Lemma 2 wissen wir, daß der Zentralisator von  $t$  in  $U$  gleich  $U(t)$  ist.

Lemma 1: Sei  $t \in T$ . Dann wird der Zentralisator  $Z_G(t)$  von  $t$  in  $G$  erzeugt von  $U(t)$  und  $Z_N(t) = \{n \in N \mid ntn^{-1} = t\}$ .

Beweis: Sei  $g \in Z_G(t)$  und  $g = unv \in U_W nU$ ,  $w = n(\text{mod } T)$ , die verfeinerte Bruhatzerlegung von  $g$ . Wegen  $tgt^{-1} = g$  gilt dann

$$tut^{-1} \cdot tnt^{-1} \cdot tvn^{-1} = unv.$$

Da  $t$  die Gruppen  $U_W$ ,  $N$  und  $U$  normalisiert, folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung

$$tut^{-1} = u, \quad tnt^{-1} = n, \quad tvn^{-1} = v,$$

also

$$u \in U(t), \quad n \in Z_N(t), \quad v \in U(t),$$

was die Behauptung beweist.

Sei  $W^0(t)$  nun die Untergruppe von  $W$ , die von den Spiegelungen  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma^+(t) \cap \Sigma^R$ , erzeugt wird und  $N^0(t)$  das Urbild von  $W^0(t)$  in  $N$ . Dann ist  $N^0(t)$  im Zentralisator  $Z_N(t)$  enthalten. Sei

$$\underline{z}_{\mathfrak{g}}(t) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(t) \cdot x = x\}$$

der infinitesimale Zentralisator von  $t$  in der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .

Lemma 2: Sei  $\Sigma(t)$  endlich. Dann ist  $\underline{z}_{\mathfrak{g}}(t)$  eine endlichdimensionale reduktive Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$  mit Cartanalgebra  $\underline{h}$  und Wurzelsystem  $\Sigma(t) \subset \underline{h}^* = H^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ .

Beweis: Nach Definition ist  $\Sigma(t)$   $\mathbb{Z}$ -linear abgeschlossen, d. h.

$(\mathbb{Z} \cdot \Sigma(t)) \cap \Sigma = \Sigma(t)$ . Wegen der Endlichkeit kann daher  $\Sigma(t)$  nur aus reellen Wurzeln bestehen (vgl. 3.9). Da die Menge  $\Sigma(t)$  in  $H^*$  von  $W^0(t)$  stabilisiert wird, bildet sie ein endliches (reduktives) Wurzelsystem. Aufgrund der Zerlegung

$$\underline{z}_{\mathfrak{g}}(t) = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(t)} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ ,  $\alpha \in \Sigma(t)$ , ist  $\underline{z}_{\mathfrak{g}}(t)$  von der behaupteten Struktur.

In  $\Sigma(t)$  bildet  $\Sigma^+(t) = \Sigma(t) \cap \Sigma^+$  ein System positiver Wurzeln, dessen unzerlegbare Elemente (bezüglich der additiven Monoidstruktur) ein System  $\Delta(t)$  einfacher Wurzeln bilden (dabei ist  $\Delta(t)$  nicht unbedingt in  $\Delta$  enthalten!). Sei  $\nabla(t) = \Delta(t)$  das System der entsprechenden Kowurzeln in  $H$ . Dann ist  $(H, \nabla(t), \Delta(t))$  eine Wurzelbasis von endlichem Typ.

Proposition 2: Sei  $\Sigma(t)$  endlich und  $Z_N(t) = N^O(t)$ . Dann ist  $Z_G(t)$  eine endlichdimensionale reductive Gruppe mit maximalem Torus  $T$  und Wurzelbasis  $(H, \mathcal{V}(t), \Delta(t))$ .

Beweis: Sei  $G'$  die reductive Gruppe zur Wurzelbasis  $(H, \mathcal{V}(t), \Delta(t))$  mit Tits-System  $(B', N')$  und minimalen parabolischen Untergruppen  $P'_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta(t)$ . Wir haben zu zeigen, daß  $G'$  und  $Z_G(t)$  isomorph ist. Wir können  $N'$  mit  $N^O(t) = Z_N(t)$  und  $B' = T' \times U'$  mit  $B(t) = T \times U(t)$  unmittelbar identifizieren (5.6, 5.5, Exponentialabbildung  $\bar{u} \rightarrow U$ ). Die von  $T$ ,  $U_\alpha$ ,  $U_{-\alpha}$ , ( $\alpha \in \Delta(t)$ ) erzeugte Untergruppe  $L_\alpha \subset Z_G(t) \subset G$  ist eine reductive Untergruppe zur Wurzelbasis  $(H, \{h_\alpha\}, \{\alpha\})$  ( $L_\alpha$  ist konjugiert zu einer Gruppe  $L_\beta$  mit  $\beta \in \Delta$ , vgl. dazu 5.7, 5.9). Die Untergruppe von  $U(t)$

$$U_{(\alpha)}(t) = U_{\Sigma^+(t) \setminus \{\alpha\}} = \prod_{\gamma \in \Sigma^+(t) \setminus \{\alpha\}} U_\gamma$$

wird nun von  $L_\alpha$  normalisiert, und  $P'_\alpha$  identifiziert sich mit dem semidirekten Produkt  $L_\alpha \ltimes U_{(\alpha)}(t)$  (Reduktion auf die zugehörigen Lieunteralgebren von  $Z_G(t)$ , vgl. die Argumentation in 5.7). Durch diese Identifikation des Systems  $(N', P'_\alpha, \alpha \in \Delta(t))$  von Untergruppen von  $G'$  mit solchen in  $Z_G(t)$  erhalten wir einen injektiven Homomorphismus

$$G' \rightarrow Z_G(t),$$

(vgl. 5.1, Theorem und Lemma), der wegen Lemma 1 und  $Z_N(t) = N^O(t)$  auch surjektiv ist.

Bemerkungen: 1) Ist  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  eine freie, einfach zusammenhängende Wurzelbasis und  $\mathcal{J} \subset T$  der in 6.3 definierte Diskontinuitätsbereich, so sind die

Voraussetzungen der obigen Proposition 2 für alle  $t \in \mathcal{T}$  (sowie für alle  $t \in \mathcal{T}^{-1}$ ) erfüllt (vgl. 6.3).

2) Ist  $\Sigma(t)$  endlich, aber  $Z_N(t) \neq N^0(t)$ , so normalisiert  $Z_N(t)$  das Bild  $Z_G(t)^0$  von  $G'$  in  $Z_G(t)$ , und  $Z_G(t)/Z_G(t)^0 \cong Z_N(t)/N^0(t)$ .

3) Ist  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht frei, so kann  $\Sigma(t)$  für alle  $t \in T$  unendlich sein (etwa im affinen Fall falls die einfachen Wurzeln linear abhängig sind).

4) Ist  $\Sigma(t)$  unendlich, so ist  $Z_G(t)$  nicht notwendig eine zu einer Wurzelbasis von unendlichem Typ assoziierte Gruppe. Im affinen Fall kann z. B. eine unendlichdimensionale Heisenberggruppe als Normalteiler in  $Z_G(t)$  auftreten.

Im folgenden schreiben wir der Einfachheit halber  $Z(t)$  für  $Z_G(t)$ , wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind. Wir setzen

$$\text{Uni}(t) = \{u \in Z(t) \cap G(\emptyset) \mid u \text{ ist unipotent}\} .$$

Dann operiert  $Z(t)$  durch Konjugation auf  $\text{Uni}(t)$ .

Lemma 3: Jedes Element  $u \in \text{Uni}(t)$  ist  $Z(t)$ -konjugiert nach  $U(t)$ .

Beweis: Sei  $u \in \text{Uni}(t)$ . Dann liegt  $x = t \cdot u$  in  $G(\emptyset)$  (7.3, Lemma 3), und die Zerlegung von  $x$  als Produkt von  $t$  und  $u$  ist die Jordanzerlegung von  $x$  (7.3, Satz). Daher ist  $x$  in  $G$  zu einem Element  $t \cdot u' \in B$  mit halbeinfachem Teil  $t$ , also  $u' \in U(t)$ , konjugiert:

$$gtg^{-1} \cdot gug^{-1} = gxg^{-1} = t \cdot u' \quad (\text{für ein } g \in G) .$$

Aus der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung folgt nun  $g \in Z(t)$  und  $gug^{-1} = u'$ , w.z.z.w..

Korollar 2: Sei  $t \in T$  und  $Z(t)$  endlichdimensional. Dann ist  $\text{Uni}(t)$   $Z(t)$ -isomorph zur unipotenten Varietät von  $Z(t)$ .

In der Situation dieses Korollars ist die Klassifikation der  $Z(t)$ -Konjugationsklassen in  $\text{Uni}(t)$  aufgrund der endlichdimensionalen Theorie bekannt (vgl. Kapitel 2).

### 7.5 Der lokal-endliche adjungierte Quotient

Sei  $x \in G(\phi)$  mit Jordanzerlegung  $x = x_s \cdot x_u$ . Nach 7.4, Proposition 1 und Korollar 1, trifft die Konjugationsklasse  $\tilde{C}(x_s)$  von  $x_s$  den maximalen Torus  $T$  in genau einem  $W$ -Orbit

$$\chi_{G(\phi)}(x) = \tilde{C}(x_s) \cap T.$$

Wir nennen die so definierte Abbildung

$$\chi_{G(\phi)} : G(\phi) \longrightarrow T/W$$

den (lokal-endlichen) adjungierten Quotienten von  $G(\phi)$ . Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir auch  $\chi$  statt  $\chi_{G(\phi)}$ .

Nach Konstruktion ist die Abbildung  $\chi$  invariant gegenüber Konjugation mit Elementen aus  $G$ :

$$\chi(gxg^{-1}) = \chi(x) \quad \text{für alle } x \in G(\phi), \quad g \in G.$$

Jede Faser von  $\chi$  ist somit eine Vereinigung von Konjugationsklassen, von denen nach 7.4, Korollar 1, genau eine halbeinfach ist.

Da die Einschränkung  $\chi|_T : T \rightarrow T/W$  die natürliche Abbildung und insbeson-

dere surjektiv ist, schreibt sich jede Faser von  $\chi$  in der Form  $\chi^{-1}(\chi(t))$  für ein  $t \in T$  (das bis auf Konjugation mit  $W$  eindeutig bestimmt ist).

Satz: Für alle  $t \in T$  induziert die Abbildung

$$\alpha_t : G \times^{Z(t)} \text{Uni}(t) \rightarrow \chi^{-1}(\chi(t))$$

$$\alpha_t(g * u) = g t u g^{-1}$$

einen  $G$ -Isomorphismus.

Beweis: Sei  $x \in \chi^{-1}(\chi(t))$ . Nach Definition von  $\chi$  ist dann der halbeinfache Teil  $x_s$  von  $x$  zu  $t$  konjugiert. Aufgrund der Invarianz der Jordanzerlegung unter Konjugation mit  $G$  (7.3, Korollar 1) erhalten wir mit der Zuordnung

$$x \longmapsto x_s$$

eine  $G$ -äquivariante Abbildung

$$\sigma : \chi^{-1}(\chi(t)) \rightarrow G/Z(t)$$

auf die Konjugationsklasse von  $t$ , die wir mit dem homogenen Raum  $G/Z(t)$  identifizieren. Die Faser von  $\sigma$  über dem  $t$  entsprechenden Punkt  $Z(t)/Z(t)$  von  $G/Z(t)$  besteht aus allen Elementen  $x \in G(\emptyset)$  deren halbeinfacher Teil  $t$  ist, d. h. aus allen Elementen der Form

$$x = t \cdot u$$

mit  $u \in Z(t) \cap G(\emptyset)$  und  $u$  unipotent (vgl. 7.3, Lemma 3 und Satz). Als  $Z(t)$ -Menge ist diese Faser daher isomorph zu  $\text{Uni}(t)$ . Die Behauptung folgt nun aus den allgemeinen Tatsachen über assoziierte Bündel.



In der obigen Definition von  $\chi$  haben wir die in 7.3 definierte Jordanzerlegung für Elemente aus  $G(\emptyset)$  benutzt, weil diese Zerlegung eine einfache Analyse der Fasern von  $\chi$  gestattet. Eine theoretisch weniger voraussetzende Definition (wie z. B. in [Slodowy<sub>3</sub>] 13) wird durch die folgende Aussage ermöglicht:

Lemma: Sei  $g \in G(\emptyset)$  konjugiert zu  $b \in B$ , und sei  $\bar{t}$  das Bild in  $T/W$  des T-Anteils  $t$  von  $b$ . Dann gilt  $\chi(g) = \bar{t}$ .

Beweis: Nach 7.2, Lemma 1 (Beweis), ist der halbeinfache Teil von  $b$  zu  $t$  konjugiert. Die Behauptung folgt somit aus der Definition von  $\chi$ .

Bemerkung: Mit den Notationen des Lemmas hätte man also  $\chi(g)$  als  $\bar{t}$  definieren können. Daß diese Vorschrift eine Abbildung definiert, die zudem konjugationsinvariant ist, folgt schon aus der Bruhatzerlegung und der Gleichheit  $B \cap {}^n B = T \times (U \cap {}^n U)$  für alle  $n \in N$ . Letztere ist in Tits-Systemen von allgemeinerer Art als den hier betrachteten erfüllt. In dieser alternativen Definition von  $\chi$  ist schon implizit der Standpunkt der "simultanen Auflösung" von  $\chi$  eingenommen. Letztere ist der Gegenstand des folgenden Abschnitts.

## 7.6 Eine simultane Auflösung

Sei  $G \times^B B$  das Bündel assoziiert zur  $B$ -Faserung  $G \rightarrow G/B$  und zur  $B$ -Aktion auf sich selbst durch Konjugation. Da die Projektion von  $B$  auf  $T$  invariant ist gegenüber Konjugation mit  $B$ , erhalten wir eine  $G$ -invariante Abbildung

$$\tilde{\chi}_{G(\emptyset)} : G \times^B B \rightarrow T$$

$$g * tu \mapsto t$$

(dabei ist  $tu$  die Zerlegung in  $B$  entsprechend dem semidirekten Produkt  $T \rtimes U$ ). Sei

$$\phi : G \times^B B \rightarrow G(\emptyset)$$

durch  $\phi(g * b) = gbg^{-1}$  definiert und

$$\bar{\phi} : T \rightarrow T/W$$

die natürliche Quotientenabbildung. Aufgrund von 7.5, Lemma, ist dann das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} G \times^B B & \xrightarrow{\phi} & G(\emptyset) \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \chi \\ T & \xrightarrow{\bar{\phi}} & T/W \end{array} .$$

(Wie für  $\chi$  unterdrücken wir den Index  $G(\emptyset)$  von  $\tilde{\chi}$ , sofern keine Konfusion zu befürchten ist.)

Für jedes  $t \in T$  hat die Faser  $\tilde{\chi}^{-1}(t)$  die Gestalt  $G \times^B tU$ .

**Proposition 1:** Die Abbildung  $\gamma_t : G \times^{Z(t)} (Z(t) \times^{B(t)} U(t)) \rightarrow \tilde{\chi}^{-1}(t)$ ,

$\gamma_t(g * (z * u)) = gz * tu \in G \times^B tU$ , ist ein  $G$ -Isomorphismus.

**Beweis:** Nach 7.2, Proposition, induziert die Abbildung  $\beta_t : b * u \mapsto btub^{-1}$  einen  $B$ -Isomorphismus  $B \times^{B(t)} U(t) \xrightarrow{\sim} tU$ . Die Behauptung über  $\gamma_t$  ergibt sich nun aus der folgenden Faktorisierung von  $\gamma_t$  in drei natürliche Iso-

morphismen

$$G \times^{Z(t)} (Z(t) \times^{B(t)} U(t)) \xrightarrow{\sim} G \times^{B(t)} U(t) \xrightarrow{\sim} G \times^B (B \times^{B(t)} U(t)) \xrightarrow{id * \beta_t} G \times^B_t U$$

$$g * (z * u) \longmapsto gz * u \longmapsto gz * (e * u) \longmapsto gz * tu \quad .$$

Sei  $\phi_t : \tilde{X}^{-1}(t) \rightarrow X^{-1}(\bar{\phi}(t)) = X^{-1}(\chi(t))$  die Einschränkung von  $\phi$  auf die Faser von  $\tilde{X}$  über  $t$ , und sei  $\pi_t : Z(t) \times^{B(t)} U(t) \rightarrow \text{Uni}(t)$  durch  $\pi_t(z * u) = zuz^{-1}$  definiert.

**Proposition 2:** Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} G \times^{Z(t)} (Z(t) \times^{B(t)} U(t)) & \xrightarrow{id * \pi_t} & G \times^{Z(t)} \text{Uni}(t) \\ \downarrow \gamma_t & & \downarrow \alpha_t \\ \tilde{X}^{-1}(t) & \xrightarrow{\phi_t} & X^{-1}(\chi(t)) \end{array}$$

**Beweis:** Nach Definition der involvierten Abbildungen gilt

$$\alpha_t \circ (id * \pi_t)(g * (z * u)) = \alpha_t(g * zuz^{-1}) = gtzuz^{-1}g^{-1}$$

$$\phi_t \circ \gamma_t(g * (z * u)) = \phi_t(gz * tu) = gztuz^{-1}g^{-1} \quad .$$

Wegen  $z \in Z(t)$  sind beide Ausdrücke gleich.

Ist  $Z(t)$  endlichdimensional und zusammenhängend, so ist

$$\pi_t : Z(t) \times^{B(t)} U(t) \rightarrow \text{Uni}(t)$$

eine Auflösung der Singularitäten der unipotenten Varietät  $\text{Uni}(t)$  von  $Z(t)$  (vgl. Kapitel 2). Wir haben den homogenen Raum  $G/Z(t)$  mit keiner

analytisch- oder algebraisch-geometrischen Struktur versehen. Andererseits wird  $G/Z(t)$  bezüglich jeder solchen Struktur, die zudem  $G$ -invariant ist, eine nichtsinguläre Mannigfaltigkeit sein. In diesem Sinne können wir die Abbildung

$$\text{id} * \pi_t : G \times^{Z(t)} (Z(t) \times^{B(t)} U(t)) \rightarrow G \times^{Z(t)} \text{Uni}(t)$$

als Auflösung der Singularitäten der Faser  $\chi^{-1}(\chi(t))$  auffassen.

Sei nun  $(H, \nabla, \Delta)$  frei und einfach zusammenhängend,  $\mathcal{T} \subset T$  der Diskontinuitätsbereich (6.3) und  $\mathcal{L}_\chi(\emptyset) = \{x \in G(\emptyset) \mid \chi(x) \in \mathcal{T}/W\}$ . Für  $t \in \mathcal{T}$  ist  $Z(t)$  endlichdimensional und zusammenhängend (vgl. 7.4). Wegen Proposition 2 können wir daher das eingeschränkte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times^B (\mathcal{T} \times U) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{L}_\chi(\emptyset) \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \chi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathcal{T}/W \end{array}$$

in Analogie zur endlichdimensionalen Situation (vgl. 1.14) als simultane Auflösung der Fasern von  $\chi$  über  $\mathcal{T}/W$  auffassen.

Bemerkung: Für den Fall, daß  $(H, \nabla, \Delta)$  nicht einfach zusammenhängend ist, lassen sich die gleichen Überlegungen anstellen wie im endlichdimensionalen Fall (vgl. [Slodowy<sub>2</sub>] 4.5).

### 7.7 Der volle adjungierte Quotient

Im folgenden sei  $(H, \nabla, \Delta)$  eine freie Cartansche Wurzelbasis. (Diese Voraussetzung ist nicht wesentlich, erleichtert aber den Rückgriff auf die

Resultate von Kapitel 6, vgl. auch die dortigen diesbezüglichen Bemerkungen).

Ziel dieses Abschnitts ist die Erweiterung des lokal-endlichen adjungierten Quotienten

$$\chi_{G(\emptyset)} : G(\emptyset) \longrightarrow T/W$$

zu einer konjugationsinvarianten Abbildung

$$\chi_G : G \longrightarrow \hat{T}/W$$

von  $G$  auf die in 6.4 konstruierte Vervollständigung  $\hat{T}/W$  von  $T/W$ . Entsprechend den Zerlegungen

$$G = \bigcup_{\theta \in \mathcal{V}} G(\theta) \quad \text{speziell} \quad \text{und} \quad \hat{T}/W = \bigcup_{\theta \in \mathcal{V}} (\hat{T}/W)(\theta) \quad \text{speziell}$$

mit  $(\hat{T}/W)(\theta) = T(\theta)/W_{\theta^\perp}$  (vgl. 6.4) werden wir  $\chi_G$  als Vereinigung von Abbildungen

$$\chi_{G(\theta)} : G(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp}, \quad \theta \in \mathcal{V} \text{ speziell},$$

definieren.

Dazu untersuchen wir zunächst die unter  $G$ -Konjugation stabilen Teilmengen  $G(\theta)$ .

**Proposition:** Sei  $\theta \in \mathcal{V}$  speziell. Dann definiert die Abbildung

$\kappa_\theta : g * p \mapsto gpg^{-1}$  einen  $G$ -Isomorphismus

$$\kappa_\theta : G \times \begin{matrix} P \\ \theta \cup \theta^\perp \end{matrix} \longrightarrow G(\theta).$$

Beweis: Nach 6.8, Korollar 2, ist jedes Element  $g \in G(\theta)$  in genau einer parabolischen Untergruppe  $P_g$  vom Typ  $\theta \cup \theta^\perp$  enthalten. Die Zuordnung

$$g \longmapsto P_g$$

definiert somit eine  $G$ -äquivariante Abbildung

$$\pi : G(\theta) \rightarrow \mathcal{Q}(\theta \cup \theta^\perp) \cong G/P_{\theta \cup \theta^\perp}$$

auf den homogenen Raum  $G/P_{\theta \cup \theta^\perp}$ . Die Faser von  $\pi$  über  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$  besteht aus allen Elementen in  $G(\theta) \cap P_{\theta \cup \theta^\perp} = P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$  (6.8, Korollar 3). Auf diesen operiert  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$  durch Konjugation. Die Behauptung folgt somit aus den allgemeinen Tatsachen über assoziierte Bündel.

Korollar: Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell. Für jedes  $g \in G(\theta)$  ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}(g, P_g) &= \{x \in G \mid xgx^{-1} \in P_g\} \text{ in } P_g \text{ enthalten. Insbesondere ist} \\ Z_G(g) &= \{x \in G \mid xgx^{-1} = g\} \text{ in } P_g \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Im folgenden sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  immer speziell. Wir betrachten die Levizerlegung  $P_{\theta \cup \theta^\perp} = L_{\theta \cup \theta^\perp} \ltimes U_{(\theta \cup \theta^\perp)}$  von  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$  (vgl. 5.9) und die abgeleitete Gruppe  $DL_\theta$  von  $L_\theta$ , die beide in  $L_{\theta \cup \theta^\perp}$  enthalten sind (vgl. 5.9). Dann ist  $DL_\theta$  normal in  $L_{\theta \cup \theta^\perp}$ . Nach Konstruktion von  $DL_\theta$  entspricht die Inklusion

$$T' = T \cap DL_\theta \hookrightarrow T$$

der Gitterinklusion

$$H' = H \cap (\mathbb{Q} \cdot \theta) \hookrightarrow H \quad .$$

Die Quotientengruppe

$$M_{\theta^\perp} := L_{\theta \cup \theta^\perp} / DL_\theta$$

ist nun assoziiert zur Wurzelbasis  $(H(\theta), \theta^\perp, \theta^{\perp\vee})$ ,  $H(\theta) = H/H'$ , und besitzt den maximalen Torus  $T(\theta) = T/T' = H(\theta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  mit Weylgruppe  $W_{\theta^\perp}$  (vgl. 6.4). Wir bezeichnen die Komposition der natürlichen Homomorphismen

$$P_{\theta \cup \theta^\perp} \longrightarrow L_{\theta \cup \theta^\perp} \longrightarrow M_{\theta^\perp}$$

mit  $\mu_{\theta^\perp}$ .

Lemma 1: Es gilt  $\mu_{\theta^\perp}(P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)) \subset M_{\theta^\perp}(\emptyset)$ .

Beweis: Das Bild von  $P_\theta$  unter  $\mu_{\theta^\perp}$  ist die Boreluntergruppe  $P_\theta / (DL_\theta \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)}) \cong T(\theta) \times U_{\theta^\perp}$  von  $M_{\theta^\perp}$ . Da alle  $g \in P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$  nach  $P_\theta$  konjugiert sind, sind die Bilder  $\mu_{\theta^\perp}(g)$  in diese Boreluntergruppe konjugiert.

Sei  $\chi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)} : M_{\theta^\perp}(\emptyset) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp}$  der lokal-endliche adjungierte Quotient von  $M_{\theta^\perp}$ . Dann ist die Komposition

$$\chi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)} \circ \mu_{\theta^\perp} : P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp}$$

invariant gegenüber Konjugation mit  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$ , und induziert daher eine  $G$ -invariante Abbildung

$$\lambda_\theta : G \times^{P_{\theta \cup \theta^\perp}} P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp} .$$

Wir definieren nun

$$\chi_G(\theta) := \lambda_\theta \circ \kappa_\theta^{-1} : G(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp} .$$

Nach Konstruktion ist diese Abbildung invariant gegenüber Konjugation mit  $G$  und surjektiv (6.10, Korollar 2). Wir nennen die Vereinigung

$$\bigcup_{\theta \subset \mathfrak{V}} \chi_{G(\theta)} : G \longrightarrow \hat{T}/W$$

speziell

den (vollen) adjungierten Quotienten von  $G$ , und schreiben dafür auch  $\chi_G$ .

In der obigen Definition von  $\chi_G$  haben wir die Konstruktion des lokal-endlichen adjungierten Quotienten für die Gruppen  $M_{\theta^\perp}$  schon vorausgesetzt. Ähnlich wie für  $\chi_{G(\emptyset)}$  läßt sich auch für  $\chi_G$  eine theoretisch anspruchslösere Definition geben, die nun eng mit einer "simultanen partiellen Auflösung" einhergehen wird (vgl. dazu 7.10).

Wir definieren die abgeleitete Gruppe  $DP_\theta$  von  $P_\theta = L_\theta \rtimes U_{(\theta)}$  als das semidirekte Produkt

$$DP_\theta = DL_\theta \rtimes U_{(\theta)}$$

(bezüglich der auf  $G$  durch das Definitionssystem von  $U$  induzierten Topologie ist  $DP_\theta$  der Abschluß der Kommutatoruntergruppe von  $P_\theta$ ). Es ist dann

$$P_\theta/DP_\theta \cong L_\theta/DL_\theta \cong T/T \cap DL_\theta \cong T(\theta) \quad .$$

Lemma 2: Sei  $g \in G(\theta)$  konjugiert zu  $p \in P_\theta$ . Sei  $t \in T(\theta)$  die Restklasse von  $p$  nach  $DP_\theta$  und  $\bar{t}$  das Bild von  $t$  in  $T(\theta)/W_{\theta^\perp}$ . Dann gilt  $\chi_G(g) = \bar{t}$ .

Beweis: Wegen  $p \in P_\theta$  ist  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$  die eindeutig bestimmte parabolische



Untergruppe vom Typ  $\theta \cup \theta^\perp$ , die  $p$  enthält. Wegen der Konjugationsinvarianz von  $\chi_G$  folgt die Behauptung nun aus der Tatsache, daß  $t \in T(\theta)$  gerade der  $T(\theta)$ -Anteil von  $\mu_{\theta^\perp}(p)$  in der Boreluntergruppe  $T(\theta) \times U_{\theta^\perp} \cong P_\theta / (DL_\theta \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)})$  von  $M_{\theta^\perp} = L_{\theta \cup \theta^\perp} / DL_\theta \cong P_{\theta \cup \theta^\perp} / (DL_\theta \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)})$  ist (vgl. 7.5, Lemma).

Bemerkungen: 1) Definiert man mit den Notationen von Lemma 2 die Abbildung  $\chi_G$  durch  $\chi_G(g) = \bar{t}$ , so hat man deren Wohldefiniertheit und Konjugationsinvarianz zu zeigen. Dazu benötigt man neben den schon in 7.5, Bemerkung, angeführten Voraussetzungen auch die Aussage des Korollars zur Proposition (welches sich auch direkt aus 6.8, Korollar 3, folgern läßt).

2) Eine erste Erweiterung des lokal-endlichen Quotienten

$\chi_{G(\emptyset)} : G(\emptyset) \rightarrow T/W$  über alle Randstrata von  $\hat{T}/W$  aber nur unter Berücksichtigung der Elemente aus  $N$  findet sich in [Slodowy<sub>4</sub>]. Die hier als Konsequenz des "Fixpunktsatzes" (6.8, Satz) definierte Erweiterung

$\chi_G : G \rightarrow \hat{T}/W$  stammt von E. Looijenga und wurde uns von ihm in der gerade beschriebenen alternativen Form mitgeteilt (vgl. 6.8, Bem. 1). Die von uns gewählte aufwendigere Form der Definition wird eine direkte Analyse der Fasern von  $\chi_G$  ermöglichen (vgl. 7.9).

### 7.8 Spezielle Fasern

Im Fall endlichdimensionaler reductiver Gruppen  $K$  läßt sich die Beschreibung der Fasern des adjungierten Quotienten reduzieren auf die Beschreibung einer speziellen Faser, nämlich der unipotenten Varietät einer reductiven Untergruppe von  $K$  (vgl. Kapitel 2). Andererseits läßt sich die Struktur der

unipotenten Varietät von  $K$  nicht weiter reduzieren und bedarf einer eigenen Analyse.

Im Abschnitt 7.5 haben wir gesehen, daß sich die Struktur der Fasern des lokal-endlichen adjungierten Quotienten einer Kac-Moody-Liegruppe  $G$  ebenfalls (wenigstens über  $\mathcal{T}/W$ ) auf solche unipotenten Varietäten zurückführen läßt. In diesem Abschnitt wollen wir das Analogon der unipotenten Varietät, die "speziellen Fasern", im vorliegenden Kontext einführen. Der folgende Abschnitt wird dann zeigen, daß die "geometrische" Struktur einer beliebigen Faser des vollen adjungierten Quotienten  $\chi_G : G \rightarrow \hat{T}/W$  mit Hilfe des Produktes einer "speziellen Faser" und einer unipotenten Varietät geeigneter Untergruppen von  $G$  beschrieben werden kann.

Im folgenden setzen wir  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  wieder als frei voraus. Zudem sei  $\mathcal{V}$  selbst speziell, d. h.  $\mathcal{V}$  besitze keine Komponenten von endlichem Typ.

Die Abbildung

$$\chi_{G(\mathcal{V})} : G(\mathcal{V}) \longrightarrow T(\mathcal{V})$$

identifiziert sich nun mit der Einschränkung des natürlichen Homomorphismus

$$G \longrightarrow G/DG$$

auf  $G(\mathcal{V})$ . Wir können  $G$  als ein semidirektes Produkt

$$G = DG \rtimes T(\mathcal{V})$$

schreiben, wobei wir  $T(\mathcal{V}) = T/T \cap DG$  mit einer Liftung nach  $T$  identifizieren (vgl. 5.9). Insbesondere gilt  $T = (T \cap DG) \times T(\mathcal{V})$ .

Wir nennen jede Faser  $\chi_{G(\mathcal{V})}^{-1}(t)$ ,  $t \in T(\mathcal{V})$ , eine spezielle Faser in  $G$  (oder von  $\chi_G$ ).

Bemerkung: Etwas allgemeiner und präziser könnten wir die Fasern von  $\chi_{G(\theta)}$ ,  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell, "spezielle Fasern vom Typ  $\theta$ " nennen. Wir benötigen diese Begriffsbildung jedoch nicht.

Die speziellen Fasern zu verschiedenen Elementen  $t \in T(\mathcal{V})$  brauchen keineswegs  $G$ -isomorph zu sein. Dies zeigt schon das Beispiel des affinen Falls (s. u.). Wir wollen nun genauer beschreiben, wann zwei spezielle Fasern isomorph sind.

Sei  $Z \subset G$  das Zentrum von  $G$ . Dann ist  $Z$  in  $T$  enthalten (vgl. 5.9).

Lemma 1: Sei  $\theta \subset \mathcal{V}$  speziell und  $g \in G(\theta)$ . Dann gilt auch  $gz \in G(\theta)$  für alle  $z \in Z$ .

Beweis: Folgt trivial aus der Tatsache, daß wegen  $Z \subset T$  das Zentrum  $Z$  in allen parabolischen Untergruppen von  $G$  enthalten ist.

Die Rechtsmultiplikation von  $Z$  auf  $G$  induziert eine Rechtsaktion von  $Z$  auf  $T(\mathcal{V}) = G/DG$ , bezüglich der die Abbildung  $G \rightarrow T(\mathcal{V})$  äquivariant wird. Mit Lemma 1 erhalten wir somit:

Korollar 1: Liegen  $t, t' \in T(\mathcal{V})$  im selben  $Z$ -Orbit, so sind  $\chi_{G(\mathcal{V})}^{-1}(t)$  und  $\chi_{G(\mathcal{V})}^{-1}(t')$   $G$ -isomorph.

Die Aktion von  $Z$  auf  $T(\mathcal{V})$  faktorisiert über die treue Rechtsmultiplikation von  $Z/Z \cap DG$  auf  $T/T \cap DG = T(\mathcal{V})$ .

Lemma 2: Die Dimension des Quotiententorus  $T(\mathbb{V})/Z = (T/T \cap DG)/(Z/Z \cap DG)$  ist gleich dem Korang der Cartanmatrix von  $(H, \mathbb{V}, \Delta)$ .

Beweis: Sei  $r = \dim T$ ,  $\ell = \dim T \cap DG = |\mathbb{V}| = |\Delta|$ . Wegen der Freiheit von  $\Delta$  gilt  $\dim Z = r - \ell$ . Die Behauptung folgt nun, da  $\dim Z \cap DG$  gerade gleich dem Korang der Cartanmatrix ist.

Korollar 2: Ist die Cartanmatrix von  $(H, \mathbb{V}, \Delta)$  nicht entartet, so sind alle speziellen Fasern in  $G$  zueinander  $G$ -isomorph.

Ist die Cartanmatrix entartet, so kann man den Korang derselben als Zahl der "Moduli" der speziellen Fasern auffassen (obwohl wir hier nicht zeigen können, daß diese Moduli effektiv sind).

Beispiel: Die einfachste entartete Cartanmatrix ist die vom Typ  $A_1^{(1)}$  (vgl. 3.5). Die Gruppe  $G$  zu einer minimalen freien Wurzelbasis  $(H, \mathbb{V}, \Delta)$  dieses Typs ist dann eine zentrale Erweiterung

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow SL_2(\mathbb{C}((z))) \rtimes \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

mit  $Z \cong \mathbb{C}^*$  (vgl. 5.8). Der Quotient  $T(\mathbb{V}) = G/DG$  identifiziert sich mit dem Faktor  $\mathbb{C}^*$  des semidirekten Produktes. Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}^* = T(\mathbb{V})$  mit  $\lambda \bar{\lambda} \neq 1$  erhält man ein vollständiges Repräsentantensystem für die  $G$ -Konjugationsklassen in  $\chi_{G(\mathbb{V})}^{-1}(\lambda)$  durch die Menge

$$\{\tau_n \cdot \lambda \mid n = 1, 2, 3, \dots\} .$$

Dabei ist  $\tau_n$  ein Urbild in  $G$  des Elementes  $\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$  von  $SL_2(\mathbb{C}((z)))$ . Unter Benutzung des "endlichen" Tits-Systemes von  $SL_2$  lassen sich die Zen-

tralisatoren der Elemente  $\tau_n \cdot \lambda$  berechnen. Man erhält so z. B. für

$$\tau = \tau_1 :$$

$$Z_G(\tau \cdot \lambda) = Z \times \langle (\tau \cdot \lambda)^m \mid m \in \mathbb{Z} \rangle .$$

Insbesondere sind diese Zentralisatoren für verschiedene  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda\lambda' \neq 1$ , nicht in  $\mathfrak{g}$  konjugiert. Für die "Geometrie" des Orbits  $\text{Ad}(G)(\tau \cdot \lambda) \cong G/Z_G(\tau \cdot \lambda)$  ist möglicherweise nur der Modul der elliptischen Kurve  $\mathbb{C}^*/\langle \lambda^m \mid m \in \mathbb{Z} \rangle$  wesentlich, auf die dieser Orbit in natürlicher Weise projiziert.

Bemerkung: Im allgemeinen und auch im Fall  $A_1^{(1)}$  ist uns bisher noch zu wenig bekannt, um Aussagen über die "Geometrie" der speziellen Fasern machen zu können. Wie dieser und der nächste Abschnitt zeigen, ist ein Fortschritt im Verständnis der speziellen Fasern wesentlich für die Vervollständigung der Resultate dieser Arbeit.

### 7.9 Die Struktur allgemeiner Fasern

In diesem Abschnitt wollen wir beliebige Fasern von  $\chi_G$  betrachten. Als Hauptresultat beschreiben wir eine Reduktion dieser Fasern auf Produkte spezieller Fasern mit unipotenten Varietäten in geeigneten Untergruppen von  $G$ .

Wir fixieren wieder eine freie Wurzelbasis  $(H, \mathbb{V}, \Delta)$  und dazu eine spezielle Teilmenge  $\theta \subset \mathbb{V}$ . (Diese Teilmenge kann mit  $\emptyset$  oder  $\mathbb{V}$  übereinstimmen, jedoch liefern die folgenden Untersuchungen für diese Grenzfälle keine neuen Einsichten, vgl. 7.5, 7.8).

Jede Faser von

$$\chi_{G(\theta)} : G(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp}$$

läßt sich nach Identifikation von  $G(\theta)$  mit  $G \times^{P_{\theta \vee \theta^\perp}} P_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta)$  (vgl. 7.7, Proposition) und nach Definition von  $\chi_{G(\theta)}$  in der Form eines assoziierten Bündels

$$G \times^{P_{\theta \vee \theta^\perp}} (\chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset) \circ \mu_{\theta^\perp})^{-1}(\bar{t}) \quad , \quad \bar{t} \in T(\theta)/W_{\theta^\perp} \quad ,$$

schreiben. Die Abbildung  $\mu_{\theta^\perp}$  faktorisiert als Komposition

$$P_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta) \xrightarrow{\pi_{\theta \vee \theta^\perp}} L_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta) \xrightarrow{m_{\theta^\perp}} M_{\theta^\perp}(\emptyset) \quad .$$

Da sich  $P_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta)$  nach 6.8, Lemma 2, in der Form

$$P_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta) = L_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta) \times U_{(\theta \vee \theta^\perp)}$$

zerlegt, ist  $(\chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset) \circ \mu_{\theta^\perp})^{-1}(\bar{t})$   $P_{\theta \vee \theta^\perp}$ -isomorph zu

$$((\chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset) \circ m_{\theta^\perp})^{-1}(\bar{t})) \times U_{(\theta \vee \theta^\perp)} \quad .$$

Wir wollen deshalb im folgenden die Fasern der Komposition

$$L_{\theta \vee \theta^\perp}(\theta) \xrightarrow{m_{\theta^\perp}} M_{\theta^\perp}(\emptyset) \xrightarrow{\chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset)} T(\theta)/W_{\theta^\perp}$$

untersuchen. Neben dem Homomorphismus

$$m_{\theta^\perp} : L_{\theta \vee \theta^\perp} \longrightarrow L_{\theta \vee \theta^\perp}/DL_{\theta^\perp} = M_{\theta^\perp}$$

betrachten wir auch den Homomorphismus

$$m_{\theta} : L_{\theta \vee \theta^\perp} \longrightarrow L_{\theta \vee \theta^\perp}/DL_{\theta^\perp} =: M_{\theta} \quad .$$

Sei  $H(\theta \cup \theta^\perp) = H/H \cap (\mathbb{Q} \cdot \theta + \mathbb{Q} \cdot \theta^\perp)$  und

$$T(\theta \cup \theta^\perp) = H(\theta \cup \theta^\perp) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* .$$

Dann erhalten wir natürlich spaltende exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & DL_\theta \times DL_{\theta^\perp} & \longrightarrow & L_{\theta \cup \theta^\perp} & \longrightarrow & T(\theta \cup \theta^\perp) \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \\ 1 & \longrightarrow & DL_\theta & \longrightarrow & M_\theta & \xrightarrow{\mathcal{J}} & T(\theta \cup \theta^\perp) \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \\ 1 & \longrightarrow & DL_{\theta^\perp} & \longrightarrow & M_{\theta^\perp} & \xrightarrow{\mathcal{J}^\perp} & T(\theta \cup \theta^\perp) \longrightarrow 1 . \end{array}$$

Insbesondere identifiziert sich  $L_{\theta \cup \theta^\perp}$  mit dem Faserprodukt von  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{J}^\perp$  :

$$\begin{array}{ccc} L_{\theta \cup \theta^\perp} & \xrightarrow{m_\theta} & M_\theta \\ \downarrow m_{\theta^\perp} & & \downarrow \mathcal{J} \\ M_{\theta^\perp} & \xrightarrow{\mathcal{J}^\perp} & T(\theta \cup \theta^\perp) \end{array}$$

**Lemma 1:** Es gilt  $x \in L_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$  genau dann, wenn  $m_\theta(x) \in M_\theta(\theta)$  und  $m_{\theta^\perp}(x) \in M_{\theta^\perp}(\emptyset)$  .

**Beweis:** Für jede Kac-Moody-Liegruppe  $K$  identifiziert die Abbildung  $P \mapsto P \cap DK$  das Gebäude  $\mathfrak{B}(K)$  von  $K$  auf kanonische Weise mit dem Gebäude  $\mathfrak{B}(DK)$  der abgeleiteten Gruppe  $DK$  . Daher identifiziert sich das Gebäude von  $L_{\theta \cup \theta^\perp}$  mit dem von  $DL_{\theta \cup \theta^\perp} = DL_\theta \times DL_{\theta^\perp}$  , welches wiederum mit dem von  $M_\theta \times M_{\theta^\perp}$  übereinstimmt. Letzteres ist das Produkt der Gebäude von  $M_\theta$  und  $M_{\theta^\perp}$  (der "join" im Sinne von [Tits<sub>2</sub>] 1.1). Die Identifikation

$$\mathcal{P}(L_{\theta \cup \theta^\perp}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(M_\theta) \times \mathcal{P}(M_{\theta^\perp})$$

ist nun äquivariant bezüglich des Homomorphismus

$$L_{\theta \cup \theta^\perp} \longrightarrow M_\theta \times M_{\theta^\perp} .$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Die etwas umständlichen Argumentationen mit dem Faserprodukt sind nötig, da sich  $L_{\theta \cup \theta^\perp}$  im allgemeinen nicht als direktes Produkt von  $DL_\theta$  mit  $M_{\theta^\perp}$  zerlegen läßt.

Korollar 1: Die Menge  $L_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$  ist das Faserprodukt von  $M_\theta(\theta)$  und  $M_{\theta^\perp}(\emptyset)$  :

$$\begin{array}{ccc} L_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) & \xrightarrow{m_\theta} & M_\theta(\theta) \\ \downarrow m_{\theta^\perp} & & \downarrow \mathcal{J} = \chi_{M_\theta}(\theta) \\ M_{\theta^\perp}(\emptyset) & \xrightarrow{\mathcal{J}^\perp} & T(\theta \cup \theta^\perp) \end{array} .$$

Lemma 2: Die Abbildung  $\mathcal{J}^\perp$  faktorisiert über den lokal-endlichen adjungierten Quotienten  $\chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset)$  :

$$\begin{array}{ccc} M_{\theta^\perp}(\emptyset) & \xrightarrow{\mathcal{J}^\perp} & T(\theta \cup \theta^\perp) \\ & \searrow \chi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset) & \nearrow \bar{\mathcal{J}} \\ & T(\theta)/W_{\theta^\perp} & \end{array}$$



Beweis: Die Aussage folgt aus 7.5, Lemma, und der Tatsache, daß für alle  $t \in T(\theta)$  und  $n \in N_{\theta^+} \cap M_{\theta^+}$  das Element  $ntn^{-1}t^{-1}$  in  $DM_{\theta^+} = DL_{\theta^+}$  liegt.

Korollar 2: Sei  $\bar{t} \in T(\theta)/W_{\theta^+}$ . Dann ist die Faser  $(\chi_{M_{\theta^+}(\emptyset)} \circ m_{\theta^+})^{-1}(\bar{t})$   $L_{\theta \cup \theta^+}$ -isomorph zu

$$\chi_{M_{\theta^+}(\emptyset)}^{-1}(\bar{t}) \times \chi_{M_{\theta}(\theta)}^{-1}(\bar{v}(\bar{t})) .$$

Beweis: Nach Korollar 1 ist die besagte Faser isomorph zum Faserprodukt

$$\chi_{M_{\theta^+}(\emptyset)}^{-1}(\bar{t}) \times_{T(\theta \cup \theta^+)} M_{\theta}(\theta) .$$

Wegen  $\bar{v}^1(\chi_{M_{\theta^+}(\emptyset)}^{-1}(\bar{t})) = \bar{v}(\bar{t})$  folgt die Behauptung.

Korollar 2 und die Ausführungen zu Anfang dieses Abschnitts liefern nun das folgende Resultat:

Satz: Sei  $\bar{t} \in T(\theta)/W_{\theta^+}$ . Dann ist die Faser  $\chi_{G(\theta)}^{-1}(\bar{t})$   $G$ -isomorph zu dem assoziierten Bündel

$$G \times^{P_{\theta \cup \theta^+}} ((\chi_{M_{\theta^+}(\emptyset)}^{-1}(\bar{t}) \times \chi_{M_{\theta}(\theta)}^{-1}(\bar{v}(\bar{t}))) \times_{U_{(\theta \cup \theta^+)}}) .$$

Bemerkung: Die  $P_{\theta \cup \theta^+}$ -Struktur auf der Bündelfaser ist durch die Einbettung der Faser nach  $P_{\theta \cup \theta^+}$  gegeben. Betrachtet man nur die Aktion von  $L_{\theta \cup \theta^+}$ , so respektiert diese die drei Faktoren. Auf dem ersten Faktor operiert  $L_{\theta \cup \theta^+}$  über den Quotienten  $M_{\theta^+}$ , auf dem zweiten über den Quotienten  $M_{\theta}$ , und auf dem dritten in der natürlichen Weise.

Ist  $t \in T(\theta)$  ein Urbild von  $\bar{t} \in T(\theta)/W_{\theta^\perp}$ , so gilt nach 7.5, Satz

$$\chi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)}(\bar{t}) \cong M_{\theta^\perp} \times Z_{M_{\theta^\perp}}(t) \text{Uni}(t) ,$$

wobei  $\text{Uni}(t)$  die unipotente "Varietät" der Gruppe  $Z_{M_{\theta^\perp}}(t)$  ist. Somit reduziert der obige Satz die Struktur der "Singularitäten" der Faser  $\chi_{G(\theta)}^{-1}(\bar{t})$  auf die des Produktes der speziellen Faser  $\chi_{M_\theta(\theta)}^{-1}(\bar{v}(\bar{t}))$  mit der unipotenten "Varietät"  $\text{Uni}(t)$ . Liegt  $t$  im Diskontinuitätsbereich  $\mathcal{J}(\theta) \subset T(\theta)$ , so ist  $\text{Uni}(t)$  eine endlichdimensionale algebraische Varietät (vgl. 7.4).

#### 7.10 Simultane partielle Auflösungen

Die Beschreibung der Fasern von  $\chi_G$  im letzten Abschnitt würde auch eine "Auflösung" derselben nahelegen, sofern nur eine äquivariante "Auflösung" spezieller Fasern bekannt wäre. Abgesehen von der Unklarheit über die geometrische Struktur spezieller Fasern kennen wir auch keinen Kandidaten für eine solche "Auflösung". In diesem Abschnitt wollen wir für jede Einschränkung

$$\chi_{G(\theta)} : G(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp} , \quad \theta \text{ speziell} ,$$

von  $\chi_G$  eine simultane partielle "Auflösung" konstruieren, die den speziellen Anteil einer Faser invariant läßt und den unipotenten Anteil auflöst.

Sei also  $\theta \in \mathcal{V}$  speziell und  $P_\theta \rightarrow T(\theta) = P_\theta/DP_\theta$  der natürliche Homomorphismus auf die Faktorkommutatorgruppe. Dann induziert dieser eine  $G$ -invariante Abbildung

$$\tilde{\chi}_{G(\theta)} : G \times^{P_\theta} P_\theta(\theta) \longrightarrow T(\theta) .$$

Nach 6.8, Korollar 3, ist  $P_\theta(\theta)$  in  $G(\theta)$  enthalten. Mit  $\phi_\theta(g * p) = gpq^{-1}$  erhalten wir daher eine (surjektive)  $G$ -äquivariante Abbildung

$$\phi_\theta : G \times^{P_\theta} P_\theta(\theta) \longrightarrow G(\theta) .$$

Sei  $\bar{\phi}_\theta : T(\theta) \rightarrow T(\theta)/W_{\theta^\perp}$  die natürliche Quotientenabbildung. Aufgrund von 7.7, Lemma 2, erweist sich nun das folgende Diagramm als kommutativ

$$\begin{array}{ccc} G \times^{P_\theta} P_\theta(\theta) & \xrightarrow{\phi_\theta} & G(\theta) \\ \downarrow \tilde{\chi}_{G(\theta)} & & \downarrow \chi_{G(\theta)} \\ T(\theta) & \xrightarrow{\bar{\phi}_\theta} & T(\theta)/W_{\theta^\perp} \end{array}$$

Wir wollen die Fasern von  $\tilde{\chi}_{G(\theta)}$  sowie die Einschränkungen von  $\phi_\theta$  auf diese Fasern untersuchen. Dazu führen wir ähnlich wie in 7.9 eine Reduktion auf geeignete Untergruppen durch. Sei

$$\tilde{\kappa}_\theta : G \times^{P_{\theta \cup \theta^\perp}} (P_{\theta \cup \theta^\perp} \times^{P_\theta} P_\theta(\theta)) \longrightarrow G \times^{P_\theta} P_\theta(\theta)$$

der durch  $g * (q * p) \mapsto gq * p$  definierte  $G$ -Isomorphismus und

$$\phi_P : P_{\theta \cup \theta^\perp} \times^{P_\theta} P_\theta(\theta) \longrightarrow P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$$

die Einschränkung von  $\phi_\theta : q * p \mapsto qpq^{-1}$ . Mit 7.7, Proposition, erhalten wir die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 G \times_{P_{\theta \cup \theta^{\perp}}} (P_{\theta \cup \theta^{\perp}} \times_{P_{\theta}} P_{\theta}(\theta)) & \xrightarrow{\text{id} * \phi_P} & G \times_{P_{\theta \cup \theta^{\perp}}} P_{\theta \cup \theta^{\perp}}(\theta) \\
 \downarrow \tilde{\kappa}_{\theta} & & \downarrow \kappa_{\theta} \\
 G \times_{P_{\theta}} P_{\theta}(\theta) & \xrightarrow{\phi_{\theta}} & G(\theta) \\
 \downarrow \tilde{\chi}_{G(\theta)} & & \downarrow \chi_{G(\theta)} \\
 T(\theta) & \xrightarrow{\bar{\phi}_{\theta}} & T(\theta)/W_{\theta^{\perp}}
 \end{array}$$

Sei

$$\chi_P = \chi_{M_{\theta^{\perp}}(\emptyset)} \circ \mu_{\theta^{\perp}} : P_{\theta \cup \theta^{\perp}}(\theta) \longrightarrow T(\theta)/W_{\theta^{\perp}},$$

und sei

$$\tilde{\chi}_P : P_{\theta \cup \theta^{\perp}} \times_{P_{\theta}} P_{\theta}(\theta) \longrightarrow T(\theta)$$

die Einschränkung von  $\tilde{\chi}_{G(\theta)}$ . Identifizieren wir  $\phi_{\theta}$  mit  $\text{id} * \phi_P$ , so nimmt die Einschränkung

$$\tilde{\chi}_{G(\theta)}^{-1}(t) \longrightarrow \chi_{G(\theta)}^{-1}(\bar{\phi}_{\theta}(t))$$

von  $\phi_{\theta}$  auf eine Faser von  $\tilde{\chi}_{G(\theta)}$  die Form

$$\text{id} * \phi_P : G \times_{P_{\theta \cup \theta^{\perp}}} \tilde{\chi}_P^{-1}(t) \longrightarrow G \times_{P_{\theta \cup \theta^{\perp}}} \chi_P^{-1}(\bar{\phi}_{\theta}(t))$$

an. Somit genügt es, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\theta \cup \theta^\perp} \times_{P_\theta} P_\theta(\theta) & \xrightarrow{\phi_P} & P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \\
 \downarrow \tilde{\chi}_P & & \downarrow \chi_P \\
 T(\theta) & \xrightarrow{\bar{\phi}_\theta} & T(\theta)/W_{\theta^\perp}
 \end{array}$$

zu analysieren.

Der Homomorphismus  $\mu_{\theta^\perp} : P_{\theta \cup \theta^\perp} \longrightarrow P_{\theta \cup \theta^\perp}/DL_\theta \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} = M_{\theta^\perp}$  sowie seine Einschränkung

$$P_\theta \longrightarrow P_\theta/DL_\theta \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} =: B_{\theta^\perp}$$

induzieren eine Faktorisierung des obigen Diagramms:

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\theta \cup \theta^\perp} \times_{P_\theta} P_\theta(\theta) & \xrightarrow{\phi_P} & P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \\
 \downarrow \text{id} * \mu_{\theta^\perp} & & \downarrow \mu_{\theta^\perp} \\
 P_{\theta \cup \theta^\perp} \times_{P_\theta} B_{\theta^\perp} & \xrightarrow{\phi_M} & M_{\theta^\perp}(\emptyset) \\
 \parallel & & \parallel \\
 M_{\theta^\perp} \times_{B_{\theta^\perp}} B_{\theta^\perp} & \xrightarrow{\phi_M} & M_{\theta^\perp}(\emptyset) \\
 \downarrow \tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)} & & \downarrow \chi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)} \\
 T(\theta) & \xrightarrow{\quad} & T(\theta)/W_{\theta^\perp}
 \end{array}$$

Dabei haben wir die Isomorphie

$$P_{\theta \cup \theta^\perp}/P_\theta \cong M_{\theta^\perp}/B_{\theta^\perp}$$

benutzt. Beachten wir, daß  $B_{\theta^\perp}$  eine Boreluntergruppe von  $M_{\theta^\perp}$  ist (es gilt  $B_{\theta^\perp} \cong T(\theta) \times U_{\theta^\perp}$  mit  $U_{\theta^\perp} = U \cap M_{\theta^\perp} = U \cap L_{\theta^\perp}$ ), so erkennen wir in dem unteren Quadrat die simultane "Auflösung" des lokal-endlichen adjungierten Quotienten von  $M_{\theta^\perp}$ .

Lemma: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\theta \cup \theta^\perp} \times_{P_\theta} P_\theta(\theta) & \xrightarrow{\phi_P} & P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \\
 \downarrow \text{id} * \mu_{\theta^\perp} & & \downarrow \mu_{\theta^\perp} \\
 P_{\theta \cup \theta^\perp} \times_{P_\theta} B_{\theta^\perp} & \xrightarrow{\phi_M} & M_{\theta^\perp}(\emptyset)
 \end{array}$$

ist cartesisch.

Beweis: Da  $\text{id} * \mu_{\theta^\perp}$  ein Morphismus assoziierter Bündel über der Basis  $P_{\theta \cup \theta^\perp}/P_\theta$  ist, und  $\phi_P$ ,  $\phi_M$  äquivariant gegenüber den Aktionen von  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$  sind, genügt es zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 P_\theta(\theta) & \hookrightarrow & P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_{\theta^\perp} & \hookrightarrow & M_{\theta^\perp}(\emptyset)
 \end{array}$$

cartesisch ist, d. h. daß  $g \in P_\theta(\theta)$  genau dann gilt, wenn  $g \in P_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta)$  und  $\mu_{\theta^\perp}(g) \in B_{\theta^\perp}$ . Dies folgt unmittelbar aus 6.8, Korollar 3.

Nach 7.9, Korollar 1, ist auch das folgende Diagramm cartesisch

$$\begin{array}{ccc}
 L_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} & \xrightarrow{m_{\theta^\perp} \times \text{id}} & M_\theta(\theta) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} \\
 \downarrow \mu_{\theta^\perp} & & \downarrow \chi_{M_\theta(\theta)} \circ \text{pr}_1 \\
 M_{\theta^\perp}(\emptyset) & \xrightarrow{\mathcal{V}^\perp} & T(\theta \cup \theta^\perp)
 \end{array}$$

Wir erhalten somit

Korollar: Sei  $t \in T(\theta)$ . Dann ist die Faser  $\tilde{\chi}_P^{-1}(t)$  isomorph zu dem Produkt

$$\tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)}^{-1}(t) \times \chi_{M_\theta(\theta)}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t)) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)}.$$

Bemerkung: Aufgrund der Isomorphie mit  $\tilde{\chi}_P^{-1}(t)$  ist das obige Produkt mit einer  $P_{\theta \cup \theta^\perp}$ -Aktion versehen. Die Untergruppe  $L_{\theta \cup \theta^\perp} \subset P_{\theta \cup \theta^\perp}$  operiert dabei durch das Produkt der natürlichen Operationen auf den einzelnen Faktoren. Für die Aktion der Untergruppe  $U_{(\theta \cup \theta^\perp)}$  gibt es keine einfachere Beschreibung als die über den Isomorphismus mit  $\tilde{\chi}_P^{-1}(t)$  (und der daraus resultierenden äquivarianten Einbettung in  $P_{\theta \cup \theta^\perp} \times^{P_\theta} (L_{\theta \cup \theta^\perp}(\theta) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)})$ ).

Bezüglich der in 7.9 etablierten Identifikation der Faser  $\chi_P^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t))$  mit dem Produkt

$$\chi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)}^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t)) \times \chi_{M_\theta(\theta)}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t)) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)}$$

nimmt nun die Einschränkung von  $\phi_P$

$$\phi_{P,t} : \tilde{\chi}_P^{-1}(t) \longrightarrow \chi_P^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t))$$

die Form eines Produktes an:

$$\phi_{P,t} = \left( \phi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset), t \right) \times \left( \text{id}_{\tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t))} \right) \times \left( \text{id}_{U_{(\theta \cup \theta^\perp)}} \right),$$

wobei  $\phi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset), t : \tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\emptyset)(t) \longrightarrow \chi_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\emptyset)(\bar{\phi}_\theta(t))$  die durch  $\phi_{M_{\theta^\perp}}$  induzierte "Auflösung" ist.

Nach den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnittes können wir die jetzt gewonnenen Resultate in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz: Sei  $t \in T(\theta)$ . Dann ist die Einschränkung von  $\phi_\theta$

$$\phi_{\theta,t} : \tilde{\chi}_{G(\theta)}^{-1}(t) \longrightarrow \chi_{G(\theta)}^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t))$$

G-isomorph zu der Abbildung

$$\begin{aligned} G \times {}^P_{\theta \cup \theta^\perp} \tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\emptyset)(t) \times \chi_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t)) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} &\longrightarrow \\ \longrightarrow G \times {}^P_{\theta \cup \theta^\perp} \chi_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\emptyset)(\bar{\phi}_\theta(t)) \times \chi_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t)) \times U_{(\theta \cup \theta^\perp)} &, \end{aligned}$$

die durch

$$g * (m, m', u) \longmapsto g * (\phi_{M_{\theta^\perp}}(\emptyset), t(m), m', u)$$

für  $g \in G$ ,  $m \in \tilde{\chi}_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\emptyset)(t)$ ,  $m' \in \chi_{M_{\theta^\perp}}^{-1}(\mathcal{V}^\perp(t))$ ,  $u \in U_{(\theta \cup \theta^\perp)}$  definiert ist.

Ist  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  einfach zusammenhängend, so sind auch alle Wurzelbasen



$(H(\theta), \theta, \theta^\vee)$ ,  $\theta \in \mathcal{V}$ , einfach zusammenhängend. In diesem Fall ist die Abbildung

$$\phi_{M_{\theta^\perp}(\emptyset), t} : \tilde{X}_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)}^{-1}(t) \longrightarrow X_{M_{\theta^\perp}(\emptyset)}^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t))$$

für alle Elemente  $t$  des Diskontinuitätsbereiches  $\mathcal{J}(\theta) \subset T(\theta)$  eine tatsächliche Auflösung der endlichdimensionalen unipotenten Varietät von  $Z_{M_{\theta^\perp}}(t)$ . Daher können wir

$$\phi_{\theta, t} : \tilde{X}_{G(\theta)}^{-1}(t) \longrightarrow X_{G(\theta)}^{-1}(\bar{\phi}_\theta(t))$$

als eine partielle Auflösung auffassen. Sei  $\mathcal{P}_\theta(\theta) \subset P_\theta(\theta)$  das Urbild von  $\mathcal{J}(\theta)$  unter der Abbildung  $P_\theta(\theta) \rightarrow T(\theta)$  und  $\mathcal{L}_\theta(\theta) \subset G(\theta)$  das Urbild von  $\mathcal{J}(\theta)/W_{\theta^\perp}$  unter  $X_{G(\theta)}$ . Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times \overset{P_\theta}{\mathcal{P}_\theta(\theta)} & \xrightarrow{\phi_\theta} & \mathcal{L}_\theta(\theta) \\ \downarrow \tilde{X}_{G(\theta)} & & \downarrow X_{G(\theta)} \\ \mathcal{J}(\theta) & \xrightarrow{\bar{\phi}_\theta} & \mathcal{J}(\theta)/W_{\theta^\perp} \end{array}$$

kann man nun eine simultane partielle Auflösung der Einschränkung von  $X_{G(\theta)}$  auf  $\mathcal{L}_\theta(\theta)$  nennen.

**Bemerkung:** Obwohl für jede Teilmenge  $G(\theta) \subset G$  separat definiert, ist die Abbildung  $X_G$  dennoch auf dem "einheitlichen" Objekt  $G$  definiert (auch  $X_G$  selbst läßt sich wahrscheinlich mittels der Charaktere zu Höchstgewichts-darstellungen, wenigstens auf deren Konvergenzbereich, einheitlich definieren). Somit stellt sich die Frage, ob auch die "simultanen partiellen Auflösungen"  $\tilde{X}_{G(\theta)}$  einheitlich, oder zumindest auf einem einheitlichen Objekt,

definiert werden können. Insofern dieses Objekt mit einer "analytischen" Struktur versehen sein sollte, wird die Antwort auf diese Frage in Anbetracht der Verhältnisse bei der simultanen Auflösung von Deformationen nicht-einfacher Singularitäten vermutlich negativ ausfallen.

### 7.11 Einige offene Fragen

Ist  $G$  eine reductive Gruppe mit einfach zusammenhängendem halbeinfachen Teil  $DG$ , so läßt sich der adjungierte Quotient  $\chi : G \rightarrow T/W$  realisieren mittels der Charaktere der fundamentalen Darstellungen (vgl. 2.1)

$$\chi(g) = (\chi_1(g), \dots, \chi_r(g)) \in \mathbb{C}^r \cong T/W .$$

Es stellt sich die Frage, ob eine ähnliche Aussage auch für Kac-Moody-Liegruppen zu einfach zusammenhängenden Wurzelbasen  $(H, \mathcal{V}, \Delta)$  gilt.

In der Arbeit [Slodowy<sub>4</sub>] haben wir diese Frage für die Einschränkung von  $\chi$  auf die Untergruppe  $N \subset G$  untersucht und darauf eine positive Antwort im folgenden Sinne gegeben.

Bezüglich einer zwar "naiven", aber für die dortigen Zwecke ausreichenden Definition von Spur und Spurklasse für Höchstgewichtsmoduln  $V^\omega$  lassen sich die zugehörigen Charaktere  $\chi^\omega$  auf der Teilmenge  $\mathcal{N} \subset N$  der universellen Spurklassenelemente auswerten. Erweitert man die fundamentalen dominanten Gewichte zu einer Basis von  $H^*$  (wie in 2.1), so faktorisiert die mittels der fundamentalen Charaktere  $\chi_i = \chi^{\omega_i}$ ,  $i = 1, \dots, r = \text{Rang } H^*$ , definierte Abbildung

$$\chi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{C}^r \quad , \quad \chi(n) = (\chi_1(n), \dots, \chi_r(n)) \quad ,$$

über eine Abbildung  $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{U}$  auf eine offene Umgebung  $\mathcal{U}$  des kleinsten Stratum  $\mathcal{T}(V)$  des vervollständigten Orbitraumes  $\hat{\mathcal{T}}/W$  (vgl. 6.4) und eine offene Einbettung  $\iota : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{C}^r$ :

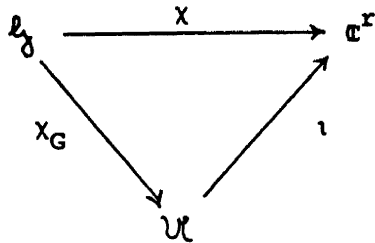
$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^r \\
 \searrow \tau & & \nearrow \iota \\
 & \mathcal{U} & \\
 & \cap & \\
 & \hat{\mathcal{T}}/W &
 \end{array}$$

Dabei identifiziert sich  $\tau$  mit der Einschränkung von  $\chi_G$  (vgl. 7.7) auf  $\mathcal{N}$  (die Definition von  $\chi_G$  stand in dieser früheren Arbeit noch nicht zur Verfügung!).

Für eine Ausweitung der Charaktere  $\chi^\omega$  auf die Gruppe  $G$  bedarf es einer analytischen Definition von Spur und Spurklasse. Falls  $(H, V, \Delta)$  symmetrisierbar ist, kann man dazu die in [Kac-Peterson<sub>3</sub>] konstruierte, positiv-definite hermitesche Form auf den Moduln  $V^\omega$  benutzen, die invariant gegenüber einer natürlichen "kompakten" Form von  $G$  ist. Wir vermuten, daß die Menge der Spurklassenoperatoren  $\mathcal{L}_\mathfrak{g} \subset G$  (in Bezug auf alle  $V^\omega$  und die darauf definierten Prä-Hilbertraumstrukturen) gerade das Urbild  $\chi_G^{-1}(\mathcal{U})$  der offenen Menge  $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{T}}/W \subset \hat{\mathcal{T}}/W$  (s. o.) ist, und daß die Abbildung

$$\chi : \mathcal{L}_\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}^r, \quad \chi(g) = (\chi_1(g), \dots, \chi_r(g)),$$

ähnlich wie ihre Einschränkung  $\chi|_{\mathcal{N}}$  faktorisiert:



Die letztere Vermutung ließe sich mit Ideen ähnlich denen in [Slodowy<sub>4</sub>] 6.5 beweisen, falls die folgende Teilaussage richtig wäre (es sei  $\mathbb{V}$  selbst speziell):

Für alle  $g \in \mathfrak{L}_g \cap G(\mathbb{V})$  und alle Höchstgewichtsmoduln  $v^\omega$  mit  $\omega(\mathbb{V}) \neq \{0\}$  gilt  $\chi^\omega(g) = 0$ .

Für die Elemente  $n \in \mathcal{N} \cap G(\mathbb{V})$  ist dies in loc. cit. bewiesen. In Anbetracht der vermuteten darstellungstheoretischen Interpretation von  $G(\mathbb{V})$  über die Nichtexistenz von Eigenvektoren (vgl. 6.9) erscheint die Gültigkeit der obigen Aussage auch für alle  $g \in \mathfrak{L}_g \cap G(\mathbb{V})$  plausibel.

Die Betrachtung der Charaktere  $\chi^\omega$  als Funktionen auf einem Teil  $\mathfrak{L}_g$  von  $G$  wirft die schon in früheren Bemerkungen angeschnittene Frage auf, ob  $G$  mit einer "algebraisch-" oder "analytisch-geometrischen" Struktur versehen werden kann, bezüglich der  $G$  möglichst viele der Eigenschaften algebraischer oder analytischer Gruppen besitzt. Diese Frage kann zur Zeit als noch nicht befriedigend geklärt angesehen werden. Auf einige Ansätze wollen wir aber kurz eingehen.

1) Die Varietät  $\mathfrak{B} \cong G/B$  aller Boreluntergruppen von  $G$  besitzt die Struktur eines induktiven Limes

$$\mathfrak{B} = \varinjlim S(\emptyset, w)$$

endlichdimensionaler Varietäten  $S(\emptyset, w)$  (vgl. 5.13, [Tits<sub>5</sub>]). Da  $G$  als

B-Prinzipalfaserbündel  $\eta : G \rightarrow G/B$  über  $\mathfrak{B}$  fasert, erhält  $G$  die Struktur eines induktiven Limes von proalgebraischen Varietäten:

$$G = \varinjlim \eta^{-1}(S(\emptyset, w)) \quad .$$

Auf allen "natürlichen" endlichdimensionalen Unterobjekten von  $G$ , i. e. den Gruppen  $T$ ,  $U_w$ ,  $Z_G(t)$  für  $t \in \mathfrak{T}$ , induziert diese Struktur die übliche einer algebraischen Varietät. Aus den Eigenschaften der Bruhatzerlegung folgt auch, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$  und die Inversion  $G \rightarrow G$  "Morphismen" von ind-proalgebraischen Varietäten sind. Zu untersuchen wäre die Frage, ob auch alle homogenen Räume sowie die Fasern von  $\chi_G$  natürliche ind-proalgebraische Strukturen tragen. Die Abbildung  $\chi_G$  selbst ist sicher kein ind-proalgebraischer "Morphismus". Schon die Einschränkung von  $\chi_G$  auf  $T$  ist nur analytisch auf dem Gebiet  $\mathfrak{T} \subset T$ ! In diesem Zusammenhang wäre auch an die Einführung proanalytischer Objekte und Morphismen zu denken.

2) Neben der Bruhatzerlegung besitzt  $G$  auch die dazu "duale" Birkhoffzerlegung, die eine Zerlegung von  $\mathfrak{B}$  in endlichkodimensionale "Zellen" und insbesondere eine "dicke Zelle" liefert. Mittels deren Urbild in  $G$  ließe sich auf  $G$  ein Atlas für eine "Raumstruktur" konstruieren. Dieser Ansatz scheint bisher vor allem von Interesse bei der Untersuchung von Gruppen zu affinen Wurzelbasen gewesen zu sein. In diesem Fall läßt sich die involvierte Funktionenalgebra  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  oder  $\mathbb{C}((z))$  in mannigfaltiger Weise variieren. (Für einige Aspekte in diesem Zusammenhang vergleiche man [Peterson-Kac], [Kac-Peterson<sub>2</sub>], [Tits<sub>5</sub>] sowie die dort zitierte Literatur.)

3) Als für unsere Zwecke besonders interessant vermuten wir die Konstruk-

tion in [Kac-Peterson<sub>2</sub>] einer Algebra  $\mathbb{C}[G]$  "stark regulärer" Funktionen auf  $G$ . Für diese Algebra gilt ein Satz à la Peter-Weyl, der es erlaubt, jede Funktion  $f \in \mathbb{C}[G]$  als Linearkombination von Matrixkoeffizienten zu Höchstgewichtsmoduln  $v^\omega$  auszudrücken (loc. cit. Theorem 1; man hat für diesen Satz  $G$  durch die von  $N$  und den  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ , erzeugte Untergruppe  $G^{\min}$  zu ersetzen). Die Algebra  $\mathbb{C}[G]$  trennt die Punkte von  $G$  und die Einschränkung von  $\mathbb{C}[G]$  auf die endlichdimensionalen Untergruppen  $U_w$ ,  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma^R$ ,  $DZ_G(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , induziert jeweils die Algebra der regulären Funktionen auf diesen algebraischen Gruppen. Ist insbesondere  $G$  endlichdimensional, so stimmt  $\mathbb{C}[G]$  mit der Algebra der regulären Funktionen auf  $G$  überein. Ist jedoch  $G$  unendlichdimensional, so induziert die Einschränkung von  $\mathbb{C}[G]$  auf  $T$  oder auf den vollen Zentralisator  $Z_G(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , nur noch eine Unter algebra der üblichen regulären Funktionen. So identifiziert sich  $\mathbb{C}[G]|_T$  mit der Unter algebra  $\mathbb{C}[A \cap H^*]$  der Koordinaten algebra  $\mathbb{C}[H^*]$  von  $T$ . Insbesondere identifiziert sich das maximale Spektrum von  $\mathbb{C}[G]|_T$  mit der in 6.4 konstruierten Vervollständigung  $\hat{T}$  von  $T$ . Es ist leicht zu sehen, daß die "Randpunkte" in  $\hat{T} \setminus T$  im maximalen Spektrum von  $\mathbb{C}[G]$  aber nicht in  $G$  liegen (dies verallgemeinert die Beobachtung in [Kac-Peterson<sub>2</sub>] Remark 2.2, vgl. auch Remark 4.6). Somit besteht  $\text{Specmax } \mathbb{C}[G]$  aus der Gruppe  $G$  und einer Menge von hinzugefügten idealen Punkten, die in einem gewissen Sinn die Gruppe  $G$  "holomorph vervollständigen". Wir schließen nicht aus, daß diese idealen Punkte gerade für die "Geometrie" der speziellen Fasern eine wichtige Rolle spielen und hoffen dies in späteren Arbeiten weiter aufklären zu können.

KAPITEL 8: BEZIEHUNGEN ZUR DEFORMATIONSTHEORIE VON SINGULARITÄTEN

8.1 Die semiuniversellen Deformationen der einfach elliptischen  
und Spitzensingularitäten

Sei  $(X, x)$  eine einfach elliptische oder Spitzensingularität vom Grad  $d \leq 5$ ,  $\psi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  eine semiuniverselle Deformation von  $(X, x)$  und  $\psi^* : Y^* \rightarrow U^*$  eine genügend kleine Milnorfaserung mit Milnorfaser  $F$ , vgl. Kapitel 1, insbesondere 1.16, 1.17. Wie dort schon im wesentlichen beschrieben, läßt sich  $(X, x)$  nach Wahl einer geeigneten geometrischen Basis  $(h_1, \dots, h_\mu)$  von  $H_2(F, \mathbb{Z})$  (bzw. einer geeigneten Basis aus verschwindenden Zykeln, falls  $d = 4, 5$  ist) eine Cartansche Wurzelbasis  $(\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$  zuordnen. Dabei ist  $\bar{H}$  der Quotient von  $H_2(F, \mathbb{Z})$  nach einem isotropen Rang-1-Untergitter,  $\bar{V}$  die Bildmenge  $\{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_\mu\}$  von  $\{h_1, \dots, h_\mu\}$  in  $\bar{H}$ , und  $\Delta = \bar{V}^* \subset \bar{H}^*$  wird über die nach  $\bar{H}$  absteigende Schnittform  $\langle , \rangle$  durch

$$h^\vee(h') = -\langle h, h' \rangle \quad \text{für} \quad h \in \bar{V} \quad , \quad h' \in \bar{H} \quad ,$$

definiert. Das Schnittdiagramm von  $(\bar{H}, \langle , \rangle)$  ist dann das unbewertete Coxeterdiagramm von  $(\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$ . In den Benennungen von 1.16, 1.17 ergeben sich dabei die folgenden Typen (wir benutzen die Notation  $\tilde{M}_k$  für  $M_k^{(0)}$  aus 3.5):

d	1	2	3	4	5
einfach elliptisch	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{A}_4$
Spitzensingularität	$T_{2,3,r}$	$T_{2,q,r}$	$T_{p,q,r}$	$H_{p,q,r,s}$	$P_{p,q,r,s,t}$

Alle Singularitäten der Nachbarfasern  $\psi^{-1}(v)$ ,  $v \in U$ , sind einfach oder einfach elliptisch, falls  $(X,x)$  einfach elliptisch ist, oder auch Spitzensingularitäten, falls  $(X,x)$  eine Spitzensingularität ist. Sei  $\mathcal{D}$  die Menge aller nicht notwendig zusammenhängenden Diagramme, deren Komponenten von einem Typ der obigen Liste oder vom Typ A, D, oder E sind. Durch die Zuordnung

$$v \in U \mapsto \text{Diagramm der Singularitäten in } \psi^{-1}(v)$$

erhalten wir somit eine Diagrammbewertung von  $U$

$$\delta : U \longrightarrow \mathcal{D} .$$

Aufgrund der Ergebnisse von Looijenga und Pinkham (vgl. [Looijenga<sub>3,5,6</sub>], [Merindol], [Pinkham<sub>2</sub>]) läßt sich  $(U, \delta)$  mittels der Wurzelbasis  $(\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$ , bzw. einer Modifikation derselben, beschreiben. Wir folgen dabei im wesentlichen der Formulierung in [Looijenga<sub>6</sub>]:

Ist  $(X,x)$  einfach elliptisch, so ist die Wurzelbasis  $(\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$  nicht frei. Wir betten dann  $(\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$  in eine freie Wurzelbasis  $(H, V, \Delta)$  vom gleichen Typ ein. Dabei ist  $H = \bar{H} \oplus \mathbb{Z} \cdot D$ ,  $V \hookrightarrow \bar{H} \subset H$ , und das System  $\Delta$  der einfachen Wurzeln wird nach  $H^*$  mit der Bedingung eingebettet, daß die minimale positive imaginäre Wurzel  $\gamma$  des von  $\Delta$  erzeugten Wurzelsystems auf  $D$  den Wert  $\gamma(D) = 1$  annimmt (vgl. 3.11, 4.13; bis auf Automorphismen des  $\Delta$  entsprechenden Diagramms ist  $(H, V, \Delta)$  eindeutig bestimmt). Im Fall einer Spitzensingularität setzen wir  $(H, V, \Delta) = (\bar{H}, \bar{V}, \Delta)$ . In beiden Fällen ist  $(H, V, \Delta)$  frei und einfach zusammenhängend.

Sei nun  $T = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  der zugehörige Torus mit Diskontinuitätsbereich



$\mathcal{T} \subset T$  und der partiellen Kompaktifizierung (vgl. 6.3, 6.4)

$$\hat{\mathcal{T}}/W = \bigcup_{\theta \subset \nabla} \mathcal{T}(\theta)/W_{\theta^{\perp}} \quad .$$

speziell

Wir definieren eine Bewertung

$$\sigma : \hat{\mathcal{T}}/W \longrightarrow \mathbb{D} \quad ,$$

indem wir einem Punkt  $\bar{t} \in \mathcal{T}(\theta)/W_{\theta^{\perp}}$  das Diagramm

$$\sigma(\bar{t}) = \sigma_{\infty}(\bar{t}) \cup \sigma_0(\bar{t})$$

zuordnen. Dabei ist  $\sigma_{\infty}(\bar{t})$  das durch die Teilmenge  $\theta \subset \nabla$  definierte Diagramm (von unendlichem Typ) und  $\sigma_0(\bar{t})$  das Diagramm der endlichen Isotropie-Spiegelungsgruppe

$$Z_{W_{\theta^{\perp}}}(t) = \{w \in W_{\theta^{\perp}} \mid w \cdot t = t\} \quad ,$$

für einen Repräsentanten  $t \in \mathcal{T}(\theta)$  von  $\bar{t}$ .

Ist  $(X, x)$  einfach elliptisch, so besteht das minimale Randstratum  $\mathcal{T}(\nabla)$  aus allen Elementen  $t$  des eindimensionalen Torus  $T(\nabla) = (\mathbb{Z} \cdot D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ , für die  $|\gamma(t)| > 1$  gilt. Wir identifizieren daher  $\mathcal{T}(\nabla)$  mit der Menge aller komplexen Zahlen  $\lambda$  vom Absolutbetrag  $> 1$ . Im Spitzenfall ist  $\mathcal{T}(\nabla)$  ein Punkt, den wir mit  $0$  bezeichnen.

Satz ([Looijenga<sub>6</sub>]): 1) Sei  $(X, x)$  einfach elliptisch vom Grad  $\leq 5$  und  $E$  die exzeptionelle elliptische Kurve in der Auflösung von  $(X, x)$ . Gilt dann  $E \cong \mathbb{C}^*/\langle \lambda^m \mid m \in \mathbb{Z} \rangle$  mit  $\lambda \in \mathcal{T}(\nabla)$ , so sind die bewerteten Keime  $(U, u, \delta)$  und  $(\hat{\mathcal{T}}/W, \lambda, \sigma)$  analytisch isomorph:

$$\begin{array}{ccc}
 (U, u) & \xrightarrow{\sim} & (\hat{\mathcal{T}}/W, \lambda) \\
 & \searrow \delta & \swarrow \sigma \\
 & \mathcal{D} &
 \end{array}$$

ii) Sei  $(X, x)$  eine Spitzensingularität vom Grad  $\leq 5$ . Dann sind die bewerteten Keime  $(U, u, \delta)$  und  $(\hat{\mathcal{T}}/W, 0, \sigma)$  analytisch isomorph:

$$\begin{array}{ccc}
 (U, u) & \xrightarrow{\sim} & (\hat{\mathcal{T}}/W, 0) \\
 & \searrow \delta & \swarrow \sigma \\
 & \mathcal{D} &
 \end{array}$$

Aufgrund dieses Satzes werden wir im folgenden die Basis  $(U, u)$  der semi-universellen Deformation  $\psi : (Y, x) \rightarrow (U, u)$  von  $(X, x)$  mit dem entsprechenden Raumkeim in  $\hat{\mathcal{T}}/W$  identifizieren.

## 8.2 Eine Vermutung

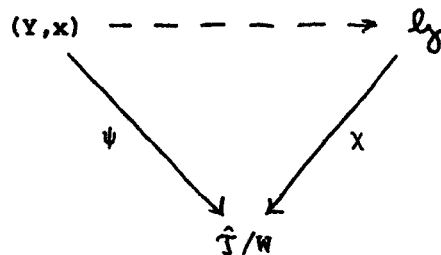
Wir betrachten die gleiche Situation wie in 8.1 und zudem die der Wurzelbasis  $(H, \nabla, \Delta)$  zugeordnete Gruppe mit adjungiertem Quotienten

$\chi_G : G \rightarrow \hat{\mathcal{T}}/W$ . Sei  $\mathfrak{h}_g \subset G$  das Urbild von  $\hat{\mathcal{T}}/W \subset \hat{\mathcal{T}}/W$  unter  $\chi_G$  und  $\chi_{\mathfrak{h}_g} : \mathfrak{h}_g \rightarrow \hat{\mathcal{T}}/W$  die Einschränkung von  $\chi_G$  auf  $\mathfrak{h}_g$ .

Nehmen wir auf  $\mathfrak{h}_g$  und  $G$  die Existenz einer analytisch-geometrischen Struktur an, die

- i) auf den endlichdimensionalen Untergruppen  $Z_G(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , die übliche analytische Struktur, und
- ii) auf den homogenen Räumen von  $G$  qua  $G$ -Äquivarianz eine nicht-singuläre Struktur induziert, sowie
- iii) die speziellen Fasern von  $G$  und den Leviuntergruppen  $L_\theta \subset G$ ,  $\theta \in \mathcal{V}$  speziell, mit einer generisch singularitätenfreien Struktur versieht.

Die Ergebnisse über die Struktur der Fasern von  $\chi$  (7.5, 7.8, 7.9) lassen dann die Vermutung als sinnvoll erscheinen, daß das Diagramm



durch eine Einbettung  $j : (Y, x) \rightarrow \mathcal{L}_g$  kommutativ ergänzt werden kann, gegebenenfalls nach Hinzunahme gewisser idealer Punkte zu  $\mathcal{L}_g$ , deren Urbild unter  $j$  gerade die singulären Punkte nichteinfachen Typs in den Fasern von  $\psi$  sind. Die folgenden Überlegungen sollen diese Vermutung unterstützen.

Hat  $\bar{t} \in \hat{\mathcal{T}}/W$  die  $\mathcal{D}$ -Bewertung  $\sigma_\infty(\bar{t}) \cup \sigma_0(\bar{t})$ , so gibt es in der Faser  $\psi^{-1}(\bar{t})$  einen singulären Punkt vom nichteinfachen Typ  $\sigma_\infty(\bar{t})$  (falls  $\sigma_\infty(\bar{t}) \neq \emptyset$  ist) und einfache singuläre Punkte, die den Komponenten von  $\sigma_0(\bar{t})$  entsprechen. Nach dem Satz in 7.9 schreibt sich  $\chi_G^{-1}(\bar{t})$  als homogenes Faserbündel, dessen Faser, bis auf einen "glatten" Faktor, das Pro-

dukt der speziellen Faser einer Gruppe vom Typ  $\sigma_{\infty}(\bar{t})$  mit der unipotenten Varietät einer halbeinfachen Gruppe vom Typ  $\sigma_0(\bar{t})$  ist. Die subregulären Orbits dieser unipotenten Varietät entsprechen den Komponenten von  $\sigma_0(\bar{t})$ . Entlang eines solchen Orbits ist diese unipotente Varietät lokal-analytisch das Produkt einer einfachen Singularität des entsprechenden Typs mit einem glatten Raum. Mit der Annahme iii) über die speziellen Fasern hat dann auch  $\chi_G^{-1}(\bar{t})$  entlang des entsprechenden G-Orbits die lokale analytische Struktur des Produktes einer einfachen Singularität mit einem glatten Faktor. Insofern lassen sich die einfachen singulären Punkte der Fasern von  $\psi$  in die entsprechenden Fasern von  $\chi_G$  einbetten. Das gleiche Argumentationsschema ließe sich auch auf die nichteinfachen singulären Punkte anwenden, sobald man wüßte, daß diese auf den speziellen Fasern des entsprechenden Typs realisierbar wären (gegebenenfalls nach Hinzufügung idealer Punkte). Dies ist jedoch ebenso wie die vollständige Beschreibung der speziellen Fasern ein offenes Problem.

Entsprechend der Zerlegung von  $\hat{J}/W$  in Randkomponenten, können wir auch  $\psi$  zerlegen. Für eine spezielle Teilmenge  $\theta \subset V$  sei  $Y(\theta) = \psi^{-1}(J(\theta)/W_{\theta^*})$  und

$$\psi_{\theta} : Y(\theta) \longrightarrow J(\theta)/W_{\theta^*}$$

die Einschränkung von  $\psi$  auf  $Y(\theta)$ . Aus den Ausführungen in 1.14 ergibt sich, daß die Familie  $\psi_{\theta}$  eine simultane partielle Auflösung der einfachen Singularitäten in den Fasern unter Beibehaltung der nichteinfachen Singularitäten gestattet

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Y}(\theta) & \xrightarrow{\quad} & Y(\theta) \\
 \downarrow \tilde{\psi}_\theta & & \downarrow \psi_\theta \\
 \mathcal{T}(\theta) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{T}(\theta)/w_{\theta^1}
 \end{array}$$

Diese sollte natürlich durch die simultane partielle Auflösung von  $X_{G(\theta)}$  induziert sein (vgl. 7.10 und die dortige Schlußbemerkung).

Bemerkungen: 1) Gemäß den obigen Ausführungen läßt sich für jeden einfachen singulären, oder auch nichtsingulären Punkt  $y$  einer Faser von  $\psi_\theta$  eine Umgebung dieses Punktes in der Faser finden, die sich in eine Nebenklasse einer endlichdimensionalen Untergruppe  $Z_{M_{\theta^1}}(t)$  einbetten läßt, und dabei in der entsprechenden Faser von  $X_{\ell_y}$  liegt. Unter Berücksichtigung der Offenheit der Versalität (vgl. 1.4) und der Aussage ii) des Satzes von Brieskorn (vgl. 2.4) läßt sich diese Einbettung auf eine Umgebung  $\mathcal{U}(y)$  des Punktes  $y$  in  $Y(\theta)$  ausdehnen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Y(\theta) \supset \mathcal{U}(y) & \xrightarrow{\quad} & \ell_y \\
 \downarrow \psi_\theta & & \downarrow X_{\ell_y} \\
 \mathcal{T}(\theta)/w_{\theta^1} & \xrightarrow{\quad} & \hat{\mathcal{T}}/w
 \end{array}$$

kommutiert. Solange jedoch das "Organisationszentrum"  $x$  des Totalraums  $(Y, x)$  keinen Widerpart in  $\ell_y$  findet, ist auch nicht klar ob diese lokalen Einbettungen kohärent miteinander verklebt werden können.

2) Sollte die in diesem Abschnitt formulierte Vermutung korrekt sein, so wirft dies die natürliche Frage auf, welche Familien von Singularitäten in

den adjungierten Quotienten von Gruppen zu finden sind, deren Wurzelbasen und Coxeterdiagramme nicht von bekannten Singularitäten stammen. Einige Fälle werden sich sicherlich entsprechend der Behandlung der Liegruppen vom Typ  $B_\ell$ ,  $C_\ell$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  in [Slodowy<sub>2</sub>] mit Hilfe von Singularitäten mit Symmetrie interpretieren lassen. Für die unendliche Vielfalt der verbleibenden Fälle wagen wir nichts zu vermuten.

L I T E R A T U R

Arnol'd, V. I.:

- 1) Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  and Lagrangian singularities; *Funct. Anal. Appl.* 6, 254 - 272 (1972)
- 2) Normal forms of functions in a neighborhood of a degenerate critical point; *Russian Math. Surveys* 29 (2), 11 - 50 (1974)

Artin, M.:

On isolated rational singularities of surfaces; *Amer. J. Math.* 88, 129 - 136 (1966)

Borel, A.:

- 1) *Linear Algebraic Groups*; Benjamin, New York 1969
- 2) Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts; *Ann. of Math.* 57, 115 - 207 (1953)

Borel, A., Hirzebruch, F.:

Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II; *Am. J. Math.* 80, 458 - 538 (1958), 81, 315 - 382 (1959)

Brieskorn, E.:

- 1) Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen; *Math. Ann.* 166, 76 - 102 (1966)
- 2) Rationale Singularitäten komplexer Flächen; *Inventiones math.* 4, 336 - 358 (1968)
- 3) Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen; *Math. Ann.* 178, 255 - 270 (1968)
- 4) Singular elements of semisimple algebraic groups; in: *Actes Congrès Intern. Math. 1970*, t. 2, 279 - 284

- 5) Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen; Manuscripta Math. 2, 103 - 161 (1970)
- 6) The unfolding of exceptional singularities; Nova Acta Leopoldina N. F. 52, No. 240, 65 - 93 (1981)
- 7) Milnor lattices and Dynkin diagrams; Proc. Symp. Pure Math. 40(1), 153 - 165 (1983)
- 8) Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten; Bonner Math. Schriften 150 (1983)
- 9) Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten; Manuscripta Math. 27, 183 - 219 (1979)

Cartan, H.:

Quotient d' un espace analytique par un groupe d' automorphismes; in "Algebraic Geometry and Topology", 90 - 102, Princeton Univ. Press 1957

Chevalley, C.:

Sur certains groupes simples; Tohoku Math. J. 7, 14 - 66 (1955)

Dieudonné, J.:

Calcul Infinitésimal; Hermann, Paris 1968

Durfee, A. H.:

Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points; L' Enseignement Mathématique 25 (1-2), 131 - 163 (1979)

Ebeling, W.:

- 1) Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten; Math. Annalen 255, 463 - 498 (1981)
- 2) On the monodromy groups of singularities; Proc. Symp. Pure Math. 40 (1), 327 - 336 (1983)
- 3) An arithmetic characterization of the symmetric monodromy groups of singularities; erscheint in Inventiones math.



Frenkel, I:

Orbital theory for affine Lie algebras; Thesis, Yale University,  
New Haven 1980

Gabber, O., Kac, V. G.:

On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras;  
Bull. AMS, New Series 5, 185 - 189 (1981)

Gabrielov, A. M.:

Dynkin diagrams for unimodal singularities; Functional Anal. Appl.  
8, 192 - 196 (1975)

Garland, H.:

- 1) The arithmetic theory of loop algebras; J. Algebra 53, 480 - 551  
(1978)
- 2) The arithmetic theory of loop groups; Publ. Math. IHES 52,  
5 - 136 (1980)

Garland, H., Lepowsky, J.:

Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas; Inventiones  
math. 34, 37 - 76 (1976)

Giusti, M.:

Classification des singularités isolées simples d'intersections  
complètes; Proc. Symp. Pure Math. 40 (1), 457 - 494 (1983)

Grauert, H.:

Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Men-  
gen; Inventiones math. 15, 171 - 198 (1972)

Gutkin, E., Slodowy, P.:

Cohomologie des variétés de drapeaux infinies; C. R. Acad. Sc.  
Paris 296, 625 - 627 (1983)

Hamm, H.:

Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume; Math. Annalen 191, 235 - 252 (1971)

Hartshorne, R.:

Algebraic Geometry; Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1977

Hirzebruch, F.:

Hilbert modular surfaces; L' Enseignement Mathématique 19, 183 - 282 (1973)

Humphreys, J.:

Linear Algebraic Groups, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1975

Husein-Zade, S. M.:

The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces; Russian Math. Surveys 32 (2), 23 - 69 (1977)

Iwahori, N., Matsumoto, H.:

On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups; Publ. Math. IHES 25, 5 - 48 (1965)

Jacobson, N.:

Lie Algebras; Dover, New York, 1979

Kac, V. G.:

- 1) Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth; Math. USSR Izvestija 2, 1271 - 1311 (1968)
- 2) An algebraic definition of the compact Lie groups; Trudy MIEM 5, 36 - 47 (1969) (in Russisch)
- 3) Infinite-dimensional algebras and Dedekind's  $\eta$ -function; Functional Anal. Appl. 8, 68 - 70 (1974)

- 4) Infinite-dimensional algebras, Dedekind's  $\eta$ -function, classical Möbius function and the very strange formula; *Advances in Math.* 30, 85 - 136 (1978)
- 5) Infinite root systems, representations of graphs, and invariant theory; *Inventiones math.* 56, 57 - 92 (1980)

Kac, V. G., Peterson, D.:

- 1) Infinite-dimensional Lie algebras, Theta-functions, and modular forms; erscheint in *Advances of Math.*
- 2) Regular functions on certain infinite-dimensional groups; in "Arithmetic and Geometry", Vol. 2, 141 - 166, Ed. M. Artin, J. Tate, Birkhäuser, Boston, 1983
- 3) Unitary structure in representations of infinite-dimensional groups and a convexity theorem; *Inventiones math.* 76, 1 - 14 (1984)

Karras, U.:

- 1) Klassifikation 2-dimensionaler Singularitäten mit auflösbaren lokalen Fundamentalgruppen; *Math. Annalen* 213, 231 - 255 (1975)
- 2) Eigenschaften der lokalen Ringe in zweidimensionalen Spitzen; *Math. Annalen* 215, 117 - 129 (1975)
- 3) Deformations of cusp singularities; *Proc. Symp. Pure Math.* 30, 37 - 44 (1977)

Kas, A., Schlessinger, J.:

On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity; *Math. Annalen* 196, 23 - 29 (1972)

Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.:

Toroidal Embeddings I; *Lecture Notes in Math.* 339, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1974

Kirillov, A.:

Elements of the Theory of Representations; Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976

Knörrer, H.:

Die Singularitäten vom Typ  $\tilde{D}$ ; Math. Annalen 251, 135 - 150  
(1980)

Kostant, B.:

- 1) Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. 85, 327 - 404 (1963)
- 2) Quantization and unitary representations; in "Lectures in Modern Analysis and Applications III", Ed. C. T. Taam, Lecture Notes in Math. 170, 87 - 208, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970

Kovacic, J.:

Pro-algebraic groups and the Galois theory of differential fields; Amer. J. Math. 95, 507 - 536 (1973)

Kulikov, V. S.:

Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities; Functional Anal. Appl. 9, 69 - 70 (1975)

Lamotke, K.:

Die Homologie isolierter Singularitäten; Math. Zeitschrift 143, 27 - 44 (1975)

Laufer, H. B.:

- 1) Normal Two-dimensional Singularities; Annals of Math. Studies 71, Princeton University Press, Princeton 1971
- 2) On minimally elliptic singularities; Amer. J. Math. 99, 1257 - 1295 (1977)

Lê, D. T.:

Calcul du nombre de Milnor d' une singularité isolée d' intersection complète; Functional Anal. Appl. 8, 45 - 52 (1974)

Lepowsky, J.:

Lectures on Kac-Moody algebras; Université de Paris 6, Paris, 1978

Lepowsky, J., Moody, R. V.:

Hyperbolic Lie algebras and quasiregular cusps on Hilbert modular surfaces, *Math. Annalen* 245, 63 - 88 (1979)

LIE (Bourbaki, N.):

Groupes et algèbres de Lie, I - VIII, Hermann, Paris, 1971, 1972, 1968, 1975

Looijenga, E. J.:

- 1) A period mapping for certain semi-universal deformations, *Compositio Math.* 30, 299 - 316 (1975)
- 2) Root systems and elliptic curves; *Inventiones math.* 38, 17 - 32 (1976)
- 3) On the semi-universal deformation of a simple elliptic singularity II; *Topology* 17, 23 - 40 (1978)
- 4) Homogeneous spaces associated to unimodal singularities; *Proc. Internat. Congr. Math. Helsinki 1978*, 277 - 281
- 5) Invariant theory for generalized root systems; *Inventiones math.* 61, 1 - 32 (1980)
- 6) Rational surfaces with an anti-canonical cycle; *Annals of Math.* 114, 267 - 322 (1981)
- 7) The smoothing components of a triangle singularity I; *Proc. Symp. Pure Math.* 40 (2), 173 - 184 (1983)
- 8) Singular Points on Complete Intersections; *London Math. Soc. Lecture Notes* 77, Cambridge 1984
- 9) The smoothing components of a triangle singularity II; erscheint in *Math. Annalen*

Macdonald, I. G.:

Affine root systems and Dedekind's  $\eta$ -function; *Inventiones math.* 15, 91 - 143 (1972)

Marcuson, R.:

Tits' systems in generalized nonadjoint Chevalley groups;  
J. Algebra 34, 84 - 96 (1975)

Merindol, J. Y.:

Les singularités simples elliptiques, leurs déformations, les  
surfaces de Del Pezzo et les transformations quadratiques; Ann.  
scient. Ec. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série, 15, 17 - 44 (1982)

Miller, Th.:

Reelle Formen einfach elliptischer Singularitäten; Diplomarbeit,  
Bonn 1981

Milnor, J.:

Singular Points of Complex Hypersurfaces; Annals of Math. Studies  
61, Princeton University Press, Princeton, 1968

Moody, R. V.:

- 1) A new class of Lie algebras; J. Algebra 10, 211 - 230 (1968)
- 2) Euclidean Lie algebras; Can. J. Math. 21, 1434 - 1454 (1969)
- 3) Root systems of hyperbolic type; Advances in Math. 33, 144 - 160  
(1979)

Moody, R. V., Teo, K. L.:

Tits' systems with cristallographic Weyl groups; J. Algebra 21,  
178 - 190 (1972)

Mumford, D., Fogarty, J.:

Geometric Invariant Theory; Second enlarged edition, Springer,  
Berlin - Heidelberg - New York, 1982

Nakamura, I.:

- 1) Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular  
singularities I; Math. Annalen 252, 221 - 235 (1980)

- 2) Duality of cusp singularities; RIMS Kokyuroku 415, 1 - 18 (1981), Kyoto University

Peterson, D., Kac. V. G.:

Infinite flag varieties and conjugacy theorems; Proc. Natl. Acad. Sci. USA 80, 1778 - 1782 (1983)

Pinkham, H.:

- 1) Deformations of algebraic varieties with  $G_m$ -action; Astérisque 20, Soc. Math. France, 1974
- 2) Simple elliptic singularities, Del Pezzo surfaces and Cremona transformations; Proc. Symp. Pure Math. 30, 69 - 71 (1977)
- 3) Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnol'd et les surfaces  $K3$ ; C. R. Acad. Sc. Paris, 284, 615 - 618 (1977)
- 4) Groupe de monodromie des singularités unimodulaires exceptionnelles; C. R. Acad. Sc. Paris, 284, 1515 - 1518 (1977)
- 5) Resolution simultanée de points doubles rationnels; in "Séminaire sur les Singularités des Surfaces", Ed. M. Demazure, H. Pinkham, B. Teissier, Lecture Notes in Math. 777, 179 - 203 (1980)

Pourcin, G.:

Deformations de singularités isolées; C. R. Acad. Sci. Paris 276, 1217 - 1220 (1973)

Saito, K.:

- 1) Einfach elliptische Singularitäten; Inventiones math. 23, 289 - 325 (1974)
- 2) Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28, 775 - 792 (1982)
- 3) Extended affine root systems; in Vorbereitung

Segal, G.:

Unitary representations of some infinite dimensional groups;  
Commun. Math. Phys. 80, 301 - 342 (1981)

Serre, J. P.:

- 1) Groupes proalgébriques; Publ. Math. IHES 7 (1960)
- 2) Algèbres de Lie semi-simples complexes; Benjamin, New York, 1966
- 3) Arbres, amalgames,  $Sl_2$ ; Asterisque 46, Soc. Math. France, 1977

Siersma, D.:

Classification and deformation of singularities; Proefschrift,  
Amsterdam, 1974

Slodowy, P.:

- 1) Four Lectures on Simple Groups and Singularities; Communications of the Mathematical Institute 11, Rijksuniversiteit Utrecht, 1980
- 2) Simple Singularities and Simple Algebraic Groups; Lecture Notes in Math. 815, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980
- 3) Chevalley Groups over  $\mathbb{C}((t))$  and Deformations of Simply Elliptic Singularities, RIMS Kokyuroku 415, 19 - 38 (1981), Kyoto University und Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry, La Rábida, 1981, Lecture Notes in Math. 961, 285 - 301, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1982
- 4) A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems; erscheint in Compositio Mathematica

Springer, T. A.:

Linear Algebraic Groups; Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart,  
1981

Springer, T. A., Steinberg, R.:

Conjugacy classes, in: Borel et alii: Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Math. 131, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1970



Steinberg, R.:

- 1) Lectures on Chevalley groups; Yale University, New Haven, 1967
- 2) Conjugacy classes in algebraic groups, Lecture Notes in Math. 366, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1974
- 3) On the desingularization of the unipotent variety, Inventiones math. 36, 209 - 224 (1976)

Teissier, B.:

The hunting of invariants in the geometry of discriminants; in "Real and Complex Singularities", Proc. Conf. Oslo 1976, Ed. P. Holm, Sijthoff and Nordhoff, 1977

Tits, J.:

- 1) Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus; J. Algebra 4, 96 - 116 (1966)
- 2) Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs; Lecture Notes in Math. 386, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1974
- 3) Définition par générateurs et relations de groupes avec BN-paires; C. R. Acad. Sc. Paris, 293, 317 - 322 (1981)
- 4) Annuaire du Collège de France 1980 - 1981, 75 - 86, Paris, 1981
- 5) Annuaire du Collège de France 1981 - 1982, 91 - 106, Paris, 1982

Tjurina, G. N.:

- 1) Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR Izvestija, Vol. 3, No. 5, 967 - 999 (1969)
- 2) The topological properties of isolated singularities of complex spaces of codimension one; Math. USSR Izvestija, Vol. 2, No. 3, 557 - 571 (1968)
- 3) Resolutions of singularities of flat deformations of rational double points; Functional Anal. Appl. 4, 1, 68 - 73 (1970)

Varchenko, A. N., Givental, A. B.:

Mappings of periods and intersection form; *Functional Anal. Appl.*  
16, 2, 83 - 93 (1982)

Vinberg, E. B.:

Discrete linear groups generated by reflections; *Math. USSR*  
*Izvestija* 35, 1083 - 119 (1971)

Vohmann, H. D.:

Einige Eigenschaften der kritischen Menge und der Diskriminante  
verseller Deformationen vollständiger Durchschnitte mit isolierter  
Singularität, *Bonner Math. Schriften* 70 (1974)

Wirthmüller, K.:

- 1) Singularities determined by their discriminant; *Math. Annalen* 252,  
231 - 245 (1980)
- 2) Deformations of fat points of Boardman type  $2,0$  ; erscheint in  
*Math. Annalen*
- 3) Deforming very simple singularities of space curves. Part I:  
 $D_k^*$  ; Preprint, Fakultät für Mathematik, Regensburg, 1983