Connexion de Gauß- Manin associée à la déformation verselle d'une singularité isolée d'hypersurface et son application au XVIe problème de Hilbert.

Susumu TANABÉ [1]

RÉSUMÉ - *On étudie le système d'équations differéntielles satisfaites par l'intégrale d'Abel associée à un cycle évanescent* $\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y;s) = 0\}$ *défini pour la déformation verselle d'une singularité isolée d'hypersurface. Comme application, on obtient une estimation de la multiplicité des zéros de l'intégrale* $I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega$ *en fonction des poids quasihomogènes associés à* $H(x,y;0)$ *et du* $deg(\omega)$.

1. **Introduction**

Dans cette note on poursuit directement les recherches sur les problèmes traités dans la première partie du travail précedent [2], i.e. la description raisonnable de la connexion de Gauss-Manin associée à la déformation verselle d'une singularité isolée d'hypersurface. Dans la première partie de la note, notre objet principal est "l'intégrale hyperelliptique généralisée" que l'on définit comme suit. Regardons un polynôme dépendant de $\mu - 1$ paramètres $s' = (s_1, s_2, \cdots, s_{\mu-1})$,

$$H(x,y) = F(x,s') - y^\nu$$

$$F(x,s') = x^{\mu+1} + s_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + s_1 x, \quad \mu,\nu \geq 2. \tag{1.1.1}$$

On prend un cycle évanescent

$$\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y) + s_0 = 0\},\ s = (s_0, s') \tag{1.1.2}$$

du polynôme $H(x,y)$ et une 1-forme polynomiale $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, alors on appelle l'expression

$$I_\omega(s) = \int_{\gamma_s} \omega,$$

intégrale hyperelliptique généralisée. Le cas $\nu = 2$ correspond à l'intégrale hyperelliptique.

Dans [2], on s'occupait, entre autres, du problèmes d'adjacence entre diverses intégrales hyperelliptiques généralisées associées aux differentes singularités $A_{\mu-1}$ et A_μ. Par contre, ici on recherche la structure du système de Gauss-Manin le long d'une strate de son ensemble critique (du discriminant). L'invariance des exposants de monodromie le long de la strate $\mu = const.$ est connue depuis Varchenko [15]. Ici nous allons établir un énoncé un peu plus fin sur les exposants caractéristiques du système de Fuchs (voir la définition 3.1) qui dépendent explicitement du degré de l'intégrand ω de $I_\omega(s)$ (voir le théorème d'isomonodromie renforcé 3.4). Pour autant qu'il s'agisse de l'intégrale hyperelliptique généralisée, notre théorème est une version forte de celui de Varchenko, car nous constatons l'invariance de μ (ou bien $\mu + 1$) exposants pour chaque intégrale $I_\omega(s)$, pourtant Varchenko a démontré l'invariance du minimum de ces μ exposants.

Dans [1], [2] (17), nous avons proposé une nouvelle définition du système du type de Fuchs avec lieu singulier D, un diviseur d'une variété complexe lisse S en tant que système de Pfaff avec les coefficients de $\Omega^1_S(log\ D)$, formes différentielles logarithmiques. Il est naturel de se poser la question de savoir comment le système du type de Fuchs ainsi défini se lie à l'équation de Fuchs au sens classique? Le théorème 3.4 répond, entre autres, à cette question aussi.Je tiens à noter qu'une formule hypothétique proposée par V.P.Palamodov servait de problème moteur de notre recherche. Il se demande quel opérateur différentiel doit annuler $I_{dx}(t)$. Notre proposition 2.4 fournit une reponse.

AMS Subject Classification: primary 14K20, 58F21, 14D05, secondary 32S30, 33C20.

Key words and phrases: Gauss-Manin connexion, limit cycles, Fuchsian equation, isomonodromic deformation.

[1] Travail réalisé par le soutien financier de l' homme d'affaires M.Mikhail S.Gavounas (Moscou, Russie) et du Max Planck Institut für Mathematik, Bonn

A partir du chapitre 4, notre préoccupation sera l'établissement d'une estimation par haut de la multiplicité des zéros de l'intégrale hyperelliptique généralisée. C'est une demarche vers la réponse raisonnable au XVIe problème de Hilbert sur le nombre des cycles limites. On prend un hamiltonien polynomial comme (1.1.1), et impose la condition que pour chaque valeur critique $s_0^{(i)}(s_0^{(i)} \neq s_0^{(j)}$, si $i \neq j)$ $F(x,s') + s_0^{(i)} = 0$ ait singularité du type de Morse i.e. le hessien soit non-dégénéré à chaque point critique.

Regardons un polynôme

$$(1.1.3) \qquad P_{K,m}(x,y) = \prod_{i=1}^{L}(x - x^{(i)})^{k_i} y^m,$$

$k_i \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}$ tel que $x^{(2)}, \cdots, x^{(L)}$ ne sont pas de points critiques de $F(x,s')$. Par contre, $x^{(1)}$ peut être un point critique de $F(x,s')$. On note $K = \sum_{i=1}^{L} k_i$.

Puisque nous visons à établir l'estimation de la multiplicité des zéros de $I_\omega(s)$, précisons la définition de cette notion.

Définition 1.1. Si une série convergente près de $t = t_0$ définit une fonction multivaluée dans un secteur $\Delta_\theta = \{t : |t - t_0| < \theta\} \subset \mathbf{C}$,

$$f(t) = \sum_{\rho \in \mathbf{Q}, k \in \mathbf{N}} f_{\rho,k}(t-t_0)^\rho (log(t-t_0))^k$$

cette série s'appelle la fonction de Dulac.

Nous disons que une fonction de Dulac a t_0 comme zéro de multiplicité $(k_1+1)([\rho_1]+1)$ si

$$\rho_1 = \{min\ \rho; f_{\rho,k} \neq 0\},$$
$$k_1 = \{max\ k; f_{\rho_1,k} \neq 0\}.$$

Tout au long de cet article, on comprendra la multiplicité des zéros de $I_\omega(s)$ comme celle des zéros d'une fonction de Dulac en variable s_0.

Théorème 1.2. *Dans la situation ci-dessus, on considère l'intégrale hyperelliptique généralisée $I_{P_{K,m}}(s)$ prise le long d'un cycle $\gamma_s = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y) + s_0 = 0\}$,*

$$(1.1.4) \qquad I_{P_{K,m}}(s) = \int_{\gamma_s} P_{K,m}(x,y)dx,$$

avec $K \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}$. Supposons $I_{P_{K,m}}(s) \not\equiv 0$. Alors on a résultats suivants.

i) Si μ pair, la multiplicité N des zéros de l'intégrale $I_{P_{K,m}}(s)$ à l'un des points de ramification $\tilde{t} \in \{s_0^{(1)}, \cdots, s_0^{(\mu)}\}$ vérifie:

$$(1.1.5) \qquad N \leq 2[\frac{m}{\nu} + \frac{K+\mu}{2}].$$

ii) Supposons que $k_1 = 0$ dans l'expression (1.1.3). Alors la multiplicité N des zéros de l'intégrale $I_{P_{K,m}}(s)$ avec μ impair, à l'un des points de ramification $\tilde{s}_0 \in \{s_0^{(1)}, \cdots, s_0^{(\mu)}\}$ vérifie:

$$(1.1.6) \qquad N \leq max\{\mu - 1, 2[\frac{m}{\nu} + \frac{3}{2}]\}.$$

iii) La multiplicité N des zéros de l'intégrale $I_{P_{K,m}}(t)$ au point $\tilde{s}_0 \notin \{s_0^{(1)}, \cdots, s_0^{(\mu)}\}$ ne dépasse pas $\mu + K$.

A l'aide des intégrales $I_{x^k y^\ell}(s)$ on peut étudier l'intégrale d'une forme plus générale:

$$(1.1.3)'. \qquad I_{P,Q}(s) := \int_{\gamma_s} Pdx + Qdy,$$

avec $P(x,y), Q(x,y)$ des polynômes de degré au plus K i.e.$P(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq K} P_{i,j} x^i y^j$, $Q(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq K} Q_{i,j}\ x^i y^j$.

Dans le §6, on établit le résultat suivant:

Théorème 6.2 *Soit* $\gamma_s \subset \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : H(x,y;s) = 0\}$ *un cycle évanescent de la déformation verselle d'une singularité isolée simple d'hypersurface de la liste (6.1) i.e.* A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8. *Alors il existe un ensemble ouvert dense* $U \subset \mathbf{R}^\mu \setminus D$ *tel que la multiplicité des zéros* N *de l'intégrale d'Abel (1.1.3)' non-nulle*

$$I_{P,Q,\gamma_s}(s) := \int_{\gamma_s} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

doit satisfaire à chaque point $s \in U$ *l'inégalité suivante:*

$$N \leq \mu(1 + [(\rho_1 + \rho_2)(K-1)]) - 1, \tag{1.1.7}$$

où ρ_1, ρ_2 *sont les poids quasihomogènes des variables* x, y *définis pour chaque singularité.*

Il est facile de déduire de $(1.1.4), (1.1.5)$ que si $\mu, \nu, K, m \leq n$, alors la multiplicité des zéros N est dominé par une fonction linéaire de n. En revanche, (1.1.7) donne une estimation quadratique en n. Nos résultats, donc, paraissent une amélioration des estimations obtenues dans [8] (la multiplicité de chaque zéro $\leq \frac{n^4+n^2-2}{2}$) pour autant qu'il s'agisse de l'intégrale du type $(1.1.3), (1.1.3)'$.

L'auteur tient à remercier L. Gavrilov qui m'a donné des cours d'initiation à ce sujet, S. Yakovenko, J. P. Françoise et D. Novikov de leurs conseils.

2. Les énoncés sur le système de Gauss-Manin associé aux singularités A_μ

On se souvient ici des résultats principaux de [2] concernant les intégrales hyperelliptiques généralisées

$$K_i^\lambda(s) = \int z^i(z^{\mu+1} + s_{\mu-1}z^{\mu-1} + \ldots + s_1 z + s_0)^\lambda dz, \qquad i = 0, \ldots, \mu+1, \tag{2.1}$$

pour la singularité A_μ. L'intégrale (2.1) est un prototype de notre recherche, pour un hamiltonien du type (1.1.1). Notre démarche consiste en l'analyse de l'intégrale (2.1) à l'aide de l'opérateur différentiel qui l'annule.

Regardons les intégrales de périodes pour une variété algébrique de dimension complexe un $X_s^{(\mu,\nu)} = \{(z,y) \in P^2\mathbf{C}; y^\nu - F(z,s') = s_0\}$ paramétrée par μ paramètres $(s_0, \ldots, s_{\mu-1})$ avec

$$F(z,s') = z^{\mu+1} + s_{\mu-1}z^{\mu-1} + \ldots + s_1 z.$$

Le polynôme $F(z,s') + s_0$ donne une déformation verselle de la singularité A_μ, $F(z,0) = z^{\mu+1}$. Remarquons que $rang H^1(X_s^{(\mu,\nu)}) = \mu(\nu-1)$, et comme base de $H^1(X_s^{(\mu,\nu)})$, on peut choisir $x^k y^\ell dx, (0 \leq k \leq \mu-1, 1 \leq \ell \leq \nu-1)$. Il est facile de voir que l'action de quasihomogénéité agit sur $F(z,s') + s_0$:

$$\tau : (s_0, \cdots, s_{\mu-1}, z) \to (t^{\mu+1}s_0, t^\mu s_1, \cdots, t^2 s_{\mu-1}, tz), \ \ t \in \mathbf{R}_+.$$

Etant fixé un cycle évanescent $\gamma_s \in H_1(X_s^{(\mu,\nu)})$, on considère l'intégrale de périodes comme celle définie le long d'un cycle $Reg(\gamma_s)$ sur $\tilde{\mathbf{C}}_x$ un revêtement de $\mathbf{C}$ avec ν feuilles. Si on note $\lambda = \frac{\ell}{\nu}$:

$$I_{x^i y^\ell dx, \gamma_s}(s) = K_{i,\gamma_s}^\lambda(s) = \int_{Reg(\gamma_s)} z^i(F(z,s') + s_0)^\lambda dz, \qquad i = 0, \ldots, \mu+1. \tag{2.2}$$

Ici $Reg(\gamma_s)$ dénote un cycle appelé régularisé, de sorte que l'intégration le long de celui-ci soit bien définie. Sur tout il doit être choisi de façon que $K_{i,\gamma_s}^{\frac{\ell}{\nu}}(s)$ soit aux valeurs réelles pour $s \in \mathbf{R}$ et γ_s un cycle évanescent réel. Il est obtenu en "gonflant" γ_s à l'aide de l'opérateur de Leray (voir 4.2. [16]). Dans notre situation $Reg(\gamma_s)$ n'est qu'une somme des lacets doubles de Pochhammer [3]. Grâce au théorème des résidus de Leray [4], on n'a pas besoin de se soucier de concrétiser le cycle $Reg(\gamma_s)$, lors de l'établissement d'équations différentielles satisfaites par l'intégrale (2.2). Toutes les intégrales définies par (2.2) satisfont la même équation différentielle indépendante du cycle γ_s. Donc on écrira souvent $K_i^\lambda(s)$ au lieu de $K_{i,\gamma_s}^\lambda(s)$ sinon on a besoin de préciser le cycle d'intégration. En quête d'une expression concrète des intégrales de périodes autour de ses points de ramification, nous partons de la proposition suivante.

Proposition 2.1 ([7], [10]). *Les intégrales hyperelliptiques généralisées $K_0^\lambda(s), \ldots, K_{\mu+1}^\lambda(s)$ de (2.2) satisfont le système holonôme suivant d'équations différentielles:*

$$\sum_{\ell=0}^{\mu-1} s_\ell \frac{\partial}{\partial s_0} K_{\ell+i}^\lambda + \frac{\partial}{\partial s_0} K_{\mu+1+i}^\lambda = \lambda K_i^\lambda, \quad 0 \le i \le \mu-1, \tag{2.3$_i$}$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mu-1} \ell s_\ell \frac{\partial}{\partial s_0} K_{\ell+j}^\lambda + (\mu+1) \frac{\partial}{\partial s_0} K_{\mu+1+j}^\lambda = -(j+1) K_j^\lambda, \quad -1 \le j \le \mu-1. \tag{2.4$_j$}$$

Nous avons une représentation matricielle entre les intégrales:

$$\Sigma \cdot \vec{b} = \vec{a},$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix}
s_0 & s_1 & \cdots & s_{\mu-2} & s_{\mu-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & s_0 & \cdots & s_{\mu-3} & s_{\mu-2} & s_{\mu-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & s_{\mu-4} & s_{\mu-3} & s_{\mu-2} & s_{\mu-1} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_\mu & 0 & 1 \\
s_1 & 2s_2 & \cdots & (\mu-1)s_{\mu-1} & 0 & \mu+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & s_1 & \cdots & (\mu-2)s_{\mu-2} & (\mu-1)s_{\mu-1} & 0 & \mu+1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & s_1 & 2s_2 & 3s_3 & \cdots & \cdots & \mu+1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & s_1 & 2s_2 & \cdots & \cdots & 0 & \mu+1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & s_1 & \cdots & \cdots & (\mu-1)s_{\mu-1} & 0 & \mu+1
\end{bmatrix},$$

$$\vec{a} = {}^t(\lambda K_0^\lambda, \lambda K_1^\lambda, \cdots, \lambda K_{\mu-1}^\lambda, 0, -K_0^\lambda, -2K_1^\lambda, \cdots, -\mu K_{\mu-1}^\lambda)$$

$$\vec{b} = {}^t(\frac{\partial}{\partial s_0} K_0^\lambda, \frac{\partial}{\partial s_0} K_1^\lambda, \cdots, \frac{\partial}{\partial s_0} K_{2\mu}^\lambda).$$

Remarque: $\frac{\partial}{\partial s_i} K_j^\lambda(s) = \frac{\partial}{\partial s_j} K_i^\lambda(s)$.

Effectivement, 2μ intégrales de périodes prennent part aux équations (2.3), (2.4), au lieu de μ intégrales. En les supprimant, on obtient les relations syzygy non-triviales entre μ intégrales de périodes.

Proposition 2.2. *([2]) Les intégrales $\mathbf{K}(s) = {}^t(K_0(s), \cdots, K_{\mu-1}(s))$, $s = (s_0, \cdots, s_{\mu-1})$ satisfont le système holonôme suivant d'équations différentielles:*

$$S \frac{\partial}{\partial s_0} \mathbf{K} = (L + V(s_2, \cdots, s_{\mu-1}))\mathbf{K}, \tag{2.5}$$

ou $V(s') =$

$$= \frac{1}{(\mu+1)^2} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2s_{\mu-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
3s_{\mu-2} & 2\cdot 2s_{\mu-1} & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
4s_{\mu-3} & 3\cdot 2s_{\mu-2} & 2\cdot 3s_{\mu-1} & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
(\mu-1)s_2 & 2(\mu-2)s_3 & 3(\mu-3)s_4 & \cdots & (\mu-2)2s_{\mu-1} & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

et $s' = (s_1, \cdots, s_{\mu-1})$. Les élements $v_{i,j}$ de la matrice $V(s_2, \cdots, s_{\mu-1})$ sont déterminés par la règle ci-dessous,

$$(j+1)v_{i,j} = j v_{i+1,j+1}, \; v_{1,j} = (j-1)s_{\mu-j+2}, \quad 1 \le i \le \mu-2, \; 3 \le j \le \mu.$$

La matrice S admet une écriture comme suit,

$$S = s_0 \mathrm{id}_\mu + C(s'),$$

avec une matrice polynomiale $C(s')$ et une matrice diagonale L représentant les poids quasihomogènes de formes différentielles correspondants à $K_j^\lambda(s)$,

$$L = \mathrm{diag}(\lambda + \frac{1}{\mu+1}, \cdots, \lambda + \frac{\mu}{\mu+1}).$$

Nous nous servons de notation $\Delta_\mu(s)$ désignant un polynôme monique en la variable s_0, qui peut être considéré comme le discriminant du polynôme $z^{\mu+1} + s_{\mu-1}z^{\mu-1} + \ldots + s_1 z + s_0$. Il est calculé par la matrice $S(s)$ de la Proposition 2.2,

$$\Delta_\mu(s_0, s') = \det\ S(s) = \det \Sigma.$$

Définition 2.3. *On dit que $s' \in \mathbf{R}^{\mu-1}$ appartient à l'ensemble de bifurcation $B \subset \mathbf{R}^{\mu-1}$ si et seulement s'il existe $s_0 \in \mathbf{C}$ tel que*

$$\Delta_\mu(s_0, s') = \frac{\partial}{\partial s_0}\Delta_\mu(s_0, s') = 0.$$

Si $s' \in B$ l'équation $F(z, s') = t$ possède soit des racines mutiples soit des valeurs critiques multiples pour une certaine valeur de $''t.''$ L'ensemble B est une variété algébrique dans $\mathbf{R}^{\mu-1}$ de codimension 1 (voir (6.17)).

Nous nous rappelons ici une relation de la matrice S avec le champ de vecteurs logarithmiques formulé par K.Saito ([14]).

Lemme 2.4. *Si on utilise la notation $S(s) = (\sigma_{i,j}(s))_{0 \le i,j \le \mu-1}$, alors les vecteurs ξ_i, $i = 0, \cdots, \mu-1$ définis comme suit*

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \sigma_{i,j} \frac{\partial}{\partial s_j}$$

constituent le champ de vecteurs logarithmiques tangent au discriminant $D = \{\Delta_\mu(s) = \det\ S(s) = 0\}$. Autrement dit, $\xi_0, \cdots, \xi_{\mu-1}$ forment une base libre de $Der_{\mathbf{C}^\mu}(\log D)$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^\mu}-$ module.

Démonstration

Appliquer le théorème de K.Saito (1.9) [14]. Les vecteurs $\xi_0, \cdots, \xi_{\mu-1}$ forment un système involutif sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^\mu}$, i.e. il existe $c^k_{i,j}(s) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^\mu}$ tel que

$$[\xi_i, \xi_j] = \sum_{k=0}^{\mu-1} c^k_{i,j}(s)\xi_k.$$

Cette propriété peut être déduit de la formule (2.5). En plus, on a $D = \{\Delta_\mu(s) = \det\ S(s) = 0\}$. Donc ces vecteurs satisfont à la condition du théorème mentionné ci-dessus. C.Q.F.D.

En suite nous considérons l'intégrale

$$K^\lambda_{k,x^0}(s) = \int_{Reg(\gamma_s)} \bar{x}^k (F(\bar{x} + x^0, s') + s_0)^\lambda dx, \tag{2.2'}$$

où $\bar{x} = x - x^0$.

Afin d'établir un système analogue à $(2.3)_i$ etc. pour $K^\lambda_{k,x^0}(s)$, nous reproduisons le raisonnement depuis la Proposition 2.1. Tout d'abord, nous avons les relations suivantes au lieu de $(2.3)_i$,

$$f_0(x^0, s', s_0)\frac{\partial}{\partial s_0} K^\lambda_{k+i,x^0}(s) +$$

$$(2.3)'_i \qquad + \sum_{\ell=1}^{\mu} f_\ell(x^0,s') \frac{\partial}{\partial s_0} K^\lambda_{k+\ell+i,x^0}(s) + \frac{\partial}{\partial s_0} K^\lambda_{\mu+k+i+1,x^0}(s) = \lambda K^\lambda_{k+i,x^0}(s), \quad 0 \leq i \leq \mu,$$

avec les polynômes $f_\ell(x^0,s') := \frac{1}{\ell!}(\frac{\partial}{\partial x})^\ell F(x,s') \mid_{x=x^0}, \ell \geq 1$, et $f_0(x^0,s',s_0) := F(x,s') + s_0$.

Au lieu de $(2.4)_j$ on a,

$$(2.4)'_j \ \sum_{\ell=1}^{\mu} \ell f_\ell(x^0,s') \frac{\partial}{\partial s_0} K^\lambda_{\ell+k+j,x^0}(s) + (\mu+1) \frac{\partial}{\partial s_0} K^\lambda_{\mu+k+1+j,x^0}(s) = -(k+j+1) K^\lambda_{k+j,x^0}(s), \quad -1 \leq j \leq \mu-1.$$

Par la suite une notation simple f_ℓ remplacera $f_\ell(x^0,s')$.

Avant de formuler l'énoncé sur l'opérateur qui annule l'intégrale $K^\lambda_{k,x^0}(s)$, on définit le déterminant d'une matrice

$$\mathbf{P}(s,\frac{\partial}{\partial s_0}) = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,\mu-1} \\ p_{1,0} & \vdots & \cdots & p_{1,\mu-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{\mu-1,0} & p_{\mu-1,1} & \cdots & p_{\mu-1,\mu-1} \end{bmatrix},$$

avec les composantes non-commutatives comme suit,

$$det \mathbf{P}(s,\frac{\partial}{\partial s_0}) :=$$

$$(2.6) \qquad = \sum_{i_0,i_1,\cdots,i_{\mu-1}} sign(i_0,i_1,\cdots,i_{\mu-1}) p_{i_{\mu-1},\mu-1} \cdots p_{i_1,1} p_{i_0,0},$$

pour $p_{i,j} = p^1_{i,j}(s)\frac{\partial}{\partial s_0} + p^0_{i,j}(s)$, avec $p^1_{i,j}(s), p^0_{i,j}(s) \in \mathbf{R}[s]$. Dans (2.6), l'indice $(i_0,i_1,\cdots,i_{\mu-1})$ parcourt toutes les permutations de $(0,1,\cdots,\mu-1)$. Par la suite on se servira de la notation $\frac{\partial}{\partial s} = (\frac{\partial}{\partial s_0},\cdots,\frac{\partial}{\partial s_{\mu-1}})$.

Proposition 2.5. *i)*

L'opérateur différentiel $\mathcal{P}(s,\frac{\partial}{\partial s})$ d'ordre μ défini ci-dessous annule l'intégrale $K^\lambda_0(s)$,

$$\mathcal{P}(s,\frac{\partial}{\partial s}) K^\lambda_0(s) = 0,$$

où

$$\mathcal{P}(s,\frac{\partial}{\partial s}) := det(S\frac{\partial}{\partial s_0} - L - V(s'))$$

les matrices $S, L, V(s')$ sont celles définies dans la Proposition 2.2.

ii) L'opérateur $\mathcal{P}^{(k)}_{x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s})$ d'ordre $\mu+1$ qui annule l'intégrale $K^\lambda_{k,x^0}(s)$ de (2.2) admet la représentation d'une manière analogue à $\mathcal{P}(s,\frac{\partial}{\partial s})$,

$$\mathcal{P}^{(k)}_{x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s}) K^\lambda_{k,x^0}(s) = 0,$$

$$\mathcal{P}^{(k)}_{x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s}) = det(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial s_0} - \tilde{L} - \tilde{V}(s')) + \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{T}'_j(s,\frac{\partial}{\partial s}),$$

où les matrices $\tilde{S}, \tilde{V}(s')$ sont définies à partir de $S, V(s')$:

$$\tilde{S} =$$

$$\begin{bmatrix} s_0 - \tilde{s_0} & f_1(x,s') & \cdots & f_{\mu-1}(x,s') & f_\mu(x,s') \\ 0 & & & & \\ \vdots & & S'(s) & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{L} = \mathrm{diag}(\lambda + \frac{k}{\mu+1}, \cdots, \lambda + \frac{k+\mu}{\mu+1}).$$

$$\tilde{V}(s') = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ V'(s') & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S'(s) = B_f \cdot S(s) \cdot C_f$$

avec $B_f, C_f \in GL(\mu, \mathbf{R})$, *et* $V'(s') \in End(\mathbf{R}^{\mu-2}) \otimes \mathbf{R}[s']$. *Ici, on note* $\tilde{s}_0 = -F(x^0, s')$. *Les opérateurs* $\tilde{T}'_j(s, \frac{\partial}{\partial s})$ *d'ordre* μ *sont définis dans* $(2.9)'$ *ci-dessous.*

Remarque 1. L'ordre de l'opérateur $\mathcal{P}^{(k)}_{x^0}(s, \frac{\partial}{\partial s})$, égal à $\mu + 1 (> \mu)$, s'explique par l'existence d'un cycle de plus γ^0 qui définit $K^\lambda_{k,x^0}(s)$. Notons $\{x^{(j)}\}_{j=1,\cdots,\mu+1} = \{x \in \mathbf{C} : F(x, s') + s_0 = 0\}$. Alors $K^\lambda_0(s)$ a ses cycles évanescents $\gamma^j = \{x^{(j)} - x^{(j-1)}\}, j = 2, \cdots, \mu + 1$. Par contre $K^\lambda_{k,x^0}(s)$ peut être défini le long d'un cycle $x^0 - x^{(1)}$ à part des cycles évanescents associés à $K^\lambda_0(s)$.

Démonstration de la Proposition 2.5

Preuve de i) Nous notons la relation (2.5) par

$$\mathbf{P}(s, \frac{\partial}{\partial s_0})\mathbf{K}^\lambda(s) = (S\frac{\partial}{\partial s_0} - L - V(s'))\mathbf{K}^\lambda(s) = 0.$$

Notons

$$\mathbf{P}(s, \frac{\partial}{\partial s_0}) = (p_{i,j})_{0 \le i,j \le \mu-1}$$

avec les composantes $p_{i,j} = \sigma_{i,j}(s)\frac{\partial}{\partial s_0} + p^0_{i,j}(s')$. Ici les $\sigma_{i,j}(s)$ sont introduits dans le lemme 2.4. Selon cette notation, (2.5) s'écrit

$$(2.7)_j \qquad p_{j,0}K^\lambda_0(s) + p_{j,1}K^\lambda_1(s) + \cdots + p_{j,\mu-1}K^\lambda_{\mu-1}(s) = 0, 0 \le j \le \mu - 1.$$

On prend une combinaison des expressions $(2.7)_j$,

$$(2.8) \qquad \sum_{j=0}^{\mu-1} sign(j, i_1, i_2, \cdots, i_{\mu-1}) p_{i_{\mu-1},\mu-1} \cdots p_{i_1,1} (2.7)_j.$$

Alors il est possible de voir que l'opérateur devant $K^\lambda_0(s)$ doit être égal à $det\mathbf{P}(s)$.

D'autre part, l'opérateur devant $K^\lambda_k(s)$ est

$$(2.9) \qquad \sum sign(i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{\mu-1}) p_{i_{\mu-1},\mu-1} \cdots p_{i_k k} \cdots p_{i_1,1} p_{i_0 k} = 0.$$

Autrement dit, (2.8) coincide avec

$$det(S\frac{\partial}{\partial s_0} - L - V(s'))K^\lambda_0(s).$$

Ainsi on a démontré i).

Preuve de ii)

Afin de trouver un opérateur $\mathcal{P}^{(k)}_{x^0}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ annulant $K^\lambda_{k,x^0}(s)$, on part de la relation $\tilde{\Sigma} \cdot \tilde{b} = \tilde{a}$ avec

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix}
f_0 & f_1 & \cdots & f_{\mu-2} & f_{\mu-1} & f_\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_0 & \cdots & f_{\mu-3} & f_{\mu-2} & f_{\mu-1} & f_\mu & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & f_{\mu-4} & f_{\mu-3} & f_{\mu-2} & f_{\mu-1} & f_\mu & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & f_\mu & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{\mu-1} & f_\mu & 1 \\
0 & f_1 & 2f_2 & \cdots & (\mu-1)f_{\mu-1} & \mu f_\mu & \mu+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\
0 & 0 & f_1 & \cdots & (\mu-2)f_{\mu-2} & (\mu-1)f_{\mu-1} & \mu f_\mu & \mu+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & f_1 & 2f_2 & \cdots & (\mu-2)f_{\mu-2} & (\mu-1)f_{\mu-1} & \mu f_\mu & \mu+1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1 & \cdots & (\mu-3)f_{\mu-3} & (\mu-2)f_{\mu-2} & (\mu-1)f_{\mu-1} & \mu f_\mu & \mu+1
\end{bmatrix},$$

$$\tilde{a} =^t (\lambda K^{\lambda}_{k,x^0}, \lambda K^{\lambda}_{k+1,x^0}, \cdots, \lambda K^{\lambda}_{k+\mu,x^0}, -(k+1)K^{\lambda}_{k,x^0}, -(k+2)K^{\lambda}_{k+1,x^0}, \cdots, -(k+\mu+1)K^{\lambda}_{k+\mu,x^0})$$

$$\tilde{b} =^t (\frac{\partial}{\partial s_0}K^{\lambda}_{k,x^0}, \frac{\partial}{\partial s_0}K^{\lambda}_{k+1,x^0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial s_0}K^{\lambda}_{k+\mu,x^0}).$$

Après des calculs analogues au cas $\mathbf{K}^{\lambda}$, pour $\mu+1$ intégrales $\mathbf{K}^{\lambda}_{k,x^0} := {}^t(K^{\lambda}_{k,x^0}, K^{\lambda}_{k+1,x^0}, \cdots, K^{\lambda}_{k+\mu,x^0})$, on voit

$$(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial s_0} - \tilde{L}' - \tilde{V}(s'))\mathbf{K}^{\lambda}_{k,x^0} = 0 \tag{2.10}$$

pour

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} s_0 - \tilde{s_0} & f_1(x,s') & \cdots & f_{\mu-1}(x,s') & f_{\mu}(x,s') \\ 0 & & & & \\ \vdots & & S'(s) & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix},$$

avec $S'(s) = B_f \cdot S(s) \cdot C_f$ où $B_f, C_f \in GL(\mu, \mathbf{R})$ dont les composantes sont déterminées par les coefficients de $f_k(x^0, s'), k = 1, \cdots, \mu$. Les autres matrices sont données comme suit:

$$\tilde{L} = \mathrm{diag}(\lambda + \frac{k}{\mu+1}, \ldots, \lambda + \frac{k+\mu}{\mu+1}),$$

et

$$\tilde{V}(s') = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ V'(s') & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $V'(s') \in End(\mathbf{R}^{\mu-2}) \otimes \mathbf{R}[s']$. De (2.10), on déduit

$$det(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial s_0} - \tilde{L} - \tilde{V}(s'))K^{\lambda}_{k,x^0}(s) + \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{T}_j(s, \frac{\partial}{\partial s_0})K^{\lambda}_{k+j,x^0}(s) = 0.$$

Ici, si on note $(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial s_0} - \tilde{L} - \tilde{V}(s')) = (\tilde{p}_{i,j})_{0 \le i,j \le \mu}$, l'opérateur devant $K^{\lambda}_{k+j,x^0}(s)$ est défini comme suit:

$$\tilde{T}_j(s, \frac{\partial}{\partial s_0}) := \sum sign(i_0, i_1, i_2, \cdots, i_{\mu})\tilde{p}_{i_{\mu},\mu} \cdots \tilde{p}_{i_1,1}\tilde{p}_{i_0,j}. \tag{2.9)'$$

L'existence de l'opérateur $\tilde{T}'_j(s, \frac{\partial}{\partial s})$ t.q.

$$\tilde{T}'_j(s, \frac{\partial}{\partial s})K^{\lambda}_{k,x^0}(s) = \tilde{T}_j(s, \frac{\partial}{\partial s_0})K^{\lambda}_{k+j,x^0}(s),$$

découle des relations

$$(\frac{\partial}{\partial s_0})K^{\lambda}_{k+j,x^0}(s) = (\sum_{i=0}^{j} B^{(k)}_{ji}\frac{\partial}{\partial s_i})K^{\lambda}_{k,x^0}(s), \quad 1 \le j \le \mu - 1,$$

où les $B^{(k)}_{ji}$ sont déterminés par

$$\sum_{i=0}^{j} B^{(k)}_{ji}(\bar{x} + x^0)^i \bar{x}^k = \bar{x}^{k+j}.$$

Pour $K^{\lambda}_{k+\mu,x^0}$,

$$(\frac{\partial}{\partial s_0})K^{\lambda}_{k+\mu,x^0}(s) = [-\sum_{j=0}^{\mu-1}(B_j(x^0) + s_j)\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda]K^{\lambda}_{k,x^0}(s),$$

où les $B_j(x^0)$ sont t.q.

$$(\bar{x}+x^0)^\mu - \bar{x}^\mu = \sum_{j=0}^{\mu-1} B_j(x^0)(\bar{x}+x^0)^j.$$

C.Q.F.D.

3. Une version forte du théorème d'isomonodromie

Dans cette section, nous établirons une version forte du théorème d'isomonodromie. Il s'agit de l'invariance du comportement asymptotique de l'intégrale $K_k^\lambda(s_0,s')$ (i.e. celle des expopsants caractéristiques) près du point singulier (régulier) $s_0 = s_0(s')$ lors de transition le long d'une composante stratifiée de l'ensemble critique $D = \{s \in \mathbf{C}^\mu; \Delta_\mu(s) = 0\}$. D'après le théorème de Picard-Lefschetz et celui de Brieskorn [4], la monodromie du système de Gauss-Manin (2.5) est identifiée à la monodromie locale de Picard-Lefschetz:

$$\Lambda_{*,s^\bullet} : H_1(X_s^{(\mu,\nu)},\mathbf{C}) \to H_1(X_s^{(\mu,\nu)},\mathbf{C}), \quad s \notin D, s^\bullet \in D,$$

qui se réalise dans $GL(\mu,\mathbf{C})$. Ici on dénote par $\Lambda_{*,s^\bullet}$ l'action du lacet $\Lambda \in \pi_1(\mathbf{C}^\mu \setminus D)$ autour d'un point $s^\bullet \in D$ qui agit sur le groupe d'homologie.

Avant de formuler le théorème, nous précisons la notion des exposants caractéristiques.

Définition 3.1. *Soit $(s',t(s')) \in D = \{(s',t) \in \mathbf{C}^\mu; P_m(t,s') = 0\}$, un point du lieu singulier D d'une équation différentielle du type de Fuchs (cf.[3]):*

$$P(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t}) = [P_m(s',t)(\frac{d}{dt}) + P_{m-1}(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t}) + \cdots + P_0(s',t)]u(s',t) = 0, \tag{3.1}$$

où

$$P_{m-j}(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{\mu-1},0\leq|\alpha|\leq m-j} P_{m-j,\alpha}(s',t)(\frac{\partial}{\partial s'})^\alpha(\frac{\partial}{\partial t})^{m-j-|\alpha|}$$

avec $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mu-1})$, $\mid \alpha \mid = \alpha_1+\cdots+\alpha_{\mu-1}$, $(\frac{\partial}{\partial s})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial s_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial s_{\mu-1}})^{\alpha_{\mu-1}}$. L'opérateur du type de Fuchs $P(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t})$ est dit à multiplicité κ le long de D près du point $(\dot{s}',t(\dot{s}')) \in D$, si les conditions suivantes sont satisfaites pour ses coefficients $P_{m-j,\alpha}(s',t)$. On comprend par $t = t(s')$ l'équation locale de D. D'abord on demande que la décomposition

$$P_m(s',t) = (t-t(s'))^\kappa Q_m(s',t),$$

ait lieu près de $(\dot{s}',t(\dot{s}'))$ avec $Q_m(\dot{s}',t(\dot{s}')) \neq 0$. Deuxièmement, on suppose que $(t-t(s'))^{\kappa-j} \mid P_{m-j,\alpha}(s',t)$ pour tout $0 \leq j \leq \kappa$ et $\alpha \in \mathbf{N}^{\mu-1}$. Alors il est possible de voir que l'expression suivante donne naisssance à un polynôme en ρ,

$$\begin{aligned}\Pi_0(\rho,s') &= (t-t(s'))^{-\rho}[P(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t})](t-t(s'))^\rho \mid_{t=t(s')}\\ &= Q_m(s')\rho(\rho-1)\cdots(\rho-m+1) + Q_{m-1}(s')\rho(\rho-1)\cdots(\rho-m+2)+\cdots+\\ &+Q_{m-\kappa+1}(s')\rho(\rho-1)\cdots(\rho-m+\kappa) + Q_{m-\kappa}(s')\rho(\rho-1)\cdots(\rho-m+\kappa+1),\end{aligned} \tag{3.2}$$

pour une collection de fonctions semi-algébriques $Q_m(s'),\cdots,Q_{m-\kappa}(s')$.

L'équation algébrique en ρ, $\Pi_0(\rho,s') = 0$ se nomme l'équation déterminante relative de l'opérateur $P(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t})$ au point $(s',t(s'))$.

Lemme 3.2. *Au voisinage de son point singulier régulier $t = t(s')$, le comportement asymptotique des m-solutions $u_1(s',t),\cdots,u_m(s',t)$ de l'équation du type de Fuchs (3.1) est détérminé exactement (pas modulo $\mathbf{Z}$) par les exposants caractéristiques de $P(s',t,\frac{\partial}{\partial s'},\frac{\partial}{\partial t})$ à $t = t(s')$. Cela veut dire que comme m solutions on peut prendre*

$$u_{j,\ell}(s',t) \sim (t-t(s'))^{\rho_j}(ln(t-t(s')))^\ell \sum_{k\geq 0} a_k^{(j,\ell)}(s')(t-t(s'))^k, \quad 0 \leq \ell \leq L_j - 1,$$

où L_j est la multiplicité de racine ρ_j dans l'équation déterminante (3.2), $\sum_j L_j = m$. *En plus* $a_0^{(j,\ell)} \neq 0$.

Quant à démonstration de cet énoncé, ce n'est qu'une modification à la version en plusieurs variables (une variable plus plusieurs paramètres) des résultats classiques sur l'équation du type de Fuchs. A ce propos, je renvoie les lecteurs au livre classique de Coddington-Levinson, ou d'Ince qui explique la méthode de Frobenius.

Avant de formuler le théorème d'isomonodromie, nous établirons ici un lemme et y introduisons la notion de stratification logarithmique. Notons par $Der_{\mathbf{C}^\mu}(\log D)(p), p \in D$ le sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_p\mathbf{C}^\mu$ qui consiste des valeurs $\delta(p)$ de vecteurs logarithmiques $\delta \in Der_{\mathbf{C}^\mu}(\log D)$, introduits par K.Saito [14]. Ici δ est un vecteur à coefficients polynomiaux tangent à D.

D'abord on définit l'ensemble $D(i_1, \cdots, i_{k+1})$ comme un sous-ensemble de D sur lequel les $(k+1)-$ vecteurs logarithmiques $\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_{k+1}} \in Der_{\mathbf{C}^\mu}(\log D)$ sont exprimés par $\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_{\mu-k-1}}$ avec $\{j_1, \cdots, j_{\mu-k-1}\} = \{0, \cdots, \mu-1\} \setminus \{i_1, \cdots, i_{k+1}\}$. C'est à dire, si $s \in D(i_1, \cdots, i_{k+1})$, alors il existe des fonctions semi-algébriques non nulles $A^p_{j_\ell}(s'), A^p_{i_p}(s') \in \mathbf{C}[s_0(s'), s']$, $1 \leq p \leq k+1$, $1 \leq \ell \leq \mu-k-1$ t.q.

$$A^p_{i_p}(s')\xi_{i_p}(s) = \sum_{\ell=1}^{\mu-k-1} A^p_{j_\ell}(s')\xi_{j_\ell}(s), 1 \leq p \leq k+1.$$

sur $\pi(D(i_1, \cdots, i_{k+1}))$. Ici $\pi : \mathbf{C}^\mu_s \to \mathbf{C}^{\mu-1}_{s'}$ dénote la projection sur $\mathbf{C}^{\mu-1}_{s'}$. En fait $A^p_\bullet(s')$ sont données par des mineurs $(\mu-k-1) \times (\mu-k-1)$ de $S(s_0(s'), s')$.

On se place dorénavant dans le complément de l'ensemble de Maxwell du polynôme (2.1). L'ensemble de Maxwell $M \subset D$ est l'ensemble des s pour lesquels l'équation $F(z, s') + s_0 = 0$ possède plusieurs points critiques indépendants qui donnent la même valeur critique (ex.$\mu = 3, s_0 = \frac{s_2^2}{4}, s_1 = 0$). Notons l'ensemble de Maxwell par M et $D_M := D \setminus M$. L'ensemble de Maxwell lui même est stratifié.

Lemme 3.3. *i) Le point p appartient à l'ensemble $D_M(i_1, \cdots, i_{k+1})$ si et seulement s'il existe $\mu-k-1$ vecteurs linéairement indépendants $\delta_{j_1}(p), \cdots, \delta_{j_{\mu-k-1}}(p) \in Der_{\mathbf{C}^\mu}(\log D)(p)$. Cela veut dire que l'ensemble $D_M(i_1, \cdots, i_{k+1})$ est déterminé uniquement par le nombre $\mu-k-1$ des vecteurs logarithmiques indépendants sur lui. On note tel ensemble par ${D_M}^{(k)}$.*

ii) On a la structure de stratification comme suit:

$$D_M = \bar{D_M}^{(0)} \supset \bar{D_M}^{(1)} \supset \bar{D_M}^{(2)} \supset \cdots \supset D^{(\mu-1)} = \{0\}.$$

L'ensemble $D^{(k)}_M$ est une strate de codimension un dans $\bar{D_M}^{(k-1)}$. A chaque point p de la strate $D^{(k)}_M$, on a $rangDer(logD)(p) = \mu-k-1$. (La stratification logarithmique de K.Saito, [14].*)*

iii) La strate $D^{(k)}_M$ peut être défini par les mineurs $(\mu-k) \times (\mu-k)$ de la matrice $S(s)$.

iv) Si $s \in D^{(k)}_M$, alors $F(z, s') + s_0 = 0$ possède une racine d'ordre $k+2$.

Remarque 2. *Si on prend une strate M^α de l'ensemble de Maxwell et un point sur lui $p \in M^\alpha$, alors $rangDer(logD)(p) > \mu - 1 - codim_D M^\alpha$.*

Démonstration

Pour démontrer l'énoncé i), on procède par induction. Tout d'abord, par définition de $D(i_1, \cdots, i_{k+1})$ il est évident que $D_M(\mu-1) = D_M(\ell)$, $\ell = 0, \cdots, \mu-2$. Ensuite supposons que $s \in D_M(\mu-2, \mu-1) \subset D_M$ et montrons que $s \in D_M(i_0, i_1)$, pour n'importe quelle paire $\{i_0, i_1\} \subset \{0, \cdots, \mu-1\}$. L'hypothèse $s \in D_M(\mu-2, \mu-1)$ entraîne qu'il existe deux collections de fonctions semi-algébriques non nulles $(c_0(s'), \cdots, c_{\mu-1}(s'))$ $\in \mathbf{C}[s_0(s'), s']$ et $(c'_0(s'), \cdots, c'_{\mu-2}(s'), 0) \in \mathbf{C}[s_0(s'), s']$ telles que

$$(c_0(s'), \cdots, c_{\mu-1}(s')) \cdot S(s_0(s'), s') = 0 \tag{3.3}$$

$$(c'_0(s'), \cdots, c'_{\mu-2}(s'), 0) \cdot S(s_0(s'), s') = 0, \tag{3.3'}$$

pour $s' \in \pi(D_M(\mu-2, \mu-1))$. Et il est impossible de trouver de fonctions semi-algébriques non nulles $(c''_0(s'), \cdots, \check{0}^{j_1}, \cdots, \check{0}^{j_2}, \cdots, c''_{\mu-1}(s'))$ telles que

$$(c''_0(s'), \cdots, \check{0}^{j_1}, \cdots, \check{0}^{j_2}, \cdots, c''_{\mu-1}(s')) \cdot S(s_0(s'), s') = 0, \tag{3.4}$$

pour $s' \in \pi(D_M(\mu-2,\mu-1))$. Il faut remarquer que la dernière condition entraîne qu'aucun de mineurs $(\mu-2)\times(\mu-2)$ de $S(s)$ ne s'annule. Car si pour les indices $\{k_0,\cdots,k_{\mu-3}\}$, $0\leq k_0<\cdots<k_{\mu-3}\leq \mu-1$, les mineurs $(\mu-2)\times(\mu-2)$ s'annulent i.e.

$$S\binom{k_0,\cdots,k_{\mu-3}}{j_3,\cdots,j_\mu}=0,$$

avec $\{j_3,\cdots,j_\mu\}=\{1,\cdots,\mu\}\setminus\{j_1,j_2\}$, alors on peut trouver une collection de fonctions comme (3.4).

Revenons à la condition de dégéneréscence de $\mu-1$ vecteurs logarithmiques. Pour obtenir une relation linéaire non-triviale entre $\xi_0,\cdots,\xi_{i_0-1},\xi_{i_0+1},\xi_{\mu-1}$, il est suffisant de prendre la différence entre $c'_{i_0}(3.3)$ et $c_{i_0}(3.3)'$. Il est facile de se convaincre que tous les coefficients $c'_{i_0}c_0-c'_0c_{i_0}$, $\cdots$, $c'_{i_0}c_{\mu-2}-c'_{\mu-2}c_{i_0}$, $c_{\mu-1}c'_{i_0}$ sont non nuls sauf celui correspondant à ξ_{i_0}. Car, sinon, il existe un mineur $(\mu-2)\times(\mu-2)$ dégénéré de $S(s)$ et on est alors dans la situation de (3.4). On a ainsi obtenu l'expression suivante avec certaines fonctions $A^1_{i_1}(s'), A^1_{j_\ell}(s')\neq 0$,

$$A^1_{i_1}(s')\xi_{i_1}(s_0(s'),s')=\sum_{j_\ell\neq i_0,i_1}A^1_{j_\ell}(s')\xi_{j_\ell}(s_0(s'),s'),$$

pour $i_1\neq i_0$. Quant à l'expression semblable pour ξ_{i_0}, on prend la différence entre $c'_{i_1}(3.3)$ et $c_{i_1}(3.3)'$. Ainsi l'énoncé $i)$ est démontré pour $k=1$.

Les démarches démandées pour accomplir la démonstration de $i)$ pour la strate de codimension $k>1$ sont analogues à l'argument ci-dessus.

Bien évidemment, cette démarche ne s'applique pas aux strates de Maxwell. Par example la strate générique $M^{(0)}$ de M est de codimension un dans D, mais il existe $\mu-1$ vecteurs logarithmiques $\xi_1,\cdots,\xi_{\mu-1}$, qui sont linéairement indépendants sur $M^{(0)}$.

L'énoncé $ii)$ est un corollaire de $iii)$.

La démonstration de l'énoncé $iii)$ s'appuie sur l'argument suivant. Si un des mineurs $k\times k$ de la matrice $S(s)$ s'annulent au point $s\in D$ alors tous les autres mineurs s'annulent aussi à ce point là. Par exemple, même si la strate $D(i_0,i_1)$ est définie par ${}_{\mu-1}C_{\mu-2}$ mineurs dans D, la codimension de celui-ci dans D est égale à 1. Cela apparaît dans la démonstration de $i)$. Ainsi la strate $D(i_0,\cdots,i_k,i_{k+1})$ est un ensemble de la codimension un de la strate $D(i_0,\cdots,i_k)$.

Par conséquence de $iii)$, l'équation $\Delta_\mu(s_0,s')=det\ S(s)=0$ possède une racine d'ordre $(k+1)$ $s_0=s_0(s')$ sur $D^{(k)}_M$, ce qui donne $iv)$ par les résultats classiques sur le discriminant. C.Q.F.D.

Maintenant nous sommes susceptibles de formuler le théorème d'isomonodoromie renforcé pour les opérateurs introduits dans la Proposition 2.5,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(s,\frac{\partial}{\partial s})&=\Delta_\mu(s)(\frac{\partial}{\partial s_0})^\mu+P_{\mu-1}(s,\frac{\partial}{\partial s})+\cdots+P_1(s,\frac{\partial}{\partial s})+P_0(s)\\&=\Delta_\mu(s)(\frac{\partial}{\partial s_0})^\mu+\sum_{1\leq j\leq\mu}P_{\mu-j}(s)(\frac{\partial}{\partial s_0})^{\mu-j},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(\ell)}_{x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s})&=(s_0-\tilde{s}_0)\Delta_\mu(s)(\frac{\partial}{\partial s_0})^{\mu+1}+P^{(\ell)}_{\mu,x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s})+\cdots+P^{(\ell)}_{1,x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s})+P^{(\ell)}_{0,x^0}(s),\\&=(s_0-\tilde{s}_0)\Delta_\mu(s)(\frac{\partial}{\partial s_0})^{\mu+1}+\sum_{1\leq j\leq\mu+1}\ \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{\mu-1},}P^{(\ell)}_{\mu-j+1,\alpha,x^0}(s)(\frac{\partial}{\partial s'})^\alpha(\frac{\partial}{\partial s_0})^{\mu+1-j-|\alpha|},\end{aligned}$$

pour $\ell\geq 1$.

Introduisons une structure stratifiée du lieu de ramification associé à l'opérateur $\mathcal{P}^{(\ell)}_{x^0}(s,\frac{\partial}{\partial s})$. Notamment nous définissons les strates,

$$\tilde{D}^{(k)}_M:=D^{(k)}_M\cap\{(s_0,s');s_0=\tilde{s}_0\},\ k=-1,0,1,...$$

$$D^{(k)}_{M,-}:=D^{(k)}_M\setminus\{s_0=\tilde{s}_0\}.$$

Eventuellement,

$$\tilde{D}^{(-1)}_M:=\{s_0=\tilde{s}_0\}\setminus D.$$

Ici et dans la suite on note $\tilde{s}_0 = -F(x^0, s')$.

Théorème 3.4. *(Théorème d'isomonodromie renforcé)*

i) L'équation déterminante de l'opérateur $\mathcal{P}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ est de multiplicité constante le long de la strate $D_M^{(k)}$. C'est à dire au voisinage de chaque point singulier $(s_0(s'), s') \in D_M^{(k)}$

$$P_\mu(s) = \Delta_\mu(s) = (s_0 - s_0(s'))^{k+1} Q_{\mu,k}(s_0, s')$$

$$P_{\mu-j}(s) = (s_0 - s_0(s'))^{k-j+1} Q_{\mu-j,k}(s_0, s'),\ 1 \leq j \leq k+1,$$

pour $s' \in \pi(D_M^{(k)})$. Ici les polynômes $Q_{\mu-j,k}(s_0, s')$ sont des polynômes de degré $\mu - k - 1$ en variable s_0 t.q. $Q_{\mu,k}(s_0, s') \neq 0$ sur la strate $D_M^{(k)}$.

La même décomposition a lieu au point $(\tau^{\mu+1}s_0, \tau^\mu s_1, \cdots, \tau^2 s_{\mu-1}), \tau > \mathbf{R}_+$.

ii) Pour l'opérateur $\mathcal{P}_{x^0}^{(\ell)}(s, \frac{\partial}{\partial s})$, sur la strate $\tilde{D}_M^{(k)}$, on a la factorisation suivante de ses coefficients:

$$P_{\mu+1,x^0}^{(\ell)}(s) = (s_0 - \tilde{s}_0)\Delta_\mu(s) = (s_0 - \tilde{s}_0)^{k+2} Q_{\mu+1,k,x^0}^{\ell}(s_0, s')$$

$$P_{\mu-j+1,\alpha,x^0}^{(\ell)}(s) = (s_0 - \tilde{s}_0)^{k-j+2} Q_{\mu+1-j,k,\alpha,x^0}^{\ell}(s_0, s'),\ 1 \leq j \leq k+2, \mid \alpha \mid = 0, 1,$$

avec $Q_{\mu+1,k,x^0}^{\ell}(s_0, s') \neq 0$.

Sur la strate $D_{M,-}^{(k)}$, on a la factorisation suivante pour les coefficients:

$$P_{\mu-j+1,\alpha,x^0}^{(\ell)}(s) = (s_0 - s_0(s'))^{k-j+1} Q_{\mu+1-j,k,\alpha,x^0}^{\ell}(s_0, s'),\ 1 \leq j \leq k+1, \mid \alpha \mid = 0, 1,$$

avec $s_0(s') \neq \tilde{s}_0$ et $Q_{\mu+1,k,x^0}^{\ell}(s_0, s') \neq 0$.

iii) Les exposants caractéristiques de l'opérateur $\mathcal{P}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ au point singulier $(s_0(s'), s') \in {D_M}^{(k)} \subset D_M$ ne changent pas lors de la translation du point $(s_0(s'), s')$ vers un autre point $(s_0(t'), t') \in {D_M}^{(k)} \subset D_M$ le long de la strate ${D_M}^{(k)} \subset D_M$. D'une façon analogue, les exposants caractéristiques de $\mathcal{P}_{x^0}^{(\ell)}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ ne changent pas lors de la translation le long des strates $\tilde{D}_M^{(k)}, D_{M,-}^{(k)} \subset D_M$.

Remarque 3. C'est un énoncé renforcé d'une assertion du type suivant: *"La représentation du groupe de monodromie autour du point x dans $GL(\mu, \mathbf{C})$ ne change pas lors de la translation le long d'une strate de l'ensemble critique sur laquelle se trouve le point de départ x."*

Cette assertion découle d'un théorème bien connu de E.Brieskorn (Satz 1, III , [4]) *"La monodromie de l'opérateur différentiel singulier $\nabla_{f,x}$ peut être identifié avec la monodromie locale de Picard-Lefschetz de $f(z) = F(z, s')$ (chez nous $F(z, s') = z^{\mu+1} + s_{\mu-1}z^{\mu-1} + \ldots + s_1 z$) à $x = -s_0$. "* La version de Picard-Lefschetz par F.Pham pour l'intégrand ramifié ([11], [16]) permet d'identifier la monodromie de Picard-Lefschetz genéralisée avec la monodromie de l'opérateur différentiel qui annule les intégrales correspondantes (i.e. chez nous $S\frac{\partial}{\partial s_0} - L - V(s')$). L'invariance des exposants de monodromie le long de la strate $\mu = const.$ est connue depuis Varchenko [15]. Pour autant qu'il s'agisse de l'intégrale hyperelliptique généralisée, notre théorème est une version forte de celui de Varchenko, car nous constatons l'invariance de μ (ou bien $\mu + 1$) exposants pour chaque intégrale $I_\omega(t)$, pourtant Varchenko a démontré l'invariance du minimum de ces μ exposants.

Démonstration du Théorème 3.4

D'abord on montre l'énoncé i).

Nous commençons par l'énoncé sur la multiplicité de $P_{\mu-j}(s)$. L'enoncé sur la multitiplicité de $P_\mu(s)$ est une conséquence immediate de la Proposition 2.5 et du Lemme 3.3. Pour démontrer l'énoncé pour $P_{\mu-j}(s), j > 0$, nous modifions la matrice $\mathbf{P}(s, \frac{\partial}{\partial s_0}) = (S\frac{\partial}{\partial s_0} - L - V(s'))$ en une autre matrice $\mathbf{P}^{\mathbf{I}}(s, \frac{\partial}{\partial s_0}), \mathbf{I} = (i_1, \cdots, i_j) \subset \{0, 1, \cdots, \mu - 1\}$ dont le i_γ−ème rayon est remplacé par $(0, 0, \cdots, 0, \check{1}^{i_\gamma}, 0, \cdots, 0)$, $\gamma = 1, \cdots, j$. D'après la Proposition 2.5 i) on voit que $P_{\mu-j,0}(s, \frac{\partial}{\partial s_0})$ est une somme de termes d'ordre $\mu - j$ des opérateurs $det\mathbf{P}^{\mathbf{I}}(s, \frac{\partial}{\partial s_0})$, $\mathbf{I} \in \{ \mid \mathbf{I} \mid = j; \mathbf{I} \subset \{0, 1, \cdots, \mu - 1\}\}$. Cet argument entraîne que le coefficient de $P_{\mu-j}(s, \frac{\partial}{\partial s_0})$ peut être exprimé par une somme de mineurs $(\mu - j) \times (\mu - j)$ de la matrice $S(s)$.

Puisque $S(s) = s_0 id_\mu + C(s')$, et $rankS(s) = \mu - 1 - k$ pour $s \in D_M^{(k)}$, la matrice $S(s)$ est diagonalisable pour s assez proche de $D_M^{(k)}$. L'absence de blocs de Jordan non-triviaux est garanti par le Lemme 2.4. Autrement dit, il existe une matrice $B(s') \in GL(\mu, \mathbf{C}[s'])$ sur $\pi(D_M^{(k)})$ telle que,

$$B(s')^{-1}S(s)B(s') = diag(s_0 - s_{0,1}(s'), \cdots, s_0 - s_{0,1}(s'), s_0 - s_{0,2}(s'), \cdots, s_0 - s_{0,\mu-k-1}(s'))$$

où $s_{0,i}(s') \neq s_{0,j}(s')$ si $i \neq j$, le terme $s_0 - s_{0,1}(s')$ apparaît $k+1$ fois.

Evidemment, les mineurs $(\mu - j) \times (\mu - j)$ de la matrice $B(s')^{-1}S(s)B(s')$ contiennent le facteur $(s_0 - s_{0,1}(s'))^{k-j+1}, 0 \leq j \leq k+1$. Ici on se souvient de la formule de Binet-Cauchy qui exprime les mineurs $p \times p$ d'une matrice AB au moyen des mineurs $p \times p$ des matrices A et B,

$$S\binom{i_1, \cdots, i_p}{j_1, \cdots, j_p} = \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq \mu, 1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_p \leq \mu} B\binom{i_1, \cdots, i_p}{k_1, \cdots, k_p}(B^{-1}SB)\binom{k_1, \cdots, k_p}{\ell_1, \cdots, \ell_p}(B^{-1})\binom{\ell_1, \cdots, \ell_p}{j_1, \cdots, j_p}.$$

On en déduit que les mineurs $(\mu - j) \times (\mu - j)$ de la matrice $S(s)$ aussi contiennent le facteur $(s_0 - s_{0,1}(s'))^{k-j+1}$. Ainsi on a démontré

$$P_{\mu-j}(s) = (s_0 - s_{0,1}(s'))^{k-j+1}(\text{polynôme de degré } \mu - k - 1 \text{ en } \ s_0), 0 \leq j \leq k+1.$$

Ceci achève la démonstration de $i)$ pour $\ell = 0$.

Démonstration de $iii)$ **pour** $\ell = 0$. Puisque la strate $D_M^{(k)}$ constitue en plusiers composantes disjointes la démonstration sera divisée en deux étapes. Chaque composante est rétractible par l'action de quasihomogéneiété,

$$\tau : (s_0, \cdots, s_{\mu-1}) \to (t^{\mu+1}s_0, t^\mu s_1, \cdots, t^2 s_{\mu-1}), \ \ t \in \mathbf{C}^\times. \tag{3.5}$$

Etape 1. Invariance sur une composante.

Supposons que les deux points $(s_{0,1}(s'), s'), (s_{0,1}(t'), t') \in D_M^{(k)}$ à petite distance ϵ l'un de l'autre.

Grâce à l'énoncé $i)$, on a les équations déterminantes correspondant à ces points (voir (3.2)):

$$\Pi_0(\rho, s') = \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - \mu + k + 2)Q(\rho, s'), \tag{3.6}$$

$$\Pi_0(\rho, t') = \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - \mu + k + 2)Q(\rho, t'), \tag{3.7}$$

où $Q(\rho, s')$ un polynôme de degré $(k+1)$ en ρ. Il est évident que les deux équations (3.6) et (3.7) possèdent les racines communes $\rho = \{0, 1, 2, \cdots, \mu - k - 2\}$. Par contre, chacune a des racines $\{\rho_{\mu-k-1}(s') \leq \cdots \leq \rho_{\mu-1}(s')\}$ et $\{\rho_{\mu-k-1}(t') \leq \cdots \leq \rho_{\mu-1}(t')\}$ qui peuvent être differéntes, mais pour certain petit $\delta(\epsilon) > 0$,

$$\mid \rho_j(t') - \rho_j(s') \mid < \delta(\epsilon). \tag{3.8}$$

D'après le théorème de E.Brieskorn - F.Pham cité ci-dessus (Remarque 3), on sait que

$$e^{i\rho_{\mu-k-1}(s')} = e^{i\rho_{\mu-k-1}(t')}, \cdots, e^{i\rho_{\mu-1}(s')} = e^{i\rho_{\mu-1}(t')}.$$

Ça veut dire que le racine $\rho_j(s')$ doit être à distance entière de $\rho_j(t')$. La continuité (3.8) entraîne l'invariance des racines eux-mêmes lors de la transition

$$(s_0(s'), s') \to (s_0(t'), t') \in D_M^{(k)},$$

i.e.

$$\rho_{\mu-k-1}(s') = \rho_{\mu-k-1}(t'), \cdots, \rho_{\mu-1}(s') = \rho_{\mu-1}(t').$$

Etape 2. Aux points en symétrie.

L'appartenance d'un point $(s', s_0(s'))$ à $D_M^{(k)}$ veut dire qu'il existe un polynôme $q(z - \dot{z})$ de degré $\mu - k - 1$, tel que $q(0) \neq 0$ et

$$F(z, s') + s_0(s') = (z - \dot{z})^{k+2} q(z - \dot{z}),$$

pour certain $\dot{z} \in \mathbf{C}$. Grâce à la rétraction (3.5) et l'étape 1, il suffit de vérifier la coincidence des exposants caractéristiques à des points avec $s_0 = 1$ se trouvant sur les diverses composantes.

Notons $\dot{z}_u = -\omega^u, \ \ 0 \leq u \leq k+1$ pour $\omega = e^{i\frac{2\pi i}{k+2}}$. On remarque qu'il existe deux écritures pour $F(z, s') + 1$ à ces points i.e.

$F(z,s')+1=(z-\dot{z}_u)^{k+2}(q_{\mu-k-1,u}(z-\dot{z}_u)^{\mu-k-1}+\cdots+q_{1,u}(z-\dot{z}_u)+q_{0,u})$
$=z^{\mu+1}+s_{\mu-1,u}z^{\mu-1}+\cdots+s_{1,u}z+1$

Si on regarde les dérivées $(\frac{\partial}{\partial z})^i F(z,s')$, $0\leq i\leq \mu+1$ et si on compare les résultats de deux expressions ci-dessus, on obtient des équations linéaires entre $(q_{0,u},\cdots,q_{\mu-k-1,u})$ et $(s_{1,u},\cdots,s_{\mu-1,u})$. En résolvant ces équations, on obtient $s_{j,u}=\omega^{u(\mu-j+1)}s_{j,0}$ et $q_{\mu-k-j,u}=\omega^{u(j-1)}q_{\mu-k-j,0}$. Cela veut dire que $D^{(k)}$ possède $k+2$ composantes connexes qui sont représentées par

$$d_u=(1,s_{1,u},\cdots,s_{\mu-1,u})=(1,\omega^{u\mu}s_{1,0},\omega^{u(\mu-1)}s_{2,0},\cdots,\omega^{2u}s_{\mu-1,0}),\ \ 0\leq u\leq k+1.$$

Parmi les exposants en question, uniquement les $k+1$ exposants non-entiers importent car les autres sont forcément $\{0,1,\cdots,\mu-k-2\}$ pour tous les d_u. Donc, en vertu de la Proposition 2.5, afin de comparer les exposants aux points $d_u, 0\leq u\leq k+1$, il suffit de comparer $\rho_u^{(i)}$ des intégrales ci-dessous

$$I_u^{(i)}(t)=\int_{Reg(\delta_{i,u}(t))}(F(z,s')+1-t)^\lambda dz\sim v_{0,u}^{(i)}t^{\rho_u^{(i)}}(1+O(t^{\frac{1}{k+2}})).$$

Ici $\delta_{i,u}(t)$ le cycle évanescent qui converge vers $\dot{z}_u$ lorsque $t\to 0, 1\leq i\leq k+1$. On peut supposer que $\delta_{i,u}(t)=\omega^u\cdot\delta_{i,0}(t)$. Pour analyser les exposants $\rho_u^{(i)}$, faisons le changement de variable analytique $z\to Z_u$ près de $z=\dot{z}_u$

$$Z_u=w_{1,u}(z-\dot{z}_u)+\sum_{i\geq 2}w_{i,u}(z-\dot{z}_u)^i$$

tel que $F(z,s')+1=Z_u^{k+2}$. Ceci est possible vu que

$$\frac{1}{(k+2)!}(\frac{\partial}{\partial z})^{k+2-j}F(\dot{z}_u,s')=\delta_{0,j}q_{0,u}.$$

Alors

$$I_u^{(i)}(t)=\int_{Reg(\tilde{\delta}_{i,u}(t))}(Z_u^{k+2}-t)^\lambda(\frac{\partial Z_u}{\partial z})^{-1}dZ_u\sim\sum_{j\geq 0}v_{j,u}^{(i)}t^{\lambda+\frac{1+j}{k+2}},$$

où $\tilde{\delta}_{i,u}(t)$ est l'image du cycle $\delta_{i,u}(t)$ par le changement du variable $z\to Z_u$.

Il faut remarquer que les coefficients du changement du variable $w_{i,u}$ sont des fonctions quasihomogènes de $q_{0,u},\ \cdots,\ q_{\mu-k-j,u}$. Notamment

$$w_{i,u}(\tau^{\mu-k-1}q_{0,u},\tau^{\mu-k-2}q_{1,u},\cdots,\tau q_{\mu-k-2,u})=\tau^{-i}w_{i,u}(q_{0,u},\cdots,q_{\mu-k-2,u}).$$

On peut déduire de la quasihomogénéité,

$$w_{i,u}(q)=\omega^{-ui}w_{i,0}(q).$$

Par conséquence, les coefficients du développement de $I_u^{(i)}(t)$ aussi satisfont la relation analogue:

$$v_{j,u}^{(i)}=(\omega^u)^{\beta i}v_{j,0}^{(i)},$$

pour certain $\beta\in\mathbf{Q}$. Ce dernier entraîne que

$$(\rho_u^{(1)},\cdots,\rho_u^{(k+1)})=(\rho_0^{(1)},\cdots,\rho_0^{(k+1)})$$

pour tous les $u, 1\leq u\leq k+1$.

Ceci achève la démonstration de l'étape 2.

Le cas $\mathcal{P}_{x^0}^{(\ell)}(s,\frac{\partial}{\partial s})$, $\ell\geq 1$. Pour voir que le terme d'ordre maximal $\mu+1$ de l'opérateur $\mathcal{P}_{x^0}^{(\ell)}(s,\frac{\partial}{\partial s})$ est égal à $(s_0-\tilde{s}_0)\Delta_\mu(s)$, il suffit de remarquer dans la Proposition 2.5, ii),

$$det\tilde{\Sigma}=(F(x^0,s')+s_0)\Delta_\mu(s)=(s_0-\tilde{s}_0)\Delta_\mu(s).$$

On peut voir d'après la construction de l'opérateur $\mathcal{P}^{(\ell)}_{x^0}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ que la longueur de l'indice $\mid \alpha \mid$ prend uniquement les deux valeurs 0 et 1. La partie $det(\tilde{S}\frac{\partial}{\partial s_0} - \tilde{L} - \tilde{V}(s'))$ produit les opérateurs avec $\alpha = 0$, pourtant les $\tilde{T}'_r(s, \frac{\partial}{\partial s})$ produisent ceux avec $\alpha = \mathbf{e}_i = (0, \cdots, 0, \check{1}^i, 0, \cdots, 0)$. Une égalité evidente se déduit de la même Proposition,

$$\{ \text{ mineurs } (j \times j) \text{ de } S'(s)\} = \{ \text{ mineurs } (j \times j) \text{ de} S(s)\}, 1 \leq j \leq \mu + 1.$$

Donc, le raisonnement sur la multiplicité du facteur $(s_0 - s_{0,1}(s'))^{k-j+1}$ dans les coefficients $\tilde{P}^{(\ell)}_{\mu-j,0,x^0}(s)$, est parallèl à celui de $P_{\mu-j}$.

Quant à la multiplicité de $\tilde{P}^{(\ell)}_{\mu-j,\mathbf{e}_i,x^0}(s)$, elle est déterminée par les coefficients de $\tilde{T}'_r(s, \frac{\partial}{\partial s})$ i.e. ceux de l'opérateur $\tilde{T}_r(s, \frac{\partial}{\partial s_0})$ introduit dans (2.9)'. De cette définition il est possible de voir que

$$\tilde{P}^{(\ell)}_{\mu-j,\mathbf{e}_i,x^0}(s) = (s_0 - s_{0,1}(s'))^{k-j+1}(\text{polynôme de degré } \mu - k - 1 \text{ en } s_0), 1 \leq j \leq k + 1,$$

sur la strate $D^{(k)}_M$.

C'est à dire, un point de $(s', s_0(s')) \in D^{(k)}_M$ appartient à la strate $\tilde{D}^{(k)}_M = D^{(k)}_M \cap \{s_0 = \tilde{s}_0\}$ si et seulement si $(s_0 - \tilde{s}_0)^{k-j+2} \mid P^{(\ell)}_{\mu-j+1,\alpha,x^0}(s', s_0)$ pour s' t.q. $s_0(s') = \tilde{s}_0$, et $1 \leq j \leq k + 1$. Le résultat sur la strate $D^{(k)}_{M,-}$ s'en déduit aussi immédiatement.

Quant à l'énoncé ii), il suffit d'écrire de nouveau l'équation déterminante comme (3.6), (3.7), et appliquer le même argument. C.Q.F.D.

Remarque 4. i) Soit $s_0 = \tilde{s}_0 = -F(x^0, s')$ un point singulier de l'opérateur $\mathcal{P}^{(\ell)}_{x^0}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ t.q. $(s', \tilde{s}_0) \in D^{(-1)}_M$. En dépit de la présence de singularités, pour $\Delta_j = \xi^{(j)} - \xi^{(j-1)}, j = 2, \cdots \mu + 1$, un cycle évanescent de $F(x, s') + s_0 = 0$, $K^\lambda_{k,x^0,\Delta_j}(s)$ est holomorphe au point $s_0 = \tilde{s}_0$. Autrement dit, $K^\lambda_{k,x^0,\gamma^j}(s)$ ne se ramifie qu'aux μ points de D_M. Cela découle du fait que l'indice d'intersection entre le cycle γ^0 introduit dans Remarque 1 iii) et γ^j est égal à 0.

ii) Si on obtient $\rho_1, \cdots, \rho_{\mu+1}$ comme exposants caractéristiques de $\mathcal{P}^{(\ell)}_{x^0}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ à $s_0 = s_0(s')$, il existe un cycle $\gamma_i \in H_1(X^{(\mu,\nu)}_s, \mathbf{C})$, tel que

$$\int_{Reg(\gamma_i)} (x - x^0)^k (F(x, s') + s_0)^\lambda dx \sim \sum_{j \geq 0} a^{(k)}_{i,j}(s_0 - s_0(s'))^{\rho_i + j}.$$

4. Calcul des exposants caractéristiques

Dès qu'on a établit le théorème d'isomonodromie (Théorème 3.4) le long des strates $D^{(k)}_{M,-}, \tilde{D}^{(k)}_M$ il est possible de calculer l'équation déterminante des exposants pour $s' \in D^{(k)}_{M,-}$ etc. à l'autre point $s'^{\bullet} \in D^{(k)}_{M,-}$ etc. pour lequel le calcul se facilite. Le lieu de ramification de l'intégrale $K^\lambda_0(s)$ est simplement stratifié par les strates $D^{(k)}_{M,-}$. Quant à $K^\lambda_{k,x^0,\gamma}(s)$, son lieu de ramification a des strates $D^{(k)}_{M,-}, \tilde{D}^{(k)}_M$. Dès que on a posé la condition que $F(x, s')$ de (1.1.1) n'ait que la singularité du type de Morse, on se restreint aux strates de types $D^{(0)}_{M,-}, \tilde{D}^{(0)}_M$ qui peuvent être representées par les points suivants:

$$(s_0, s_1, 0, \cdots, 0) \in D^{(0)}_{M,-}, \quad , s_1 \neq 0, \Delta_\mu(s_0, s_1, 0, \cdots, 0) = 0,$$

$$(s_0, 0, s_2, 0, \cdots, 0) \in \tilde{D}^{(0)}_M, \quad , s_2 \neq 0, \Delta_\mu(s_0, 0, s_2, 0, \cdots, 0) = 0.$$

Ici on remarque que $(s_0, 0, s_2, 0, \cdots, 0)$ appartient à l'ensemble de bifurcation si μ est impair. Ce cas sera donc exclu dans les calculs suivants.

La propostion ci-dessus sert de base à l'analyse asymptotique de l'intégrale $K^\lambda_{k,x^0}(s)$ près de ses points de ramification. Par la suite on notera $K^\lambda_k(s) = K^\lambda_{k,0}(s)$, avec $x^0 = 0$.

Proposition 4.1. *L'intégrale de périodes $K_0^\lambda(s_0,s_1,0,\cdots,0)$ (noté desormais $K_0^\lambda(s_0,s_1)$) satisfait l'équation du type de Fuchs de degré μ.*

$$(4.1). \qquad [\prod_{j=0}^{\mu-1}(\vartheta_{s_0}-\ell_j+j-\lambda)+\frac{s_1}{\mu+1}\psi^\mu]K_0^\lambda(s_0,s_1)=0$$

En revanche, les intégrales $K_k^\lambda(s_0,s_1)$, définies parallèlement à $K_0^\lambda(s_0,s_1)$, satisfont les équations suivantes:

$$(4.2) \qquad [(\vartheta_{s_0}-\ell_{k-1}+\mu-1-\lambda)\prod_{j=0}^{\mu-1}(\vartheta_{s_0}-\ell_{k+j}+j-\lambda)+\frac{s_1}{\mu+1}\psi^\mu(\vartheta_{s_0}-k-1-\lambda)]K_k^\lambda(s_0,s_1)=0.$$

Supposons $\mu=\ 2m+2$. Alors les opérateurs différentiels qui annulent $K_j^\lambda(s_0,0,s_2,0)$, $0\leq j\leq \mu-1$, sont d'ordre $(\mu+1)$:

$S_{0,j-1}(\vartheta_{s_0}+\mu-1-j,\lambda)T_{0,m-1}(\vartheta_{s_0}+m-j+1,\lambda)\, S_{j,m}(\vartheta_{s_0}-j,\lambda)(\vartheta_{s_0}-(\lambda+\frac{\mu}{\mu+1})$
$+\mu-1-j)K_{2j}(s_0,0,s_2,0)$

$$(4.3)_{2j,o} \qquad =(\frac{2s_2}{\nu+2})^2\phi^{2m+1}(\vartheta_{s_0}-(\lambda+\frac{1}{2}+j))K_{2j}(s_0,0,s_2,0),$$

$T_{0,j-1}(\vartheta_{s_0}+\nu-j,\lambda)S_{0,m-1}(\vartheta_{s_0}+m-j+1,\lambda)T_{j,m}(\vartheta_{s_0}-m,\lambda)(\vartheta_{s_0}-(\lambda+\frac{\mu-1}{\mu+1})$
$+\mu-j-2)K_{2j+1}(s_0,0,s_2,0)$

$$(4.3)_{2j+1,o} \qquad =(\frac{2s_2}{\mu+1})\phi^{2m+1}(\vartheta_{s_0}-(\lambda+j+m+\frac{3}{2}))K_{2j+1}(s_0,0,s_2,0).$$

Ici on a adopté la notation

$$\vartheta_{s_0}=s_0\frac{\partial}{\partial s_0},\quad \psi=-\frac{\mu}{\mu+1}s_1\frac{\partial}{\partial s_0},\quad \phi=-\frac{\mu-1}{\mu+1}s_2\frac{\partial}{\partial s_0},\quad \ell_j=\frac{j+1}{\mu+1}.$$

$S_{\alpha,\beta}(X,\lambda)=\prod_{\ell=\alpha}^{\beta}(X-(\lambda+\frac{-(\mu-1)\ell+1}{\mu+1})),$
$T_{\alpha,\beta}(X,\lambda)=\prod_{\ell=\alpha}^{\beta}(X-(\lambda+\frac{2-(\mu-1)\ell}{\mu+1})).$

Démonstration Le principe du calcul s'appuie soit sur la Proposition 2.4, soit sur un calcul pareil à celui de [1], Prop. 2.2, 2.4. Voir aussi [2].

Il est facile de voir qu'un changement des variables,

$$t_0=\frac{s_0}{\mu},\quad t_1=-\frac{s_1}{\mu+1},$$

transforme les équations dans une écriture plus légère des équations (4.1), (4.2).

$$(4.1)'. \qquad [\prod_{j=0}^{\mu-1}(\vartheta_{t_0}-\ell_j+j-\lambda)-t_1^{\mu+1}(\frac{\partial}{\partial t_0})^\mu]K_0^\lambda(t_0,t_1)=0$$

$$(4.2)'. \qquad [(\vartheta_{t_0}-\ell_{k-1}+\mu-1-\lambda)\prod_{j=0}^{\mu-1}(\vartheta_{t_0}-\ell_{k+j}+j-\lambda)-\frac{t_1^{\mu+1}}{\mu+1}(\frac{\partial}{\partial t_0})^\mu(\vartheta_{t_0}-k-1-\lambda)]K_k^\lambda(t_0,t_1)=0$$

Ici on a noté $K_k^\lambda(t_0,t_1)$, les intégrales de périodes, après le changement de variables ci-dessus (un abus de notation).

En suite, on calcule les exposants caractéristiques des équations $(4.1)',(4.2)'$ à leurs points singuliers. D'abord on détermine les points singuliers de ces équations. Dans ce but regardons le symbole principal des opérateurs.

On remarque facilement

$$\text{le symbole principal de (4.1)' est}(t_0^\mu - 1)\sigma(\frac{\partial}{\partial t_0})^\mu$$

$$\text{le symbole principal de (4.2)' est } t_0(t_0^\mu - 1)\sigma(\frac{\partial}{\partial t_0})^{\mu+1}$$

si on fixe t_1 à une valeur non nulle convenablement choisie. Donc les points singuliers réguliers de (4.1)' $= \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{\mu-1}, \infty\}$, celles de (4.2)' $= \{0, 1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{\mu-1}, \infty\}$ avec $\omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$. Grâce à la remarque 4 i), l'intégrale $K^\lambda_{k,\gamma}(t_0, t_1)$ se ramifie hors de $\{t_0 = 0\}$ pour γ le cycle évanescent en question.

Proposition 4.2. *Les exposants caractéristiques de (4.1)' au point singulier $t_0 = \omega^j, 0 \leq j \leq \mu - 1$, (correspondant à un point de la strate $D^{(0)}_{M,-}$) sont comme suit:*

$$\rho = 0, 1, \cdots, \mu - 2, \frac{1}{2} + \lambda.$$

Les exposants caractéristiques de (4.2)' au point singulier $t_0 = \omega^j, 0 \leq j \leq \mu - 1$, (correspondant à $D^{(0)}_{M,-}$):

$$\rho = 0, 1, \cdots, \mu - 1, \frac{1}{2} + \lambda.$$

Au point $t_0 = 0$,

$$\rho = 0, 1, \cdots, \mu - 1, \lambda + k + 1.$$

Au point singulier $t_0 = +\infty$,:

$$\rho = \frac{\mu j - (k+1)}{\mu + 1} - \lambda, \quad 0 \leq j \leq \mu.$$

Les exposants sont rangés de sorte que leur somme soit égale à $\frac{\mu(\mu+1)^2}{2}$ (relation de Riemann-Fuchs).

Les exposants caractéristiques de $(4.3)_{2j,o}$ au point singulier $t_0 = 0$,(correspondant à $\tilde{D}^{(0)}_M$) :

$$\rho = 0, 1, \cdots, 2m, \lambda + j + \frac{1}{2}.$$

Les exposants caractéristiques de $(4.3)_{2j+1,o}$ au point singulier $t_0 = 0$,(correspondant à $\tilde{D}^{(0)}_M$) :

$$\rho = 0, 1, \cdots, 2m, \lambda + j + m + \frac{3}{2}.$$

Démonstration

La preuve s'appuie sur les calculs formels d'après les équations $(4.1)'$, $(4.2)'$, (4.3) et la définition des exposants caractéristiques.

Pour obtenir l'équation relative de $(4.2)'$ aux points $t = t_0 = \omega^j$, il faut savoir compter les exposants caractéristiques de l'opérateur

$$(\vartheta_t + \alpha_0) \cdots (\vartheta_t + \alpha_\mu) - \partial_t^\mu(\vartheta_t + \gamma)$$

$$= t(t^\mu - 1)\partial_t^{\mu+1} + [(\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \alpha_0 + \cdots + \alpha_\mu)t^\mu - \gamma - \mu]\partial_t^\mu + \text{ des termes de bas ordre.}$$

La seconde égalité découle des formules:

$$(\vartheta_t + \alpha_0) \cdots (\vartheta_t + \alpha_\mu) = t^{\mu+1}\partial_t^{\mu+1} + (\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \alpha_0 + \cdots + \alpha_\mu)t^\mu\partial_t^\mu + \cdots$$

$$\partial_t^\mu(\vartheta_t + \gamma) = (\vartheta_t + \gamma + \mu)\partial_t^\mu.$$

En appliquant la définition 3.1, on obtient l'équation relative

$$\rho(\rho - 1) \cdots (\rho - \mu + 1)(\mu(\rho - \mu) + \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j - \gamma - \mu) = 0.$$

Afin de s'adapter à $(4.2)'$, on met $\alpha_j = \frac{\mu}{\mu+1}j - \lambda - \frac{k+1}{\mu+1},\ 0 \le j \le \mu-1, \alpha_\mu = -\lambda+\mu-1-\frac{k}{\mu+1}, \gamma = -\lambda-k-1$. En somme on obtient les exposants caractéristiques énoncés.

D'une façon analogue, on calcule les exposants caractéristiques de $(4.1)'$ à $t=\omega^j$ à l'aide de

$$(\vartheta_t + \alpha_0)\cdots(\vartheta_t + \alpha_{\mu-1}) - \partial_t^\mu$$

$$= (t^\mu - 1)\partial_t^\mu + (\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \alpha_0 + \cdots + \alpha_{\mu-1})t^{\mu-1}\partial_t^{\mu-1} + \text{ des termes de bas ordre.}$$

Dans ce cas l'équation relative est

$$\rho(\rho-1)\cdots(\rho-\mu+2)(\mu(\rho-\mu+1) + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \sum_{j=0}^{\mu-1}\alpha_j) = 0.$$

Tous les autres cas se déduisent immédiatement de (4.3). C.Q.F.D.

L'énoncé suivant découle d'un résultat classique de Picard [12], [11].

Proposition 4.3. *i) Soit Δ_j le cycle évanescent qui correspond à la valeur critique $t=\omega^j$ de l'intégrale $K_0^\lambda(t)$. Soit Δ_{j+1} un autre cycle tel que $\langle\Delta_j, \Delta_{j+1}\rangle \neq 0$. Alors la matrice de monodromie de Picard-Lefschetz autour du point singulier $t_0 = \omega^j$, s'écrit sous la forme suivante:*

$$\begin{bmatrix} K_{k,\Delta_j}^\lambda(e^{2\pi i}(t-t_0)+t_0) \\ K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(e^{2\pi i}(t-t_0)+t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi(\lambda+\frac{1}{2})i} & 0 \\ e^{2\pi(\lambda+\frac{1}{2})i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{k,\Delta_j}^\lambda(t) \\ K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t) \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

Pour les intégrales de $(4.2)', (4.3)_{2j,o}, (4.3)_{2j+1,o}$ la matrice de monodromie autour du point $t=0$ s'écrit comme (4.4).

ii) On a comportement asymptotique près de $t=\omega^j$ comme suit.

Si $\lambda + \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$

$$K_{k,\Delta_j}^\lambda(t) = A_k(t-t_0)^{\lambda+\frac{1}{2}}(1 + hol(t-t_0)), \tag{4.5}$$

$$K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t) = A_k(t-t_0)^{\lambda+\frac{1}{2}}(1 + hol(t-t_0)) + hol(t-t_0),$$

avec $A_k \neq 0$.

Si $\lambda + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$, on a le comportement asymptotique (4.5) pour $K_{k,\Delta_j}^\lambda(t)$, et

$$K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t) = A_k(t-t_0)^{\lambda+\frac{1}{2}}\log(t-t_0)(1 + hol(t-t_0)) + hol(t-t_0). \tag{4.6}$$

iii) Pour μ pair, on a comportement asymptotique près de $t=0$ comme suit.

Si k pair et $\lambda + \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$,

$$K_{k,\Delta_j}^\lambda(t) = A_k t^{\lambda+\frac{1+k}{2}}(1 + hol(t)), \tag{4.7}$$

$$K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t) = A_k t^{\lambda+\frac{1+k}{2}}(1 + hol(t)) + hol(t).$$

Si k impair et $\lambda + \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$,

$$K_{k,\Delta_j}^\lambda(t) = A_k t^{\lambda+\frac{\mu+k}{2}}(1 + hol(t)), \tag{4.8}$$

$$K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t) = A_k t^{\lambda+\frac{\mu+k}{2}}(1 + hol(t)) + hol(t).$$

Dans les cas où $\lambda + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$, il faut modifier le développement asymptotique de $K_{k,\Delta_{j+1}}^\lambda(t)$ comme dans (4.6).

5. Démonstration du Théorème 1.2

Pour démontrer le Théorème 1.2, il faut déjà quelques lemmes élémentaires. Les notations sont celles des chapitres précédents.

Lemme 5.1. *Soient $x^{(2)}, \cdots, x^{(L)}$ les points non-critiques de l'application $x \to F(x,s')$. Alors l'égalité suivante a lieu entre les deux intégrales*

$$I_{P_{K,m}(x,y),\Gamma}(s) = ((\frac{\partial}{\partial s_0})^{-1}\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(2)},s')})^{k_2}\cdots((\frac{\partial}{\partial s_0})^{-1}\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(L)},s')})^{k_L} I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}(s).$$

Ici

$$\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')} = \frac{1}{\mid grad_{s'} f_1(x^{(i)},s')\mid}\sum_{j=1}^{\mu-1}\frac{\partial}{\partial s_j}f_1(x^{(i)},s')\frac{\partial}{\partial s_j},$$

et

$$f_1(x^{(i)},s') = \frac{\partial}{\partial x}F(x,s')\mid_{x=x^{(i)}} .$$

Où l'action de $(\frac{\partial}{\partial s_0})^{-1}$ sur la fonction de Dulac définie par l'expansion asymptotique près du point $s_0 = x$ dans un secteur simplement connexe du plan complexe $\mathbf{C}_{s_0}$ est donnée d'une façon suivante:

$$(\frac{\partial}{\partial s_0})^{-1}[(s_0-x)^\rho(\sum_{j\geq 0} a_j(s_0-x)^j)] = (s_0-x)^\rho(\sum_{j\geq 0}\frac{a_j}{\rho+j+1}(s_0-x)^{j+1}).$$

Démonstration

On a le développement analogue à $(2.3)'$ en $(x-x^{(i)})$,

$$F(x,s') = (x-x^{(i)})^{\mu+1} + \sum_{\ell=1}^{\mu} f_\ell(x^{(i)},s')(x-x^{(i)})^\ell + F(x^{(i)},s').$$

De celui-ci, il est facile de voir

$$\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}\int_\Gamma (x-x^{(1)})^{k_1}(F(x,s')+s_0)^\lambda dx = \frac{\partial}{\partial s_0}\int_\Gamma (x-x^{(i)})(x-x^{(1)})^{k_1}(F(x,s')+s_0)^\lambda dx, \quad i=2,3,\cdots.$$

De ce dernier, on déduit la relation désirée. C.Q.F.D.

Lemme 5.2. *Si l'intégrale $I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}(s)$ admet un développement asymptotique près du point de ramification $s_0 = s_0(s')$, $(s',s_0(s')) \in D_M^{(0)}$,*

$$I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}(s) \sim \sum_{j\geq 0} a_j^{(k_1)}(s')(s_0-s_0(s'))^{\rho+j} + \sum_{j\geq 0} a_{j,1}^{(k_1)}(s')(s_0-s_0(s'))^{\rho+j}\log(s_0-s_0(s')),$$

avec $a_0^{(k_1)}(s')\cdot a_{0,1}^{(k_1)}(s') \neq 0$ sur la strate $D_{M,-}^{(0)}$ (ou $D_{M,1}^{(0)}$), alors développement asymptotique ci-dessous a lieu:

$$I_{(x-x^{(1)})^{k_1}(x-x^{(i)})y^m,\Gamma}(s) \sim \sum_{j\geq 0} a_{i,j}^{(k_1)}(s')(s_0-s_0(s'))^{\rho+j} + \sum_{j\geq 0} a_{i,j,1}^{(k_1)}(s')(s_0-s_0(s'))^{\rho+j}\log(s_0-s_0(s')),$$

avec $a_{i,0}^{(k_1)}(s')\cdot a_{i,0,1}^{(k_1)}(s') \neq 0$, sur la strate $D_{M,-}^{(0)}$ (ou $\tilde{D}_M^{(0)}$).

Démonstration

D'après le Lemme 5.1, on a développement asymptotique suivant:

$$((\frac{\partial}{\partial s_0})^{-1}\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')})I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}(s)$$

$$\sim a_0^{(k_1)}(s')(-\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}s_0(s'))(s_0-s_0(s'))^\rho + a_{0,1}^{(k_1)}(s')(-\frac{\partial s_0(s')}{\partial f_1(x^{(i)},s')})(s_0-s_0(s'))^\rho\log(s_0-s_0(s')) +$$

$$+\frac{1}{\rho+1}(\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}a_0^{(k_1)}(s'))(s_0-s_0(s'))^{\rho+1}+\cdots.$$

Donc l'énoncé désiré est réduit à l'inégalité,

$$\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')} s_0(s') \neq 0.$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}$, considéré comme un champ de vecteur dans $\mathbf{C}^\mu_s$, ne peut pas être un champ de vecteurs logarithmique i.e. $\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')} \notin Der_{\mathbf{C}^\mu_s}(log\ D)$. Cela découle du fait que les éléments de $Der_{\mathbf{C}^\mu_s}(log\ D)$ sont à coefficients polynomiaux quasihomogènes (voir la Proposition 2.2, le lemme 2.4) avec des poids quasihomogènes positifs, par contre $\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}$ est à coefficients constants de poids negatif. C'est- à -dire que le vecteur normal à la surface $s_0 = s_0(s')$ (i.e. $D^{(0)}_M$) dans $\mathbf{C}^\mu_s$ n'est pas normal à $\frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')}$. On en déduit que

$$\frac{1}{\mid grad_{s'} f_1(x^{(i)},s') \mid} < (0, f_1(x^{(i)},s')), (1, grad_{s'} s_0(s')) >= \frac{\partial}{\partial f_1(x^{(i)},s')} s_0(s') \neq 0.$$

C.Q.F.D.

En répétant l'argument du Lemme 5.2, pour chaque point de ramification $(s', s_0(s')) \in D^{(0)}_M$, on obtient l'énoncé suivant. On notera dans la suite la strate $D^{(0)}_M \cap \{(s',s_0); s_0 = -F(x^{(1)},s')\}$ par $D^{(0)}_{M,1}$. C'est une strate analogue à $\tilde{D}^{(0)}_M$.

Proposition 5.3. *La multiplicité des zéros de* $I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}\ (s) \not\equiv 0$ *est égale à celle des zéros de l'intégrale* $I_{P_{K,m}(x,y),\Gamma}(s)$ *à chaque point de ramification de la strate* $D^{(0)}_{M,-}$ *ou* $D^{(0)}_{M,1}$, *si* $x^{(2)},\cdots,x^{(L)}$ *ne sont pas des points critiques de* $F(x,s')$.

Pour savoir le comportement asymptotique de l'intégrale $I_{(x-x^{(1)})^{k_1}\cdots(x-x^{(L)})^{k_L}y^m,\Gamma}(s)$ près de la strate $D^{(0)}_M$, il suffit de savoir celui de $I_{(x-x^{(1)})^{k_1}y^m,\Gamma}(s)$.

5.2. Démonstration du Théorème 1.2

Pour estimer la multiplicité des zéros de $I_{P_{K,m}(x,y),\Gamma}(s)$, d'abord on estime les exposants caractéristiques aux points de ramification de la strate $D^{(0)}_M$, à l'aide de la Proposition 4.2 et de la Proposition 5.3. Dans le cas où $I_{P_{K,m}(x,y),\Gamma}(s)$ est holomorpe à $s_0 = s_0^{(j)}$ pour un certain j, notre argument d'estimation ci-dessous est toujours valable. Ici on considère le cas du nombre maximal ($= \mu$) de points de ramification.

La contribution maximale ρ des exposants caractéristiques à chaque point est classifiée comme suit.

I) cas μ pair

Au point $s_0 = s_0^{(1)}$, correspondant au point de la strate $D^{(0)}_{M,1}$,

si k_1 pair $\rho = \frac{m}{\nu} + \frac{k_1+1}{2}$.

si k_1 impair $\rho = \frac{m}{\nu} + \frac{k_1+\mu}{2}$.

A chaque point $s_0 = s_0^{(i)}$, $i = 2,\cdots\mu$, correspondant au point de la strate $D^{(0)}_{M,-}$, $\rho = \frac{m}{\nu} + \frac{1}{2}$.

II) cas μ impair

Dans ce cas là, on ne sait que des exposants caractéristiques au point de la strate $D^{(0)}_{M,1}$, dont le maximum est toujours égal à $\rho = \frac{m}{\nu} + \frac{1}{2}$.

D'après la Définition 1.1 et la Proposition 5.3, la multiplicité N des zéros de l'intégrale peut être éstimé par 2ρ si $\rho \in \mathbf{Z}$ et par $[\rho] + 1$ si $\rho \notin \mathbf{Z}$.

De la liste ci-dessus se déduit immédiatement l'énoncé i), ii) du Théorème 1.2.

Quant à l'énoncé iii), on utilise le fait que $I_{(x-x^{(1)})^k y^m,\Gamma}(s)$ satisfait une équation différentielle aux singularités régulières de degré $\mu+1$, $\mathcal{P}^{(k)}_{x^{(1)}}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ (voir la Proposition 2.4, ii)). Cela veut dire que les exposants caractéristiques de $\mathcal{P}^{(k)}_{x^{(1)}}(s, \frac{\partial}{\partial s})$ au point hors discriminant D doivent être $\{0,1,\cdots,\mu\}$ où la solution $I_{(x-x^{(1)})^k y^m,\Gamma}(s)$ est holomorphe. D'autre part, le lemme 5.1 implique que l'exposant caractéristique de $I_{P_{K,m}(x,y),\Gamma}(s)$ est supérieur d'au plus $k_2+\cdots+k_L \leq K$ à celui de $I_{(x-x^{(1)})^k y^m,\Gamma}(s)$. D'où vient l'énoncé désiré.
C.Q.F.D.

6. La déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurface

Dans cette section, on regarde la déformation verselle des singularités isolées simples d'hypersurface:

$$
\begin{aligned}
&A_\mu : H(x,y;s) = x^{\mu+1} + y^2 + \textstyle\sum_{i=0}^{\mu-1} s_{i0}x^i,\\
&D_\mu : H(x,y;s) = x^{\mu-1} + xy^2 + \textstyle\sum_{i=1}^{\mu-2} s_{io}x^{i-1} + s_{01}y + s_{00},\\
&E_6 : H(x,y;s) = x^4 + y^3 + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{20}x^2 + s_{10}x + s_{01}y + s_{00},\\
&E_7 : H(x,y;s) = x^3 + xy^3 + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{20}x^2 + s_{02}y^2 + s_{10}x + s_{01}y + s_{00},\\
&E_8 : H(x,y;s) = x^5 + y^3 + s_{31}x^3y + s_{21}x^2y + s_{11}xy + s_{01}y + s_{30}x^3 + s_{20}x^2 + s_{10}x + s_{00}.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Nous définissons un ensemble fini $\mathbf{I} \subset \mathbf{N}^2$ associé à chaque singularité ci-dessus qui satisfait les conditions suivantes:

1. $\mid \mathbf{I} \mid = \mu =$ le nombre de Milnor de la singularité.
2. A chaque élément $(\nu_1,\nu_2) \in \mathbf{I}$ correspond un monôme $x^{\nu_1}y^{\nu_2}$ qui est un élément de la base de l'espace

$$\mathbf{C}[x,y]/(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y;0)),\frac{\partial}{\partial y}H(x,y;0)).$$

On remarque que toutes les singularités de la liste (6.1) sont quasihomogènes. C'est à dire, il existe $(\rho_1,\rho_2) \in \mathbf{Q}^2_{>0}$ tel que

$$(\rho_1 x\frac{\partial}{\partial x} + \rho_2 y\frac{\partial}{\partial y})H(x,y;0) = H(x,y;0).$$

On définit pour $\alpha \in \mathbf{N}^\mu$ le poids quasihomogènes d'un monôme s^α:

$$weight\left(\prod_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} s_{\nu_1,\nu_2}^{\alpha_{\nu_1,\nu_2}}\right) = \langle w,\alpha\rangle = \sum_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} w_{\nu_1,\nu_2}\alpha_{\nu_1\nu_2} \tag{6.2}$$

où $w_{\nu_1\nu_2} = 1-(\rho_1\nu_1+\rho_2\nu_2)$. On définit pour chaque $(\nu_1,\nu_2) \in \mathbf{I}$ un réseau d'entiers $L(\nu_1,\nu_2)$ selon Noumi [9]. Dans les cas de A_μ, E_6, E_8 :

$$L(\nu_1,\nu_2) = ((\nu_1,\nu_2)+L)\cap\mathbf{N}^2$$

où $L = \mathbf{Z}(\frac{1}{\rho_1},0) + \mathbf{Z}(0,\frac{1}{\rho_1}) \subset \mathbf{Z}^2$. Soit

$$
\begin{aligned}
C_{\nu_1\nu_2}(\beta_1,\beta_2) &= (-1)^{\rho_1(\beta_1-\nu_1)+\rho_2(\beta_2-\nu_2)}\frac{\Gamma(\rho_1(\beta_1+1))\Gamma(\rho_2(\beta_2+1))}{\Gamma(\rho_1(\nu_1+1))\Gamma(\rho_2(\nu_2+1))} \quad \text{si} \quad (\beta_1,\beta_2)\in L(\nu_1,\nu_2)\\
&= 0 \quad \text{si} \quad (\beta_1,\beta_2)\notin L(\nu_1,\nu_2).
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Dans les cas de D_μ, E_7 : $L = \mathbf{Z}(\frac{1}{\rho_1},0) + \mathbf{Z}(1,\frac{1}{\rho_2})$, $L(\nu_1,\nu_2) = ((\nu_1,\nu_2)+L)\cap\mathbf{N}^2$. Soit

(6.4) $C_{\nu_1\nu_2}(\beta_1,\beta_2)$

$$= (-1)^{\rho_1(\beta_1-\nu_1)+\rho_2(1-\rho_1)(\beta_2-\nu_2)}\frac{\Gamma(\rho_1[\beta_1+1-\rho_2(\beta_2+1)])\Gamma(\rho_2(\beta_2+1))}{\Gamma(\rho_1[\nu_1+1-\rho_2(\nu_2+1)])\Gamma(\rho_2(\nu_2+1))} \quad \text{si } (\beta_1,\beta_2)\in L(\nu_1,\nu_2)$$

$= 0 \quad$ si $\quad (\beta_1,\beta_2)\notin L(\nu_1,\nu_2)$.

Alors on peut introduire un système des "coordonnées plates" dans l'espace de paramètres de déformation $\mathbf{C}^\mu_s$ (ou bien $\mathbf{R}^\mu$) [9]. Notamment,

$$t_0 := t_{00} = s_{00} + \sum_{\langle w,\alpha\rangle=1} C_{00}(\ell(\alpha))\frac{s^\alpha}{\alpha!} \tag{6.5}$$

$$t_{\nu_1,\nu_2} = \sum_{\langle w,\alpha\rangle=1-(\rho_1\nu_1+\rho_2\nu_2)} C_{\nu_1\nu_2}(\ell(\alpha))\frac{s^\alpha}{\alpha!} \qquad \text{pour} \qquad (\nu_1,\nu_2)\neq(0,0) \tag{6.6}$$

où la fonction linéaire $\ell(\alpha)$ est définie comme suit:

$$\ell(\alpha)=\left(\sum_{i=0}^{\mu-1} i\,\alpha_{i0},\nu_2\right)\qquad \text{pour}\qquad A_\mu$$

$$\ell(\alpha)=\left(\sum_{(\nu_1,\nu_2)\neq(0,0)}\nu_1\alpha_{\nu_1\nu_2},\sum_{(\nu_1,\nu_2)\neq(0,0)}\nu_2\alpha_{\nu_1,\nu_2}\right)\qquad \text{pour}\qquad D_\mu,E_\mu.$$

Le changement de coordonées $s\to t$ est un difféomorphisme. Desormais nous nous serverons de la notation $t=(t_0,t')$, où $t'=(t_{\nu_1\nu_2}),(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}\setminus\{0,0\}$.

Soit $H(x,y;s)$ un des polynômes de la liste (6.1). On prend un cycle évanescent $\gamma_s\subset\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : H(x,y;s)=0\}$. Alors on peut définir l'intégrale d'Abel y associée :

$$I_{x^{k_1}y^{k_2},\gamma_s}(s)=\int_{\gamma_s}x^{k_1}y^{k_2}\frac{dx\wedge dy}{dF},$$

et un vecteur

$$\mathbf{K}(s)=(I_{x^{k_1}y^{k_2}}(s))_{(k_1,k_2)\in\mathbf{I}}.$$

L'énoncé suivant met à jour l'avantage d'écrire des coordinnées comme (6.5), (6.6) dans nos études.

Théorème 6.1. *Si on définit une base des intégrales d'Abel* $\mathbf{J}(t)=(J_{\nu_1\nu_2}(t))_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}}$ *comme suit:*

$$J_{\nu_1\nu_2}(t)=\int_{\gamma_{s(t)}}\frac{\partial}{\partial t_{\nu_1\nu_2}}F(x,y,s(t))\frac{dx\wedge dy}{dF},$$

alors les énoncés suivants ont lieu.

1. Il existe une matrice $P(t')\in GL(\mu,\mathbf{C}[t'])$ *telle que:*

$$\mathbf{K}(s(t))=P(t')\cdot\mathbf{J}(t)\tag{6.7}$$

où $P(t')=\frac{\partial s_\nu}{\partial t_{\tilde\nu}}$ *pour les indices* $\tilde\nu,\nu\in\mathbf{I}$.

2. Les intégrales satisfont un système d'équations différentielles:

$$\tilde S(t)\frac{\partial}{\partial t_0}\mathbf{J}(t)=\Lambda\cdot\mathbf{J}(t)\tag{6.8}$$

où $\Lambda=diag(w_{\nu_1\nu_2})_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}}$. *La matrice* $\tilde S(t)\in End(\mathbf{C}^\mu)\otimes\mathbf{C}[t]$ *satisfait les conditions ci-dessous:*

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\tilde S(t)=id_\mu,$$

$$\det\tilde S(t(s))=\Delta_\mu(s)\tag{6.9}$$

où $\Delta_\mu(s)$ *est le discriminant de la déformation verselle.*

On note $D:=\{s\in\mathbf{C}^\mu:\Delta_\mu(s)=0\}$. En reprenant les notations depuis le début du §6, on formule l'énoncé central de la section comme suit.

Théorème 6.2. *Soit* $\gamma_s\subset\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : H(x,y;s)=0\}$ *un cycle évanescent de la déformation verselle de la liste (6.1). Alors il existe un ensemble ouvert dense* $U\subset\mathbf{R}^\mu\setminus D$ *tel que la multiplicité des zéros* N *de l'intégrale d'Abel (1.1.3)' non-nulle*

$$I_{P,Q,\gamma_s}(s):=\int_{\gamma_s}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

doit satisfaire à chaque point $s\in U$ *l'inégalité suivante:*

$$N\le\mu(1+[\rho_1(K-1)+\rho_2(K-1)])-1.$$

On va s'intéresser à la dérivée de l'intégrale (1.1.3)'

$$\frac{\partial}{\partial s_0} I_{P,Q,\gamma_s}(s) = \int_{\gamma_s} \frac{d(P(x,y)dx + Q(x,y)dy)}{dF} = \int_{\gamma_s} \frac{(-P_y(x,y) + Q_x(x,y))dx \wedge dy}{dF},$$

que l'on note par

$$I_{R,\gamma_s}(s) := \sum_{0 \le k_1+k_2 \le K-1} \int_{\gamma_s} R_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2} \frac{dx \wedge dy}{dF}.$$

On montre que la multiplicité des zéros de l'intégrale $I_{R,\gamma_s}(s)$ ne dépasse pas $\mu(1+[\rho_1(K-1)+\rho_2(K-1)])-2$.

Il est facile de voir qu'il existe des polynômes $P^{(k)}_{\nu_1,\nu_2}(\bullet)$ de degré au plus $v_0 := [\rho_1(K-1)+\rho_2(K-1)]$ pour un vecteur quelconque $(R_{k_1k_2}) \in \mathbf{R}^{\frac{(K+1)K}{2}}$:

$$\sum_{0 \le k_1+k_2 \le K-1} R_{k_1k_2} I_{x^{k_1}y^{k_2}}(s(t)) = \sum_{(\nu_1,\nu_2)\in \mathbf{I}} P^{(k)}_{\nu_1,\nu_2}(t_0 - \tilde{t}_0) \cdot J_{\nu_1\nu_2}(t),$$

avec $\tilde{t}_0 \in \mathbf{C}^\mu \setminus D$.

Notons le vecteur de taille $\mu(v_0+1)$:

$$\tilde{\mathbf{J}}(t) =^t (J_{00}(t), \dots, J_{\mu_1\mu_2}(t), (t_0-\tilde{t}_0)J_{00}(t), \dots, (t_0-\tilde{t}_0)J_{\mu_1\mu_2}(t), \dots$$
$$\dots, (t_0-\tilde{t}_0)^{v_0} J_{00}(t), \dots, (t_0-\tilde{t}_0)^{v_0} J_{\mu_1\mu_2}(t)).$$

Ici $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbf{I}$ tel que $\mu_1+\mu_2 = \max_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbf{I}} \nu_1+\nu_2$. On note $M = \mu(v_0+1)$. Notre théorème 6.2 se déduit du lemme suivant.

Lemme 6.3. *Il existe des polynômes $\delta^{(i)}(t), i \in \mathbf{N}$ de degré $\frac{M(M+1)}{2}(\mu!)^2$ tels que pour $(\tilde{t}_0, t') \in \mathbf{R}^\mu \setminus D$, qui se trouve hors des zéros de $\delta^{(i)}(t)$, l'énoncé suivant soit valide. Si un vecteur $\vec{r} \in \mathbf{R}^M \setminus \{0\}$ satisfait la relation suivante,*

$$\langle \vec{r}, \frac{1}{\ell!}\left(\frac{d}{dt_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')\rangle = 0, \tag{6.10}$$

pour $0 \le \ell \le M-1$ alors (6.10) est valable pour $\ell \ge M = \mu(v_0+1)$ aussi.

L'ensemble $\{t \in \mathbf{R}^\mu; \delta^{(i)}(t) \ne 0, i \in \mathbf{N}\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}^\mu \setminus D$.

Démonstration D'abord on établit la relation entre $\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')$ et $\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t')$. Dans ce but, on introduit $\mathbf{J}(t) =^t (J_{00}(t), \dots, J_{\mu_1\mu_2}(t))$. Notons le poids quasihomogène d'une forme $x^{\nu_1}y^{\nu_2}dxdy/dF$ par $\lambda_{\nu_1\nu_2} = \rho_1(\nu_1+1)+\rho_2(\nu_2+1)-1$. D'après (6.8) les coefficients de développement de Taylor de $\mathbf{J}(t)$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \mathbf{J}(\tilde{t}_0, t') = \tilde{S}^{-\ell}(\tilde{t}_0, t')(\Lambda - (\ell-1)id_\mu)\dots(\Lambda - id)\Lambda \cdot \mathbf{J}(\tilde{t}_0, t') \tag{6.11}$$

où $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_{00}, \dots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$. A l'aide de la formule (6.11) on conclut facilement la relation suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right)^\ell \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t') = \Sigma^{(\ell)} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t'). \tag{6.12}$$

Ici $\Sigma^{(\ell)}$ est une matrice $M \times M$, dont la composante $\sigma^{(\ell)}_{ij}, \in End(\mathbf{C}^\mu) \otimes \mathbf{C}[t]$ $(i,j) \in [0, v_0]^2$ est detérminée comme suit:

$$\sigma^{(\ell)}_{ij} = \begin{cases} \tilde{S}^{-\ell}\Lambda(\Lambda - id_\mu)\dots(\Lambda - (\ell-1)id_\mu) & 0 \le i = j \le v_0 \\ i\ell\tilde{S}^{-(\ell+j-i)}\Lambda(\Lambda - id_\mu)\dots(\Lambda - (\ell+j-i)id_\mu) & 0 \le j < i \le v_0 \\ 0 & i < j \quad \text{où} \quad \ell+j-i < 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

C'est-à-dire:

$$\Sigma^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \sigma_{00}^{(\ell)} & \sigma_{01}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{0v_0}^{(\ell)} \\ \sigma_{10}^{(\ell)} & \sigma_{11}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{1v_0}^{(\ell)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{v_00}^{(\ell} & \sigma_{v_01}^{(\ell)} & \cdots & \sigma_{v_0v_0}^{(\ell)} \end{pmatrix}.$$

A l'aide de la matrice $\Sigma^{(\ell)}$, la condition (6.10) se transforme en l'équation suivante:

$$\langle \vec{r}, \Sigma^{(\ell)} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{t}_0, t') \rangle = 0 \tag{6.14}$$

pour $0 \leq \ell \leq \mu - 1$. Puisque $(\tilde{t}_0, t') \notin D$, les valeurs propres de la matrice $\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')$ sont sans multiplicité. Par consequence, $\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice T à coefficients de fonctions semi-algébriques. C'est-à-dire:

$$T^{-1}\tilde{S}(\tilde{t}_0, t')T = \operatorname{diag}(\tilde{t}_0 - \tau_1(t'), \tilde{t}_0 - \tau_2(t'), \ldots, \tilde{t}_0 - \tau_\mu(t')), \tag{6.15}$$

où $\tau_i(t') \neq \tau_j(t')$ pour $i \neq j$.

En tenant compte de (6.12), (6.13), (6.14) on peut voir que l'existence d'une collection de nombres,dépendant de $(\tilde{t}_0, t', \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$, $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), d_{M-1}^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), \ldots, d_0^{(i)}(\tilde{t}_0, t'), i \geq 0$, satisfaisant (6.16) ci-dessous est une condition suffisante pour que (6.10) pour $\ell \geq \mu - 1$ entraîne (6.10) pour $\ell \geq \mu$ aussi:

$$d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t')\frac{\tilde{S}^{-(M-1)}}{(M+i)!}(\Lambda - (M+i-1)id_\mu)\ldots(\Lambda - i \cdot id_\mu) + \frac{d_{M-1}^{(i)}(\tilde{t}_0, t')}{(M+i-1)!}\tilde{S}^{-M-i+1}(\Lambda - (\mu+i-2)id_\mu)\ldots \tag{6.16}$$

$$\ldots(\Lambda - i \cdot id_\mu) + \ldots + d_0^{(i)}(\tilde{t}_0, t') \cdot \frac{\tilde{S}^{-i}}{i!} = 0,$$

avec $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t') \neq 0$. Vu (6.15), la relation (6.16) est équivalente à l'équation suivante:

$$\sum_{\ell=1}^{M} d_\ell^{(0)} \frac{(\tilde{t}_0 - \tau_\nu(t'))^{-\ell}}{\ell!} \cdot \prod_{b=0}^{\ell-1} (\lambda_\nu - b) + d_0^{(0)} = 0, \qquad \nu \in \mathbf{I},$$

$$\sum_{\ell=0}^{M} \frac{d_\ell^{(i)}(\tilde{t}_0 - \tau_\nu(t'))^{-\ell}}{(\ell+i)!} \prod_{b=i}^{\ell+i-1} (\lambda_\nu - b) = 0$$

Celui-là est, à son tour, équivalente à l'équation ci-dessous:

$$\tilde{\Sigma}^{(i)} \cdot \vec{\mathbf{d}}^{(i)} = 0, \quad i \in \mathbf{N}$$

où

$$\tilde{\Sigma}^{(i)} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{(M+i)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{00}-b), & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{00}-b), & \cdots, \\ \frac{1}{(M+i)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{01}-b), & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{01}-b), & \cdots, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(M+1)!}\prod_{b=i}^{M+i-1}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \cdots, \\ \frac{1}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{00}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-2)!}\prod_{b=i}^{M+i-3}(\lambda_{00}-b), & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(M+i-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-2)!}\prod_{b=i}^{M+i-3}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b), & \cdots, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(M+i-v_0)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-1}(\lambda_{00}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)}{(M+i-v_0-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-2}(\lambda_{00}-b), & \cdots, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(M+i-v_0)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-1}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b) & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)}{(M+i-v_0-1)!}\prod_{b=i}^{M+i-v_0-2}(\lambda_{\mu_1\mu_2}-b), & \cdots, \end{array} \right.$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{00}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M}}{i!} \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{01}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_2)^{M}}{i!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots & (\lambda_{\mu_1,\mu_2}-i)\frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-1}}{(i+1)!}, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M}}{i!} \\
\cdots & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-1}}{i!}, & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-1}}{i!}, & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_1)^{M-v_0}}{i!}, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots, & \frac{(\tilde{t}_0-\tau_\mu)^{M-v_0}}{i!}, & 0, & \cdots, & 0, & 0
\end{array}\right).
$$

$$\vec{\mathbf{d}}^{(i)} = (d_M^{(i)}, d_{M-1}^{(i)}, \cdots, d_0^{(i)}) \in \mathbf{R}^{M+1}, M = \mu(v_0+1).$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{d}}^{(i)}$ est un normal aux M vecteurs colonnes de la matrice $\tilde{\Sigma}^{(i)}$. Si on note ces M vecteurs colonnes par $\vec{v}_1^{(i)}, \cdots, \vec{v}_M^{(i)}$, d'après algèbre linéaire on obtient l'expression suivante:

$$\vec{\mathbf{d}}^{(i)} = \mathrm{const}.\vec{v}_2^{(i)} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_M^{(i)}.$$

On en déduit que

$$d_M^{(i)}(\tilde{t}_0(t'), \tau_1(t'), \cdots, \tau_\mu(t'), \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2}) = \tilde{\Sigma}^{(i)} \begin{pmatrix} 2, 3, \cdots, M+1 \\ 1, 2, \cdots, M \end{pmatrix}$$

i.e. un mineur $M \times M$ de la matrice $\tilde{\Sigma}^{(i)}$. Si on définit

$$\delta_M^{(i)}(t) = \prod_{\rho \in \mathfrak{S}_\mu, \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbf{I}}} d_M^{(i)}(t_0, \tau_{\rho(1)}(t'), \cdots, \tau_{\rho(\mu)}(t'), \lambda_{\sigma(00)}, \cdots, \lambda_{\sigma(\mu_1\mu_2)}),$$

alors $\delta_M^{(i)}(t)$ est un polynôme de degré $\frac{M(M+1)}{2}(\mu!)^2$. Ici $\mathfrak{S}_{\mathbf{I}}$ indique le groupe de permutation de μ indices de $\mathbf{I}$.

On note par

$$B(t') = \prod_{1 \le i < j \le \mu} (\tau_i(t') - \tau_j(t'))^2 \tag{6.17}$$

le polynôme définissant l'ensemble de bifurcation. Alors il existent un entier $L \geq 0$ (eventuellement on calcule $L = \frac{(M\cdot(\mu-1)!^2)}{2}$) et des polynômes $Q_j^{(i)}(\lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$, $j = 0, \cdots, \frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2 - L$ invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_{\mathbf{I}}$ tels que,

$$\delta_M^{(i)}(t) = (\sum_{\frac{(\mu-1)\ell}{2}+j=\frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2-L} Q_j^{(i)}(\lambda)(\Delta_\mu(t))^j (B(t'))^\ell)\Delta_\mu(t)^L.$$

Ici $Q_0^{(i)}(\lambda) \neq 0$ ou bien $Q^{(i)}_{\frac{M(M+1)}{2\mu}(\mu!)^2-L}(\lambda) \neq 0$.

Evidemment $\delta_M^{(i)}(\tilde{t}_0, t') = 0$ pour les zéros $(\tilde{t}_0, t')$ de $d_M^{(i)}(\tilde{t}_0, \tau_1, \cdots, \tau_\mu, \lambda_{00}, \cdots, \lambda_{\mu_1\mu_2})$ on a donc démontré l'énoncé du lemme pour $t = (t_0, t')$ qui satisfait

$$\Delta_\mu(s(t)) \neq 0, \quad \delta_M^{(i)}(t) \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

Au voisinage de t tel que $B(t')$ assez grand par rapport à $\Delta_\mu(s(t))$, il est un ouvert dense. Il est aussi un ouvert dense au voisinage de t tel que t_0 assez grand par rapport à $B(t')$. En tenant compte de la quasihomogénéité, c'est un emsemble ouvert dense de $\mathbf{R}^\mu$. Cela démontre le lemme. C.Q.F.D.

Remarque 5. Pour $\mathbf{J}(t)$ de (6.11), B.Dubrovin [5] a obtenu l'équation suivante:

$$[\Delta_\mu(s(t))(\frac{\partial}{\partial t_0})^\mu + g_{\mu-1}(t)(\Lambda - id_\mu)(\frac{\partial}{\partial t_0})^{\mu-1} + g_{\mu-1}(t)(\Lambda - id_\mu)(\Lambda - 2id_\mu)\frac{\partial}{\partial t_0}^{\mu-2} + \cdots$$

$$\cdots + g_1(t)(\Lambda - id_\mu)\cdots(\Lambda - (\mu-1)id_\mu)\frac{\partial}{\partial t_0} + (\Lambda - id_\mu)\cdots(\Lambda - \mu \cdot id_\mu)]\mathbf{J}(t) = 0,$$

pour la matrice diagonale Λ de (6.8) et des polynômes $g_i(t)$ de degré i en t_0 t.q.

$$det(\tilde{S}(t) + \lambda) = \Delta_\mu(s(t)) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \lambda^{\mu-i} g_i(t).$$

C'est une conséquence de l'équation (6.11) après application du théorème de Cayley-Hamilton à la matrice $\tilde{S}(t)$. Cela implique que la multiplicité des zéros d'une intégrale

$$\sum_{(\nu_1,\nu_2)\in \mathbf{I}} P_{\nu_1,\nu_2} J_{\nu_1\nu_2}(t)$$

avec $P_{\nu_1,\nu_2} \in \mathbf{R}$ ne doit pas dépasser μ hors de l'ensemble critique $D = \{t; \Delta_\mu(s(t)) = 0\}$.

En fait, on peut déduire de la démonstration du Thórème 1.2 *iii)* une estimation analogue pour $I_{x^k y^m dx}(s)$.

REFERENCES

[1] A.G.ALEKSANDROV et S.TANABÉ, *Computing Gauss-Manin systems for complete intersection singularities S_μ,* Georgian Math. Journal, **5** (1996), pp. 401-422.

[2] A.G.ALEKSANDROV et S.TANABÉ, *Gauss-Manin connexions, logarithmic forms and hypergeometric functions,* Geometry from the Pacific Rim: Proceedings of the Pacific Rim Geometry Conference held in Singapore Dec. 1994, Walter de Gruyter, (1997), pp.1-21.

[3] P.APPELL et J.KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergeometriques et hypersphériques,* Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[4] E. BRIESKORN, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen,* Manuscripta Math., **2** (1970), pp. 103-161.

[5] B.DUBROVIN, *Period mappings on a Frobenius manifold and their applications* , preprint (1999).

[6] L.GAVRILOV , *Petrov modules and the Zeros of Abelian integrals* , preprint, Toulouse (1997).

[7] KH.M.MALIKOV, *Overdeterminacy of the differential systems for versal integrals of type A,D,E,* (Russian) Differentsial'nye Uravneniya **18** (1982), no.8, pp.1394-1400.

[8] P.MARDEŠIĆ, *An explicit bound for the multiplicity of zeros of generic Abelian integrals,* Nonlinearity, **4** (1991), pp.845- 852.

[9] M.NOUMI, *Expansion of the solutions of a Gauss-Manin system at a point of infinity,* Tokyo J. Math. **7** (1984), pp. 1-60.

[10] V.P.PALAMODOV, *Deformations of complex spaces,* Encyclopedia of Mathematical Sciences **10**, Several Complex Variables IV, pp. 105-194. Springer, 1990.

[11] F.PHAM , *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales* , Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), pp. 333-367.

[12] E.PICARD, *Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires* , Bull.Sci.Math., **9** (1885), pp.202-209.

[13] K.SAITO, *On the periods of primitive integrals I.* Preprint, RIMS, Kyoto Univ., 1982.

[14] K.SAITO, *Theory of logarithmic differential forms,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. IA, **27**, no. 2 (1980), pp. 265-291.

[15] A.N.VARCHENKO , *The complex exponent of a singularity does not change along strata $\mu = const.$* , Func.Anal.Appl. **16**, no.1 (1982) , pp. 1-9.

[16] V.A.VASILIEV, *Ramified integrals, singularities and Lacunas,*Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[17] S.YAKOVENKO, *Complete Abelian integrals as rational envelopes,* Nonlinearity, **7** (1994), pp.1237- 1250.

Moscow Independent University
Bol'shoj Vlasijevskij Pereulok 11,
MOSCOW, 121002,
Russia
E-mails: tanabe@mccme.ru,
tanabe@mpim-bonn.mpg.de

Λ : **Chemin de mésure** $Var_\Lambda arg$
Figure Figure
Λ Λ Λ' D^- D^+ $t^{(1)}$ $t^{(2)}$ $t^{(3)}$ $t^{(\mu)}$ $Re^{i\epsilon}$ $Re^{\frac{i}{2}\epsilon}$, $t = i\Im Re^{i\epsilon}$ $t = i\Im Re^{\frac{i}{2}\epsilon}$
Stratification logarithmique du discriminant A_3 M : **l'ensemble de Maxwell**
$rank\ Der(\log\ D)(p^{(0)}) = 2$
$rank\ Der(\log\ D)(p^{(-1)}) = 3$
$rank\ Der(\log\ D)(p^{(1)}) = 1$
$p^{(-1)} \in D^{(-1)}$
$p^{(0)} \in D^{(0)}$ $p^{(1)} \in D^{(1)}$ $D^{(2)}$