Multiplizitätsabschätzungen und Interpolation auf kommutativen algebraischen Gruppenvarietäten

von

Regina Endell

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D - 5300 Bonn 3

und

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik
Gaußstr. 20
D - 5600 Wuppertal

MPI/87-54

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

Sei $\mathcal{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Unterkörper der komplexen Zahlen. Für $n \geq 1$, $N \geq 1$ sei $\mathbb{G}$ eine kommutative, zusammenhängende algebraische Gruppe der Dimension n, die über $\mathcal{K}$ definiert ist und wie in [Se1] oder [Fa-Wü] in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ offen eingebettet ist. Mit $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ bezeichnen wir wie üblich die $\mathcal{K}$-rationalen Punkte von $\mathbb{G}$ und mit $X_0, \ldots, X_N$ projektive Koordinaten vom projektiven Raum $\mathbb{P}^N$. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken können wir $\mathbb{G}$ mit dem Bild unter dieser Einbettung identifizieren. Ferner sei Γ eine Untergruppe von $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ vom Rang l, die durch die m Elemente $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ erzeugt wird.

(0.1) Wir können davon ausgehen, daß Γ die durch $X_0 = 0$ definierte Hyperebene in $\mathbb{P}^N(\mathcal{K})$ nicht trifft; denn ersetzen wir X_0 durch eine Linearform X'_0 in $X_0, \ldots, X_N$ mit Koeffizienten in $\mathcal{K}$, die in Γ nicht verschwindet, so ändert dies die Einbettung nur um einen projektiven Automorphismus (siehe [Ha], II. Example 7.1.1). Wir werden nun die Existenz einer solchen Linearform nachweisen. Dazu wählen wir zunächst projektive Koordinaten von Γ so, daß sie in einer endlichen Erweiterung $\tilde{\mathcal{K}}$ von $\mathbb{Q}$ liegen (siehe Bemerkung 2.2). Da $\mathcal{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist der Grad von $\mathcal{K}$ über $\tilde{\mathcal{K}}$ unendlich. Somit existieren Zahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ aus $\mathcal{K}$, die linear unabhängig über $\tilde{\mathcal{K}}$ sind. Die Linearform $X'_0 = \alpha_0 X_0 + \ldots + \alpha_N X_N$ verschwindet dann in keinem Punkt von Γ.

Für reelle Zahlen $S \geq 0$ bezeichnen wir nun mit $\Gamma(S)$ die Menge aller Punkte von Γ der Form $s_1\gamma_1 + \ldots + s_m\gamma_m$, wobei $s_1, \ldots, s_m$ nichtnegative ganze Zahlen kleiner gleich S sind. Schließlich definieren wir ganze Zahlen p_r $(0 \leq r \leq n)$ wie in [Ma-Wü1] auf die folgende Weise.

Falls $\mathbb{G}$ keine algebraische Untergruppe der Codimension r enthält, setzen wir $p_r = l$, ansonsten sei p_r der minimale Corang einer Untergruppe von Γ, die in einer über $\mathcal{K}$ definierten algebraischen Untergruppe von $\mathbb{G}$ der Codimension r liegt.

Wir setzen nun

$$\mu = \mu(\Gamma, \mathbb{G}) \quad = \min_{1 \le r \le n} \frac{p_r}{r}$$

und

$$\mu^* = \mu^*(\Gamma, \mathbb{G}) = \max_{0 \le r < n} \frac{l - p_r}{n - r} \,.$$

Der Index $\mu(\Gamma, \mathbb{G})$ hängt mit dem Grad von homogenen Polynomen aus $\mathcal{R} = \mathcal{K}[X_0, ..., X_N]$ zusammen, die auf Γ verschwinden. D. Masser und G. Wüstholz [Ma-Wü1] bewiesen, daß eine positive reelle Konstante c existiert, die nur von $\mathbb{G}$ abhängig ist, so daß jedes homogene Polynom P aus $\mathcal{R}$, das auf $\Gamma(S)$ verschwindet und dessen Grad kleiner als $c(S/n)^{\mu}$ ist, auf ganz $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ identisch verschwindet. Der Index μ^* dagegen, hängt mit dem Problem zusammen, ein Polynom mit vorgegebenen Werten in $\Gamma(S)$ zu finden.

(0.2) Sei nun $\mathbb{A}_0^N$ der affine Teil von $\mathbb{P}^N$, der durch $X_0 \neq 0$ definiert ist. Für alle Punkte g aus $\mathbb{G}'(\mathcal{K}) := (\mathbb{G} \cap \mathbb{A}_0^N)(\mathcal{K})$ bezeichnen wir affine Koordinaten in Bezug auf diesen Teil durch $x(g) = (X_1/X_0, ..., X_N/X_0)(g)$. Ferner setzen wir $\mathcal{R}'$ gleich $\mathcal{K}[X_1/X_0, \dots, X_N/X_0]$. Für homogene Polynome P aus $\mathcal{R}$ bezeichnen wir von nun ab mit P' das enthomogenisierte Polynom von P aus $\mathcal{R}'$. Dann gilt folgendes Resultat:

Theorem (Masser, [Ma1]): *Es gibt eine positive reelle Konstante* c^*, *die nur von* $\mathbb{G}$ *und* $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ *abhängig ist, so daß das folgende gilt:*
Zu jeder positiven reellen Zahl S *und zu jedem Element* e *aus* $\mathcal{K}^{\Gamma(S)} = \mathrm{Hom}(\Gamma(S), \mathcal{K})$ *existiert ein homogenes Polynom* P *aus* $\mathcal{R}$ *vom Grad höchstens* $c^* S^{\mu^*}$, *so daß*

$$P'(x(\gamma)) = e(\gamma)$$

für alle γ *aus* $\Gamma(S)$.

D. Masser und G. Wüstholz zeigten auch, daß diese Ergebnisse `bis auf Konstante´

optimal sind (siehe [Ma-Wü1] und [Ma1]). Die Exponenten μ und μ^* können somit nicht verbessert werden.

Im ersten Teil der Arbeit werden wir zunächst Einbettungen von $\mathfrak{G}$ in projektive Räume näher beschreiben (siehe z. B. [Fa-Wü]). Ferner werden wir die in [Ma-Wü1] definierten Translationsoperatoren E(g) und $\mathfrak{E}$(g) für $\mathfrak{K}$-rationale Punkte g aus $\mathfrak{G}'$ mit ihren Eigenschaften darstellen und auch ähnlich wie in [Wü1], Abschnitt 2 und [Ko], Kapitel V, § 18 und 20, $\mathfrak{K}$-Vektorräume D($\mathfrak{G}$) bzw. D($\mathcal{A}$), die zu $\mathfrak{G}$ bzw. zu einer über $\mathfrak{K}$ definierten analytischen Untergruppe $\mathcal{A}$ von $\mathfrak{G}$ gehören, einführen. Dann können wir den Trick von Masser-Anderson, den G. Wüstholz auf kommutative algebraische Gruppenvarietäten ausdehnte (siehe [Wü2]), in modifizierter Form darstellen. Mit Hilfe von diesem Trick erhält man lokal sehr gute Schranken für den Grad von abgeleiteten Polynomen aus $\mathfrak{R}'$ und auch für den Grad gewisser Ideale I in $\mathfrak{R}$. In Verbindung mit einer Arbeit von Ju. V. Nesterenko [Ne] kann man dann Hilbertfunktionen gewisser Familien von Idealen in $\mathfrak{R}$ sehr gut abschätzen (siehe Lemma 13).

In Kapitel 5 werden wir die Multiplizitätsabschätzungen [Wü1] in allgemeiner Form und dann - in dem für die Tranzendenz interessanteren Fall - für die eingangs definierten Mengen Γ(S), S($\geq$0)$\in\mathbb{R}$, darstellen. In diesem Fall wurden die Ergebnisse kürzlich von P. Philippon [Ph] verallgemeinert. Die Optimalität der Ergebnisse in Kapitel 5 im Sinne [Ma-Wü1] werden wir in Kapitel 6 zeigen. Der Beweis basiert im wesentlichen auf Eigenschaften von Hilbertfunktionen.

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir D. Massers Interpolationsergebnis verallgemeinern. Bevor wir dieses Resultat angeben, müssen wir noch einige Begriffe einführen. Sei nun $\mathcal{A}$ eine über $\mathfrak{K}$ definierte analytische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der Dimension d und Γ - wie schon erwähnt - eine endlich erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$($\mathfrak{K}$) vom Rang l.

Für jede (über $\mathcal{K}$ definierte) algebraische Untergruppe $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ definieren wir wie in [Wü1] `Exponenten´ $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ und $p(\mathcal{H}) = p_{\Gamma,\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, die die Lage von Γ und $\mathcal{A}$ in Bezug auf $\mathcal{H}$ beschreiben, durch

$$\sigma(\mathcal{H}) = \operatorname{cod}_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \cap \mathcal{H}$$

und

$$p\,(\mathcal{H}) = \operatorname{corang}_{\Gamma} \Gamma \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}).$$

(**0.3**) Das Paar $(\Gamma,\mathcal{A})$ heißt dann für vorgegebene reelle Zahlen $S\geq 0$, $T\geq 0$ nicht-ausgeartet in $\mathcal{G}$, falls

$$\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{T}{n}\right)^{\frac{d}{n}} = \min_{\mathcal{H}} \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{p(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}} \left(\frac{T}{n}\right)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}},$$

wobei das Minimum über alle echten, zusammenhängenden (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppen $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ läuft.

Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir für positive reelle Zahlen T Teilmengen $\mathbb{N}^d(T)$ in $\mathbb{N}^d$ durch

$$\mathbb{N}^0(T) = \emptyset$$

bzw.

$$\mathbb{N}^d(T) = \{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \mid \tau_1 + \dots + \tau_d < T\} \qquad (d\geq 1)$$

Ist nun $\Delta_1, \dots, \Delta_d$ eine Basis des $\mathcal{K}$-Vektorraumes $D(\mathcal{A})$ von Differentialoperatoren auf $\mathcal{A}$, dann gilt folgendes Resultat:

Satz 1: *Es gibt eine reelle Konstante* $c^* > 0$ *mit folgenden Eigenschaften:*

Zu beliebig vorgegebenen reellen Zahlen $S \geq 0$ *und* $T \geq 1$ *und zu jedem Element* e *aus* $\mathcal{K}^{\mathbb{N}^d(T) \times \Gamma(S)}$ *gibt es eine positive reelle Zahl* D *und ein homogenes Polynom* P *aus* $\mathcal{R}$ *vom Grad höchstens* D, *so daß*

1) $$D \leq c^* \max_{\mathcal{H}} S^{\frac{l-r(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} T^{\frac{d-\alpha(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}},$$

wobei das Maximum über alle von Null verschiedenen (über $\mathcal{K}$ *definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten* $\mathcal{H}$ *von* $\mathbb{G}$ *läuft,*

2) $$(\Delta_1^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot \Delta_d^{\tau_d} P'(x))(\gamma) = e(\tau,\gamma)$$

für alle (τ,γ) *aus* $\mathbb{N}^d(T) \times \Gamma(S)$.

Die Konstante c^* hängt von einer endlichen Menge von analytischen Gruppen $\mathcal{H}$, ihren Einbettungen in projektive Räume und Punkten aus $\mathcal{H}$ ab (siehe Bemerkung II.5.13).

In Kapitel II.1 werden wir zunächst einen Zusammenhang zwischen Lösbarkeit von Interpolationsproblemen, dem Verschwinden gewisser Linearformen in Translations- und Differentialoperatoren auf gewissen Untervektorräumen von $\mathcal{R}'$ und gewissen Werten von Hilbertfunktionen herstellen. Dann können wir den Satz 1 im Fall n gleich 1 schon beweisen und auch die Optimalität des Ergebnisses im allgemeinen Fall herleiten. Der Beweis des Satzes für größere Zahlen n zerfällt in mehrere Teile. Wir werden ihn zunächst in dem Fall beweisen, daß m gleich 1 und das Paar $(\Gamma,\mathcal{A})$ für c_2S, c_2T im obigen Sinne nichtausgeartet ist (c_2 wie in Kapitel II.3). Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis sind die Multiplizitätsabschätzungen und zwar in der von P. Philippon angegebenen Form und die in Kapitel II.1 geführten Überlegungen. Dieses Interpolationsergebnis läßt sich leicht auf den Fall $m \neq 1$ übertragen, falls Γ torsionsfrei ist und das Paar $(\Gamma,\mathcal{A})$ für c_1c_2S und c_2T nichtausgeartet ist (c_1 wie in Kapitel II.4).

Mit Induktion über die Dimension algebraischer Gruppen, folgt daraus das allgemeine Interpolationsergebnis. Dies läßt sich auf endlich erzeugte Untergruppen, die Torsionselemente enthalten, ausdehnen.

Für die Möglichkeit in der angenehmen, anregenden Atmosphäre im Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn arbeiten zu dürfen, möchte ich mich bei Herrn Professor F. Hirzebruch herzlich bedanken. Herrn Professsor G. Wüstholz danke ich für die Stellung des Themas, die vielen anregenden Diskussionen und die Betreuung dieser Arbeit.

I. Multiplizitätsabschätzungen für kommutative algebraische Gruppen-varietäten

1. Einbettung von kommutativen algebraischen Gruppen

Es ist bekannt (Satz von Chevalley, siehe z. B. Theorem 16 in [Ro]), daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppenerweiterung

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

einer abelschen Varietät $\mathcal{A}$ durch eine lineare Gruppe $\mathfrak{L}$ ist, die beide über $\mathfrak{K}$ definiert sind.

Die lineare Gruppe $\mathfrak{L}$ kann wie in [Se1] oder [Fa-Wü] für ein $k \in \mathbb{N}$ offen und equivariant in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^k$ eingebettet werden. Bezeichnen wir mit

$$\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times_{\mathfrak{L}} \mathbb{P}^k$$

eine Kompaktifizierung von $\mathfrak{G}$ ([loc. cit.]), dann kann $\mathfrak{G}$ offen in $\overline{\mathfrak{G}}$ wie in [Se1] oder in [Kn-La] und $\overline{\mathfrak{G}}$ projektiv in den $\mathbb{P}^N$ eingebettet werden (siehe [Se1], [Fa-Wü]). Dies induziert eine offene Einbettung ι von $\mathfrak{G}$ in den $\mathbb{P}^N$. Da $\mathfrak{G}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$ operiert, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ glatt. $\mathfrak{G}$ und $\iota(\mathfrak{G})$ sind isomorph. Sind $X_0, \ldots, X_N$ projektive Koordinaten von $\mathbb{P}^N$, so setzen wir $Y_i = \iota^* X_i$, $0 \le i \le N$. Dies sind dann projektive Koordinaten von $\mathfrak{G}$.

(1.1) Ist g ein $\mathfrak{K}$-rationaler Punkt von $\mathfrak{G}$, dann stimmen die projektiven Koordinaten $(Y_0, \ldots, Y_N)(g)$ von g mit den projektiven Koordinaten $(X_0, \ldots, X_N)(\iota(g))$ von $\iota(g)$ überein. Wir werden in allen folgenden Kapiteln mit Ausnahme von Kapitel 3 die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der Gruppe $\iota(\mathfrak{G})$ identifizieren.

2. Translationsoperatoren

(2.1) Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{G}}$ ein weiteres Exemplar von $\mathfrak{G}$ mit projektiven Koordinaten $\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_N$. $\tilde{\mathfrak{G}}$ soll mit $\mathfrak{G}$ und $\tilde{X}_i$ mit X_i, $0 \leq i \leq N$, übereinstimmen. Ferner setzen wir $X = (X_0, \ldots, X_N)$ und $x = (X_1/X_0, \ldots, X_N/X_0)$ bzw. $\tilde{X} = (\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_N)$ und $\tilde{x} = (1, \tilde{X}_1/\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_N/\tilde{X}_0)$. Der Additionsmorphismus

$$\mu : \tilde{\mathfrak{G}} \times \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}$$

kann dann lokal durch bihomogene Polynome beschrieben werden. Zu jedem Element g aus $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ können wir somit eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von g und bihomogene Polynome $A_0(\tilde{X},X), \ldots, A_N(\tilde{X},X)$ aus $\mathcal{K}[\tilde{X},X]$ finden, so daß für jedes Element (g,h) aus $\mathcal{U}$ mit projektiven Koordinaten $g_0, \ldots, g_N, h_0, \ldots, h_N$ die Elemente

$$A_i(g_0, \ldots, g_N, h_0, \ldots, h_N) \qquad (0 \leq i \leq N)$$

projektive Koordinaten der Summe von g und h bezeichnen.

Sind die Polynome $A_0, \ldots, A_N$ homogen in den Variablen $X_0, \ldots, X_N$ vom Grad a und in den Variablen $\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_N$ vom Grad $\tilde{a}$, $(a, \tilde{a} \in \mathbb{N})$, dann nennt man

$$A = (A_0, \ldots, A_N)$$

eine Additionsformel vom Bigrad $(\tilde{a},a)$ auf $\mathfrak{G}$. Die offene Menge $\mathcal{O}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}(\mathcal{K}) \times \mathfrak{G}(\mathcal{K})$, die durch

$$\mathcal{O} = \{ (g,h) \mid \max_{0 \leq i \leq N} |A_i(\tilde{X}(g),X(h))| \neq 0 \}$$

definiert ist, heißt die zu A assozierte offene Menge. Auf dieser Menge stimmen A und μ überein, da sie auf $\mathcal{U}$ übereinstimmen (siehe Lemma I.4.1 in [Ha]).

Lemma 1: *Auf* $\mathfrak{G}$ *gibt es eine Additionsformel vom Bigrad* (a, a), *deren assoziierte offene Menge* $\mathcal{O}$ *die Menge* $\Gamma \times \Gamma$ *enthält.*

Beweis: Siehe Beweis von Lemma 1 in [Ma-Wü1].

Wir können nun eine Abbildung $E(\zeta): \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$, $\zeta \in \mathfrak{G}'(\mathcal{K})$, angeben. Das Bild Q eines Polynoms P aus $\mathfrak{R}$ unter $E(\zeta)$ sei gegeben durch

$$Q(X) = P \cdot A(\tilde{x}(\zeta), X).$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus vom Grad a. Für alle Polynome P, Q $\not\equiv 0$ aus $\mathfrak{R}$ und Elemente $\zeta \in \mathfrak{G}'(\mathcal{K})$ mit $A_0(\tilde{x}(\zeta), X) \not\equiv 0$ setzen wir nun:

$$E(\zeta)\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{E(\zeta)P}{E(\zeta)Q} .$$

Dadurch können wir $E(\zeta)$ zu einem Homomorphismus auf $\mathcal{K}(X_0, \ldots, X_N)$ fortsetzen. Speziell für homogene Polynome P aus $\mathfrak{R}$ vom Grad D erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} E(\zeta)P'(x) &= P'\left(\frac{A_1}{A_0}, \ldots, \frac{A_N}{A_0}\right)(\tilde{x}(\zeta), X) \\ &= E(\zeta)P(X) \cdot A_0^{-D}(\tilde{x}(\zeta), X). \end{aligned}$$

Die Funktion $E(\zeta)P'(x)$ ist in der Regel eine rationale Funktion auf $\mathfrak{G}'$. Ihr Nenner ist stets eine nichtnegative Potenz von $A_0'(\tilde{x}(\zeta), x)$. Für ζ aus Γ verschwindet dieser Nenner in keinem Punkt von Γ (siehe Lemma 1).

Für ζ aus $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ definieren wir nun eine Menge $\mathcal{O}^{(\zeta)} \subseteq \mathfrak{G}(\mathcal{K})$ durch

$$\mathcal{O}^{(\zeta)} = \{ g \in \mathfrak{G}'(\mathcal{K}) \mid A_0(\tilde{X}(\zeta), X(g)) \neq 0 \}.$$

Ist ζ aus $\mathfrak{G}'(\mathcal{K})$, dann stimmen für alle homogenen Polynome P aus $\mathcal{R}$ auf $O^{(\zeta)}$ die Werte $E(\zeta)P'(x(g))$ mit den Werten $P(x(\mu(\zeta,g)))$ überein. Bezeichnen wir mit $\lambda(\zeta)$, $\zeta \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$, die Linkstranslationen, die durch

$$\lambda(\zeta): \mathfrak{G} \longrightarrow \{\zeta\} \times \mathfrak{G} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{G}$$

gegeben sind, dann gilt

$$\lambda^*(\zeta)P(X(g)) = E(\zeta)P(X(g)), \qquad \zeta \in \mathfrak{G}'(\mathcal{K}),\ g \in O^{(\zeta)},$$

und

$$\lambda^*(\zeta)\left(\frac{P}{Q}\right)(X(g)) = \left(\frac{P \cdot A(\tilde{X}(\zeta),X(g))}{Q \cdot A(\tilde{X}(\zeta),X(g))}\right), \qquad \zeta \in \mathfrak{G}(\mathcal{K}),\ g \in O^{(\zeta)} - (-\zeta + V(Q)).$$

Hierbei ist mit $V(Q)$ die Nullstellenmenge von Q in $\mathcal{K}$ bezeichnet.

(2.2) Die in (0.1) erwähnte Körpererweiterung $\tilde{\mathcal{K}}$ von $\mathbb{Q}$, kann z. B. durch eine feste Wahl von projektiven Koordinaten von $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ und den Koeffizienten von $A_0, \ldots, A_N$ erzeugt werden.

(2.3) H. Lange und W. Ruppert zeigten in [La-Ru] und in [La], daß man eine Einbettung von $\mathfrak{G}$ so konstruieren kann, daß die Homomorphismen $E(\zeta): \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, ζ aus $\mathfrak{G}'(\mathcal{K})$, den Grad 2 haben.

Bevor wir weitere Eigenschaften der Translationsoperatoren angeben, wollen wir erst noch einige Definitionen einführen. Für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ setzen wir $E(\zeta)\mathcal{S} = \{E(\zeta)P \mid P \in \mathcal{S}\}$. Ist M das multiplikative System in $\mathcal{R}$, das aus allen Polynomen besteht, die in keinem Punkt von Γ verschwinden, dann bezeichnen wir für jedes Ideal I in $\mathcal{R}$ mit I^{ec}, die kontrahierte Extension von I in Bezug auf M. I^{ec} ist dann die Menge aller Polynome P aus $\mathcal{R}$, zu denen ein Polynom Q aus M existiert, so daß $P \cdot Q$ in I liegt. Bezeichnen wir mit $I(\mathfrak{G}) \subseteq \mathcal{R}$ das definierende Ideal von $\mathfrak{G}$, dann sagen wir ein Ideal $I \subseteq \mathcal{R}$ sei speziell, falls $I(\mathfrak{G}) \subseteq I$ und $I = I^{ec}$ ist. Somit ist ein

Primideal $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$, daß $I(\mathfrak{G})$ umfaßt, genau dann speziell, wenn $\mathfrak{P}$ in einem Punkt aus Γ verschwindet. Für die Menge M und das Ideal $I(\mathfrak{G})$ haben wir insbesondere

$$(2.4) \qquad E(\zeta)M \subseteq M \text{ und } E(\zeta)I(\mathfrak{G}) \subseteq I(\mathfrak{G})$$

(siehe Lemma 2 in [Ma-Wü1]). Schließlich definieren wir für jedes ζ aus Γ einen Operator $\mathfrak{E}(\zeta)$: (Ideale von $\mathfrak{R}$) $\longrightarrow$ (Ideale von $\mathfrak{R}$) durch

$$\mathfrak{E}(\zeta)I = (I(\mathfrak{G}), E(\zeta)\, I)^{ec} \qquad (\, I\,(\subseteq \mathfrak{R}) \text{ Ideal}).$$

Dann gelten folgende Resultate:

Lemma 2: *Sind γ, ζ Elemente aus Γ und ist I ein homogenes Ideal in $\mathfrak{R}$, dann gilt:*

$$\mathfrak{E}(\gamma+\zeta)I = \mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{E}(\zeta)I.$$

Lemma 3: *Ist I ein spezielles, nichttriviales homogenes Ideal in $\mathfrak{R}$ und sind γ, ζ Elemente aus Γ, dann gelten folgende Aussagen:*

a) $I = \mathfrak{E}(0)I$

b) *Verschwindet das Ideal I im Punkt γ, dann verschwindet das Ideal $\mathfrak{E}(\zeta)I$ im Punkt $-\zeta+\gamma$.*

c) *$\mathfrak{E}(\zeta)I$ ist ein nichttriviales spezielles homogenes Ideal vom gleichen Rang wie I.*

d) *Ist I prim, dann ist auch $\mathfrak{E}(\zeta)I$ prim.*

Beweis: Siehe Lemmata 3 und 4 in [Ma-Wü1].

Sei nun $\mathfrak{P}$ ein spezielles Primideal und $V(\mathfrak{P})$ das Nullstellengebilde von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}(\mathfrak{K})$, dann gilt folgendes Resultat:

Lemma 4: *Sei* ζ *aus* Γ, *dann haben wir*

$$V(\mathfrak{E}(\zeta)\mathfrak{P}) = -\zeta + V(\mathfrak{P}).$$

Beweis: Siehe Lemma 2 in [Ma-Wü2].

(2.5) Sei nun γ ein Element aus $V(\mathfrak{P}) \cap \Gamma$, dann gilt Lemma 4 für alle Operatoren $\mathfrak{E}(\zeta)$, die in Bezug auf eine endlich erzeugte Gruppe Γ', die γ und ζ enthält, definiert sind. Dies impliziert, daß die Operatoren $\mathfrak{E}(\zeta)$ nur von ζ und einem Element aus $V(\mathfrak{P}) \cap \Gamma$ abhängig sind.

3. Differentialoperatoren

Mit $Z_0, \ldots, Z_N$ bezeichnen wir algebraisch unabhängige Variablen über $\mathbb{C}$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir

$$x_{lj} = X_l/X_j \qquad 0 \le l, j \le N. \tag{3.1}$$

Ist $\mathbb{A}_j^N$, $0 \le j \le N$, ein affiner Teil von $\mathbb{P}^N$, der durch $X_j \neq 0$ definiert ist, dann ist $\mathbb{A}_j^N(\mathbb{C})$ isomorph zu $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ vermöge der Abbildung φ_j mit

$$\varphi_j(g) = (x_{0j}, \ldots, x_{j-1,j}, x_{j+1,j}, \ldots, x_{Nj})(g), \qquad g \in \mathbb{A}_j^N(\mathbb{C}). \tag{3.2}$$

Der Raum $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ kann wie üblich mit einer komplexen Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden. Auf kannonische Weise erhalten dann die Räume $\mathbb{A}_j^N(\mathbb{C})$, $0 \le j \le N$, komplexe Mannigfaltigkeitsstrukturen, so daß die Abbildungen φ_j analytische Isomorphismen werden.

Wir wollen zunächst die Differentialoperatoren auf $\mathbb{A}_j^N(\mathbb{C})$ etwas näher beschreiben.

Bezeichnen wir mit $r = (r_1, \ldots, r_N)$ Koordinatenfunktionen auf dem affinen Raum $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$, dann ist eine Basis der Differentialoperatoren auf $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ durch die partiellen Ableitungen $\partial/\partial r_1, \ldots, \partial/\partial r_N$ gegeben. Da die Funktionen $x_{0j} \cdot \varphi_j^{-1}, \ldots, x_{Nj} \cdot \varphi_j^{-1}$ auf $\mathbb{A}_j^N(\mathbb{C})$ mit den Funktionen $r_1, \ldots, r_{j-1}, 1, r_j, \ldots, r_N$ übereinstimmen, gelten für alle homogenen Polynome P und Q aus $\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_N]$ vom gleichen Grad die folgenden Gleichungen:

$$(3.3) \qquad d\varphi_j^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial r_i}\Big)\frac{P(X)}{Q(X)}(\varphi_j^{-1}(g)) = \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\frac{P(X \cdot \varphi_j^{-1})}{Q(X \cdot \varphi_j^{-1})}\Big)(g), \quad 1 \leq i \leq N, g \in \mathbb{A}^N(\mathbb{C})$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\frac{P(r_1, \ldots, r_{j-1}, 1, r_j, \ldots, r_N)}{Q(r_1, \ldots, r_{j-1}, 1, r_j, \ldots, r_N)}\Big)(g).$$

Durch die Karten $(\mathbb{A}_j^N(\mathbb{C}), \varphi_j)$, $0 \leq j \leq N$, wird auf $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ eindeutig eine komplexe Mannigfaltigkeitsstruktur festgelegt (siehe [Se2], Proposition 2). Als algebraische Gruppenvarietät im projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ ist $\iota(\mathfrak{G})$ eine glatte Untervarietät, d. h. die Dimension der Tangentialräume von $\iota(\mathfrak{G})$ in jedem Punkt ist gleich n. Somit ist $(\iota(\mathfrak{G}(\mathbb{C})), \mathrm{id}_{|\iota(\mathfrak{G}(\mathbb{C}))})$ mit der induzierten analytischen Topologie eine Untermannigfaltigkeit vom projektiven Raum $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Durch den Isomorphismus ι wird auf $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ auf kannonische Weise eine komplexe Mannigfaltigkeitsstruktur induziert. Die Differentialoperatoren auf $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ sind Bilder der Differentialoperatoren von $\iota(\mathfrak{G})(\mathbb{C})$ unter der Abbildung $d\iota^{-1}$. Mit $\mathfrak{G}_j$, $0 \leq j \leq N$, bezeichnen wir nun den affinen Teil von $\mathfrak{G}$, der durch $X_j \neq 0$ definiert ist. Dieser stimmt mit dem Bild von $\iota(\mathfrak{G}) \cap \mathbb{A}_j^N$, $0 \leq j \leq N$, unter ι^{-1} überein. Da $Y_j = \iota^* X_j$, $0 \leq j \leq N$, gelten für alle homogenen Polynome P und Q aus $\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_N]$ vom gleichen Grad und für alle Elemente $g \in \mathfrak{G}_j(\mathbb{C}) - V(Q)$, $0 \leq j \leq N$, die folgenden Gleichungen

$$(3.4) \qquad D'\Big(\frac{P(X_0, \ldots, X_N)}{Q(X_0, \ldots, X_N)}\Big)(\iota(g)) = d\iota^{-1}(D')\Big(\frac{P(Y_0, \ldots, Y_N)}{Q(Y_0, \ldots, Y_N)}\Big)(g).$$

Hierbei sind mit D' Differentialoperatoren auf $\iota(\mathfrak{G})(\mathbb{C}) \cap \mathbb{A}_j^N(\mathbb{C})$ bezeichnet.

Da jede in einem Punkt g aus $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ reguläre Funktion f sich auf einer offenen Umgebung von g als Quotient zweier homogener Polynome P und Q aus $\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_N]$ vom gleichen Grad darstellen läßt, ist f im Punkt g holomorph. Dies impliziert, daß jeder Morphismus π zwischen einer glatten Varietät $V(\mathbb{C})$ und $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ holomorph ist; da die "Koordinatenfunktionen" $Y_j \circ \pi$, $0 \leq j \leq N$, regulär sind. Daraus folgt, daß die Additionsabbildung μ und die Inversenabbildung ν auf $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ holomorph sind. Somit sind $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ und die zu $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ isomorphe Gruppe $\iota(\mathbb{G})(\mathbb{C})$ Liegruppen.

Wir wollen nun wie in [Ko], Kapitel V, § 18 und 20 Differentialoperatoren auf $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ algebraisch beschreiben. Mit $\mathcal{K}(\mathbb{G})$ bezeichnen wir nun den Körper der $\mathcal{K}$-rationalen Funktionen auf $\mathbb{G}$. Dieser ist gegeben durch

$$(3.5) \qquad \mathcal{K}(\mathbb{G}) = \{P(Y)/Q(Y) \mid P, Q \text{ homogene Polynome vom gleichen Grad}\}.$$

Ferner bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_{g,\mathbb{G}}$ den Ring der Keime der regulären Funktionen auf $\mathbb{G}$ im Punkt g und mit $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathbb{G}))$ den Ring der $\mathcal{K}$-Derivationen von $\mathcal{K}(\mathbb{G})$ nach $\mathcal{K}(\mathbb{G})$. Wir sagen ein Element D aus $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathbb{G}))$ ist holomorph in einem Punkt g aus $\mathbb{G}(\mathcal{K})$, falls das Bild von $\mathcal{O}_{g,\mathbb{G}}$ unter D wieder in $\mathcal{O}_{g,\mathbb{G}}$ liegt. Dann gilt:

Lemma 5: *Jede Derivation* D *aus* $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathbb{G}))$ *ist auf einer offenen nichtleeren Menge in* $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ *holomorph.*

Beweis: Es sei D ein Differentialoperator aus $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathbb{G}))$ beliebig vorgegeben. Da $\mathbb{G}_0(\mathcal{K})$ eine Zariski-offene Menge in $\mathbb{G}(\mathcal{K})$ ist, haben wir

$$\mathcal{K}(\mathbb{G}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}(\mathbb{G}(\mathcal{K})).$$

Der Körper $\mathcal{K}(\mathbb{G}_0(\mathcal{K}))$ stimmt mit dem Körper $\mathcal{K}(Y_1/Y_0, \ldots, Y_N/Y_0)$ überein. Zu jeder Funktion $y_j = Y_j/Y_0$, $1 \leq j \leq N$, gibt es Polynome P_j', Q_j' aus $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$, so daß

$$D(y_j) = \frac{P_j'(y_1, \ldots, y_N)}{Q_j'(y_1, \ldots, y_N)}, \qquad 1 \leq j \leq N.$$

auf $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K}) - V(Q_j')$, wobei mit $V(Q_j')$ die Nullstellenmenge von Q_j' bezeichnet ist. Da D eine $\mathcal{K}$-Derivation ist, haben wir, daß

$$D(P')(y_1, \ldots, y_N) = \sum_{j=1}^{N} D(y_j)\left(\frac{\partial}{\partial y_j} P'\right)(y_1, \ldots, y_N) \qquad (P' \in \mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N])$$

in jedem Punkt g aus $U = \bigcap_{j=1}^{N} \mathfrak{G}_0(\mathcal{K}) - V(Q_j')$ regulär ist. Ist Q' ein Polynom aus $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$, dann ist

$$D'\left(\frac{P'}{Q'}\right) = \frac{Q'\, D'(P') - Q'\, D'(P')}{Q'^2}$$

regulär in jedem Punkt g aus $U - V(Q')$. Daraus folgt aufgrund des obengesagten sofort

$$D(\mathcal{O}_{g,\mathfrak{G}}) \subseteq \mathcal{O}_{g,\mathfrak{G}}, \qquad g \in U.$$

Damit ist D holomorph auf U. Somit ist das Lemma bewiesen. .

Wir interessieren uns speziell für die linksinvarianten Differentialoperatoren auf $\mathfrak{G}$. Wir betrachten zunächst die Linkstranslationen $\lambda(g)$, $g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$. Diese induzieren Abbildungen

$$\lambda^*(g): \mathcal{O}_{p,\mathfrak{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{-g+p,\mathfrak{G}} \qquad (p \in \mathfrak{G}(\mathcal{K}))$$

bzw.

$$\lambda^*(g): \mathcal{K}(\mathfrak{G}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{G})$$

vermöge

$$f \longmapsto f \cdot \lambda(g).$$

Ein Differentialoperator D aus $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathfrak{G}))$ heißt linksinvariant auf $\mathfrak{G}$, falls

$$\lambda^*(g)\, D(f) = D(\lambda^*(g)\, f)$$

für alle f aus $\mathcal{K}(\mathfrak{G})$. Daraus folgt mit dem obigen Lemma sofort, daß alle linksinvarianten Differentialoperatoren holomorph auf $\mathfrak{G}$ sind. Denn ist $D(O_{g',\mathfrak{G}}) \subseteq O_{g',\mathfrak{G}}$ für ein $g' \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$, dann gilt für alle $\psi \in O_{g,\mathfrak{G}}$, $g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$,

$$D(\psi) = \lambda^*(g'-g)\, D(\lambda^*(g-g')\psi) \subseteq \lambda^*(g'-g)(O_{g',\mathfrak{G}}) \subseteq O_{g,\mathfrak{G}}\,.$$

Die Teilmenge $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ von $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathfrak{G}))$, die durch

$$D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G}) = \{ D \in \mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathfrak{G})) \mid D \text{ linksinvariant} \}$$

definiert ist, ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(\mathfrak{G}))$. Mit der bilinearen Abbildung $[\ ,\ ]: D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G}) \times D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G}) \longrightarrow D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$, $[D_1,D_2] = 0$ wird $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ zu einer Liealgebra über $\mathcal{K}$. Außerdem wird durch

$$D \longmapsto D_{|O_{g,\mathfrak{G}}} \qquad\qquad (D \in D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G}), g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K}))$$

ein Vektorraumisomorphismus zwischen $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ und

$$D_{g,\mathcal{K}}(\mathfrak{G}) = \{ D_{|O_{g,\mathfrak{G}}} \mid D \in D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G}) \}$$

definiert. Der Raum $D_{g,\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ ist isomorph zum Tangentialraum $T_g(\mathfrak{G}) = \mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(O_{g,\mathfrak{G}},\mathcal{K})$, $g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$. Somit ist $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ eine Liealgebra von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ glatt ist, ist die Dimension der Tangentialräume von $\mathfrak{G}$ in jedem Punkt gleich n ([Ha]).

Wir wollen nun die Differentialoperatoren aus $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ noch etwas genauer beschreiben.

Lemma 6: *Sei* D *ein Differentialoperator aus* $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$, *dann gilt:*

$$D(\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]) \subseteq \mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N].$$

Beweis: Sei D ein Differentialoperator aus $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$. Zu jedem g' aus $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$ und zu jedem j mit $1 \leq j \leq N$ gibt es Polynome $P_{g',j}'$, $Q_{g',j}'$ aus $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$ und eine Umgebung $\mathcal{U}_{g'}$ von g' mit den Eigenschaften:

1) $Q_{g',j}'$ verschwindet in keinem Punkt von $\mathcal{U}_{g'}$.

2) $$D(y_j)(\zeta') = \frac{P_{g',j}'}{Q_{g',j}'}(y_1, \ldots, y_N)(\zeta') \qquad (\zeta' \in \mathcal{U}_{g'}).$$

Somit sind die Funktionen $D(y_j)$, $1 \leq j \leq N$, regulär auf $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$. Da nach Theorem I.3.2 in [Ha] der Ring der regulären Funktionen auf $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$ gleich $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$ ist, existieren Polynome R_j' aus $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$, $1 \leq j \leq N$, mit $D(y_j) = R_j'(y_1, \ldots, y_N)$. Daraus folgt für alle Polynome P' aus $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$

$$D(P')(y_1, \ldots, y_N) = \sum_{j=1}^{N} R_j'(y_1, \ldots, y_N)\left(\frac{\partial}{\partial y_j} P'(y_1, \ldots, y_N)\right).$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

(3.6) Die Derivationen D aus $D_{\mathcal{K}}(\mathfrak{G})$ sind somit auf $\mathfrak{G}_0$ durch linksinvariante $\mathcal{K}$-Derivationen von $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$ nach $\mathcal{K}[y_1, \ldots, y_N]$ eindeutig festgelegt.

(3.7) Auf analoge Weise können wir $D_{\mathcal{K}}(\iota(\mathfrak{G}))$ definieren. Die Differentialoperatoren auf $\iota(\mathfrak{G})$ können wir auch durch Derivationen D aus $\mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(X))$ darstellen, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) $D_{|\mathbb{A}_j^N(\mathcal{K}) \cap \iota(\mathfrak{G}_0)(\mathcal{K})} \in \mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(x_{0j}, \ldots, x_{Nj})) \qquad (0 \leq j \leq N)$

b) D linksinvariant auf $\mathbb{A}_j^N(\mathcal{K}) \cap \iota(\mathfrak{G})(\mathcal{K})$

c) $D(f) = 0$ für alle rationalen Funktionen f aus $\mathbb{K}(x_{0j}, \ldots, x_{Nj})$, $0 \leq j \leq N$, die identisch auf $\iota(\mathbb{G}_j)(\mathbb{K})$ verschwinden.

d) $$D_{\mid \mathbb{A}_j^N(\mathbb{K}) \cap \iota(\mathbb{G}_0)(\mathbb{K})} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} R_i\,(x_{0j}, \ldots, x_{Nj})\, \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

für gewisse Polynome $R_i \in \mathbb{K}[x_{0j}, \ldots, x_{Nj}]$, $0 \leq i \leq N$.

Bemerkung: Eine Derivation aus $D_{\mathbb{C}}(\mathbb{G})$ heißt $\mathbb{K}$-Derivation, falls für alle ganzen Zahlen i und j mit $1 \leq i,j \leq N$ die Bilder der Funktionen x_{ij} in $\mathbb{K}[x_{0j}, \ldots, x_{Nj}]$ liegen.

Wir wollen nun eine Basis von $D_{\mathbb{C}}(\mathbb{G})$ bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst die Exponenentialabbildung

$$\exp_{\mathbb{G}} : T(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathbb{G}(\mathbb{C})$$

vom Tangentialraum $T(\mathbb{G})$ von $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ im neutralen Element 0 in $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ ([Wa], 3.31). Der Tangentialraum ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, denn die Basis $z_1, \ldots, z_n$ des Dualraumes $\mathrm{Hom}(T(\mathbb{G}),\mathbb{C})$ bildet ein globales Koordinatensystem von $T(\mathbb{G})$ und legt auch eindeutig eine differenzierbare Struktur auf dem Tangentialraum fest (siehe [loc. cit.], 1.5(b)). Die Abbildungen

$$\frac{\partial}{\partial z_i} : T(\mathbb{G}) \longrightarrow \text{Tangentenbündel } (T(\mathbb{G})) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

sind Vektorfelder auf $T(\mathbb{G})$. Sie sind linksinvariant in Bezug auf die kanonische Linkstranslation, die durch

$$l(b)z_i = z_i\,(b) + z_i \qquad (b \in T(\mathbb{G}),\ 1 \leq i \leq n)$$

definiert ist. Für holomorphe Funktionen f von $T(\mathbb{G})$ nach $T(\mathbb{G})$ setzen wir wie üblich

$$l^*(b)f(z) = f(l(b)(z)), \qquad b \in T(\mathbb{G}),$$

wobei z gleich $(z_1, \ldots, z_n)$ ist. Dann kann die Exponentialabbildung

$$i \cdot \exp_{\mathbb{G}} : T(\mathbb{G}) \longrightarrow i(\mathbb{G})(\mathbb{C})$$

durch holomorphe Funktionen $f_0(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_N(z_1, \ldots, z_n)$ gegeben werden, die keine gemeinsame Nullstelle besitzen (siehe [Se1], Proposition 8). Diese Abbildung ist ein analytischer Gruppenhomomorphismus und ist lokal homeomorph. Da $\iota(\Gamma)$ die durch $X_0 = 0$ definierte Hyperebene in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ nicht trifft, ist $f_0(z_1, \ldots, z_n)$ für alle $(z_1, \ldots, z_n) \in (\iota \cdot \exp_{\mathbb{G}})^{-1}(\iota(\Gamma))$ von Null verschieden. Die assozierte Differentialabbildung $d\,\iota\,\exp_{\mathbb{G}}$ bildet die Liealgebra von $T(\mathbb{G})$ auf die Liealgebra $D_{\mathbb{C}}(\iota(\mathbb{G}))$ von $\iota(\mathbb{G})$ vermöge

$$d\,\iota\,\exp_{\mathbb{G}}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\left\{\frac{P}{Q}\right\}(f_0(z), \ldots, f_N(z)) = \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{P}{Q}(\iota\,\exp_{\mathbb{G}}(z))\right) \qquad (1 \leq l \leq n)$$

ab. Hierbei sind P und Q homogene Polynome aus $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ vom gleichen Grad und z ein Element aus $T(\mathbb{G})$.

Nach Lemma 6 gibt es Polynome R_{jl} aus $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_N]$, $1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq N$ die folgende Differentialgleichungen lösen:

$$\frac{\partial}{\partial z_l}\frac{f_j}{f_0}(z) = R_{jl}\left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_N}{f_0}\right)(z) \qquad (1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq N).$$

Die Differentialoperatoren $D_1, \ldots, D_n$, die durch

$$D_l = \sum_{j=1}^{N} R_{jl}\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_N}{X_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \leq l \leq n,$$

definiert sind, bilden dann eine Basis von $D_{\mathbb{C}}(\iota(\mathfrak{G}))$. Der Vektorraum $D_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G})$ wird dann durch Differentialoperatoren $\partial_1, \ldots, \partial_n$ erzeugt, die durch

$$\partial_l = \sum_{j=1}^{N} R_{jl}\left(\frac{Y_1}{Y_0}, \ldots, \frac{Y_N}{Y_0}\right) \frac{\partial}{\partial(Y_j/Y_0)}, \qquad 1 \leq l \leq n,$$

gegeben sind.

(3.7) Daraus folgt für alle $\mathbb{C}$-rationalen Punkte aus $\mathfrak{G}'$ (siehe 0.2) und alle Polynome P aus $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_N]$

$$(D_l P(x))(i(g)) = (\partial_l P(y))(g), \qquad 1 \leq l \leq n.$$

Wir identifizieren von nun ab wieder $\mathfrak{G}$ mit $\iota(\mathfrak{G})$.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine analytische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der Dimension d. Wir wollen nun den Raum $D(\mathcal{A})$ beschreiben. Per Definitionem ist $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ das Bild eines Liegruppenhomomorphismus φ von $\mathbb{C}^d$ in $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$. Der Tangentialraum $T(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ im neutralen Element 0 von $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ kann durch eine lineare Abbildung L in den Tangentialraum $T(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ eingebettet werden (siehe [Wü1]). Bezeichnen wir mit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ globale Koordinaten auf $T(\mathcal{A})$, dann können wir L darstellen durch

(3.8) $$z_i = L_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_d), \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Hierbei sind $L_1, \ldots, L_n$ Linearformen in den Parametern $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$. Da die Dimension von $\mathcal{A}$ gleich d ist, gibt es n-d linear unabhängige Formen $M_1, \ldots, M_{n-d}$ mit

(3.9) $$M_j(L_1, \ldots, L_n) = 0 \qquad 1 \leq j \leq n-d.$$

Den Tangentialraum $T(\mathcal{A})$ in $T(\mathfrak{G})$ können wir daher auch auf die folgende Weise definieren

$$T(\mathcal{A}) = \{z \in T(\mathfrak{G}), M_1(z) = \ldots = M_{n-d}(z) = 0\}.$$

Die Bilder der Differentiale $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_d$ auf $T(\mathcal{A})$ unter L sind gegeben durch

$$dL\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\zeta_j} L_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) \; \frac{\partial}{\partial z_l}, \qquad 1 \leq j \leq d.$$

Dabei sind $(\partial/\partial\zeta_j)L_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, $1 \leq j \leq d, 1 \leq l \leq n$, Elemente aus $\mathbb{C}$, die wir von nun ab durch l_{lj} bezeichnen. Dann bilden die Differentialoperatoren Δ_j, $1 \leq j \leq d$, die durch

$$\text{(3.10)} \qquad \Delta_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}\partial_j \qquad (1 \leq j \leq d)$$

definiert sind, eine Basis der linksinvarianten Differentialoperatoren auf $\mathcal{A}$, den wir mit $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ bezeichnen . Ist $\mathcal{A}$ über $\mathcal{K}$ definiert, dann besitzt $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ auch eine Basis von $\mathcal{K}$-Derivationen. Den durch $\mathcal{K}$-Derivationen aus erzeugten $\mathcal{K}$-Vektorraum bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ ([loc. cit.]).

4. Der Trick von Masser - Anderson - Wüstholz

$\tilde{\mathfrak{G}}$ sei wie in (2.1) ein weiteres Exemplar von $\mathfrak{G}$. Die zu $\tilde{\mathfrak{G}}$ bzw. zu $\tilde{\mathcal{A}}$ gehörigen Differentialoperatoren bezeichnen wir mit $\tilde{\partial}_1, \ldots, \tilde{\partial}_n$ bzw. $\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_d$. Diese sind auch translationsinvariant.

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir für alle $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ aus $\mathbb{N}^d$

$$\text{(4.1)} \qquad \sigma! = \sigma_1! \cdot \ldots \cdot \sigma_d!$$

$$\text{(4.2)} \qquad \Delta^{\sigma} = \Delta_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \Delta_d^{\sigma_d}$$

$$\text{(4.3)} \qquad X^{\sigma} = X_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot X_d^{\sigma_d}.$$

Außerdem definieren wir für positive ganze Zahlen D bzw. reelle Zahlen D' Untervektorräume $\mathcal{R}_D$ aus $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{R}'_{D'}$ aus $\mathcal{R}'$ durch $\mathcal{R}_D = \{P \in \mathcal{R} \mid P$ homogen vom Grad $D\}$ und $\mathcal{R}'_{D'} = \{P' \in \mathcal{R}' \mid P'(x) = P(1,x)$ für ein homogenes Polynom P aus $\mathcal{R}$ vom Grad höchstens $D'\}$.

Schließlich bezeichnen wir mit $A = (A_0, \ldots, A_N)$ wie in Lemma 1 eine Additionsformel vom Bigrad (a,a) auf $\mathcal{G}$, deren assozierte offene Menge $\mathcal{O}$ die Menge $\Gamma \times \Gamma$ enthält. Dann gibt es zu jedem j mit $0 \le j \le N$ und zu jedem Paar $(s = (s_0, \ldots, s_N), t = (t_0, \ldots, t_N)) \in \mathbb{N}^{2N+2}$ mit $s_0 + \ldots + s_N = t_0 + \ldots + t_N = a$ Zahlen $a(j,s,t)$ aus $\mathcal{K}$ mit

$$A_j(\tilde{X},X) = \sum a(j,s,t)\tilde{X}^s X^t ,$$

wobei die die Summe über alleVektoren s,t mit $s_0 + \ldots + s_N = t_0 + \ldots + t_N = a$ läuft. Wir ersetzen nun in den bihomogenen Polynomen $A_j(\tilde{X},X)$, $0 \le j \le N$ die Vektoren X durch $\tilde{X}$ und den Vektoren $\tilde{X}$ durch X und erhalten so bihomogene Polynome $\tilde{A}_j(\tilde{X},X)$, $0 \le j \le N$. Mit anderen Worten:

$$\tilde{A}_j(\tilde{X},X) = \sum a(j,s,t)\tilde{X}^t X^s , \qquad 0 \le j \le N. \tag{4.4}$$

Somit gilt für alle Polynome P' aus $\mathcal{R}'$, alle Vektoren τ aus $\mathbb{N}^d$ und alle Punkte (ζ,g) aus $\tilde{\mathcal{G}}'(\mathcal{K}) \times \mathcal{G}'(\mathcal{K})$:

$$(\tilde{\Delta}^{\tau} P'(\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_0}, \ldots, \frac{\tilde{A}_N}{\tilde{A}_0})(\tilde{x}, X(g)))(\zeta) = (\Delta^{\tau} P'(\frac{A_1}{A_0}, \ldots, \frac{A_N}{A_0})(\tilde{x}(g), X))(\zeta). \tag{4.5}$$

Durch $\tilde{A} = (\tilde{A}_0, \ldots, \tilde{A}_N)$ wird auf $\mathcal{G}$ eine weitere Additionsformel definiert, deren assozierte Menge $\tilde{\mathcal{O}}$ auch die Menge $\Gamma \times \Gamma$ enthält.

Da die Derivationen Δ_i , $1 \le i \le d$, translationsinvariant sind, gelten für alle Polynome P aus $\mathcal{R}_D$ $(D \in \mathbb{N})$, für alle τ aus $\mathbb{N}^d$ und alle Punkte $\zeta \in \mathcal{G}'(\mathcal{K})$ und $g \in \mathcal{O}^{(\zeta)} \cap \mathcal{G}'(\mathcal{K})$ die folgenden Gleichungen:

$$(4.5)\qquad (\Delta^{\tau}P'(x))(\mu(\zeta,g)) = \lambda^*(\zeta)(\Delta^{\tau}P'(x))(g)$$
$$= E(\zeta)(\Delta^{\tau}P'(x))(g)$$
$$= \Delta^{\tau}(E(\zeta)P'(x))(g)$$
$$= (\Delta^{\tau}P'(\frac{A_1}{A_0},\ldots,\frac{A_N}{A_0})(\tilde{x}(\zeta),X))(g)$$
$$= (\tilde{\Delta}^{\tau}P'(\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_0},\ldots,\frac{\tilde{A}_N}{\tilde{A}_0})(\tilde{x},X(\zeta)))(g)$$
$$= (\tilde{\Delta}^{\tau}(\frac{P\cdot\tilde{A}}{\tilde{A}_0^{D}})(\tilde{x},X(\zeta)))(g).$$

Da $\mathfrak{G}$ kommutativ ist und da $\tilde{A}$ auch eine Additionsformel auf $\mathfrak{G}$ ist, können wir in den obigen Gleichungen A und $\tilde{A}$ und auch ζ und g vertauschen. Bezeichnen wir nun mit $\tilde{M}$ die multiplikative Menge der Potenzprodukte von X_0 und $A_0(\tilde{x}(\zeta),X)$ mit nichtnegativen Exponenten, dann gelten folgende Identitäten:

$$(4.6)\quad E(\zeta)(\Delta^{\tau}P')(x) \equiv (\Delta^{\tau}E(\zeta)P')(x) \mod I(\mathfrak{G})\tilde{M}^{-1},$$
$$\equiv (\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)/A_0^{D})(\tilde{X}(\zeta),X) \mod I(\mathfrak{G})\tilde{M}^{-1}.$$

Jeder Term in den Gleichungen ist eine rationale Funktion auf $\mathfrak{G}$ mit einem Nenner aus $\tilde{M}$.

Lemma 7 (siehe auch Proposition 2 in [Wü2]): *Sei* P *ein Polynom aus* $\mathfrak{R}_D$, ζ *ein Element aus* $\mathfrak{G}'(\mathbb{K})$ *und* τ *ein Vektor aus* $\mathbb{N}^d$, *dann gelten folgende Gleichungen:*

$$(4.7)\quad (\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta) \equiv \sum_{\sigma+\sigma'=\tau}\frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!}(\tilde{\Delta}^{\sigma'}A_0^{D}(\tilde{x},X))(\zeta)\cdot E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P')(x)$$

$$(4.8)\quad (\Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x) \equiv \sum_{\sigma+\sigma'=\tau}\frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!}(\Delta^{\sigma'}A_0^{D}(\tilde{x}(\zeta),x))E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P')(x)$$

$$(4.9)\ E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P')(x) \equiv \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!} \tilde{\Delta}^{\sigma'} A_0^{-D}(\tilde{x},X))(\zeta) \cdot (\tilde{\Delta}^{\sigma}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta)$$

$$(4.10)\ E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P')(x) \equiv \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!} (\Delta^{\sigma'} A_0^{-D}(\tilde{x}(\zeta),x)) \cdot (\Delta^{\sigma} (E(\zeta)P)'(x)$$

modulo dem Ideal $I(G)\tilde{M}^{-1}$.

Beweis: Wir wenden zunächst den Operator $\tilde{\Delta}^{\tau}$ auf die Funktionen

$$P\cdot A(\tilde{x},X) = (A_0^D(\tilde{x},X) \cdot (P\cdot A/A_0^D)(\tilde{x},X)$$

und

$$(P\cdot A/A_0^D)(\tilde{x},X) = P\cdot A(\tilde{x},X)\cdot A_0^{-D}(\tilde{x},X)$$

an und erhalten mit der Leibnitzregel

$$(\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta) = \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!} (\tilde{\Delta}^{\sigma'} A_0^{D} \cdot \tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)/A_0^{D})(\tilde{x}(\zeta),X)$$

bzw.

$$\tilde{\Delta}^{\tau}((P\cdot A)/A_0^D)(\tilde{x}(\zeta),X) = \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!} (\tilde{\Delta}^{\sigma'} A_0^{-D} \cdot \tilde{\Delta}^{\sigma}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta).$$

In den beiden Gleichungen ersetzen wir die auftretenden rationalen Funktionen $\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)/A_0^D)(\tilde{x},X)(\zeta)$, $\sigma\in\mathbb{N}^d, \sigma\leq\tau$, durch die dazu modulo dem Ideal $I(G)\tilde{M}^{-1}$ kongruenten Funktionen $E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P'(x))$. Damit sind die Formeln (4.7) und (4.9) bewiesen.

Um die übrigen Formeln zu beweisen, wenden wir den Operator Δ^{τ} auf die Funktionen

$$(E(\zeta)P)'(x) = A_0^{-D}(\tilde{x}(\zeta),X) \cdot (E(\zeta)P')(x)$$

und

$$(E(\zeta)P')(x) = (E(\zeta)P)'(x) \cdot A_0^{\prime -D}(\tilde{x}(\zeta),x)$$

an und erhalten

$$(\Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x) = \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!}(\Delta^{\sigma'}A_0^{\prime D}(\tilde{x}(\zeta),x))(\Delta^{\sigma}E(\zeta)P'(x))$$

$$(\Delta^{\tau}E(\zeta)P')(x) = \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!}(\Delta^{\sigma'}A_0^{\prime -D}(\tilde{x}(\zeta),x)) \cdot \Delta^{\sigma}(E(\zeta)P)'(x)$$

Analog zu oben ersetzen wir die auftretenden Terme $(\Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x)$, durch die dazu modulo dem Ideal $I(\mathfrak{G})\tilde{M}^{-1}$ kongruenten Funktionen $(E(\zeta)\Delta^{\tau}(P'(x))$. Damit sind die Formeln (4.8) und (4.10) verifiziert.

Corollar: *Sei* $\mathfrak{P}$ *ein spezielles Primideal und* $\mathfrak{P}'$ *das enthomogenisierte Ideal* $\mathfrak{P}$. *Schließlich sei* P *aus* $\mathfrak{R}_D$, $\zeta \in \Gamma$ *und* i *eine ganze Zahl mit* $1 \le i \le d$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P'(x)) \in \mathfrak{P}M^{-1}$ *für alle* σ *aus* $\mathbb{N}^i(T)$.

b) $(\tilde{\Delta}^{\sigma}(P \cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta) \in \mathfrak{P}$ *für alle* σ *aus* $\mathbb{N}^i(T)$.

c) $(\Delta^{\sigma}(E(\zeta)P)'(x)) \in \mathfrak{P}'$ *für alle* σ *aus* $\mathbb{N}^i(T)$.

Ist $\zeta = 0$, *dann sind die obigen Aussagen auch äquivalent zu*

d) $(\Delta^{\sigma}P'(x)) \in \mathfrak{P}'$ *für alle* σ *aus* $\mathbb{N}^i(T)$.

Beweis: Da $\mathfrak{P}$ speziell ist, liegt $I(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{P}$. Außerdem ist $\tilde{M}$ in M enthalten. Somit ist $I(\mathfrak{G})\tilde{M}^{-1}$ in $\mathfrak{P}M^{-1}$ enthalten. Aus a) folgt mit (4.7) und (4.8) sofort

$$0 \equiv (\tilde{\Delta}^{\tau}(P \cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta) \pmod{\mathfrak{P}M^{-1}} \qquad \text{für alle } \tau \text{ aus } \mathbb{N}^i(T)$$

und

$$0 \equiv \Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x) \pmod{\mathfrak{P}M^{-1}} \qquad \text{für alle } \tau \text{ aus } \mathbb{N}^i(T).$$

Mit anderen Worten: es existiert ein Polynom Q aus M, so daß die Polynome $Q\cdot(\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta)$ und $Q\cdot\Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x)$, τ aus $\mathbb{N}^i(T)$, in $\mathfrak{P}$ liegen. Da $\mathfrak{P}$ speziell ist, folgt daraus sofort , daß die Polynome $(\tilde{\Delta}^{\tau}(P\cdot A)(\tilde{x},X))(\zeta)$ und die homogenisierten Polynome $\Delta^{\tau}(E(\zeta)P)'(x)$, $\tau\in\mathbb{N}^i(T)$, in $\mathfrak{P}$ liegen. Damit sind die Aussagen b) und c) verifiziert. Umgekehrt, gelten die Aussagen b) und c), dann haben wir aufgrund der Formeln (4.9) und (4.10) sofort

$$E(\zeta)(\Delta^{\sigma}P')(x)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}M^{-1}}, \qquad \tau\in\mathbb{N}^i(T).$$

Damit ist die Äquivalenz der ersten 3 Aussagen gezeigt.

ad d) Ist ζ gleich 0, dann gilt für alle g aus $\mathcal{O}^{(0)}$ und alle Polynome P aus $\mathfrak{R}_D$:

$$E(0)(\Delta^{\sigma}P'(x))(g)=(\Delta^{\sigma}P'(x))(g).$$

Somit ist

$$(\Delta^{\sigma}P'(x))\equiv E(0)(\Delta^{\sigma}P'(x)) \pmod{\mathfrak{P}\tilde{M}^{-1}}.$$

Daraus folgt sofort, daß die Aussagen d) und a) äquivalent sind.

5. Multiplizitätsabschätzungen

Wir definieren als erstes die Ordnung $\mathrm{ord}_g(\mathcal{A},P)$ eines homogenen Polynoms P aus $\mathfrak{R}$ längs $\mathcal{A}$ in einen $\mathcal{K}$-rationalen Punkt g aus $\mathfrak{G}_0$. Ist mit P′ das enthomogenisierte Polynom P bezeichnet, dann setzen wir $\mathrm{ord}_g(\mathcal{A},P)=\infty$, falls P auf $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ identisch verschwindet. Ansonsten sei mit $\mathrm{ord}_g(\mathcal{A},P)$ die größte ganze Zahl $T>0$ bezeichnet, so daß

$$(\Delta^{\tau}P'(x))(g)=0$$

für alle $\tau\in\mathbb{N}^d(T)$.

Dann definieren wir einen weiteren Parameter, der die Lage von $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{G}$ in Bezug auf eine (über $\mathcal{K}$ definierte) Untervarietät V von $\mathfrak{G}$ beschreibt. Diese ist in $\mathfrak{R}$ durch ein Primideal $I(V)$ definiert, das aus den Elementen in $\mathfrak{R}$ besteht, die auf $V(\mathcal{K})$ identisch verschwinden. Bilden die homogenen Polynome $P_1, \ldots, P_k$, $k \in \mathbb{N}$, eine Basis des Ideals $I(V)$, dann erzeugen die Polynome $P_{ji} = P_j(x_{0i}, \ldots, x_{Ni}), 1 \leq j \leq k$, das definierende Ideal $I(V_i)$ von $V_i = V \cap \mathfrak{G}_i$, $0 \leq i \leq N$. Falls $V_i \neq \emptyset$, $0 \leq i \leq N$, ist, bezeichnen wir mit

$$J(P_{1i}, \ldots, P_{ki}, D(\mathcal{A})) = \begin{pmatrix} \Delta_1(P_{1i}) & \ldots & \Delta_d(P_{1i}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(P_{ki}) & \ldots & \Delta_d(P_{ki}) \end{pmatrix} \pmod{I(V_i)}.$$

die Jacobi-Matrix von $I(V_i)$ bezüglich $D(\mathcal{A})$. Ihr Rang über dem Quotientenkörper des Ringes $\mathcal{K}[x_{0i}, \ldots, x_{Ni}]/I(V_i)$ ist von der Wahl der Basis von $I(V_i)$ unabhängig (siehe Bemerkung 6.2), und wir bezeichnen ihn mit $\rho(V_i) = \rho_{\mathfrak{G}}(V_i)$. Ist v ein Element aus $V_i(\mathcal{K})$, dann bezeichnen wir mit $J(P_{1i}, \ldots, P_{ki}, D(\mathcal{A}))(v)$ die Jacobi-Matrix von $I(V_i)$ bezüglich $D(\mathcal{A})$ im Punkt v. Ihr Rang über $\mathcal{K}$ ist stets kleiner oder gleich $\rho_{\mathfrak{G}}(V_i)$ und wir bezeichnen ihn mit $\rho(v, V_i) = \rho_{\mathfrak{G}}(v, V_i)$. Wir sagen nun ein Punkt v aus $V_i(\mathcal{K})$ ist in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ regulär, falls

$$\rho(v, V_i) = \rho(V_i).$$

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 8: 1) *Die Menge der in Bezug auf* $D(\mathcal{A})$ *regulären Punkte in* $V_i(\mathcal{K})$, $0 \leq i \leq N$, *ist offen und nichtleer.*

2) *Für alle Elemente* $v \in V_i(\mathcal{K}) \cap V_j(\mathcal{K})$, $0 \leq i < j \leq N$, *gilt:* $\rho(v, V_i) = \rho(v, V_j)$.

3) *Falls* $\emptyset \neq V_i(\mathcal{K})$, $\emptyset \neq V_j(\mathcal{K})$, $0 \le i < j \le N$, *ist, gilt* $\rho(V_i) = \rho(V_j)$.

Beweis: ad 1) Ein Punkt v aus $V_i(\mathcal{K})$, $0 \le i \le N$, ist in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ genau dann nicht regulär, wenn die Determinante jeder $\rho(V_i) \times \rho(V_j)$ Matrix von $J(P_{1i}, \ldots, P_{ki}, D(\mathcal{A}))(v)$ Null ist. Somit ist die Menge der in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ nicht regulären Punkte eine echte abgeschlossene Menge von $V_i(\mathcal{K})$. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

ad 2) Sei nun v ein Element aus $V_i(\mathcal{K}) \cap V_j(\mathcal{K})$ für ein Paar ganzer Zahlen (i,j) mit $0 \le i < j \le N$. Mit D_t, $1 \le t \le k$, bezeichnen wir nun die Grade der Polynome P_t. Aufgrund der Definition der Variablen $x_{0i}, \ldots, x_{Ni}$ und der Polynome $P_{1i}, \ldots, P_{ki}$ gilt:

$$\mathrm{Rang}\ J(P_{1i}, \ldots, P_{ki}, D(\mathcal{A}))(v) = \mathrm{Rang}\ J((X_j/X_i)^{D_1} P_{1j}, \ldots, (X_j/X_i)^{D_k} P_{kj}, D(\mathcal{A}))(v)$$

Da die Polnome $P_{1j}, \ldots, P_{kj}$ im Punkt v verschwinden, folgt

$$\mathrm{Rang}\ J(P_{1i}, \ldots, P_{ki}, D(\mathcal{A}))(v) = \mathrm{Rang}\ \{(X_j/X_i)(v)^{D_t} \Delta_h P_{tj}(v)\}_{1 \le h \le d, 1 \le t \le k}.$$

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken können wir annehmen, daß die Untermatrix

$$\{(X_j/X_i)(v)^{D_t} \Delta_h P_{tj}(v)\}_{1 \le h \le \rho(v,V_i), 1 \le t \le \rho(v,V_i)}$$

invertierbar ist. Da $(X_j/X_i)(v)$ von Null verschiedenen ist, ist auch die Matrix

$$\{\Delta_h P_{tj}(v)\}_{1 \le h \le \rho(v,V_i), 1 \le t \le \rho(v,V_i)}$$

invertierbar. Somit gilt:

$$\rho(v,V_i) \le \rho(v,V_j).$$

Vertauschen wir in der obigen Argumentation j mit i, so erhalten wir die umgekehrte Ungleichung. Damit ist die zweite Aussage bewiesen.

ad3) Aufgrund der ersten Aussage ist die Menge der in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ regulären Punkte aus $V_i(\mathcal{K})$ bzw. $V_j(\mathcal{K})$ in $V_i(\mathcal{K}) \cap V_j(\mathcal{K})$ nichtleer. Mit Hilfe der zweiten Aussage folgt dann die dritte.

(5.2) Sei V eine (über $\mathcal{K}$ definierte) Untervarietät von $\mathfrak{G}$. Dann existiert eine ganze Zahl j mit $0 \leq j \leq N$, so daß $V(\mathcal{K})$ die affine Menge $\mathfrak{G}_j(\mathcal{K})$ trifft. Wir setzen nun

$$\rho(V) = \rho_{\mathfrak{G}}(V) = \rho\,(V_j).$$

Wir wollen nun die Multiplizitätsabschätzungen zunächst für allgemeinere endliche Mengen als die speziellen Mengen $\Gamma(S)$ angeben. Dazu seien Ω und Ω^* zwei endliche Teilmengen aus $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$. 0 sei in Ω^* enthalten. Für jede Untervarietät V bezeichnen wir mit $S(V)(\mathcal{K}) = \{g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K}) \mid g + V(\mathcal{K}) \subseteq V(\mathcal{K})\}$ die Menge der $\mathcal{K}$-rationalen Punkte des Stabilisator $S(V)$ von V und mit $l(V)$ die maximale Anzahl der modulo $S(V)(\mathcal{K})$ inkongruenten Elemente von Ω^*. Dann definieren wir für ganze Zahlen r mit $1 \leq r \leq n$ Mengen durch

$$\Omega_r = \bigcap_{\gamma \in (r-1)\,\Omega^*} (\Omega - \gamma)\ ,$$

wobei mit $(r-1)\,\Omega^*$ die Menge der Linearkombinationen von jeweils r Elementen aus Ω^* bezeichnet ist. Dann gilt das folgende Resultat:

Theorem 1([Wü1]): *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante* $c > 0$, *die nur von* $\mathfrak{G}$ *abhängig ist, mit folgenden Eigenschaften:*
Seien $D \geq 0$ *und* $T \geq 1$ *reelle Zahlen und sei* P *ein homogenes Polynom vom Grad* D *mit*

i) $\min\limits_{\gamma \in \Omega} \ \mathrm{ord}_\gamma\,(\mathcal{A}, P) \geq T$

ii) $P \not\equiv 0$ auf $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$.

Dann haben wir die folgende Abschätzung für den Grad von P

$$(5.3) \qquad c \cdot D > \min\Big(\min_V l(V)^{\frac{1}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}}, |\Omega_n|^{\frac{1}{n}} (T/n)^{\frac{1}{n}}\Big),$$

wobei das zweite Minimum über alle nichttrivialen algebraischen Untervarietäten V *von* $\mathfrak{G}$ *läuft und mit* $|\Omega_n|$ *die Anzahl der Elemente von* Ω_n *bezeichnet ist.*

Die Zahlen $l(V)$ sind im allgemeinem nicht leicht zu berechnen. In den meisten Anwendungen in der Transzendenz sind die Mengen Ω und Ω^* sehr einfach. Sie sind in der Regel die eingangs für endlich erzeugte Untergruppen Γ von $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ eingeführten Mengen $\Gamma(S/n)$, $S(\geq 0) \in \mathbb{R}$ (s. Seite 1). In diesem Fall definieren wir Zahlen $q(V)$, die die Lage von Γ in Bezug auf eine algebraische Untervarietät V beschreiben wir folgt.

Mit $q(V) = q_{\mathfrak{G}}(V)$ bezeichnen wir den minimalen Corang aller Untergruppen $\hat{\Gamma}$ von Γ, die im Stabilisator $S(V)(\mathcal{K})$ einer (über $\mathcal{K}$ definierten) Untervarietät V liegen, d. h. $\hat{\Gamma} + V(\mathcal{K}) \subseteq V(\mathcal{K})$. Dann ist $l(V) = l_{\Omega^*}(V)$ größer gleich $(S/n)^{q(V)}$ und $|\Omega_n|$ größer gleich $(S/n)^l$ (siehe Lemma 5 in [loc. cit.]).

Der Parameter $q(V)$ ist translationsinvariant, da die Stabilisatoren von $g + V$, $g \in \mathfrak{G}(\mathcal{K})$, mit dem Stabilisatoren $S(V)$ von V übereinstimmen. Für algebraische Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ ist $q(\mathcal{H})$ gleich dem in der Einleitung definierten Parameter $p(\mathcal{H})$, da der Stabilisator von $\mathcal{H}$ gleich $\mathcal{H}$ ist.

Dann gilt das folgende Resultat:

Theorem 2 ([loc. cit.]): *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante* $c > 0$, *die nur von* $\mathfrak{G}$ *abhängig ist, mit folgenden Eigenschaften:*
Seien $D \geq 0, S \geq 0$ *und* $T \geq 1$ *reelle Zahlen und sei* P *ein homogenes Polynom vom Grad* D *mit*

i) $\min_{\gamma \in \Gamma(S)} \operatorname{ord}_\gamma (\mathcal{A}, P) \geq T$

ii) $P \not\equiv 0$ auf $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$.

Dann haben wir die folgende Abschätzung für den Grad von P

$$(5.4) \qquad c \cdot D > \min_{V} \, (S/n)^{\frac{p(V)}{\operatorname{cod} V}} \, (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}},$$

wobei das Minimum über alle echten (über $\mathcal{K}$ *definierten) algebraischen Untervarietäten* V *von* $\mathcal{G}$ *läuft.*

(5.5) Ist mit a die Konstante in Lemma 1 bezeichnet, dann kann man erreichen, daß $c \geq a^n \deg \mathcal{G}$ ist (siehe § 5 in [loc.cit.]). Hierbei ist mit $\deg \mathcal{G}$, der Grad des homogenen Ideal $I(\mathcal{G})$ bezeichnet (siehe IV,§ 2,(IV) in [Gr]).

(5.6) G. Wüstholz bemerkte auch, daß eine endliche Menge $H' = H'(\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{G})$ von Untervarietäten von $\mathcal{G}$ existiert, über der das Minimum in (5.4) für alle nichtnegativen reellen Zahlen S und T angenommen werden. Mit anderen Worten: für alle nichtnegativen reellen Zahlen S und T haben wir

$$\min_{V \in H'} \, (S/n)^{\frac{p(V)}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}} = \min_{V} \, (S/n)^{\frac{p(V)}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}},$$

wobei das zweite Minimum über alle echten (über $\mathcal{K}$ definierten) Untervarietäten V von $\mathcal{G}$ läuft.

(5.8) P. Philippon [Ph] verbesserte kürzlich Wüstholz Ergebnis, indem er (5.4) durch

$$c \cdot D > \min_{\mathcal{H}} (\deg \mathcal{H})^{\frac{1}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} (S/n)^{\frac{p(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} (T/n)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}}$$

ersetzte, wobei das Minimum über alle echten (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ läuft. Hierbei ist $c = a^n \deg \mathcal{G}$. Eine analoge Abschätzung gibt er auch für multihomogene Polynome an.

Das Minimum in (5.8) ist i. a. leichter als das in (5.4) zu berechnen, da in der Regel die Anzahl der zusammenhängenden algebraischen Untergruppen kleiner als die Anzahl der algebraischen Untervarietäten von $\mathfrak{G}$ ist. Aufgrund der Optimalität des Theorems 2 (siehe Kapitel 6) existiert ein positive reelle Konstante c', die nur von H' abhängig ist, so daß

$$\min_{\mathcal{H}} \; (\deg \mathcal{H})^{\frac{1}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} \; (S/n)^{\frac{p(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} \, (T/n)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} \leq c' \min_{V \in H} \; (S/n)^{\frac{p(V)}{\operatorname{cod} V}} \, (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}}.$$

(5.9) Wir haben unterschiedliche Parameter eingeführt, die die Lage von Γ und von $\mathcal{A}$ in Bezug auf Untervarietäten von $\mathfrak{G}$ beschreiben. Eigenschaften von p und q haben wir schon angegeben. Dies wollen wir nun für die Parameter ρ und σ nachholen.

Lemma 9: ρ *ist linksinvariant.*

Lemma 10: *Für alle (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathfrak{G}$ gilt:* $\rho(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H})$.

Beweis von Lemma 9: Es sei ein Punkt ζ aus $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ und eine (über $\mathcal{K}$ definierte) Untervarietät V von $\mathfrak{G}$ beliebig vorgegeben. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ζ in $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$ liegt und daß $V(\mathcal{K})$ die affine Menge $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$ trifft. Mit $P_1, \ldots, P_k$ bezeichnen wir eine homogene Basis des definierenden Ideal $I(V) \subseteq \mathcal{R}$ von V. Ferner sei v aus $\mathfrak{G}_0(\mathcal{K})$ ein in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ regulärer Punkt von $V(\mathcal{K})$, d. h. $\rho(v,V) = \rho(V)$. Dann gibt es eine Zahl j mit $0 \leq j \leq N$, so daß $X_j(\zeta+v) \neq 0$ ist.

Nach Lemma 1 existiert dann eine Additionsformel $A = (A_0, \ldots, A_N)$ auf $\mathfrak{G}$, die nicht im Punkt $(-\zeta, \zeta + v)$ verschwindet. Bezeichnen wir nun mit Γ' die durch ζ und v erzeugte Gruppe und mit M' die Menge aller Polynome, die in keinem Punkt von Γ' verschwinden, dann ist nach Lemma 4 das definierende Ideal $I(\zeta + V)$ von $\zeta + V$ die kontrahierte Extension von $(I(\mathfrak{G}),P_1 \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),X), \ldots, P_k \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),X))$ in Bezug auf M'. Aufgrund der Translationsinvarianz der Differentialoperatoren gilt:

$$\Delta_i P_j'(x)(v) = \Delta_i \left(\frac{P_j \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),X))}{A_0^{\operatorname{grad} P_j}(\tilde{x}(-\zeta),X))}\right)(\zeta + v), \qquad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq k$$

$$= \frac{\Delta_i (P_j \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),x_{j0}, \ldots, x_{jN})}{A_0^{\operatorname{grad} P_j}(\tilde{x}(-\zeta)\, x_{j0}, \ldots, x_{jN})})(\zeta + v), \quad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq k.$$

Dies impliziert, daß der Rang der Jacobi-Matrix $J(P_1, \ldots, P_k, D(A))(v)$ kleiner oder gleich dem Rang der Jacobi-Matrix

$$J(P_1 \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),x_{j0}, \ldots, x_{jN})), \ldots, P_k \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),x_{j0}, \ldots, x_{jN})), D(A))(\zeta + v)$$

ist. Da die Polynome $P_1 \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),X), \ldots, P_k \cdot A(\tilde{x}(-\zeta),X))$ ein Teilerzeugendensystem von $I(\zeta+V)$ bilden, folgt sofort

$$\rho(v,V) \leq \rho(\zeta+v,\zeta+V).$$

und somit, da v in Bezug auf $D(\mathcal{A})$ regulär ist,

$$\rho(V) \leq \rho(\zeta + V).$$

Damit ist, da V beliebig vorgegeben war, das Lemma bewiesen.

Beweis von Lemma 10: Sei $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_d$ eine Basis der Liealgebra des Tangentialraumes von $T(\mathcal{A})$ wie in Kapitel 3. Diese können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch die partiellen Ableitungen $\partial/\partial z_{d+1}, \ldots, \partial/\partial z_n$ zu einer Basis der Liealgebra des Tangentialraumes $T(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ im neutralen Element von $\mathfrak{G}(\mathbb{C})$ ergänzen. Ferner seien $\mathcal{H}$ eine algebraische Untergruppenvarietät von $\mathfrak{G}$ und $P_1, \ldots, P_k$ eine homogene Basis des definierenden Ideals $I(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{R}$ von $\mathcal{H}$. Der

Tangentialraum $T(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ im neutralen Element sei wie in (3.9) durch linear unabhängige Linearformen $M_1(z), \ldots, M_{n-d}(z)$ definiert. Mit 0 bezeichnen wir nun das neutrale Element von $T(\mathbb{G})$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir schließlich

$$f' = \left(\frac{f_0}{f_0}, \ldots, \frac{f_N}{f_0}\right).$$

Wir betrachten nun die Matriz J, die gegeben ist durch

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial}{\partial \zeta_1} M_1(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \zeta_d} M_1(0) & \frac{\partial}{\partial z_{n-d}} M_1(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} M_1(0) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial \zeta_1} M_{n-d}(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \zeta_d} M_{n-d}(0) & \frac{\partial}{\partial z_{n-d}} M_{n-d}(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} M_{n-d}(0) \\
\hline
\frac{\partial}{\partial \zeta_1} P_1 f'(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \zeta_d} P_1 f'(0) & \frac{\partial}{\partial z_{n-d}} P_1 f'(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} P_1 f'(0) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial \zeta_1} P_k f'(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \zeta_d} P_k f'(0) & \frac{\partial}{\partial z_{n-d}} P_k f'(0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} P_k f'(0)
\end{array}\right).$$

Wir wollen den Rang von J berechnen. Im linken oberen Block der Matrix stehen nur Nullen, da die Formen $M_1(z), \ldots, M_{n-d}(z)$ auf $T(\mathcal{A})$ verschwinden und die Operatoren $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_d$ einen Basis der Liealgebra von $T(\mathcal{A})$ bilden. Da die $n-d$ Formen $M_1(z), \ldots, M_{n-d}(z)$ linear unabhängig sind, ist somit der Rang des rechten oberen Blockes gleich $n-d$.

Da einerseits

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} (P_j'(y)(f'(0)) = \Delta_i((P_j')(\frac{X_0}{X_0}, \ldots, \frac{X_N}{X_0}))(0), \qquad 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq d$$

und andererseits 0 ein regulärer Punkt in $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ ist, ist der Rang des linken unteren Blockes von J gleich $\rho(\mathcal{H})$. Insgesamt erhalten wir

(5.9) $$\mathrm{Rang}\,(J) = n - d + \rho(\mathcal{H}).$$

Wir können den Rang von J auch auf eine andere Art und Weise bestimmen. Mit $\mathcal{F}_{0,T(\mathcal{H})}$ bezeichnen wir nun den Ring der holomorphen Funktionskeime, die auf einer offen Umgebung von 0 in $T(\mathcal{H})$ verschwinden. Einen Basis dieses Ringes ist z. B. durch die Keime der Linearformen $H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}}$ in den Variablen $z_1, \ldots, z_n$ gegeben, die den Raum $T(\mathcal{H})$ definieren. Somit sind die Funktionskeime von $P_1 \cdot f'$, $\ldots, P_k \cdot f'$ von den Keimen der Linearformen $H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}}$ analytisch abhängig ; d. h. sie können lokal durch holomorphe Funktionen in den Parametern $H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}}$ dargestellt werden. Daraus folgt:

$$\mathrm{Rang}\,(J) \leq \mathrm{Rang}\,(J(M_1, \ldots, M_{n-d}, H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}})(0)).$$

Da die Polynome $P_1', \ldots, P_k'$ das Ideal $I(\mathcal{H})$ erzeugen, bilden ihre Keime ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_{0,\mathcal{H}}$ (siehe Proposition 4 in [Se2]). Dies impliziert, da die Exponentialabbildung in einer Umgebung U von 0 zu ihrem Bild $\exp_{\mathcal{G}}(U)$ diffeomorph ist, daß die Keime der Funktionen $P_1 \cdot f', \ldots, P_k \cdot f'$ den Ring $\mathcal{F}_{0,T(\mathcal{H})}$ erzeugen. Daher gilt auch:

$$\mathrm{Rang}\,(J(M_1, \ldots, M_{n-d}, H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}})(0)) \leq \mathrm{Rang}\,(J)\,.$$

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{H}$ Gruppen sind, sind $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}$ und $T(\mathcal{A} \cap \mathcal{H})$ glatt. Der Rang von $J(M_1, \ldots, M_{n-d}, H_1, \ldots, H_{\mathrm{cod}\,\mathcal{H}})(0)$ ist dann gleich der Codimension von $T(\mathcal{A}\cap\mathcal{H})$ in $T(\mathcal{G})$ (siehe z. B. Theorem I.5.1. in [Ha]) und dies ist gleich der Codimension von $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$. Insgesamt haben wir gezeigt, daß

$$\begin{aligned}\mathrm{Rang}(J) &= \mathrm{cod}_{\mathcal{G}}\, \mathcal{A}\cap\mathcal{H} \\ &= n - d + \mathrm{cod}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\cap\mathcal{H}.\end{aligned}$$

Wir setzen dies in (5.9) ein. Dann erhalten wir, daß $\rho(\mathcal{H})$ gleich $\sigma(\mathcal{H})$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

6. Optimalität von Multiplizitätsabschätzungen

Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir in diesem Kapitel stets ein spezielles Primideal aus $\mathfrak{R}$ vom Rang r, $1 \leq r \leq n$, und mit $V = V(\mathfrak{P})$ das Nullstellengebilde von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}(\mathfrak{K})$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}'$ das enthomogenisierte Ideal $\mathfrak{P}$ und mit ρ den Rang der zugehörigen Jacobi-Matrix von $\mathfrak{P}'$ in Bezug auf $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Für positive ganze Zahlen $T \geq 1$ bezeichnen wir schließlich mit $\mathfrak{P}^{(T)}$ das Ideal, das durch homogene Polynome P aus $\mathfrak{R}$ erzeugt wird, die längs $\mathcal{A}$ in jedem Punkt von $V(\mathfrak{P})$ mindestens mit der Ordnung T verschwinden. Eine Basis dieses Ideal ist durch

$$\{P \in \mathfrak{R} \mid P \text{ homogen und } \Delta^{\tau} P'(x) \in \mathfrak{P}' \text{ für alle } \tau \text{ aus } \mathbb{N}^d(T)\}$$

gegeben. Das Ideal $\mathfrak{P}^{(T)}$ ist daher im Primideal $\mathfrak{P}$ enthalten. Bevor wir die Optimalität der Multiplizitätsabschätzungen beweisen, werden wir diese Ideale etwas näher betrachten.

Lemma 11: $\mathfrak{P}^{(T)}$ *ist ein Primärideal von* $\mathfrak{P}$.

Beweis: $\mathfrak{P}^T$ ist in $\mathfrak{P}^{(T)}$ enthalten. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 12: *Es gibt ganze Zahlen* $i(j), 1 \leq j < \rho$, *mit* $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(\rho) \leq d$, *so daß das Ideal* $\mathfrak{P}^{(T)}$ *durch folgende Mengen erzeugt wird:*

a) $\{P \in \mathfrak{R} \mid P$ *homogen*, $\Delta_{i(1)}^{\tau_1} \dots \Delta_{i(\rho)}^{\tau_\rho} (P'(x)) \in \mathfrak{P}'$ *für alle* τ *aus* $\mathbb{N}^\rho(T)\}$ *bzw.*

b) $\{P \in \mathfrak{R} \mid P$ *homogen*, $\tilde{\Delta}_{i(1)}^{\tau_1} \dots \tilde{\Delta}_{i(\rho)}^{\tau_\rho} (P \cdot A(\tilde{x}, X))(0) \in \mathfrak{P}$ *für alle* τ *aus* $\mathbb{N}^\rho(T)\}$.

Beweis: Nach dem Corollar zu Lemma 7 sind die beiden Aussagen äquivalent. Es reicht also die Aussage a) zu beweisen. Sei nun $P_1', \dots, P_k'$, $k \in \mathbb{N}$, eine Idealbasis von $\mathfrak{P}'$. Wir betrachten nun die Jacobi-Matrix

$$J(P_1', \dots, P_k', D(\mathcal{A})) = \begin{pmatrix} \Delta_1(P_1') & \dots & \Delta_d(P_1') \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(P_k') & \dots & \Delta_d(P_k') \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}').$$

Da ihr Rang über den Quotientenkörper $\mathcal{L}$ des Ringes $\mathcal{R}'/\mathfrak{p}'$ gleich ρ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die d ersten Spalten dieser Matrix über $\mathcal{K}$ linear unabhängig sind. Somit existieren Elemente a_{ij} aus $\mathcal{L}$, $1 \le i \le \rho$, $1 \le j \le d$, nicht alle gleich Null, so daß

$$\text{(6.1)} \qquad \Delta_j P_l' \equiv \sum_{i=1}^{\rho} a_{ij} \cdot \Delta_i P_l' \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}')$$

für alle j mit $1 \le j \le d$ und alle l mit $1 \le l \le k$. Diese Gleichungen gelten für jedes Element aus $\mathcal{P}'$. Denn ist P aus $\mathcal{P}'$, dann existieren Polynome R_l, $1 \le l \le k$, aus $\mathcal{P}'$ mit $P' = R_1' P_1' + \dots + R_k' P_k'$ und wir haben

$$\Delta_j P' \equiv \sum_{l=1}^{k} R_l' \cdot \Delta_j P_l' (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}'), \qquad 1 \le j \le d.$$

Wir setzen Formel 6.1 in diese Gleichungen ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta_j P' &\equiv \sum_{l=1}^{k} R_l' \, (\sum_{i=1}^{\rho} a_{ij} \cdot \Delta_i P_l') && (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}') \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\rho} a_{ij} \cdot \Delta_i P' && (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Falls für alle i mit $1 \le i \le \rho$ die Polynome $\Delta_i P$ in $\mathcal{P}'$ liegen, folgt daraus, daß auch die Polynome $\Delta_{\rho+1} P, \dots, \Delta_d P$ in $\mathcal{P}'$ liegen. Somit ist die Aussage a) mit $i(1) = 1, \dots, i(\rho) = \rho$ für $T \le 2$ bewiesen.

Für $T > 2$ wird die Ausage a) mit Induktion gezeigt. Wir nehmen nun an, daß die Aussage a) für alle $T \geq 2$ verifiziert ist und wir beweisen sie für $T+1$. Ferner sei P ein homogenes Polynom aus $\mathfrak{R}$. Für alle Elemente $\overline{\tau} \in \mathbb{N}^{\rho(T+1)}$ gelte:

$$\Delta^{\overline{\tau}} P'(x) \in \mathfrak{P}' \quad .$$

Bezeichnen wir mit D den maximalen Gesamtgrad der Polynome $\Delta^{\sigma} P'(x)$, $\sigma \in \mathbb{N}^{d(T+1)}$, dann liegen aufgrund der Induktionsannnahme die Polynome P, $X_0^D \cdot \Delta_j P'(x)$, $1 \leq j \leq \rho$, in $\mathfrak{P}^{(T)}$, d. h. die Polynome $\Delta^{\sigma} P'(x)$ und $\Delta^{\sigma}(\Delta_j P'(x))$, $1 \leq j \leq \rho$, $\sigma \in \mathbb{N}^{d(T)}$, liegen in $\mathfrak{P}'$. Da die Differentialoperatoren modulo dem Ideal $I(\mathfrak{G})$ kommutieren und da das Ideal $\mathfrak{P}$ speziell ist, sind somit auch die Polynome $\Delta^{\sigma} P'(x)$ und $\Delta_j \cdot \Delta^{\sigma} P'(x)$, $1 \leq j \leq \rho$, $\sigma \in \mathbb{N}^{d(T)}$, Elemente aus $\mathfrak{P}'$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung liegen dann für alle σ aus $\mathbb{N}^{d(T)}$ die Polynome $X_0^D \Delta^{\sigma} P'(x)$ in $\mathfrak{P}^{(2)}$. Daraus folgt die Behauptung.

(6.2) Bemerkung: Ist $Q_1, \ldots, Q_k$ eine weitere homogene Basis von $\mathfrak{P}$, dann ist der Rang der Matrix $J(Q_1', \ldots, Q_k', D(\mathcal{A}))$ aufgrund des obigen Lemmas kleiner gleich $J(P_1', \ldots, P_k', D(\mathcal{A}))$. Wenden wir das obige Lemma nocheinmal an, dann erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung. Somit ist der Rang der Jacobi-Matrix von $\mathfrak{P}$ unabhängig von der gewählten homogenen Basis.

(6.3) Definitionen und Bemerkungen: a) Sind I ein homogenes Ideal in $\mathfrak{R}$ und D eine natürliche Zahl, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{vol}(D,I)$ die Anzahl der über $\mathfrak{K}$ linear unabhängigen homogenen Polynome vom Grad D aus I. Die Hilbertfunktion $H(D;I)$ ist dann definiert durch

$$H(D;I) = \binom{D+N}{N} - \mathrm{vol}(D,I)$$

und gibt die Anzahl der modulo dem Ideal I linear unabhängigen Monome aus $\mathfrak{R}_D$ an. Für genügend große Zahlen D kann die Hilbertfunktion auch als Polynom in der Variablen D dargestellt werden. Den Leitkoeffizienten dieses Polynoms multipliziert mit $(\dim I)!$ bezeichnet man auch als den Grad $\deg I$ von I (siehe z.B. [Gr] IV,§2,(IV)).

Der Grad dieses Polynoms ist gleich der Dimension $\dim I$ von I. Wir können somit die Hilbertfunktion $H(D;I)$ von I für alle natürlichen Zahlen D nach oben bzw. nach unten durch Konstanten $\cdot \deg I \cdot D^{\dim I}$ abschätzen. Ju. V. Nesterenko ist der erste, der derartige Konstanten explizit angibt. Mit einer neuen Beweistechnik (U-Resutante) bewies er folgendes Resultat (siehe Proposition 1 und Theorem 1 in [Ne]).

$$(\deg I/(\dim I+1)!)\,D^{\dim I} \le H(D;I) \le 4^{\dim I} D^{\dim I} \qquad (D\in\mathbb{N},\ D \ge \deg I).$$

Die rechte Seite der Ungleichung gilt sogar für alle natürlichen Zahlen D. Nesterenkos Abschätzungen werden wir zum Beweis der nächsten Lemmata anwenden.

b) Mit $[\ ]: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Gaußklammerfunktion. Diese ordnet jeder reellen Zahl x, die größte ganze Zahl zu, die kleiner oder gleich x ist.

Lemma 13: *Sei γ ein Element aus Γ und a die Konstante aus Lemma 1. Dann gelten für alle ganzen Zahlen $D, T \ge 1$ die folgenden Abschätzungen*

i) $H(D,(\mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{P})^{(T)}) \le 4^{n-r} a^{n-r} \binom{T-1+\rho}{\rho} \deg \mathfrak{P}\, D^{n-r}$

ii) $l(\mathfrak{P}^{(T)}) \le a^{n-r} \binom{T-1+\rho}{\rho}$.

(6.4) Die Länge von $\mathfrak{P}^{(T)}$ kann nach unten durch $\binom{T-1+\rho}{\rho}$ abgeschätzt werden (siehe Lemma 3 in [Wü1]). Im affinen Fall $(a=1)$ ist somit die Länge von $\mathfrak{P}^{(T)}$ gleich der Kardinalität von $\mathbb{N}^{\rho}(T)$ und die Werte der Hilbertfunktionen der Ideale $\mathfrak{E}(g)\mathfrak{P}^{(T)}$, $g\in \mathfrak{G}'(\mathfrak{K})$, im Punkt D, $D\in\mathbb{N}$, sind gleich.

Beweis: Wir können davon ausgehen, daß die in Lemma 12 für das Primideal $\mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{P}$ bestimmten Zahlen $i(1), \ldots, i(\rho(V(\mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{P})))$ mit den Zahlen $1, \ldots, \rho(V(\mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{P}))$ übereinstimmen. Dabei ist $\rho(V(\mathfrak{E}(\gamma)\mathfrak{P}))$ gleich ρ (siehe Lemma 9). Wir definieren nun eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{R}_D \longrightarrow (\mathcal{R}/\mathcal{P})_{aD} \times \ldots \times (\mathcal{R}/\mathcal{P})_{aD}$$

durch

$$\varphi(P) = \{\tilde{\Delta}^{\tau}(P \cdot A(\tilde{x},X))(-\gamma)\}_{\tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)} \; .$$

Dies ist ein Vektorraumhomomorphismus. Wir werden jetzt den Kern Ker φ von φ bestimmen. Dazu betrachten wir für alle Polynome P aus $\mathcal{R}_D$ die folgenden Aussagen:

a) P aus Ker φ

b) $(\tilde{\Delta}^{\tau} P \cdot A(\tilde{x},X))(-\gamma) \in \mathcal{P}$, $\quad \tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)$

c) $E(-\gamma)(\Delta^{\tau} P'(x)) \in \mathcal{P}M^{-1}$, $\quad \tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)$

d) $P \in (E(\gamma)\mathcal{P})^{(T)}$.

Die ersten beiden Aussagen sind per Definitionem und die zweite und dritte wegen des Corollars zu Lemma 7 äquivalent. Somit ist nur noch die Äquivalenz von c) und d) nachzuweisen. Gilt c), dann liegen die rationalen Funktionen $E(\gamma)E(-\gamma)(\Delta^{\tau} P'(x))$, $\tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)$, alle in $E(\gamma)\mathcal{P}\tilde{M}^{-1} \subseteq (\mathcal{E}(\gamma)\mathcal{P})M^{-1}$ (siehe auch (2.4) und den Beweis des oben zitierten Corollars). Da die Polynome $(\Delta^{\tau} P'(x))$, $\tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)$, zu diesen Funktionen modulo dem Ideal $I(\mathcal{G})M^{-1}$ kongruent sind und in $\mathcal{R}'$ liegen, erhalten wir

$$(\Delta^{\tau} P'(x)) \in (\mathcal{E}(\gamma)\mathcal{P})', \qquad \tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T).$$

Hierbei haben wir wieder ausgenützt, daß $\mathcal{P}$ speziell ist und daher das Ideal $I(\mathcal{G})$ enthält. Mit Hilfe von Lemma 12 erhalten wir schließlich die Aussage d).

Umgekehrt, gilt die Aussage d), dann existiert eine positive ganze Zahl D, so daß die Polynome $X_0^D(\Delta^{\tau} P'(x))$, $\tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T)$, in $(\mathcal{E}(\gamma)\mathcal{P})$ liegen. Da das Ideal $\mathcal{P}$ speziell ist und das Polynom $E(-\gamma) X_0^D$ aus M ist, folgt daraus mit Hilfe der Lemmata 2 und 3

$$E(-\gamma)(\Delta^{\tau} P'(x)) \in (\mathcal{E}(-\gamma)\mathcal{E}(\gamma)\mathcal{P})M^{-1} = \mathcal{P}M^{-1} \qquad \tau \in \mathbb{N}^{\rho}(T).$$

Damit ist c) bewiesen. Insgesamt haben wir gezeigt, daß

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = (E(\gamma)\mathfrak{P})^{(T)} \cap \mathfrak{R}_D .$$

φ induziert dann auf natürliche Weise eine injektive Abbildung

$$\varphi' : \mathfrak{R}_D/(E(\gamma)\mathfrak{P}^{(T)})_D \longrightarrow (\mathfrak{R}/\mathfrak{P})_{aD} \times \ldots \times (\mathfrak{R}/\mathfrak{P})_{aD} .$$

Für die Dimension des Vektorraumes $(\mathfrak{R}/(E(\gamma)\mathfrak{P}^{(T)})_D$ erhalten wir daher folgende Abschätzung:

$$\dim_{\mathcal{K}}(\mathfrak{R}/(E(\gamma)\mathfrak{P})^{(T)})_D \leq \binom{T-1+\rho}{\rho} \cdot \dim_{\mathcal{K}}(\mathfrak{R}/\mathfrak{P})_{aD} .$$

Da die Dimension des Vektorraumes $(\mathfrak{R}/(E(\gamma)\mathfrak{P}^{(T)})_D$ bzw. $(\mathfrak{R}/\mathfrak{P})_{aD}$ gleich der Anzahl der modulo $E(\gamma)\mathfrak{P}^{(T)}$ bzw. $\mathfrak{P}$ linear unabhängigen Polynome aus $\mathfrak{R}_D$ bzw. $\mathfrak{R}_{aD}$ ist, können wir die obige Ungleichung auch darstellen durch

(6.5) $$H(D;(E(\gamma)\mathfrak{P})^{(T)}) \leq \binom{T-1+\rho}{\rho} \cdot H(aD;\mathfrak{P}).$$

Schätzen wir die rechte Hilbertfunktion mit Theorem 1 in [Ne] durch $4^{n-r} a^{n-r} D^{n-r} \deg \mathfrak{P}$ nach oben ab, so erhalten wirAussage i).

ad ii) Für genügend große Zahlen D sind die Hilbertfunktionen durch Polynome gegeben und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich

(6.6) $$\deg \mathfrak{P}^{(T)} \leq \binom{T-1+\rho}{\rho} \cdot a^{n-r} \deg \mathfrak{P}.$$

Der Grad von $\mathfrak{P}^{(T)}$ ist gleich dem Produkt seiner Länge mit dem Grad seines Primideals (siehe [Gr], IV.§2,(2.4)). Somit impliziert (6.6) die Aussage ii).

Wir werden jetzt die Optimalität der Multiplizitätsabschätzungen zeigen. Mit Γ bezeichnen wir von nun ab die durch Ω erzeugte Gruppe. Ferner sei Σ eine maximale Teilmenge von Elementen aus Ω die modulo $S(V)(\mathcal{K})$ inkongruent sind. Schließlich setzen wir

$$c(r) = [(4^{n-r} a^{n-r} (n+1)! \deg \mathcal{P} (\deg \mathcal{G})^{-1})^{1/r}] + 1$$

und

$$c'(r,T,\Sigma) = -[-\deg \mathcal{G}/c(r) T^{p/r} (\mathrm{card}\ \Sigma)^{1/r}].$$

Dann ist das Produkt dieser beiden Konstanten mit $T^{p/r} (\mathrm{card}\ \Sigma)^{1/r}$ stets größer oder gleich dem Grad von $\mathcal{G}$. Nach oben ist die Konstante $c'(r,T,\Sigma)$ durch $\deg \mathcal{G}/c(r) +1$ beschränkt. Somit ist das Produkt von $c'(r,T,\Sigma)$ und $c(r)$ nach oben durch $c' = \max(4 \deg \mathcal{G}, 4^{n+1} a^n (n+1)! \deg \mathcal{P} (\deg \mathcal{G})^{-1})$ beschränkt und es gilt folgendes Resultat:

Lemma 14: *Es gibt ein homogenes Polynom* P *aus* $\mathcal{R}$ - $I(\mathcal{G})$ *vom Grad höchstens* $2\, c(r)\, c'(r,T,\Sigma)\, T^{p/r} (\mathrm{card}\ \Sigma)^{1/r}$, *das längs* $\mathcal{A}$ *in jedem Punkt von* Ω *mindestens mit der Ordnung* T *verschwindet.*

Beweis: Da $\mathcal{P}$ speziell ist, enthält V mindestens ein Element u^* aus der von Ω erzeugten Gruppe. Mit I bezeichnen wir nun den Durchschnitt aller Primärideale der Form $(\mathcal{E}(u^*-u)\mathcal{P})^{(T)}$, wobei u durch alle Elemente aus Σ läuft. Wir werden zeigen, daß ein homogenes Polynom P vom Grad $D = 2\,[c(r)\, c'(r,T,\Sigma)\, T^{p/r} (\mathrm{card}\ \Sigma)^{1/r}]$ existiert, das in I, aber nicht in $I(\mathcal{G})$ liegt. Dies leistet dann das Gewünschte. Erstens ver- schwindet P nicht identisch auf $\mathcal{G}(\mathcal{K})$. Zweitens: ist ω aus Ω, dann ist $\omega = u + \zeta$ für ein u aus Σ und ein ζ aus $\Gamma \cap S(V)(\mathcal{K})$. P liegt dann in

$$\mathcal{E}(u^*-u)\mathcal{P}^{(T)} = (\mathcal{E}(-\zeta+u^*-u)\, \mathcal{E}(\zeta)\, \mathcal{P})^{(T)} = (\mathcal{E}(-\zeta+u^*-u)\mathcal{P})^{(T)}$$

und verschwindet somit in $-(-\zeta + u^* - u) + u^* = \omega$ mit der Ordnung T (siehe Lemma 3 und die Definition von $\mathfrak{P}^{(T)}$). Um ein geeignetes Polynom P zu finden, betrachten wir die Hilbertfunktionen der Ideale $I(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{E}(u^*-u)\mathfrak{P}^{(T)}$ und I. Mit Hilfe der Proposition 1 in [Ne] erhalten wir

(6.7) $$H(D;I(\mathfrak{G})) \geq \deg \mathfrak{G}/(n+1)! \cdot D^n .$$

Mit Hilfe von Lemma 13 erhalten wir:

(6.8) $$H(D,(\mathfrak{E}(u^*-u)\mathfrak{P})^{(T)}) \leq 4^{n-r} a^{n-r} \binom{T-1+\rho}{\rho} \deg \mathfrak{P}\, D^{n-r} \leq 4^{n-r} a^{n-r} T^{\rho} \deg \mathfrak{P}\, D^{n-r} .$$

Da für alle homogenen Ideale $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$

$$H(D; \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}) + H(D; \mathfrak{c}+\mathfrak{b}) = H(D; \mathfrak{c}) + H(D; \mathfrak{b})$$

(siehe Formel IV.1.12 in [Gr]) und somit

$$H(D; \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}) \leq H(D; \mathfrak{c}) + H(D; \mathfrak{b})$$

gilt, können wir das Hilbertpolynom von I nach oben abschätzen durch

(6.9) $$H(D,I) \leq 4^{n-r} a^{n-r} T^{\rho} \deg \mathfrak{P}\, D^{n-r} \operatorname{card} \Sigma .$$

Hierbei haben wir ausgenützt, daß I der Durchschnitt von card Σ Idealen der Form $(\mathfrak{E}(u^*-u)\mathfrak{P})^{(T)}$, u aus Σ, ist und daß 6.8 gilt. Wir können nun die Volumensdifferenz der Räume I_D und $I(\mathfrak{G})_D$ abschätzen. Diese ist per Definitionem gleich der Differenz der Hilbertpolynome von $I(\mathfrak{G})$ und I im Punkt D. Mit Hilfe der Formeln 6.7 und 6.9 erhalten wir, wenn wir D^n durch $c(r)^r c'(r,T,\Sigma)^r T^{\rho} \operatorname{card} \Sigma\, D^{n-r}$ nach unten abschätzen

unten abschätzen

$$V(D;I) - V(D;I(\mathfrak{G}))$$
$$\geq \{\deg \mathfrak{G} /(n+1)! \ c(r)^r c'(r,T,\Sigma)^r - 4^{n-r} a^{n-r} \deg \mathfrak{P}\} T^\rho \operatorname{card} \Sigma \ D^{n-r}$$

Schätzen wir in der geschweiften Klammer die Konstanten $c(r)^r$ bzw. $c'(r,T,\Sigma)^r$ durch $(\deg \mathfrak{G})^{-1} (n+1)! \, 4^{n-r} a^{n-r} \deg \mathfrak{P}$ $(< c(r)^r)$ bzw. 1 nach unten ab, so sieht man sofort, daß die Klammer nach unten durch 0 abgeschätzt werden kann. Mit anderen Worten: das Volumen $V(D;I)$ von I_D ist echt größer als das Volumen $V(D;I(\mathfrak{G}))$ von $I(\mathfrak{G})_D$. Somit existiert ein homogenes Polynom in $I_D - I(\mathfrak{G})_D$, was zu zeigen war.

Theorem 3: *Die Multiplizitätsabschätzungen sind bis auf Konstante optimal.*

Bemerkung: Es gibt eine Konstante c'', so daß für alle positiven Konstanten $c < c''$ die Theorem 1 und 2 und die Aussage (5.8) falsch sind.

Beweis von Theorem 3: 1) Sei $|\Omega_n| \neq 0$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir für alle Untervarietäten von $\mathfrak{G}$ der Dimension 0 den Parameter $l(V)$ gleich $|\Omega_n|$. Dann gibt es eine endliche Menge $V(\Omega,\Omega^*)$ von Untervarietäten von $\mathfrak{G}$ über das Minimum in (5.3) für alle nichtnegativen reellen Zahlen S und T angenommen wird (siehe Bemerkung (6.9)). Es gilt somit

$$\min_{V \in V(\Omega,\Omega^*)} l(V)^{\frac{1}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}} = \min_V l(V)^{\frac{1}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}},$$

wobei das rechte Minimum über alle echten algebraischen Untervarietäten V von $\mathfrak{G}$ läuft. Es gibt daher eine Varietät W aus $V(\Omega,\Omega^*)$ mit

$$l(W)^{\frac{1}{\operatorname{cod} W}} (T/n)^{\frac{\rho(W)}{\operatorname{cod} W}} = \min_{V \in V(\Omega,\Omega^*)} l(V)^{\frac{1}{\operatorname{cod} V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\operatorname{cod} V}}.$$

Setzen wir nun

$$c(V(\Omega,\Omega^*)) = \max_{V \in V(\Omega,\Omega^*)} \left(\frac{|(\{\Omega+S(V)(\mathcal{K})\}/S(V)(\mathcal{K}))|}{l(V)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{cod} V}},$$

dann ist

$$|((\Omega+S(V)(\mathcal{K}))/S(V)(\mathcal{K}))|^{1/\mathrm{cod}V} \leq c(\,V(\Omega,\Omega^*))\; l(V)^{1/\mathrm{cod}\,V}\,.$$

Somit ist die Cardinalität von Σ nach oben durch $c(\,V(\Omega,\Omega^*))\; l(V)^{1/\mathrm{cod}\,V}$ beschränkt. Nach Lemma 14 existiert dann eine positive Zahl D und ein Polynom P aus $\mathcal{R}_D$, die den folgenden Bedingungen genügen:

i) $\min\limits_{\gamma\in\Omega} \mathrm{ord}_\gamma(\mathcal{A},P) \geq T$

ii) $P \not\equiv 0$ auf $\mathcal{G}(\mathcal{K})$

iii) $D \leq c'\,(T/n)^{\frac{1}{\mathrm{cod}\,W}}\,(\mathrm{card}\,\Sigma)^{\frac{1}{\mathrm{cod}\,W}}$

Aufgrund des o. g. gilt sogar

$$(\,c(\,V(\Omega,\Omega^*))\,c')^{-1}\cdot D \leq \min_{V\in V(\Omega,\Omega^*)} l(V)^{\frac{1}{\mathrm{cod}\,V}}\,(T/n)^{\frac{\rho(V)}{\mathrm{cod}\,V}}\,.$$

Daraus folgt, daß das Theorem 1 für $c < (c'\,c(\,V(\Omega,\Omega^*)))^{-1}$ falsch ist. Somit ist das Theorem 1 bis auf Konstante optimal.

2) Um zu zeigen, daß das Theorem 2 optimal ist, wählen wir analog zum ersten Teil des Beweises eine endliche Menge $H' = H'(\Gamma,\mathcal{A},\mathcal{G})$ von Untervarietäten, so daß das Minimum in (5.4) für alle reellen Zahlen S und T stets in einem Element aus H' angenommen wird. Eine derartige Menge H' können wir stets finden, da die Parameter q(V), ρ(V) und cod V für alle Untervarietäten V von $\mathcal{G}$ beschränkte positive ganze Zahlen sind. Da $(\Gamma+S(V)(\mathcal{K}))/\,S(V)(\mathcal{K}))$ eine endlich erzeugte Gruppe vom Rang l-q(V) ist, kann die Anzahl der Elemente von $(\Gamma(S) + S(V)(\mathcal{K}))/S(V)(\mathcal{K}))$ durch $c_{S(V)}\cdot(S/n)^{l-q(V)}$ für eine positve reelle Konstante $c_{S(V)}$ abgeschätzt werden (siehe Kapitel II.4). Dann kann man wie im ersten Teil des Beweises zeigen, daß das Theorem für $c < (c'\,(\max\limits_{V\in H'} c_{S(V)})^{-1}$ falsch ist. Somit ist auch Theorem 2 bis auf Konstante optimal.

Da die Formel (5.8) das Theorem 2 impliziert, ist auch diese optimal.

(6.10) Bemerkung: Konstruktion einer Menge $V(\Omega,\Omega^*)$: Wir betrachten zunächst die Menge $E(\Omega,\Omega^*) \subset \mathbb{N}^3$, die durch

$$E(\Omega,\Omega^*) = \{(l(V),\rho(V),\mathrm{cod}\ V) \mid V \text{ nichttriviale Untervarietät von } \mathfrak{G}\} \cup \{(|\Omega_n|,d,n)\}$$

definiert ist. Diese Menge ist endlich, da $l(V)$, $\rho(V)$ und $\mathrm{cod}\ V$ beschränkte, positive ganze Zahlen sind. Zu jedem e aus $E(\Omega,\Omega^*)$ wählen wir eine Varietät V_e mit $(l(V_e),\rho(V_e),\mathrm{cod}\ V_e) = e$ und setzen

$$V(\Omega,\Omega^*) = \{ V_e \mid e \in E(\Omega,\Omega^*) \}.$$

Sei nun T eine positve reelle Zahl. Dann existiert eine Untervarietät W von $\mathfrak{G}$, so daß

$$l(W)^{\frac{1}{\mathrm{cod}\,W}} (T/n)^{\frac{\rho(W)}{\mathrm{cod}W}} = \min_V l(V)^{\frac{1}{\mathrm{cod}\,V}} (T/n)^{\frac{\rho(V)}{\mathrm{cod}\,V}},$$

wobei das Minimum über alle echten algebraischen Untervarietäten V von $\mathfrak{G}$ läuft. Aufgrund der Definition von E liegt das Tripel $(l(W),\rho(W),\mathrm{cod}\ W)$ in E. Daher gibt es eine Varietät V_e aus $V(\Omega,\Omega^*)$ mit $(l(W),\rho(W),\mathrm{cod}W) = (l(V_e),\rho(V_e),\mathrm{cod}\ V_e)$. Somit wird das obige Minimum für alle positiven reellen Zahlen T stets in einem Element aus $V(\Omega,\Omega^*)$ angenommen.

II. Interpolation auf kommutativen algebraischen Gruppenvarietäten

1. Lösbarkeit von Interpolationsproblemen

Der Betrag $|\tau|$ von Elementen $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ aus $\mathbb{N}^k$ $(k \geq 1)$ sei die Summe der Komponenten von τ. Sind σ und τ aus $\mathbb{N}^k$, dann sagen wir σ ist echt kleiner als τ $(\sigma < \tau)$, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $|\sigma| < |\tau|$

2) a) $|\sigma| = |\tau|$

b) Es gibt ein i, $1 \leq i \leq k$, so daß $\sigma_j = \tau_j$ für $1 \leq j < i$ und $\sigma_i < \tau_i$.

Durch diese Relation "<" ist dann auf $\mathbb{N}^k$ eine lexikographische Ordnung definiert. Es ist zweckmäßig, eine weitere Relation auf $\mathbb{N}^k$ zu definieren. Wir schreiben $\sigma \trianglelefteq \tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{N}^k$, genau dann, wenn $\sigma_i \leq \tau_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$. Schließlich bezeichnen wir mit card M die Anzahl der Elemente einer vorgegeben Menge M und mit

$$\delta_{s,t} = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für Elemente s,t aus M das Kroneckersymbol.

Lemma 1: *Sei g aus $\mathfrak{G}'(\mathbb{K})$ und τ aus $\mathbb{N}^d$, dann existiert ein Polynom $Q_{\tau,g}$ aus $\mathfrak{R}'_{|\tau|}$ mit*

$$(1.1) \qquad (\Delta^{\sigma} Q_{\tau,g}(x))(g) = \delta_{\sigma,\tau}$$

für alle σ aus $\mathbb{N}^d$ mit $|\sigma| \leq |\tau|$.

Beweis: Für $\tau = (0, \ldots, 0)$ setze: $Q_{\tau,g} = 1$. Das leistet das Gewünschte. Sei nun $\tau >$ $(0, \ldots, 0)$. Mit $(g) = (g_1, \ldots, g_N)$ bezeichnen wir dann affine Koordinaten von g und betrachten die Jacobi-Matrix $J(x_1-g_1, \ldots, x_N-g_N\,,\ D(\mathcal{A}))$ des maximalen Ideals $I = (x_1-g_1\,, \ldots, x_N-g_N) \subsetneq \mathcal{R}'$ in Bezug auf $D(\mathcal{A})$, die gegeben ist durch

$$J(x_1-g_1\,, \ldots, x_N-g_N\,,\ D(\mathcal{A})) = \begin{pmatrix} \Delta_1(x_1-g_1) & \ldots & \Delta_d(x_1-g_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1(x_N-g_N) & \ldots & \Delta_d(x_N-g_N) \end{pmatrix} \pmod{I}.$$

Diese hat über $\mathcal{K}$ ($= \mathcal{R}'/I$) vollen Rang und wir können ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, daß die d ersten Zeilen über $\mathcal{K}$ linear unabhängig sind. Es existieren daher Zahlen $\alpha_{j,k}$, $1 \le j,k \le d$, aus $\mathcal{K}$, so daß

(1.2) $$\delta_{k,l} \equiv \alpha_{l,1}\, \Delta_k(x_1-g_1) + \ldots + \alpha_{l,d}\, \Delta_k(x_d-g_d) \pmod{I} \qquad 1 \le k,l \le d.$$

Für $1 \le l \le d$ setzen wir

(1.3) $$Q_{l,g}(x) = \alpha_{l,1}(x_1-g_1) + \ldots + \alpha_{l,d}\,(x_d-g_d)\,.$$

Mit (1.2) folgt daraus sofort

(1.4) $$\Delta_k\, Q_{l,g} = \delta_{k,l} \pmod{(x_1-g_1\,, \ldots, x_N-g_N)}\,, \qquad 1 \le k,l \le d.$$

Wir setzen nun

(1.5) $$Q_{\tau,g}(x) = \Big(\frac{1}{\tau!}\, Q_{1,g}^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot Q_{d,g}^{\tau_d}\Big)(x)$$

und behaupten, daß das Polynom $Q_{\tau,g}$ das Gewünschte leistet. Dies wird mit Induktion über den Betrag von $\tau = (\tau_1\,, \ldots, \tau_d)$ gezeigt. Ist $|\tau| = 1$, dann ist eine Komponente, sagen wir τ_1 gleich 1 und alle anderen sind Null. Somit ist

$$Q_{\tau,g} = Q_{1,g}.$$

Mit (1.3) und (1.4) folgt daraus sofort die Behauptung. Wir können daher annehmen, daß das Lemma für ein t (>1) aus $\mathbb{N}$ und alle Elemente aus $\mathbb{N}^d(t)$ (siehe Einleitung), gilt. Sei nun τ aus $\mathbb{N}^d(t+1) - \mathbb{N}^d(t)$ beliebig, aber fest, vorgegeben. Eine der Komponenten von τ, sagen wir τ_1, ist dann von Null verschieden. Setzen wir $\hat{\tau} = (1, 0, \ldots, 0)$ und $\bar{\tau} = \tau - \hat{\tau}$, dann läßt sich $Q_{\tau,g}$ auch darstellen durch

$$Q_{\tau,g}(x) = \tau_1^{-1} (Q_{1,g} \cdot Q_{\bar{\tau},g})(x).$$

Da $|\hat{\tau}|$ und $|\bar{\tau}|$ echt kleiner als t sind, gilt nach Induktionsannahme

$$(\Delta^\sigma Q_{1,g}(x))(g) = \delta_{\sigma,\hat{\tau}} \qquad (\sigma \in \mathbb{N}^d,\ |\sigma| \leq 1)$$

und

$$(\Delta^\sigma Q_{\bar{\tau},g}(x))(g) = \delta_{\sigma,\bar{\tau}} \qquad (\sigma \in \mathbb{N}^d,\ |\sigma| \leq |\bar{\tau}|)$$

Wir wenden nun die Operatoren Δ^σ, σ aus $\mathbb{N}^d$, auf das Polynom $Q_{\tau,g}$ an und erhalten mit Hilfe der Leibnitzregel:

$$\Delta^\sigma Q_{\tau,g} = \frac{1}{\tau_1} \Big(\sum_{\hat{\sigma}+\bar{\sigma}=\sigma} \frac{\sigma!}{\hat{\sigma}!\bar{\sigma}!} \Delta^{\hat{\sigma}} Q_{\hat{\tau},g} \Delta^{\bar{\sigma}} Q_{\bar{\tau},g} \Big)$$

Daraus folgt mit Hilfe der Induktionsannahme für alle σ aus $\mathbb{N}^d(t+1)$:

$$(1.6)\quad (\Delta^\sigma Q_{\tau,g}(x))(g) = \frac{1}{\tau_1} \Big(\sum_{\substack{\hat{\sigma}+\bar{\sigma}=\sigma \\ |\bar{\sigma}|<|\sigma|}} \frac{\sigma!}{\hat{\sigma}!\bar{\sigma}!} \Delta^{\hat{\sigma}} Q_{\hat{\tau},g}(x) \Delta^{\bar{\sigma}} Q_{\bar{\tau},g}(x) \Big)(g)$$

Für σ mit $|\sigma| \leq t$ liefert die rechte Seite höchstens dann etwas von Null verschiedenes, wenn $|\sigma| = t$ und $\bar{\sigma} = \bar{\tau}$ ist. In diesem Fall ist $|\hat{\sigma}| = 1$. Dann erhalten wir

$$(\Delta^\sigma Q_{\tau,g}(x))(g) = \frac{1}{\tau_1} \sum_{\substack{\hat{\sigma}+\bar{\sigma}=\sigma \\ |\bar{\sigma}|<|\sigma|}} \frac{\sigma!}{\hat{\sigma}!\bar{\sigma}!} \quad \delta_{\hat{\tau},\hat{\sigma}}\, \delta_{\bar{\tau},\bar{\sigma}} = \delta_{\tau,\sigma}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2: $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ *sind algebraisch unabhängig über* $\mathcal{K}$.

Beweis: Sei $P = \sum_{\sigma} a(\sigma)\, z_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{\sigma_d}$ ein Polynom aus $\mathcal{K}[z_1, \ldots, z_d]$ vom Gesamtgrad D, $D \in \mathbb{N}$, mit $P(\Delta_1, \ldots, \Delta_d)$ gleich 0. Ist P nicht identisch Null, dann gibt es ein maximales Element τ aus $\mathbb{N}^d(D+1)$ mit $a(\tau) \neq 0$. Da nach Lemma 1 ein Polynom $Q_{\tau,0}$ aus $\mathcal{R}'$ mit

$$(\Delta^{\sigma} Q_{\tau,0}(x))(0) = \delta_{\sigma,\tau} \qquad \sigma \in \mathbb{N}^d(|\tau|+1)$$

existiert, gilt dann folgende Gleichung:

$$0 = (P(\Delta_1, \ldots, \Delta_d)\, Q_{\tau,0}(x))(0) = \sum_{\sigma} a(\sigma)\, (\Delta^{\sigma} Q_{\tau,0}(x))(0) = a(\tau).$$

Dies steht im Widerspruch zu: $a(\tau) \neq 0$. Somit sind die Operatoren $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ algebraisch unabhängig über $\mathcal{K}$.

Lemma 3: *Sei* $\emptyset \neq \Sigma$ *eine endliche Teilmenge von* Γ *und* τ *ein Element aus* $\mathbb{N}^d$. *Setzen wir* $D = (|\tau|+1) \cdot \mathrm{card}\, \Sigma - 1$, *dann existiert zu jedem* γ *aus* Σ, *ein Polynom* $P_{\tau,\gamma}$ *aus* $\mathcal{R}'_D$ *mit*

$$(\Delta^{\sigma} P_{\tau,\gamma}(x))\,(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\, \delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle (σ,ζ) *aus* $\mathbb{N}^d \times \Sigma$ *mit* $|\sigma| \leq |\tau|$.

Beweis: Sei γ aus Σ beliebig vorgegeben. Wir wenden zunächst Lemma 1 an. Danach existiert ein Polynom $Q_{\tau,\gamma}$ aus $\mathcal{R}'_{|\tau|}$, so daß

$$(1.7) \qquad (\Delta^{\sigma} Q_{\tau,\gamma}(x))(\gamma) = \delta_{\sigma,\tau}$$

für alle σ aus $\mathbb{N}^d(|\tau|+1)$. Somit ist das Lemma im Fall card Σ gleich 1 bewiesen.

Sei nun $\mathrm{card}\,\Sigma > 1$. Zu jedem ζ aus Σ, $\zeta \neq \gamma$, existiert ein Polynom $P_{\zeta,\gamma}$ in den Variablen x_1, ..., x_N, das im Punkt ζ verschwindet und im Punkt γ den Wert 1 annimmt, da nicht alle Polynome der Form $x_i(\zeta) - x_i$, $1 \leq i \leq N$, im Punkt γ verschwinden. Für das Polynom P_γ, das durch

$$P_\gamma = \prod_{\zeta \in \Sigma,\, \zeta \neq \gamma} P_{\zeta,\gamma}$$

definiert ist, gelten dann die folgenden Gleichungen

(1.8) $$P_\gamma(x)(\zeta) = \delta_{\zeta,\gamma} \qquad (\zeta \in \Sigma),$$

(1.9) $$(\Delta^\sigma P_\gamma^{|\tau|+1}(x))(\zeta) = 0 \qquad ((\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d(|\tau|+1) \times (\Sigma - \{\gamma\}))$$

Wir behaupten nun, daß das Polynom Q, das durch

$$Q = P_\gamma^{|\tau|+1} Q_{\tau,\gamma}$$

definiert ist, das Gewünschte leistet.

Erstens, der Gesamtgrad von Q ist gleich $(|\tau|+1) \cdot (\mathrm{card}\,\Sigma - 1) + |\tau|$). Dies ist gleich $(|\tau|+1) \cdot (\mathrm{card}\,\Sigma) - 1 = D$. Zweitens, wenn wir die Operatoren Δ^σ, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, auf Q anwenden, erhalten wir mit der Leibnitzregel folgende Darstellung:

(1.10) $$\Delta^\sigma Q = (\sum_{\hat\sigma + \bar\sigma = \sigma} \frac{\sigma!}{\hat\sigma!\bar\sigma!} \Delta^{\hat\sigma} P_\gamma^{|\tau|+1} \Delta^{\bar\sigma} Q_{\tau,\gamma})$$

Mit (1.9) folgt daraus sofort

$$(\Delta^\sigma Q(x))(\zeta) = 0$$

für alle (σ,ζ) aus $(\mathbb{N}^d(|\tau|+1) \times (\Sigma - \{\gamma\})$. Für $\zeta = \gamma$ und für alle $\sigma \in \mathbb{N}^d$ mit

$|\sigma| \leq |\tau|$ folgt aus (1.10) mit (1.7)

$$(\Delta^{\sigma} Q(x))(\gamma) = \sum_{\hat{\sigma}+\bar{\sigma}=\sigma} \frac{\sigma!}{\hat{\sigma}!\bar{\sigma}!}(\Delta^{\hat{\sigma}} P_{\gamma}^{|\tau|+1}(x))(\gamma)\delta_{\bar{\sigma},\tau}$$

$$= \begin{cases} P_{\gamma}^{|\tau|+1}(x(\gamma)), & \bar{\sigma}=\tau \\ 0, & \bar{\sigma}\neq\tau. \end{cases}$$

Mit (1.8) folgt nun die Behauptung.

Corollar: *Die Operatoren* $E(\gamma)\Delta^{\tau}$, $(\tau,\gamma)\in\mathbb{N}^d\times\Gamma$, *sind linear unabhängig über* $\mathcal{K}$.

Beweis: Es sei eine endliche, nichtleere Teilmenge $\Lambda\times\Sigma$ von $\mathbb{N}^d\times\Gamma$ beliebig vorgegeben. Wir betrachten die Gleichung

$$0 = \sum_{(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Gamma} a(\sigma,\zeta)\, E(\zeta)\Delta^{\sigma}$$

mit Koeffizienten $a(\sigma,\zeta)$, $(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Gamma$, aus $\mathcal{K}$. Sind nicht alle Koeffizienten gleich Null, dann gibt es ein maximales Element τ aus Λ und ein Element γ aus Σ, so daß $a(\tau,\gamma)\neq 0$ und $a(\sigma,\zeta)=0$ für alle $(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Sigma$ mit $\sigma>\tau$. Wir wenden nun Lemma 3 an. Danach existiert ein Polynom $P_{\tau,\gamma}$ aus $\mathcal{R}'$ mit

$$(\Delta^{\sigma} P_{\tau,\gamma}(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle $(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Sigma$ mit $|\sigma|\leq|\tau|$. Somit gilt:

$$E(\zeta)\,(\Delta^{\sigma} P_{\tau,\gamma}(x))(0) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle $(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Sigma$ mit $|\sigma|\leq|\tau|$. Wenn wir den obigen Operator

$\sum_{(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Gamma} a(\sigma,\zeta)\, E(\zeta)\, \Delta^{\sigma}$ auf das Polynom $P_{\tau,\gamma}(x)$ anwenden, erhalten wir

(1.11) $$0 = \sum_{(\sigma,\zeta)\in\Lambda\times\Gamma} a(\sigma,\zeta)\, E(\zeta)\, (\Delta^{\sigma} P_{\tau,\gamma}(x)(0) = a(\tau,\gamma).$$

Dies steht im Widerspruch zu: $a(\tau,\gamma) \neq 0$. Somit sind die Operatoren $E(\zeta)\Delta^{\sigma}$, $(\sigma,\zeta) \in \Lambda \times \Sigma$ linear unabhängig über $\mathcal{K}$. Daraus folgt, da $\Lambda \times \Sigma$ eine beliebig vorgegebene endliche nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^d \times \Gamma$ ist, die Behauptung.

(1.12) Definition: Sei Σ eine nichtleere endliche Teilmenge von Γ und T sei eine positive reelle Zahl, dann bezeichnen wir mit $\Omega(\Sigma,T)$ den durch $E(\zeta)\Delta^{\sigma}$, $\zeta \in \Sigma$ und $\sigma \in \mathbb{N}^d(T)$, erzeugten $\mathcal{K}$-Vektorraum. Auf diesem wird im Fall m gleich l durch die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^{l+d}$ eine vollständige Ordnung definiert.

(1.13) Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir für die Aussage:

Zu jedem e aus $\mathcal{K}^{\mathbb{N}^d(T)\times\Sigma}$ gibt es ein Polynom P aus $\mathcal{R}'_D$, D aus $\mathbb{R}$, so daß

$$(\Delta^{\sigma} P(x))(\zeta) = e(\sigma,\zeta)$$

für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$;

kurz $I(\Sigma,T,D) = I_{\mathfrak{G}}(\Sigma,T,D)$.

(1.14) Mit Λ bezeichnen wir nun ein maximales Repräsentantensystem von modulo $I(\mathfrak{G})'$ inkongruenten Polynomen in $\mathcal{R}'_D$ und mit $\mathcal{R}'_D(\Lambda)$, den von Λ über $\mathcal{K}$ erzeugten Untervektorraum von $\mathcal{R}'_D$. Die Cardinalität von Λ ist gleich $H([D];I(\mathfrak{G}))$. Jedes Polynom Q aus $\mathcal{R}'_D$ ist dann kongruent zu einem Element aus $\mathcal{R}'_D(\Lambda)$ modulo dem Ideal $I(\mathfrak{G})'$. Es existieren daher Zahlen $b(P)$, $P\in\Lambda$, in $\mathcal{K}$, so daß

$$Q \equiv \sum_{P\in\Lambda} b(P)\, P \qquad (\mathrm{mod}\ I(\mathfrak{G})').$$

Da die Operatoren Δ^{τ}, $\tau\in\mathbb{N}^d$, Elemente aus $\mathcal{K}[D(\mathfrak{G})]$ sind, gilt

$$\Delta^{\tau} Q \equiv \sum_{P\in\Lambda} b(P)\, \Delta^{\tau} P \qquad (\mathrm{mod}\ I(\mathfrak{G})').$$

Somit sind Interpolationsprobleme mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und D in $\mathfrak{R}'$ genau dann lösbar, wenn sie in $\mathfrak{R}'_D(\Lambda)$ lösbar sind.

Lemma 4: *Seien nun* $T \geq 1$ *und* $D \geq 1$ *reelle Zahlen. Ferner sei* Σ *eine endliche nichtleere Teilmenge von* Γ. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Zu jeder Linearform* $L \neq 0$ *aus* $\Omega(\Sigma,T)$ *existiert ein Polynom* P *aus* $\mathfrak{R}'_D$, *so daß*

$$L(P(x))(0) \neq 0 .$$

ii) $I(\Sigma,T,D)$ *trifft zu.*

Beweis von Lemma 4: i) $\Rightarrow$ ii)**:** Um Interpolationsprobleme mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und D in $\mathfrak{R}'$ zu lösen, reicht es zu jedem e (Spaltenvektor) aus $\mathcal{K}^{\mathbb{N}^d(T) \times \Sigma}$ Zahlen $b(P)$, $P \in \Lambda$, in $\mathcal{K}$ zu finden, so daß

$$e(\tau,\gamma) = \sum_{P \in \Lambda} b(P)(\Delta^{\tau} P(x))(\gamma)$$

für alle $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$.

Dies ist ein System mit $\operatorname{card} \Sigma \cdot \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T)$ Gleichungen in $H([D];I(\mathfrak{G}))$ Unbestimmten $b(P)$, $P \in \Lambda$. Dieses Gleichungssystem und somit das Interpolationsprobleme ii) ist genau dann lösbar, wenn die Ränge der Matrizen

$$\mathfrak{B} = ((\Delta^{\tau} P(x))(\gamma))_{((\tau,\gamma),P) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma \times \Lambda} \text{ und } \mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, e)$$

über $\mathcal{K}$ gleich sind. Da e aus $\mathcal{K}$ beliebig vorgeben ist, sind im allgemeinem die Ränge der beiden Matrixen nur dann gleich, wenn der Rang von $\mathfrak{B}$ gleich ($\operatorname{card} \Sigma \cdot \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T)$) ist. Somit reicht es, um ii) zu beweisen, die lineare Unabhängigkeit der

Gleichungen des Systems zu zeigen.

Für Elemente $c(\tau,\gamma)$, $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$, aus $\mathcal{K}$ betrachten wir daher für alle Vektoren b aus $\mathcal{K}^\Lambda$ folgende Gleichungen:

$$0 = \sum_{(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma} c(\tau,\gamma) \ (\sum_{P \in \Lambda} b(P)\, E(\gamma)\Delta^\tau P(x))(0).$$

Da die Operatoren $E(\gamma)\Delta^\tau$, $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$, linear sind und da die Werte $\Delta^\tau P(x)(\gamma)$ und $E(\gamma)(\Delta^\tau P(x))(0)$ für alle $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$ gleich sind, erhalten wir für alle Vektoren b aus $\mathcal{K}^\Lambda$:

$$0 = \sum_{(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma} c(\tau,\gamma) E(\gamma)(\Delta^\tau (\sum_{P \in \Lambda} b(P)\, P(x)))(0).$$

Aufgrund der Bemerkung 1.14 gilt dann für alle Polynome Q aus $\mathcal{R}'_D$

$$0 = \sum_{(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma} c(\tau,\gamma) \ \ \Delta^\tau(Q(x))(0)\,.$$

Die Aussage i) impliziert dann, daß alle Zahlen $c(\tau,\gamma)$, $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$, gleich Null sind. Somit sind die Gleichungen linear unabhängig über $\mathcal{K}$ und es gilt ii).

"$\Leftarrow$". Sei $L = \sum c(\sigma,\zeta)\, E(\zeta)\, \Delta^\sigma$ eine von Null verschiedene Linearform aus $\Omega(\Sigma,T)$. Dann gibt es ein Element $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$, so daß $c(\tau,\gamma) \neq 0$ und $c(\sigma,\zeta) = 0$ für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$ mit $\sigma > \tau$. Wir wenden nun ii) an. Danach existiert ein Polynom P aus $\mathcal{R}'_D$, mit

$$(\Delta^\sigma P(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\, \delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d \times \Sigma$ mit $\sigma \leq \tau$. Somit erhalten wir $L(P(x))(0) = c(\tau,\gamma) \neq 0$, was zu zeigen war.

(1.16) Im Beweis haben wir sogar gezeigt, daß die Aussage

(1.15) Zu jedem Paar $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times \Sigma$ existiert ein Polynom P aus $\mathcal{R}'_D$ mit

$$(\Delta^{\sigma} P(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma} \qquad (\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d \times \Sigma \text{ mit } \sigma \leq \tau,$$

die Aussage i) impliziert. Diese impliziert aber nach Lemma 4 die Aussage $I(\Sigma,T,D)$ und diese impliziert wiederum (1.15). Somit ist (1.15) äquivalent zu i) und ii).

(1.17) Wir haben außerdem im Teil 1 des Beweises gezeigt, daß das $I(\Sigma,T,D)$ nur dann gilt, wenn

$$(\operatorname{card} \Sigma \cdot \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T)) \leq H([D];I(\mathcal{G})),$$

denn ansonsten ist der Rang von B stets kleiner als $\operatorname{card}\Sigma \cdot \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T)$ und in der Regel vom Rang von B' verschieden. Der rechte Term der Gleichung ist stets kleiner gleich $4^n D^n \deg \mathcal{G}$ (siehe Theorem 1 in [Ne]). Somit ist das Interpolationsprobleme mit den Parametern Σ, T und D für alle

$$D < 0.25\,(\deg \mathcal{G})^{-1/n}\,(\operatorname{card} \Sigma \cdot \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T))^{1/n}$$

nicht lösbar. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Man kann nur das folgende leichte Interpolationsergebnis zeigen:

Lemma 5: *Sei* $\Sigma \neq \emptyset$ *eine endliche Teilmenge aus* $\mathbb{N}^d \times \Gamma$. *Ferner erfülle* D *aus* $\mathbb{R}$ *die Ungleichung* $H([D],I(\mathcal{G})) > \operatorname{card} \Sigma$. *Dann existiert ein Polynom* P *aus* $\mathcal{R}'_D$, *das auf* $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ *nicht identisch verschwindet, so daß*

$$E(\gamma)(\Delta^{\tau} P(x))(0) = 0$$

für alle (τ,γ) *aus* Σ.

Beweis des Lemmas: Ähnlich wie in Lemma 4 haben wir ein System von cardΣ homogenen linearen Gleichungen in $H([D];I(\mathfrak{G}))$ Variablen zu lösen. Da die Anzahl der Variablen größer als die Anzahl der Bedingungen ist, stimmt der Rang von B mit dem Rang von B´ überein und wir können ein Polynom Q' aus $\mathcal{R}'_D$ finden, das auf $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ nicht verschwindet, so daß

$$0 = (\Delta^{\tau} Q(x)(\gamma)$$

für alle (τ,γ) aus Σ. Dies leistet dann das Gewünschte.

(1.18) Für alle $D \geq [n(\text{card}\ \Sigma)^{1/n}]$ sind die Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllt, denn das Hilbertpolynom von $I(\mathfrak{G})$ an der Stelle D kann grob durch

$$H([D],I) \geq \binom{[D]+n}{n} > \left(\frac{[D]+1}{n}\right)^n$$

abgeschätzt werden und dies ist für die oben angebenen Zahlen D stets größer als cardΣ, da $([n(\text{card}\ \Sigma)^{1/n}]+1)/n$ echt größer als $(\text{card}\ \Sigma)^{1/n}$ ist. Für $[D] \geq \deg \mathfrak{G}$ ($= \deg I(\mathfrak{G})$) können wir das Hilbertpolynom auch schärfer mit Hilfe der Proposition 1 in [Ne] abschätzen durch

$$H([D],I(\mathfrak{G})) \geq \frac{\deg \mathfrak{G}}{(n+1)!} [D]^n .$$

Somit sind dann für alle $[D] > \max((n+1)!\,(\deg \mathfrak{G})^{-1} \cdot \text{card}\ \Sigma)^{\frac{1}{n}}, \deg \mathfrak{G})$ die Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllt.

Corollar 1: $I(\Sigma,T,(T+1)\cdot \text{card}\ \Sigma - 1)$ *trifft zu.*

(1.19) Bemerkung: Seien S und T positive reelle Zahlen. Da $\operatorname{card} \Gamma(S) \leq (S+1)^m$, ist mit dem obigen Corollar der Satz 1 im Fall $n = 1$ und $m = 1$ bewiesen.

Beweis von Corollar 1: In Lemma 3 haben wir für jedes $\tau \in \mathbb{N}^d(T)$ die Aussage (1.15) mit $D = (|\tau|+1) \cdot \operatorname{card} \Sigma - 1$ bewiesen. Diese ist aufgrund der Bemerkung (1.16) äquivalent zu $I(\Sigma,T,D)$; d. h. Interpolationsprobleme mit den Parametern Σ, T und D sind lösbar. Daraus folgt, da der Betrag von τ kleiner oder gleich T ist, die Behauptung.

Corollar 2: *Sei* $\hat{\gamma}$ *aus* Γ . *Gilt* $I(\Sigma,T,D)$ *für eine endliche nichtleere Teilmenge* Σ *von* Γ *und für eine reelle Zahl* $T \geq 1$, *dann gilt auch* $I(\hat{\gamma}+\Sigma,T,aD)$.

Beweis: Sei $(\tau,\bar{\gamma}) \in \mathbb{N}^d(T) \times (\hat{\gamma}+\Sigma)$ beliebig vorgeben, dann existiert ein Polynom $P_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}$ aus $\mathfrak{R}_D$ mit

$$(\Delta^{\sigma} P_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}{}'(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\, \delta_{\zeta,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}} \tag{1.20}$$

für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d \times \Sigma$ mit $\sigma \leq \tau$. Mit A bezeichnen wir wieder die Additionsformel aus Lemma 1 in Abschnitt I . Für das Polynom $Q_{\tau,\bar{\gamma}}$, das durch

$$Q_{\tau,\bar{\gamma}}(X) = E(-\hat{\gamma})P_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}(X)\cdot A_0{}'^{-D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}),x(\bar{\gamma}))$$

definiert ist, gilt dann aufgrund von Formel I.(4.8):

$$\Delta^{\tau}(Q_{\tau,\bar{\gamma}}{}'(x)) \equiv \sum_{\sigma+\sigma'=\tau} \frac{\tau!}{\sigma!\sigma'!} \Delta^{\sigma'} A_0{}'^{D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}),x)\, E(-\hat{\gamma})(\Delta^{\sigma} P'_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}(x))\cdot c$$

modulo dem Ideal $I(\mathfrak{G})\tilde{M}^{-1}$, wobei $c = A_0{}'^{-D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}),x(\bar{\gamma}))$ ist. Da $\Delta^{\sigma} P_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}{}'(x)(\zeta)$ gleich $(E(-\hat{\gamma})\, \Delta^{\sigma} P_{\tau,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}{}'(x))(\hat{\gamma}+\zeta)$ ist, folgt daraus mit (1.20) sofort

$$(\Delta^{\sigma} Q_{\tau,\bar{\gamma}}'(x))(\hat{\gamma}+\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\delta_{\zeta,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}} A_0'^{D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}),x(\bar{\gamma}))\, A_0'^{-D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}),x(\bar{\gamma}))$$
$$= \delta_{\sigma,\tau}\delta_{\zeta,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}$$

für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d \times \Sigma$ mit $\sigma \le \tau$. Ersetzen $\delta_{\zeta,-\hat{\gamma}+\bar{\gamma}}$ durch $\delta_{\zeta,\bar{\gamma}}$, dann gilt (1.15) für alle $(\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d \times (\hat{\gamma}+\Sigma)$ mit $\sigma \le \tau$. Somit gilt $I(\hat{\gamma}+\Sigma,T,aD)$ und das Corollar ist bewiesen.

Corollar 3: *Die Lösbarkeit von Interpolationsproblemen ist unabhängig von der Wahl der Basis von* $D(\mathcal{A})$.

Beweis: Sei nun $\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_d$ eine weitere Basis von $D(\mathcal{A})$. Dann existiert eine invertierbare $d \times d$ Matrix M mit Eintragungen aus $\mathcal{K}$, so daß

$$(1.21) \qquad \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\Delta}_d \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_d \end{pmatrix}.$$

Ist Σ eine endliche Teilmenge von Γ und ist T eine positive reelle Zahl, dann ist der $\mathcal{K}$-Vektorraum $\tilde{\Omega}(\Sigma,T)$, der durch die linear unabhängigen Vektoren $E(\zeta)\tilde{\Delta}^{\sigma}$, $\zeta \in \Sigma$ und $\sigma \in \mathbb{N}^d(T)$, erzeugt wird, isomorph zu $\Omega(\Sigma,T)$. Somit entspricht die Aussage i) aus Lemma 4 in Bezug auf die Basis $\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_d$ der Aussage i) in Lemma 4 in Bezug auf die Basis $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$. Dies impliziert, daß Interpolationsprobleme mit den Parametern Σ, T und D in Bezug auf die Basis $\tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_d$ genau dann lösbar sind, wenn sie es in Bezug auf die Basis $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ sind.

Corollar 4: *Sei nun* $i \le d$ *eine positive Zahl. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $I(\Sigma,T,D)$ *trifft zu.*

b) *Zu jedem* $\tau = (\hat{\tau},\bar{\tau}) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T)$ *und zu jedem* $\gamma \in \Sigma$ *existiert ein Polynom* $Q_{\tau,\gamma}$ *aus* $\mathcal{R}_D'$ *mit*

(1.22) $$(\Delta^{\sigma} Q_{\tau,\gamma}(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle $\zeta \in \Sigma$ und alle $\sigma = (\hat{\sigma},\bar{\sigma}) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T)$ mit $\bar{\sigma} \leq \bar{\tau}$.

Beweis: Es reicht " $\Leftarrow$ " zu zeigen. Es seien $\tau = (\hat{\tau},\bar{\tau}) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T)$ und $\gamma \in \Sigma$ beliebig vorgegeben . Nach (1.22) existiert zu jedem Paar $(t = (\hat{t},\bar{t}), \beta) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T) \times \Sigma$ ein Polynom $Q_{t,\beta}$ aus $\mathcal{R}_D'$ mit

(1.23) $$(\Delta^{\sigma} Q_{t,\beta}(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,t}\delta_{\zeta,\beta}$$

für alle $\zeta \in \Sigma$ und alle $\sigma = (\hat{\sigma},\bar{\sigma}) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T)$ mit $\bar{\sigma} \leq \bar{t}$.

Mit diesen Polynomen definieren wir nun rekursiv für jedes $t = (\hat{t},\bar{t}) \in \{\hat{\tau}\} \times \mathbb{N}^{d-i}(T)$ Polynome $P_{t,\gamma}$ durch

(1.24) $$P_{\tau,\gamma} = Q_{\tau,\gamma}$$

und

$$P_{t,\gamma} = \sum_{\beta\in\Sigma} \sum_{\hat{s}\in\mathbb{N}^i(T)} Q_{(\hat{s},\bar{t}),\beta}\Big(\sum_{\substack{\bar{s}\in\mathbb{N}^{d-i}(T)\\ \bar{\tau} \leq \bar{s}<\bar{t}}} -(\Delta^{(\hat{s},\bar{t})} P_{(\hat{\tau},\bar{s}),\gamma}(x))(\beta)\Big) \qquad (t > \tau).$$

Diese Polynome liegen in $\mathcal{R}_D'$. Für alle Paare $(\sigma =(\hat{\sigma},\bar{\sigma}), \zeta) \in \mathbb{N}^i(T) \times \mathbb{N}^{d-i}(T) \times \Sigma$ mit $\bar{\sigma} \leq \bar{t}$ gilt dann

$$\Delta^{\sigma} (P_{t,\gamma}(x))(\zeta) = \delta_{\bar{\sigma},\bar{t}}\Big(\sum_{\substack{\bar{s}\in\mathbb{N}^{d-i}(T)\\ \bar{\tau} \leq \bar{s}<\bar{t}}} -(\Delta^{\sigma} P_{(\hat{\tau},\bar{s}),\gamma}(x))(\zeta)\Big)$$

Somit erfüllt, daß durch

$$P = \sum_{\substack{\bar{s}\in\mathbb{N}^{d-i}(T)\\ \bar{\tau} \leq \bar{s}<\bar{t}}} P_{(\hat{\tau},\bar{s}),\gamma}$$

definierte Polynom P für alle $\sigma \in \mathbb{N}^d(T)$ und alle $\zeta \in \Sigma$ die Gleichungen

$$(\Delta^{\sigma}P(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}$$

und liegt in $\mathfrak{R}'_D$. Daraus folgt mit (1.16) die Behauptung.

2. Optimalität von Satz 1

Sei $E = E(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G}) \subseteq \mathbb{N}(l+1) \times \mathbb{N}(d+1) \times \mathbb{N}(n+1)$ die Menge, die durch

(2.1) $E = \{(p(\mathcal{H}),\sigma(\mathcal{H}),\mathrm{cod}(\mathcal{H})) \mid \mathcal{H}\neq\{0\}$ (über $\mathcal{K}$ definierte) algebraische Untergruppenvarietät von $\mathfrak{G}\}$

definiert ist. Analog zur Bemerkung I.6.10 wählen wir zu jedem e aus E eine Untergruppenvarietät $\mathcal{H}_e$ von $\mathfrak{G}$ mit $(p(\mathcal{H}_e),\sigma(\mathcal{H}_e),\mathrm{cod}(\mathcal{H}_e)) = e$ und setzen

(2.2) $$\bar{H} = \bar{H}(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G}) = \{\mathcal{H}_e \text{ (über } \mathcal{K} \text{ definiert)} \mid e\in E\}.$$

Dann gibt es zu jedem Paar positiver reeller Zahlen $S \geq 1$ und $T \geq 1$ eine von Null verschiedene Untergruppenvarietät $\hat{\mathfrak{G}} = \hat{\mathfrak{G}}(S,T)$ aus $\bar{H}$ mit folgender Eigenschaft:

(2.3) $$S^{\frac{l-p(\hat{\mathfrak{G}})}{\dim\hat{\mathfrak{G}}}}\,T^{\frac{d-\sigma(\hat{\mathfrak{G}})}{\dim\hat{\mathfrak{G}}}} = \max_{\mathcal{H}} S^{\frac{l-p(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}}\,T^{\frac{d-\sigma(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}},$$

wobei das Maximun über alle von Null verschiedenen (über $\mathcal{K}$ definierten) Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathfrak{G}$ läuft.

Satz 2: *Für* $c^* < 0.25\cdot \min_{\mathcal{H}\in\bar{H}} ((2\cdot d!\cdot \deg\mathcal{H})^{-1/\dim\mathcal{H}})$ *ist der* Satz 1 *nicht gültig.*

Beweis: Sei nun c' eine positive reelle Zahl mit $c' < 0.25\cdot \min_{\mathcal{H}\in\bar{H}} ((2\cdot d!\cdot\deg\mathcal{H}))^{-1/\dim\mathcal{H}})$.
Ferner seien positive reelle Zahlen S und T beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Untergruppenvarietät $\hat{\mathfrak{G}}$ aus $\bar{H}$, so daß daß Maximum in (2.3) für dieses Paar (S,T) über dieser Untergruppe angenommen wird. Wir setzen nun

$$D\ (= D(S,T)) = S^{\frac{l-p(\hat{G})}{\dim \hat{G}}}\ T^{\frac{d-\sigma(\hat{G})}{\dim \hat{G}}} .$$

Sei nun $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ eine Basis von $D(\mathcal{A})$. Aufgrund von Corollar 3 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Operatoren $\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-\sigma(\hat{G})}$ eine Basis von $D(\hat{G}\cap\mathcal{A})$ bilden. Schließlich setzen wir $\Sigma = \Gamma(S) \cap \hat{G}(\mathcal{K})$. Da der Rang $\Gamma \cap \hat{G}(\mathcal{K})$ per Definitionem gleich $l - p(\hat{G})$ ist, haben wir

$$\operatorname{card} \Sigma \geq S^{l-p(\hat{G})} .$$

(2.5) Ist das Interpolationsproblem mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und $c'D$ auf G lösbar, dann existiert zu jedem Paar $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{G})}(T) \times \Sigma$ ein Polynom P aus $\mathcal{R}'_D$ mit

$$(\Delta^{\sigma}P(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma} \qquad (\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{G})}(T) \times \Sigma .$$

Somit ist nach (1.16) das Interpolationsproblem mit den Parametern Σ, T und $c'D$ auf $\hat{G}$ lösbar. Mit Hilfe von Bemerkung 1.17 können wir nun das Hilbertpolynom von dem definierenden Ideal $I(\hat{G})$ von $\hat{G}$ und D in $\mathcal{R}$ nach unten

(2.6) $$H([c'D]; I(\hat{G})) \geq \operatorname{card} \Sigma \cdot \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{G})}(T)$$

abschätzen. Einerseits ist die linke Seite der obigen Ungleichung nach Theorem 1 in [Ne] nach oben beschränkt durch $(4c')^{\dim \hat{G}} D^{\dim \hat{G}} \deg \hat{G}$. Andererseits ist die rechte Seite aufgrund der Definition von $\mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{G})}(T)$ nach unten beschränkt durch

$$S^{l-p(\hat{G})} \cdot T^{d-\sigma(\hat{G})} / 2(d-\sigma(\hat{G}))!$$

und somit größer oder gleich $(D)^{\dim \hat{G}}(2 \cdot d!)^{-1}$. Wir setzen diese Abschätzungen in 2.6 ein und lösen die Ungleichung nach c' auf. Wir erhalten , daß

$$c' \geq 0.25 \cdot (d! \cdot 2 \cdot \deg \hat{G})^{-1/\dim \hat{G}} .$$

Dies steht im Widerspruch zur Definition von c'. Somit ist die Annahme (2.5), daß das Interpolationsproblem mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und $c'\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}$ lösbar ist, falsch. Der Satz ist damit bewiesen.

3. Der nichtausgeartete Fall

Wir wollen nun kurz an die Definition der Nichtausgeartetheit des Paars $(\Gamma,\mathcal{A})$ erinnern (siehe (0.3)). Das Paar $(\Gamma,\mathcal{A})$ heißt für vorgegebene reelle Zahlen $S \geq 0$, $T \geq 0$ nichtausgeartet in $\mathcal{G}$, falls

$$(3.1) \qquad \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{l}{n}} \left(\frac{T}{n}\right)^{\frac{d}{n}} = \min_{\mathcal{H}} \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\rho(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}} \left(\frac{T}{n}\right)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}},$$

wobei das Minimum über alle echten algebraischen Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ läuft. Wir setzen nun $c_2 = (4\,l + 5) \cdot c^n \cdot n^{n+l+d}$, wobei mit c die Konstante aus der Multiplizitätsabschätzung I.(5.8) bezeichnet ist. Ferner sei

$$c_3 = a((4\,l + 5) \cdot n^n \cdot c_2^{l+d-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Für $m = 1$ gilt dann das folgende Resultat:

Proposition 1: $S \geq 1$ *und* $T \geq 1$ *seien reelle Zahlen. Ist das Paar* $(\Gamma,\mathcal{A})$ *für* $c_2 S$ *und* $c_2 T$ *nichtausgeartet in* $\mathcal{G}$*, dann gilt*

$$I(\Gamma(S),T,c_3 S^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}});$$

d. h. das Interpolationsproblem mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und $c_3 S^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}}$ ist lösbar.

(3.2) Bemerkung: c_3 ist effektiv berechenbar.

(3.3) Bemerkung: Den Fall $n=1$ haben wir schon bewiesen (siehe Bemerkung 1.19).

Beweis: Sei $n \geq 2$. Die Proposition wird indirekt bewiesen. Wir definieren ganze Zahlen h , k und E durch

$$h := \operatorname{card}(\Gamma((c_2-1)S) \cdot \operatorname{card}\mathbb{N}^d((c_2-1)T)$$
$$k := \dim_{\mathcal{K}}(\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)) - h$$
$$E := [nk^{\frac{1}{n}}].$$

Um die Proposition zu beweisen, reicht es die beiden folgenden Aussagen zu verifizieren:

(3.4) $\qquad k \leq ((4l+5) \cdot c_2^{l+d-1})\, S^l T^d$

(3.5) Ist das Interpolationsproblem mit den Parametern $\Gamma(S)$,T und $c_3 S^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}}$ nicht lösbar, dann gibt es h linear unabhängige Linearformen L_i , $1 \leq i \leq h$, aus $\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)$, so daß für alle Polynome P aus $\mathcal{R}'_E$ gilt:

$$L_i(P(x))(0) = 0 \qquad 1 \leq i \leq h.$$

Denn ist dies bewiesen, dann kann der Raum der Linearformen $\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)$ durch die Linearformen L_i , $1 \leq i \leq h$, und durch k weitere Elemente $E(\zeta_j)\Delta^{\tau_j}$ für geeignete (τ_j, ζ_j) aus $\mathbb{N}^d(c_2T) \times \Gamma(c_2S)$,$1 \leq j \leq k$, aufgespannt werden. Jedes Element χ aus $\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)$ läßt sich dann darstellen durch

(3.6) $$\chi = \sum_{1 \leq j \leq k} c_j(\chi)\, E(\zeta_j)\Delta^{\tau_j} + \sum_{1 \leq i \leq h} d_i(\chi)\, L_i$$

mit $c_1(\chi), \ldots, c_k(\chi), d_1(\chi), \ldots, d_h(\chi)$ aus $\mathcal{K}$. Wir wenden nun Lemma 5 an. Danach existiert ein Polynom Q aus $\mathcal{R}'_E$, das auf $\mathcal{G}$ nicht identisch verschwindet, mit

$$E(\zeta_j)(\Delta^{\tau_j} Q(x))(0) = 0 \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Wir wollen nun $(\mathcal{X}Q(x))(0)$ für alle Operatoren $\mathcal{X}$ aus $\Omega(\Gamma(c_2S),c_2T)$ bestimmen. Mit Hilfe von Formel (3.6) erhalten wir

$$(\mathcal{X}Q(x))(0) = \Big(\sum_{1\le i\le h} d_i(\mathcal{X})\, L_i(Q(x))\Big)(0)\,.$$

Daraus folgt mit (3.5), da Q ein Polynom aus $\mathcal{R}'_E$ ist, daß

$$\mathcal{X}(Q(x))(0) = 0$$

für alle Operatoren $\mathcal{X} \in \Omega(\Gamma(c_2\,S),c_2T)$.

Somit ist die Ordnung von Q längs $\mathcal{A}$ in jedem Punkt aus $\Gamma(c_2S)$ größer oder gleich c_2T. Homogenisieren wir Q, dann erhalten wir mit Hilfe der Multiplizitätsabschätzung I.(5.8) folgende untere Schranke für E:

$$E > c^{-1} \min_{\mathcal{H}} \,(c_2S/n)^{\frac{\rho(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}}\,(c_2T/n)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod}\mathcal{H}}}\,,$$

wobei das Minimum über alle echten (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ läuft. Hierbei haben wir den Grad von $\mathcal{H}$ durch 1 abgeschätzt. Da das Paar $(\Gamma,\mathcal{A})$ für c_2S und c_2T nichtausgeartet ist, können wir das Minimum in der obigen Ungleichung mit Hilfe der Formel (3.1) ersetzen und erhalten

$$E > c^{-1}\,(c_2S/n)^{\frac{l}{n}}\,(c_2T/n)^{\frac{d}{n}}\,.$$

Schätzen wir nun $E = [nk^{1/n}]$ mit Hilfe von (3.4) nach oben ab, potenzieren wir mit n und dividieren durch S^lT^d, so erhalten wir

$$(4l+5)\; c_2^{\,l+d-1}\, n^n > c^{-n}\, n^{-l-d}\, c_2^{\,l+d}\,.$$

Daraus folgt, daß

$$(4\,l + 5)\, c^n n^{l+d+n} > c_2 \,.$$

Dies widerspricht der Definition von c_2. Somit ist die Proposition bewiesen, wenn die Aussagen (3.4) und (3.5) verifiziert sind.

Beweis von (3.4): Per Definitionem ist k die Dimension des Komplements des durch $L_1, \dots, L_h$ erzeugten $\mathcal{K}$-Vektorraumes W in $\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)$. Die Linearformen $L_1, \dots, L_h$ sind nach 3.5 linear unabhängig; somit hat W die Dimension card $\mathbb{N}^d((c_2\text{-}1)T)$ card $\Gamma((c_2\text{-}1)S)$. Der $\mathcal{K}$-Vektorraumes $\Omega(\Gamma(c_2S), c_2T)$ wird durch die Operatoren $E(\gamma)\Delta^{\tau}$, $(\tau,\gamma) \in \mathbb{N}^d(c_2T) \times \Gamma(c_2S)$, erzeugt. Da diese Operatoren über $\mathcal{K}$ linear unabhängig sind (siehe Corollar zu Lemma 3), erhalten wir folgende Gleichung

$$k = \text{card}\,\mathbb{N}^d(c_2T)\,\text{card}\,\Gamma(c_2S) \;-\; \text{card}\,\mathbb{N}^d((c_2\text{-}1)T)\,\text{card}\,\Gamma((c_2\text{-}1)S)\,.$$

Somit ist k nach oben beschränkt durch

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad k \le\; &\text{card}\,\mathbb{N}^d(c_2T)\;\{\text{card}\,\Gamma(c_2S) - \text{card}\,\Gamma((c_2\text{-}1)S))\}\\ &+ \text{card}\,\Gamma((c_2\text{-}1)S)\{\text{card}\,\mathbb{N}^d(c_2T) - \text{card}\,\mathbb{N}^d((c_2\text{-}1)T))\}.\end{aligned}$$

Wir schätzen nun die einzelnen Terme nach oben hin ab. Wir wollen zunächst die Anzahl der Elemente von $\mathbb{N}^d(c_2T)$ abschätzen. Es gilt:

$$(3.8)\qquad \text{card}\,\mathbb{N}^d(c_2T) = \binom{[c_2T] - [\,[c_2T]/c_2T] + d}{d} \le \frac{[c_2T]+d}{d}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{[c_2T]+1}{1}$$

Jeder der Faktoren $([c_2T]+j)/j$, $1 \le j \le d$, ist nach oben durch c_2T bzw. c_2T+1 beschränkt. Somit gilt

$$\text{card}\,\mathbb{N}^d(c_2T) < 2\,c_2^{\,d}T^d\,.$$

(3.9) Wir betrachten nun die Differenz von card $\mathbb{N}^d(c_2T)$ und card $\mathbb{N}^d((c_2-1)T)$. Diese läßt sich nach oben abschätzen durch

(3.10) $$\sum_{j=1}^{[T]+1} \operatorname{card} \mathbb{N}^d((c_2-1)T+j)-\operatorname{card} \mathbb{N}^d((c_2-1)T+j-1).$$

Wir wollen nun für beliebige positive reelle Zahlen T' die Differenzen von card $\mathbb{N}^d(T')$ und card $\mathbb{N}^d(T'-1)$ berechnen. Dazu setzen wir $b = [\,[T']\,/\,T']$. Dann gilt:

$$\operatorname{card} \mathbb{N}^d(T') - \operatorname{card} \mathbb{N}^d(T'-1) = \frac{([T'] - b + d)!}{([T'] - b)!\, d!} - \frac{([T'] - b - 1 + d)!}{([T'] - b - 1)! \cdot d!} =$$

$$= \frac{([T'] - b - 1 + d)!}{([T'] - b) \cdot (d-1)!} \left(\frac{[T']-b+d}{d} - \frac{[T']-b}{d} \right) = \binom{[T'] + b - d - 1}{d-1}.$$

Diese Terme können aufgrund des obengesagten durch $2[T']^{d-1}$ abgeschätzt werden. Somit ist jede der $[T] + 1 - b$ Differenzen von card $\mathbb{N}^d((c_2-1)T+j)$ und card$\mathbb{N}^d((c_2-1)T+j-1)$, $1 \le j \le T$, kleiner oder gleich $2c_2^{d-1}\, T^{d-1}$. Setzen wir diese Abschätzungen in 3.10 ein, so erhalten wir

$$\operatorname{card} \mathbb{N}^d(c_2T)-\operatorname{card} \mathbb{N}^d((c_2-1)T) \le 4c_2^{d-1}\, T^d.$$

(3.11) Da m gleich l ist, ist die Anzahl der Elemente von $\Gamma((c_2-1)\,S))$ gleich $([(c_2-1)\,S]+1))^l$. Diese Zahl ist stets kleiner oder gleich $c_2^l\,S^l$.

(3.12) Für die Differenz von card $\Gamma(c_2\,S)$ und card $\Gamma((c_2-1)\,S))$ erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \Gamma(c_2\,S) - \operatorname{card} \Gamma((c_2-1)\,S)) &= ([c_2\,S] + 1)^l - ([(c_2 - 1)S] + 1))^l \\ &\le (c_2\,S + 1)^l - (c_2 - 1)^l\, S^l. \end{aligned}$$

Die rechte Seite läßt sich als ein Polynom in (c_2-1) vom Grad l-1 entwickeln. Mit anderen Worten:

$$\text{card}\,\Gamma(c_2 S) - \text{card}\,\Gamma((c_2-1) S)) = \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l}{i} (c_2-1)^i S^i (S+1)^{l-i} \quad .$$

Die Faktoren $(c_2-1)^i S^i (S+1)^{l-i}$, $0 \le i < l$, sind durch $2c_2^{l-1} S^l$ bzw. $2^{-l-1} c_2^{l-1} S^l$, $0 \le i < l-1$, beschränkt. Hierbei haben wir ausgenützt, daß für $n \ge 2$ die Konstante c_2 größer oder gleich 2^{l+2} und somit der Term $2^{-l-2} c_2^{l-i-1}$, $0 \le i < l-1$, größer oder gleich 1 ist.

Da die Summe der Binominalkoeffizienten $\binom{l}{i}$, $0 \le i < l-1$, echt kleiner als 2^l ist, erhalten wir

$$\text{card}\,\Gamma(c_2 S) - \text{card}\,\Gamma((c_2-1) S)) < (2\,l+0.5)\, c_2^{l-1} S^l$$

Wir setzen (3.8), (3.9), (3.11) und (3.12) in (3.7) ein und erhalten

$$k < ((4l+1)+4)\, c_2^{d+l-1} S^l T^d < (4\,l+5)\, c_2^{d+l-1} S^l T^d .$$

Beweis von (3.5): Wir nehmen an, daß das Interpolationsproblem mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und aE nicht lösbar ist. Nach Lemma 4i) existiert dann eine von Null verschiedene Linearform

$$L = \sum_{(\tau,\gamma)\in \mathbb{N}^d(T)\times\Gamma(S)} b(\tau,\gamma)\, E(\gamma) \Delta^{\tau}$$

mit Koeffizienten $b(\tau,\gamma)$, $(\tau,\gamma)\in \mathbb{N}^d(T) \times \Gamma(S)$, aus $\mathcal{K}$, so daß für alle Polynome P aus $\mathcal{R}'_{aE}$ gilt:

$$L(P(x))(0) = 0.$$

Speziell gilt dann für alle Polynome Q aus $\mathcal{R}_E$ und alle Paare $(\sigma,g) \in \mathbb{N}^d \times \Gamma$:

$$(3.13) \qquad L(\tilde{\Delta}^{\sigma}\{(Q\cdot A)'(\tilde{x}, x(0))\})(g) = 0 ,$$

da $\tilde{\Delta}^{\sigma}\{(Q\cdot A)'(\tilde{x},x)\}(g)$ ein Polynom aus $\mathcal{R}'_{aE}$ ist. Hierbei ist mit A die Additionsformel aus Lemma I.1 bezeichnet.

Aufgrund von Formel I. 4.7 gilt die folgende Kongruenz:

$$\tilde{\Delta}^{\sigma}(Q\cdot A)(\tilde{x},X)(g) \equiv \sum_{\bar{\sigma}+\tilde{\sigma}=\sigma} \frac{\sigma!}{\bar{\sigma}!\tilde{\sigma}!}\tilde{\Delta}^{\bar{\sigma}} A_0{}^E(\tilde{x},X)(g)\, E(g)(\Delta^{\tilde{\sigma}} Q')(x) \quad (\mathrm{mod}(\mathbb{G})\tilde{M}^{-1}).$$

Auf einer offenen Umgebung der Null stimmt dann das Polynom $\tilde{\Delta}^{\sigma}(Q\cdot A)(\tilde{x},X)(g)$ mit der obigen Summe überein. Wir wenden nun die Operatoren Δ^{τ}, $\tau\in\mathbb{N}^d$, auf $\tilde{\Delta}^{\sigma}(Q\cdot A)(\tilde{x},X)(g)$ an und erhalten mit Hilfe der Leibnitzregel

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\tau}\tilde{\Delta}^{\sigma}((Q\cdot A)'(\tilde{x},x))(g,0)\\
&= \sum_{\bar{\sigma}+\tilde{\sigma}=\sigma} \frac{\sigma!}{\bar{\sigma}!\tilde{\sigma}!}\,(\Delta^{\tau}(\tilde{\Delta}^{\bar{\sigma}} A_0{}'^E(\tilde{x},x)(g,0)\, E(g)\Delta^{\tilde{\sigma}}(Q'(x)))(0)\\
&= \sum_{\bar{\sigma}+\tilde{\sigma}=\sigma}\ \sum_{\bar{\tau}+\tilde{\tau}=\tau} \frac{\sigma!}{\bar{\sigma}!\tilde{\sigma}!}\,\frac{\tau!}{\bar{\tau}!\tilde{\tau}!}\,\Delta^{\bar{\tau}}\tilde{\Delta}^{\bar{\sigma}}(A_0{}'^E(\tilde{x},x))(g,0)\, E(g)\Delta^{\tilde{\sigma}+\tilde{\tau}}(Q'(x))(0)\\
&= \sum_{t\trianglelefteq\sigma+\tau} \Big\{\sum_{\substack{\bar{\sigma}\trianglelefteq\sigma,\\ \bar{\sigma}\trianglelefteq\tau+\sigma-t}} \frac{\sigma!}{\bar{\sigma}!(\sigma-\bar{\sigma})!}\,\frac{\tau!}{\bar{\tau}!(\tau-\bar{\tau})!}\,\Delta^{\bar{\tau}}\tilde{\Delta}^{\bar{\sigma}}(A_0{}'^E(\tilde{x},x))(g,0)\Big\} E(g)\Delta^{t}(Q'(x))(0).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{\tau}$ gleich $\sigma+\tau-t-\bar{\sigma}$ und $\trianglelefteq$ ist wie auf Seite 47 definiert.

(3.14) Die Terme in den geschweiften Klammern bezeichnen wir mit $b_{(\tau,\sigma,g)}(t,0)$, $t\in\mathbb{N}^d(|\tau|+|\sigma|+1)$. Für $t\geq\tau+\sigma$ haben wir

$$b_{(\tau,\sigma,g)}(t,0) = \begin{cases} A_0{}'^E(\tilde{x}(g), x(0)), & t=\tau+\sigma\\ 0, & t>\tau+\sigma. \end{cases}$$

Für alle $\sigma\in\mathbb{N}^d((c_2-1)T)$ ersetzen wir nun in den Linearformen $L(\tilde{\Delta}^{\sigma}\{(Q\cdot A)'(\tilde{x},x(0))\})(g)$ aus (3.13) die Terme $\Delta^{\tau}\tilde{\Delta}^{\sigma}((Q\cdot A)'(\tilde{x},x))(g,0)$ durch die obigen Summen und erhalten

$$(3.15)\quad L(\tilde{\Delta}^{\sigma}\{(Q\cdot A)'(\tilde{x}, x(0))\})(g)$$

$$= \sum_{(\tau,\gamma)\in \mathbb{N}^d(T)\times\Gamma(S)} b(\tau,\gamma)\ (\sum_{t\in\mathbb{N}^d} b_{(\tau,\sigma,g)}(t,0)E(\gamma)E(g)\Delta^t(Q'(x))(0))$$

$$= \sum_{(t,\bar{\gamma})\in \mathbb{N}^d(c_2T)\times(g+\Gamma(S))} (\sum_{\substack{\tau+\sigma\geq t\\ \tau\in\mathbb{N}^d(T)}} b_{(\tau,\sigma,g)}(t,0)b(\tau,\bar{\gamma}-g))E(\bar{\gamma})\Delta^t(Q'(x))(0).$$

Hierbei haben wir außer Formel 3.14 verwendet, daß

$$E(\gamma)E(g)\Delta^t(Q'(x))(0) = E(\gamma+g)\ \Delta^t(Q'(x))(0)\ .$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir für alle $(\sigma,g)\in\mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S)$ und für alle $(\bar{\tau},\bar{\gamma})\in\mathbb{N}^d(c_2T)\times\ (g+\Gamma(S))$

$$(3.16)\qquad c_{(\sigma,g)}(\bar{\tau},\bar{\gamma}) = (\sum_{\tau\in\mathbb{N}^d(T)} b_{(\tau,\sigma,g)}(\bar{\tau},0)\ b(\tau,\bar{\gamma}-g))\ .$$

Falls $(\bar{\tau},\bar{\gamma})\notin\mathbb{N}^d(c_2T)\times(g+\Gamma(S))$ setzen wir $c_{(\sigma,g)}(\bar{\tau},\bar{\gamma})=0$. Schließlich definieren wir Linearformen $L_{(\sigma,g)}$ durch

$$L_{(\sigma,g)} = \sum_{(\bar{\tau},\bar{\gamma})\in\mathbb{N}^d(c_2T)\times\Gamma(c_2S)} c_{(\sigma,g)}(\bar{\tau},\bar{\gamma})\,E(\bar{\gamma})\Delta^{\bar{\tau}}$$

und behaupten, daß diese das Gewünschte leisten. Nach (3.13) und (3.15) gilt:

$$L_{(\sigma,g)}(Q(x))(0) = 0 \qquad\qquad (\sigma,g)\in\mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S)$$

für alle Polynome Q aus $\mathcal{R}'_E$. Zu zeigen ist also nur noch die lineare Unabhängigkeit diese Formen. Falls sie über $\mathcal{K}$ linear abhängig wären, existierten Zahlen $d(\sigma,g)$, $(\sigma,g)\in\mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S)$ aus $\mathcal{K}$, nicht alle Null, so daß

$$0 = \sum_{(\sigma,g)\in\mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S)} d(\sigma,g)\,L_{(\sigma,g)}$$

$$= \sum_{(\sigma,g)} \sum_{(\bar{\tau},\bar{\gamma})} d(\sigma,g)\, c_{(\sigma,g)}(\bar{\tau},\bar{\gamma})\, E(\bar{\gamma})\Delta^{\bar{\tau}} ,$$

wobei die eine Summe über alle $(\sigma,g) \in \mathbb{N}^d((c_2-1)T) \times \Gamma((c_2-1)S)$ und die andere über alle $(\bar{\tau},\bar{\gamma}) \in \mathbb{N}^d(c_2 T) \times \Gamma(c_2 S)$ läuft. Daraus folgt sofort, da die Operatoren $E(\bar{\gamma})\Delta^{\bar{\tau}}$, $(\bar{\tau},\bar{\gamma}) \in \mathbb{N}^d(c_2 T) \times \Gamma(c_2 S)$, (siehe Corollar zu Lemma 3) über $\mathcal{K}$ linear unabhängig sind:

$$(3.17) \qquad 0 = \sum_{(\sigma,g) \in \mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S)} d(\sigma,g)\, c_{(\sigma,g)}(\bar{\tau},\bar{\gamma})$$

für alle $(\bar{\tau},\bar{\gamma}) \in \mathbb{N}^d(c_2 T) \times \Gamma(c_2 S)$. Bezeichnen wir mit (σ_0,g_0) das maximale Element aus $\mathbb{N}^d((c_2-1)T) \times \Gamma((c_2-1)S)$ mit $d(\sigma_0,g_0) \neq 0$ und mit (τ_0,γ_0) das maximale Element aus $\mathbb{N}^d(T) \times \Gamma(S)$ mit $b(\tau_0,\gamma_0) \neq 0$, dann gilt speziell für $(\bar{\tau},\bar{\gamma}) = (\sigma_0+\tau_0, \gamma_0+g_0)$:

$$(3.18) \qquad 0 = \sum_{\substack{(\sigma,g) \in \mathbb{N}^d((c_2-1)T)\times\Gamma((c_2-1)S) \\ (\sigma,g)\leq(\sigma_0,g_0)}} d(\sigma,g)\, c_{(\sigma,g)}(\sigma_0+\tau_0, \gamma_0+g_0) .$$

Es reicht nun zu zeigen, daß

$$(3.19) \quad c_{(\sigma,g)}(\sigma_0+\tau_0, \gamma_0+g_0) = \begin{cases} b(\tau_0,\gamma_0)\cdot A_0'^{E}(\tilde{x}(g_0),x(0)) & (\sigma,g)=(\sigma_0,g_0) \\ 0 & (\sigma,g)<(\sigma_0,g_0), \end{cases}$$

denn dann folgt aus (3.18) sofort

$$0 = b(\tau_0,\gamma_0)\cdot A_0'^{E}(\tilde{x}(g_0),x(0)) \cdot d(\sigma_0,g_0).$$

Daraus folgt, daß $A_0'^{E}(\tilde{x}(g_0),x(0))$ für ein Element g_0 aus Γ gleich Null ist. Dies ist nach den Bemerkungen 0.1 und Lemma I.1 unmöglich. Daher erhalten wir einen Widerspruch. Somit ist die Annahme, daß die Proposition 1 falsch ist, falsch, falls wir (3.19) verifiziert haben.

Beweis von (3.19): Sei nun $(\sigma,g) \le (\sigma_0,g_0)$ aus $\mathbb{N}^d \times \Gamma$ beliebig vorgegeben. Es reicht wegen (3.16) den Fall $\gamma_0 + g_0 \in g + \Gamma(S)$ zu betrachten, da ansonsten die Koeffizienten $c_{(\sigma,g)}(\sigma_0 + \tau_0, \gamma_0 + g_0)$ gleich Null sind. Dann haben wir

$$(3.20)\quad c_{(\sigma,g)}(\sigma_0 + \tau_0, \gamma_0 + g_0) = \Big(\sum_{\tau \in \mathbb{N}^d} b_{(\tau,\sigma,g)}(\sigma_0 + \tau_0, 0)\ b(\tau, \gamma_0 + g_0 - g)\Big).$$

Für $\tau + \sigma < \sigma_0 + \tau_0$ sind die Zahlen $b_{(\tau,\sigma,g)}(\sigma_0 + \tau_0, 0)$ gleich Null. Aus der Ungleichung $\tau + \sigma \ge \sigma_0 + \tau_0$ folgt, daß

$$(\tau + \sigma, \gamma_0 + g_0) \ge (\sigma_0 + \tau_0, \gamma_0 + g_0).$$

Die linke Seite ist gleich der Summe von $(\tau, \gamma_0 + g_0 - g)$ und (σ,g) und die rechte Seite ist die Summe von (τ_0, γ_0) und (σ_0, g_0). Da $\mathbb{N}^d \times \Gamma$ im Fall $m = 1$ lexikographisch geordnet ist und da (σ,g) nach Voraussetzung kleiner gleich (σ_0, g_0) ist, folgt somit aus der obigen Ungleichung sofort:

$$(\tau, \gamma_0 + g_0 - g) \ge (\tau_0, \gamma_0).$$

Die Gleichheit gilt nur, falls $\tau + \sigma = \sigma_0 + \tau_0$ und $(\sigma,g) = (\sigma_0, g_0)$ sind. Mit anderen Worten: die Gleichheit gilt nur, falls $(\tau,\sigma,g) = (\tau_0, \sigma_0, g_0)$. Aufgrund der Wahl des Paares (τ_0, γ_0) sind die Zahlen $b(\tau, \gamma_0 + g_0 - g)$ gleich Null, falls das Paar $(\tau, \gamma_0 + g_0 - g)$ echt größer als (τ_0, γ_0) ist. Setzen wir dies in die Formel 3.20 ein, so erhalten wir

$$c_{(\sigma,g)}(\sigma_0 + \tau_0, \gamma_0 + g_0) = \begin{cases} b_{(\tau_0,\sigma_0,g_0)}(\sigma_0 + \tau_0, 0)\ b(\tau_0, \gamma_0) & (\tau,\sigma,g) = (\tau_0, \sigma_0, g_0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Formel 3.14 folgt dann die Behauptung.

(3.21) Bemerkung: Für ganze Zahlen S,T mit $c^{(l+d+1)(n-1)} S^l T^d > (\deg \mathfrak{G})^{n+1}$ können wir in den Konstanten c_2 und c_3 den Ausdruck n^n durch $2(n+1)!(\deg \mathfrak{G})^{-1}$ ersetzen. Dann ist $c_2 \geq c^{n-1}$ (c wie in I. Kapitel 5). Definieren wir nun E durch

$$E = -[-((n+1)!(\deg \mathfrak{G})^{-1}(4l+5)\, c_2^{l+d-1} S^l T^d)^{1/n}],$$

dann ist $E \geq \deg \mathfrak{G}$ und wir können die schärfere Abschätzung für das Hilbertpolynom anwenden. Die Proposition gilt dann auch mit den neuen Konstanten.

4. Bemerkungen zum Beweis von Satz 1 im Fall $m \neq l$

Sei Γ torsionsfrei. Wir werden diesen Fall auf den Fall $m = l$ zurückführen. Da der Rang von Γ gleich l ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ über $\mathbb{K}$ linear unabhängig sind und eine freie Untergruppe von Γ erzeugen. Jedes Element $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_m$ ist dann linear abhängig von $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Es existieren daher ganze Zahlen $e > 0$, a_{ij}, $1 \leq i \leq l < j \leq m$, aus $\mathbb{Z}$, so daß

$$e\gamma_j = a_{1j}\gamma_1 + \dots + a_{lj}\gamma_l, \qquad l < j \leq m.$$

Da $\mathfrak{G}$ divisibel ist, liegen auch die Zahlen $\bar{\gamma}_i = \gamma_i / e$, $1 \leq i \leq l$, in $\mathfrak{G}$. Jedes Element γ aus Γ läßt sich daher für gewisse ganze Zahlen $t_1, \dots, t_m$ darstellen durch:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} t_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{l} (e t_i + \sum_{j=l+1}^{m} a_{ij} t_j)\, \bar{\gamma}_i .$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind in der Regel nicht positiv. Sind nun die Zahlen $t_1, \dots, t_m$ durch eine positive ganze Zahl S beschränkt, so setzen wir:

(4.1) $$\gamma_0 = \gamma_0(S) = -S\,(\sum_{i=1}^{l} (e + \sum_{j=l+1}^{m} |a_{ij}|)\bar{\gamma}_i)$$

und

$$s_i = S\,(e + \sum_{j=l+1}^{m} |a_{ij}|) + e t_i + \sum_{j=l+1}^{m} a_{ij} t_j) \qquad (1 \leq i \leq l).$$

Setzen wir dies in die obige Darstellung von γ ein, so erhalten wir

$$(4.2) \qquad \gamma = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{l} s_i \bar{\gamma}_j \ .$$

Die $s_1, \ldots, s_l$ sind nichtnegative ganze Zahlen, die nach oben durch $2c_1S$ beschränkt sind. Hierbei ist c_1 gegeben durch

$$c_1 = c_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, S) = \max_{i \le i \le l}(e + \sum_{j=l+1}^{m} |a_{ij}|)\,.$$

Bezeichnen wir mit $\Gamma_{\pm}(S)$ die Menge der Elemente aus Γ der Form $s_1\gamma_1 + \ldots + s_m\gamma_m$ mit ganzen Zahlen $s_1, \ldots, s_m$, deren Betrag kleiner gleich S ist und mit $\bar{\Gamma}$ die durch die Zahlen $\bar{\gamma}_i$, $1 \le i \le l$, erzeugte Untergruppe von Γ, dann haben wir gezeigt:

$$\Gamma_{\pm}(S) \subseteq \gamma_0 + \bar{\Gamma}(2c_1 S)\,.$$

Für algebraische Untergruppen $\mathcal{H}$ sind die Parameter $p_\Gamma(\mathcal{H})$ und $p_{\bar{\Gamma}}(\mathcal{H})$ gleich, da der Rang von $\Gamma \cap \mathcal{H}(\mathcal{K})$ mit dem Rang von $\Gamma \cap \mathcal{H}(\mathcal{K})$ übereinstimmt. Wir können nun die folgende Proposition beweisen.

Proposition 2: $S \ge 1$ *und* $T \ge 1$ *seien reelle Zahlen. Ist das Paar* $(\Gamma, \mathcal{A})$ *für* $2c_1c_2S$ *und* c_2T *nichtausgeartet in* $\mathcal{G}$, *dann gilt:*

$$I(\Gamma_{\pm}(c_1 S), T, ac_3 (2c_1S)^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}}).$$

Beweis: In Proposition 1 haben wir schon gezeigt, daß Interpolationsprobleme mit den Parametern $\bar{\Gamma}(2c_1S)$, T und $c_3(2c_1S)^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}})$ lösbar sind. Daraus folgt mit dem Corollar 2 sofort, daß Interpolationsprobleme mit den Parametern $\gamma_0 + \bar{\Gamma}(c_1S)$, T und $ac_3(2c_1S)^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}})$ stets lösbar sind. Mit anderen Worten: zu jedem Paar $(\tau, \gamma) \in \mathbb{N}^d(T) \times (\gamma_0 + \bar{\Gamma}(c_1S))$ existiert ein Polynom P aus $\mathcal{R}'$ vom Gesamtgrad höchstens $ac_3(2c_1S)^{\frac{l}{n}} T^{\frac{d}{n}}$, so daß

$$\Delta^{\sigma} (P(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\, \delta_{\zeta,\gamma} \qquad\qquad (\sigma,\zeta) \in \mathbb{N}^d(T) \times (\gamma_0 + \overline{\Gamma}(c_1 S)) .$$

Da $\Gamma_{\pm}(S)$ in $\gamma_0 + \overline{\Gamma}(2c_1 S)$ liegt, ist die Aussage (1.15) erfüllt. Mit Bemerkung 1.16 folgt dann die Behauptung. Damit ist auch in diesem Fall das Interpolationsproblem bewiesen.

5. Beweis von Satz 1.

Der Satz wird mit Induktion bewiesen. Es seien nun $\mathcal{A}$ eine (über $\mathcal{K}$ definierte) analytische und Γ eine endlich erzeugte Untergruppe einer (über $\mathcal{K}$ definierten) Gruppenvarietät der Dimension 1. Die Anzahl der Elemente aus $\Gamma(S)$, $S \in \mathbb{R}$, ist durch $\tilde{c} S^{\mathrm{rang}\,\Gamma}$ beschränkt. Hierbei ist $\tilde{c}$ nur von dem ausgewählten Erzeugendensystem von Γ abhängig. Mit dem Corollar 1 folgt dann sofort der Satz 1.

Wir nehmen nun an, daß der Satz 1 für alle (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Gruppenvarietäten gilt, deren Dimension echt kleiner als n ist. Mit anderen Worten: sei $\tilde{\mathcal{G}}$ eine (über $\mathcal{K}$ definierte) Gruppenvarietät, deren Dimension echt kleiner als n ist, $\tilde{\mathcal{A}}$ eine (über $\mathcal{K}$ definierte) analytische Untergruppe der Dimension t und $\tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe von $\tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$ vom Rang l, die durch die Elemente $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$ erzeugt wird. Dann existiert eine Konstante $\tilde{c}$ mit folgender Eigenschaft:

Für alle reellen Zahlen $S \geq 1$ und $T \geq 1$ sind die Interpolationsprobleme auf $\tilde{\mathcal{G}}$ mit Parametern $\tilde{\Gamma}(S)$, T und $\tilde{c} \max_{\mathcal{H} \in \overline{H}(\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\Gamma})} S^{\frac{l-\rho(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}}\, T^{\frac{t-\sigma(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}}$ stets lösbar.
Hierbei sei die Menge $\overline{H}(\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\Gamma})$ wie in (2.2) definiert.

Sei nun $\mathcal{G}$ eine (über $\mathcal{K}$ definierte) algebraische Gruppenvarietät der Dimension n. Ferner sei $\mathcal{A}$ eine (über $\mathcal{K}$ definierte) analytische Untergruppe von $\mathcal{G}$ der Dimension d und Γ sei eine torsionsfreie Untergruppe von $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ vom Rang l, die durch $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ erzeugt ist. Mit $c^*, c_1, c_2, \dots$ bezeichnen wir positive reelle Zahlen. Die

Konstanten c_1, c_2 und c_3 seien wie in Kapitel 3 bzw. 4 definiert. Ferner seien ganze Zahlen $S \geq 1$ und $T \geq 1$ beliebig vorgegeben. Wir werden zeigen, daß

$$(5.1) \qquad I(\Gamma(S), T, c^*D),$$

mit

$$D = D(\mathcal{G}) = \max_{\mathcal{H} \in \bar{H}} S^{\frac{l-p(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} T^{\frac{d-\sigma(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}}$$

gilt. Damit ist dann Satz 1 im Fall, daß Γ torsionsfrei ist, bewiesen.

Falls das Paar $(\Gamma, \mathcal{A})$ für $2c_1c_2S$ und c_2T nichtausgeartet in $\mathcal{G}$ ist, gilt (5.1) nach Proposition 2 und wir sind fertig. Ansonsten existiert eine ganze Zahl r mit $1 \leq r < n$ und eine algebraische Untergruppe $\hat{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{G}$ der Dimension $n-r$, so daß

$$(5.2) \qquad \left(\frac{2c_1c_2S}{n}\right)^{\frac{p(\hat{\mathcal{H}})}{r}} \left(\frac{c_2T}{n}\right)^{\frac{\sigma(\hat{\mathcal{H}})}{r}} = \min_{\mathcal{H}} \left(\frac{2c_1c_2S}{n}\right)^{\frac{p(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}} \left(\frac{c_2T}{n}\right)^{\frac{\sigma(\mathcal{H})}{\operatorname{cod} \mathcal{H}}},$$

wobei das Minimum über alle echten (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ läuft. Das Tripel $(p(\hat{\mathcal{H}}), \sigma(\hat{\mathcal{H}}), \operatorname{cod} \hat{\mathcal{H}})$ liegt in E (siehe (2.1)). Es existiert daher eine algebraische Gruppenvarietät $\hat{\mathcal{G}}$ aus $\bar{H} - \{\mathcal{G}\}$ der Dimension $n-r$, so daß die beiden Tripel $(p(\hat{\mathcal{G}}), \sigma(\hat{\mathcal{G}}), \operatorname{cod} \hat{\mathcal{G}})$ und $(p(\hat{\mathcal{H}}), \sigma(\hat{\mathcal{H}}), \operatorname{cod} \hat{\mathcal{H}})$ gleich sind.

Mit $\hat{\Gamma}$ bezeichnen wir nun den Durchschnitt von Γ mit den $\mathcal{K}$-rationalen Punkten von $\hat{\mathcal{G}}$ und mit $\hat{\mathcal{A}}$ den Durchschnitt von $\mathcal{A}$ mit $\hat{\mathcal{G}}$. Per Definitionem ist $\hat{\Gamma}$ eine Untergruppe von $\hat{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$. Sie ist endlich erzeugt, da Γ endlich erzeugt ist und ihr Rang ist $l-p(\hat{\mathcal{G}})$. $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine (über $\mathcal{K}$ definierte) analytische Untergruppe von $\hat{\mathcal{G}}$ der Dimension $d-\sigma(\hat{\mathcal{G}})$.

Wir setzen nun $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\hat{\mathcal{G}}$, $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\hat{\mathcal{A}}$ und $\bar{\Gamma} = \Gamma/\hat{\Gamma}$. Der Quotient $\bar{\mathcal{G}}$ ist eine (über $\mathcal{K}$ definierte) quasiprojektive Gruppenvarietät der Dimension r (siehe zum Beispiel Theorem 3 und 4 in [Ro]) und kann daher für ein $\bar{N} > 0$ in einen projektiven Raum $\mathbb{P}^{\bar{N}}$ mit projektiven Koordinaten $\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_{\bar{N}}$ eingebettet werden. Da $\hat{\Gamma} = \Gamma \cap \hat{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$, können wir $\bar{\Gamma}$ als eine endlich erzeugte Untergruppe der $\mathcal{K}$-rationalen Punkte von $\bar{\mathfrak{G}}$ auffassen, indem wir die Elemente $\gamma + \hat{\Gamma}$ aus $\bar{\Gamma}$ mit den Elementen $\gamma + \hat{\mathfrak{G}}(\mathcal{K})$ identifizieren. Wir können wie in (0.1) davon ausgehen, daß $\bar{\Gamma}$ die durch $\bar{X}_0 = 0$ definierte Hyperebene nicht trifft. Aufgrund der Definition des Indexes $p(\hat{\mathfrak{G}})$ hat $\bar{\Gamma}$ den Rang $p(\hat{\mathfrak{G}})$. Auf analoge Weise können wir $\bar{\mathcal{A}}$ als eine (über $\mathcal{K}$ definierte) $\sigma(\hat{\mathfrak{G}})$-Parameteruntergruppe von $\bar{\mathfrak{G}}$ auffassen.

Wir betrachten nun die exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \hat{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{A}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{G}} & \longrightarrow & \mathfrak{G} & \longrightarrow & \bar{\mathfrak{G}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{\Gamma} & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \bar{\Gamma} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(5.3) Da $\hat{\mathfrak{G}}$ eine nichttriviale algebraische Untergruppenvarietät von $\mathfrak{G}$ und $\bar{\mathfrak{G}}$ der Quotient von $\mathfrak{G}$ und $\hat{\mathfrak{G}}$ ist, sind die Dimensionen von $\hat{\mathfrak{G}}$ und $\bar{\mathfrak{G}}$ echt kleiner als n. Sei $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{\hat{m}}$ ein Erzeugendensystem von $\hat{\mathfrak{G}}$ und $\gamma_0 + \hat{\mathfrak{G}}(\mathcal{K}), \dots, \gamma_m + \hat{\mathfrak{G}}(\mathcal{K})$ ein Erzeugendensystem von $\bar{\Gamma}$. Wir können nun die Induktionsannahme anwenden. Somit sind für alle reellen Zahlen $S, S' \geq 1$ und $T \geq 1$ die Interpolationsprobleme auf $\hat{\mathfrak{G}}$ mit Parametern $\hat{\Gamma}(S')$,T und $c_4 \max\limits_{\mathcal{H} \in H(\hat{\mathfrak{G}})} S'^{\frac{l - p(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\hat{\Gamma},\hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} T^{\frac{d - \sigma(\hat{\mathfrak{G}}) - \sigma_{\hat{\Gamma},\hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}}$,

bzw. auf $\bar{\mathfrak{G}}$ mit Parametern $\bar{\Gamma}(S)$,T und $c_5 \max\limits_{\mathcal{H} \in H(\bar{\mathfrak{G}})} S^{\frac{p(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} T^{\frac{\sigma(\hat{\mathfrak{G}}) - \sigma_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}}$

lösbar. Dabei sind die Konstanten c_4 (bzw. c_5) von S, S' und T unabhängig.

Bevor wir aufgrund der Lösbarkeit dieser Interpolationsprobleme die Formel (5.1) beweisen, müssen wir noch einige Abschätzungen und einige Eigenschaften der Projektion π von $\mathfrak{G}$ nach $\overline{\mathfrak{G}}$ nachweisen. Im Beweis des folgenden Lemma geht wesentlich ein, daß (5.2) gilt. Die Abschätzung b) gilt sonst im Allgemeinen nicht.

Lemma 6: *Es gelten folgende Abschätzungen :*

a) $$c_4 \max_{\mathcal{H}\in\overline{H}(\hat{\mathfrak{G}})} S^{\frac{l-p(\hat{\mathfrak{G}})-p_{\hat{\Gamma},\hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}}\, T^{\frac{d-\sigma(\hat{\mathfrak{G}})-\sigma_{\hat{\Gamma},\hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}}) \leq c_6 D$$

b) $$c_5 \max_{\mathcal{H}\in\overline{H}(\overline{\mathfrak{G}})} S^{\frac{p(\hat{\mathfrak{G}})-p_{\overline{\Gamma},\overline{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}}\, T^{\frac{\sigma(\hat{\mathfrak{G}})-\sigma_{\overline{\Gamma},\overline{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim\mathcal{H}}}) \leq c_7 D\,.$$

Lemma 7: *Sei π die Projektion von $\mathfrak{G}$ nach $\overline{\mathfrak{G}}$ und $d\pi$ die assozierte Differentialabbildung. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) *Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}(\mathfrak{K})$ von Γ und ein System $F = (F_0, \ldots, F_{\overline{N}})$ von homogenen Polynomen aus $\mathfrak{R}$ vom gleichen Grad, so daß F und π auf $\mathfrak{U}$ übereinstimmen und das Polynom F_0 in keinem Punkt aus $\mathfrak{U}$ verschwindet.*

2) *Die Differentialabbildung $d\pi$ ist ein surjektiver Liealgebrahomomorphismus zwischen $D(\mathfrak{G})$ und $D(\overline{\mathfrak{G}})$ mit Kern $D(\hat{\mathfrak{G}})$.*

3) *Für alle homogenen Polynome R aus $\mathfrak{K}[\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_{\overline{N}}]$ vom Grad D', $D' \in \mathbb{N}$, und alle Vektoren $t = (t_0, \ldots, t_{\overline{N}}) \in \mathbb{N}^d$ gilt:*

$$(\Delta^t \frac{F^*R}{F_0^{D'}}(X))(\zeta) = d\pi(\Delta_1)^{t_1} \cdot\ldots\cdot d\pi(\Delta_d)^{t_d} \left(\frac{R(\overline{X})}{\overline{X}_0^{D'}}\right)(\pi(\zeta))\,, \qquad \zeta\in\mathfrak{U}.$$

Bevor wir diese Lemmata beweisen, werden wir die folgende Proposition herleiten.

Proposition 3: *Das Interpolationsproblem auf $\mathfrak{G}$ mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und c^*D ist lösbar.*

Beweis von Proposition 3: Sei nun $\Delta_1, \dots, \Delta_d$ eine Basis von $D(\mathcal{A})$. Da die Lösbarkeit des Interpolationsproblem nach Corollar 3 unabhängig von der Wahl der Basis von $D(\mathcal{A})$ ist, können wir davon ausgehen, daß die Operatoren $\Delta_1, \dots, \Delta_{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}$ eine Basis von $D(\hat{\mathcal{A}})$ bilden. Die Operatoren $d\pi(\Delta_{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})+1}), \dots, d\pi(\Delta_d)$ sind dann linear unabhängig über $\mathcal{K}$ und erzeugen $D(\bar{\mathcal{A}})$. Die Operatoren $d\pi(\Delta_1), \dots, d\pi(\Delta_{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})})$ sind alle Null, da $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathfrak{G}}$ im Kern von π liegt.

Mit $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{\hat{m}}$ bezeichnen wir nun ein Erzeugendensystem von $\hat{\Gamma}$ und mit Σ eine maximale Teilmenge von Elementen aus $\Gamma(S)$, die modulo $\hat{\Gamma}$ inkongruent sind. Jedes Element γ aus $\Gamma(S)$ läßt sich dann eindeutig darstellen als die Summe eines Elements $\bar{\gamma}$ aus Σ und eines Elements $\hat{\gamma}$ aus $\hat{\Gamma}$. Das resultierende $\hat{\gamma}$ liegt dann in $\Gamma_\pm(S) \cap \hat{\Gamma}$. Diese Menge ist in $\hat{\Gamma}_\pm(S)$ enthalten und liegt somit in $\hat{\gamma}_0 + \hat{\Gamma}(2S)$, wobei

$$\hat{\gamma}_0 = -S\left(\sum_{i=1}^{\hat{m}} |\hat{\gamma}_i|\right) \qquad \text{(siehe (4.1)).}$$

Sei nun $\tau = (\hat{\tau}, \bar{\tau})$ aus $\mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T) \times \mathbb{N}^{\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T)$ und $\gamma = \hat{\gamma} + \bar{\gamma}$ ($\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$, $\bar{\gamma} \in \Sigma$) aus $\Gamma(S)$ beliebig, aber fest, vorgegeben. Die Proposition ist nach Corollar 4 bewiesen, wenn ein Polynom $P_{\tau,\gamma}$ aus $\mathcal{R}_{c*D}$ existiert, so daß

$$\Delta^{\sigma}(P_{\tau,\gamma}'(x))(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}$$

für alle $\sigma = (\hat{\sigma}, \bar{\sigma}) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T) \times \mathbb{N}^{\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T)$ mit $\bar{\sigma} \le \bar{\tau}$ und ζ aus $\Gamma(S)$. Wir setzen $S' = 2S$. Dann existieren aufgrund von (5.3) homogene Polynome $\hat{Q}_{\hat{\tau},\hat{\gamma}^*}$ aus $\mathcal{R}_{c_6 D}$ und $R_{\bar{\tau},\gamma}$ aus $\mathcal{K}[\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_{\bar{N}}]$ vom Grad $c_7 D$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

(5.4)
$$\Delta^{\hat{\sigma}}(\hat{Q}_{\hat{\tau},\hat{\gamma}^*}'(x))(\zeta) = \delta_{\hat{\sigma},\hat{\tau}}\,\delta_{\zeta,\hat{\gamma}^*} \qquad \hat{\sigma} \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T), \zeta \in \hat{\Gamma}(2S)$$
$$d\pi(\Delta)^{\bar{\sigma}}(R_{\bar{\tau},\gamma}'(\bar{x}))(\pi(\zeta)) = \delta_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}\,\delta_{\pi(\zeta),\pi(\gamma)} \qquad \bar{\sigma} \in \mathbb{N}^{\sigma(\hat{\mathfrak{a}})}(T), \zeta \in \Gamma(S)$$

Hierbei ist $\hat{\gamma}^*$ gleich $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}_0$. Mit $\hat{Q}_{\hat{\tau},\hat{\gamma}^*}'$ und $R_{\bar{\tau},\gamma}'$ sind wie in der Einleitung die enthomogenisierten Polynome von $\hat{Q}_{t,\gamma^*}$ und $R_{\bar{\tau},\gamma}$ bezeichnet. Die Grade dieser Polynome haben wir mit Hilfe von Lemma 6 abgeschätzt.

Sei nun $F = (F_0, \ldots, F_{\bar{N}})$ eine rationale Abbildung wie in Lemma 7, die auf einer offenen Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{G}(\mathcal{K})$ von Γ mit der Projektion π übereinstimmt und $A = (A_0, \ldots, A_N)$ sei wie in Lemma 1 , Teil I, eine Additionsformel auf $\mathfrak{G}$, deren assoziierte offene Menge $\Gamma \times \Gamma$ enthält. Dann setzen wir

$$P_{\tau,\gamma}(X) = c'(\hat{Q}_{t,\gamma^*} \cdot A)(\tilde{x}(-\hat{\gamma}_0 - \bar{\gamma}), X) \cdot F^*R_{\bar{\tau},\gamma}(X)$$

mit

$$c' = A_0'^{-c_6 D}(\tilde{x}(-\hat{\gamma}_0 - \bar{\gamma}), x(\gamma)) \cdot F_0'^{-c_7 D}(x(\gamma))$$

und behaupten, daß das Polynom $P_{\tau,\gamma}(X)$ das Gewünschte leistet. Zunächst ist $P_{\tau,\gamma}$ aus $\mathcal{R}_{c_9 D}$.

Wenden wir die Operatoren Δ^σ, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, auf $P_{\tau,\gamma}$ an, dann erhalten wir mit der Leibnitzregel für alle ζ aus $\Gamma(S)$

$$(5.5) \quad \Delta^\sigma P_{\tau,\gamma}'(x)(\zeta) = c'\{\sum_{s+t=\sigma} \frac{\sigma!}{s!t!} \Delta^s(E(-\hat{\gamma}_0 - \bar{\gamma})\hat{Q}_{t,\gamma^*}'(x))\, \Delta^t (F^*R_{\bar{\tau},\gamma})'(x)\}(\zeta).$$

Wir berechnen mit der Leibnitzregel zunächst $\Delta^t (F^*R_{\bar{\tau},\gamma})'(x)(\zeta)$. Es gilt:

$$(5.6) \quad \Delta^t \left(\frac{F^*R_{\bar{\tau},\gamma}}{X_0^{d'}}\right) = c'\left(\sum_{t'+t''=t} \frac{t!}{t'!t''!} \Delta^{t'}\left(\frac{F_0^{d'}}{X_0^{d'd^*}}\right) \cdot \Delta^{t''}\left(\frac{F^*R_{\bar{\tau},\gamma}}{F_0^{d'}}\right)\right).$$

Hierbei ist d^* der Grad von F_0 und d' ist gleich $-c_7 D$. Mit Hilfe von Lemma 7 erhalten wir

$$\Delta^{t''}\left(\frac{F^*R_{\bar{\tau},\gamma}}{F_0^{d'}}(X)\right)(\zeta) = d\pi(\Delta)^{t''}\left(\left(\frac{R_{\bar{\tau},\gamma}}{\bar{X}_0^{d'}}\right)(\bar{X})\right)(\pi(\zeta)).$$

Wir setzen dies in (5.6) ein. Da die Bilder von $\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-\sigma(\hat{a})}$ unter $d\pi$ alle gleich Null sind, folgt mit (5.4) sofort,

$$(5.7) \qquad \Delta^t\left(\frac{F^*R_{\bar{\tau},\gamma}}{X_0^{d'}}(X)\right)(\zeta) = \Delta^{\hat{t}}\left(\frac{F_0^{d'}}{X_0^{d'd^*}}(X)\right)(\zeta)\cdot\delta_{\bar{t},\bar{\tau}}\,\delta_{\pi(\zeta),\pi(\gamma)}$$

für alle $\zeta \in \Gamma(S)$ und für alle $(\hat{t},\bar{t})$ aus $\mathbb{N}^{d\text{-}}(T)$ mit $\bar{t} \le \bar{\tau}$. Wir setzen dies nun in (5.5) ein. Dann gilt für alle $\sigma = (\hat{\sigma},\bar{\sigma}) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{a})}(T) \times \mathbb{N}^{\sigma(\hat{a})}(T)$ mit $\bar{\sigma} \le \bar{\tau}$ und ζ aus $\Gamma(S)$:

$$(*)\ \Delta^{\sigma}P_{\tau,\gamma}{}'(x)(\zeta) = c'\left\{\sum_{s+t=\sigma}\frac{\sigma!}{s!t!}\Delta^s(E(-\gamma_0-\bar{\gamma})\hat{Q}_{\tau,\hat{\gamma}^*})'(x)\Delta^{\hat{t}}F_0{}'^d(x)\right\}(\zeta))\delta_{\bar{t},\bar{\tau}}\delta_{\pi(\zeta),\pi(\gamma)}.$$

Die rechte Seite liefert höchstens dann etwas von Null verschiedenes, wenn

1) $t \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{a})}(T) \times \{\bar{\tau}\}$ und
2) $\zeta - \gamma \in \hat{\Gamma} \cap \Gamma_{\pm}(S))$

Die erste Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Vektoren $s = \sigma - t$ in $\mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{a})}(T) \times \{0, \ldots, 0\}$ liegen. Die zweite Bedingung ist aufgrund der Definition von Σ genau dann erfüllt, wenn sich das Element ζ als Summe eines Elementes g aus $\Gamma_{\pm}(S) \cap \hat{\Gamma} \subseteq \hat{\gamma}_0 + \hat{\Gamma}(2S)$ und $\bar{\gamma}$ schreiben läßt. Diese Elemente ζ liegen in $\hat{\gamma}_0 + \bar{\gamma} + \hat{\Gamma}(2S)$.

Mit Hilfe von Formel (5.4) und dem Corollar 2 können wir für alle Paare $(s,\zeta) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{a})}(T) \times \{0, \ldots, 0\} \times (\hat{\gamma}_0 + \bar{\gamma} + \hat{\Gamma}(2S))$ den Wert von $\Delta^s(E(-\gamma_0-\bar{\gamma})\hat{Q}_{\tau,\hat{\gamma}^*})'(x)(\zeta)$ berechnen und erhalten

$$\Delta^s(E(-\gamma_0-\bar{\gamma})\hat{Q}_{\tau,\hat{\gamma}^*})'(x)(\zeta) = \delta_{\sigma,\tau}\,\delta_{\zeta,\gamma}\,A_0{}'^{c_6D}(\bar{x}(-\hat{\gamma}_0-\bar{\gamma}),x(\gamma)).$$

Hierbei haben wir ausgenützt, daß $\hat{\gamma}^* + \hat{\gamma}_0 + \bar{\gamma}$ und γ gleich sind. Setzen wir diese Werte für $\Delta^s(E(-\gamma_0-\bar{\gamma})\hat{Q}_{\tau,\hat{\gamma}^*})'(x)(\zeta)$ in die Gleichung $(*)$ ein, so gilt für alle

$\sigma = (\hat{\sigma}, \overline{\sigma}) \in \mathbb{N}^{d-\sigma(\hat{\mathfrak{G}})}(T) \times \mathbb{N}^{\sigma(\hat{\mathfrak{G}})}(T)$ mit $\overline{\sigma} \leq \overline{\tau}$ und ζ aus $\Gamma(S)$

$$\Delta^{\sigma} P_{\tau,\gamma}{}'(x)(\zeta) = c' \; A_0{}'^{c_6 D} (\tilde{x}(-\hat{\gamma}_0 - \overline{\gamma}), x(\gamma)) \cdot \; F_0{}'^{c_7 D} (x(\gamma)) \, \delta_{\sigma,\tau} \, \delta_{\zeta,\gamma}$$
$$= \delta_{\sigma,\tau} \, \delta_{\zeta,\gamma} \, .$$

Damit ist die Proposition bewiesen.

Beweis von Lemma 6: Es gibt ganze Zahlen d', l', s mit $0 \leq l' \leq l - p(\hat{\mathfrak{G}})$, $0 \leq d' \leq d - \sigma(\hat{\mathfrak{G}})$, $0 \leq s \leq n - r$ und es gibt eine Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\hat{\mathfrak{G}}$ aus $\overline{H}(\hat{\Gamma}, \mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{G}})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $$\max_{\mathcal{H} \in \overline{H}(\hat{\Gamma}, \mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{G}})} S^{\frac{l - p(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\hat{\Gamma}, \hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} \; T^{\frac{d - \sigma(\hat{\mathfrak{G}}) - \sigma_{\hat{\Gamma}, \hat{\mathfrak{G}}}(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} = S^{\frac{l'}{s}} \, T^{\frac{d'}{s}}$$

2) $\mathfrak{h}$ hat die Dimension s und enthält eine Untergruppe $\Gamma' = \hat{\Gamma} \cap \mathfrak{h}(\mathcal{K}) \subsetneq \Gamma$ vom Rang l'.

3) Die Dimension des Durchschnittes von $\mathfrak{h}$ und $\hat{\mathcal{A}}$ und somit von $\mathfrak{h}$ und $\mathcal{A}$ gleich d'.

Betrachten wir diese Situation in $\mathfrak{G}$, so sieht man, daß

$$S^{\frac{l'}{s}} \, T^{\frac{d'}{s}} \leq \max_{\mathcal{H}} \; S^{\frac{l - p(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} \; T^{\frac{d - \sigma(\mathcal{H})}{\dim \mathcal{H}}} \quad ,$$

wobei $\mathcal{H}$ über alle von Null verschiedenen (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Untergruppenvarietäten von $\mathfrak{G}$ läuft. Damit ist a) bewiesen.

ad b): Für ganze Zahlen s mit $1 \leq s \leq r$ betrachten wir zunächst algebraische Untergruppen $\mathfrak{J}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ der Dimension $r - s$ und ihre Exponenten $p_{\overline{\Gamma}, \overline{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J})$ und $\sigma_{\overline{\Gamma}, \overline{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J})$. Nach dem Corollar zu Theorem 3 von Rosenlicht in [Ro] ist das Urbild $\pi^{-1}(\mathfrak{J})$ von $\mathfrak{J}$ eine algebraische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der Dimension $(n - r) + (r - s) = n - s$; d. h.

(5.8) $$\operatorname{cod}_{\bar{\mathfrak{G}}} \mathfrak{J} = \operatorname{cod}_{\mathfrak{G}} \pi^{-1}(\mathfrak{J}) .$$

Ferner, ist $\mathcal{Z}$ in $\mathfrak{J}(\mathcal{K})$ eine Untergruppe von $\bar{\bar{\Gamma}}$ vom Rang $p(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J})$, dann ist $\pi^{-1}(\mathcal{Z}) \cap \Gamma$ eine Untergruppe von Γ in $\mathfrak{G}$ vom Rang

$$1 - p(\hat{\mathfrak{G}}) + p(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) = 1 - p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) .$$

Dies impliziert nach der Definition von p:

$$p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) \geq p_{\bar{\Gamma},\mathfrak{G}} (\pi^{-1}(\mathfrak{J})).$$

Umgekehrt, ist eine Untergruppe Γ' von Γ in $\pi^{-1}(\mathfrak{J})$, dann ist $\pi(\Gamma')$ eine Untergruppe von $\bar{\bar{\Gamma}}$ in $\mathfrak{J}(\mathcal{K})$ vom Rang $p_{\mathfrak{G}}(\hat{\mathfrak{G}}) - p_{\Gamma,\mathfrak{G}} (\pi^{-1}(\mathfrak{J}))$, d. h. $p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) \leq p_{\Gamma,\mathfrak{G}} (\pi^{-1}(\mathfrak{J}))$.
Somit gilt

(5.9) $$p_{\bar{\Gamma},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) = p_{\Gamma,\mathfrak{G}} (\pi^{-1}(\mathfrak{J})).$$

Auf analoge Weise erhält man

(5.10) $$\sigma_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J}) = \sigma_{\mathcal{A},\mathfrak{G}} (\pi^{-1}(\mathfrak{J})).$$

Zur Vereinfachung der Notation unterlassen wir nun die Indexierung, da diese durch den Kontext eindeutig bestimmt ist. Wir setzen $\tilde{S} = c_1 c_2 S/n$ und $\tilde{T} = c_2 T/n$. Wir zeigen, daß b) für diese Parameter gültig ist. Multiplizieren wir dann das Ergebnis mit n^{l+d}, dann gilt b) auch für S und T.

Aufgrund der Wahl von $\hat{\mathfrak{G}}$ (siehe 5.2) für alle algebraischen Untergruppen $\mathfrak{J}$ von $\bar{\mathfrak{G}}$

$$\tilde{S}^{\frac{p(\hat{\mathfrak{G}})}{r}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\hat{\mathfrak{G}})}{r}} \leq \tilde{S}^{\frac{p(\pi^{-1}(\mathfrak{J}))}{\operatorname{cod} \mathfrak{J}}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\pi^{-1}(\mathfrak{J}))}{\operatorname{cod} \mathfrak{J}}}$$

Daraus folgt mit (5.8) - (5.10) sofort,

$$\tilde{S}^{\frac{p(\mathfrak{G})}{r}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\mathfrak{G})}{r}} \leq \tilde{S}^{\frac{p(\mathfrak{J})}{\operatorname{cod} \mathfrak{j}}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\mathfrak{J})}{\operatorname{cod} \mathfrak{j}}} .$$

Dies impliziert:

$$\tilde{S}^{-rp_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{J})} \tilde{T}^{-r\,\sigma_{\overline{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{J})} \leq \tilde{S}^{-\operatorname{cod}(\mathfrak{J})\, p(\mathfrak{G})} \tilde{T}^{-\operatorname{cod}(\mathfrak{J})\, \sigma(\mathfrak{G})}$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\tilde{S}^{rp(\mathfrak{G})} \tilde{T}^{r\sigma(\mathfrak{G})}$ und potenzieren mit $1/r\cdot(r-\operatorname{cod}(\mathfrak{J}))$, so erhalten wir

$$\tilde{S}^{\frac{p(\mathfrak{G})-p(\mathfrak{J})}{\dim \mathfrak{J}}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\mathfrak{G})-\sigma(\mathfrak{J})}{\dim \mathfrak{J}}} \leq \tilde{S}^{\frac{p(\mathfrak{G})}{r}} \tilde{T}^{\frac{\sigma(\mathfrak{G})}{r}} .$$

Der rechte Term ist nach (5.2) kleiner als $\tilde{S}^{1/n} \tilde{T}^{d/n}$ und somit nach (5.1) kleiner als $c_{10}D$. Daraus folgt die Behauptung.

Beweis von Lemma 7: Die Projektion $\pi: \mathfrak{G} \longrightarrow \overline{\mathfrak{G}}$ ist auf einer offenen Überdeckung von $\mathfrak{G}$ durch Polynomabbildungen gegeben. Da $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ quasikompakt ist (siehe [Ha], I. Ex. 2.5, 1.7), gibt es für eine ganze Zahl k offene Menge $\mathcal{U}^{(j)}$, $1\leq j\leq k$, und Polynomsysteme $F^{(j)} = (F_0^{(j)}, \ldots , F_M^{(j)})$, $1\leq j\leq k$, mit homogenen Polynomen $F_i^{(j)}$, $0\leq i\leq M$, aus $\mathfrak{R}$ vom Grad d_j , $1\leq j\leq k$, so daß die offenen Mengen $\mathcal{U}^{(j)}$, $1\leq j\leq k$, die Menge $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$ überdecken und daß die Systeme eingeschränkt auf $\mathcal{U}^{(j)}$ mit π übereinstimmen. Die offenen Mengen $\mathcal{O}^{(j)}$ in $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$, die definiert sind durch

$$\mathcal{O}^{(j)} = \{\, g \in \mathfrak{G}'(\mathcal{K}) \mid F^{(j)}(X(g)) \neq (0, \ldots ,0)\} \qquad (1\leq j\leq k) .$$

heißen die zu $F^{(j)}$, $1\leq j\leq k$, assozierten Mengen. Auf diesen stimmen $F^{(j)}$ und π überein. Sei nun $d^* \geq 1$ eine ganze Zahl mit $d^* \geq d_j$, $1\leq j\leq k$. Wir konstruieren nun ein Polynomsystem $F = (F_0, \ldots , F_M)$, dessen assozierte Menge

$$\mathcal{O} = \{ \, g \in \mathcal{G}(\mathcal{K}) \mid F(X(g)) \neq (0, \ldots ,0) \, \}$$

die Gruppe Γ umfaßt. Nach Bemerkung (0.1) existiert eine Linearform $L(X_0,\ldots,X_N)$, die in keinem Punkt von Γ verschwindet. Für beliebige Elemente $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ aus $\mathcal{K}$ betrachten wir nun die Polynome

$$\text{(5.11)} \qquad F_i(X_0,\ldots,X_N) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j L(X_0,\ldots,X_N)^{d^* - d_j} F_i^{(j)}(X_0,\ldots,X_N) \qquad 0 \le i \le M.$$

Wir zeigen zunächst, daß für alle g aus $\mathcal{O}$ die Zahlen $F_i'(x(g))$, $0 \le i \le M$, projektive Koordinaten von $\pi(g)$ sind. Sind für g aus $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ die Zahlen $z_0,\ldots, z_M$ projektive Koordinaten von $\pi(g)$, dann existieren Zahlen $\lambda^{(j)}$ aus $\mathcal{K}$, so daß

$$F_i^{(j)\prime}(x(g)) = \lambda^{(j)} z_i \qquad 0 \le i \le \overline{N}, \; 1 \le j \le k.$$

Diese sind genau dann von Null verschieden, wenn g in $\mathcal{O}^{(j)}$ $(1 \le j \le k)$ liegt. Setzen wir dies in (5.11) ein, so erhalten wir

$$F_i(z_0,\ldots,z_N) = \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j L(z_0,\ldots,z_N)^{d^* - d_j} \lambda^{(j)} \Big) z_i \qquad 0 \le i \le M.$$

Für alle Elemente g aus $\mathcal{O}$ ist der Ausdruck in der Klammer stets von Null verschieden. Somit stimmt F auf $\mathcal{O}$ mit π überein. Für alle Elemente $g \notin \mathcal{O}$ ist $F'(x(g))$ gleich Null.

Wir zeigen nun, daß es ein $\alpha = (\alpha_1, \ldots,\alpha_k) \in \mathcal{K}^k$ gibt, so daß $\mathcal{O}$ die Menge Γ enthält. Ist $\gamma \in \Gamma$, dann gibt es eine Zahl j, $1 \le j \le k$, so daß γ in der Menge $\mathcal{U}^{(j)} \subseteq \mathcal{O}^{(j)}$ liegt. Da $\pi(\Gamma) = \overline{\Gamma}$ die durch $\overline{X}_0 = 0$ definierte Hyperebene nicht trifft, ist $F_0^{(j)\prime}(x(\gamma)) \neq 0$. Somit haben die Funktionen $L(X_0,\ldots,X_N)\ F_0^{(j)}(X_0,\ldots,X_N)$, $1 \le j \le k$, keine gemeinsame Nullstelle in Γ und wir könne wie in (0.1) Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ in $\mathcal{K}$ finden, so daß

$$F_0(X(\gamma)) \neq 0$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Die Menge $\mathcal{U}$, die durch

$$\mathcal{U} = \{ g \in O \mid F_0'(x(g)) \neq 0 \}$$

definiert ist, ist dann die gesuchte offene Umgebung von Γ. Damit ist die Aussage 1) bewiesen.

ad 2) Da π holomorph ist, können wir das Theorem 3.14 in [Wa] anwenden. Danach ist $d\pi$ ein Liegruppenhomomorphismus. Der Kern von $d\pi$ ist gleich $D(\ker \pi) = D(\hat{\mathcal{G}})$. Da π surjektiv ist, ist auch $d\pi$ surjektiv. Damit ist die Aussage 2) gezeigt.

ad 3) Für homogene Polynome P und Q aus $\mathcal{K}[\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_N]$ vom gleichen Grad und Vektoren $t = (t_1, \ldots, t_n)$ aus $\mathbb{N}^n$ setzen wir nun

$$d\pi(\partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n}) \left(\frac{P}{Q}(\overline{X})\right)(\pi(g)) = \partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n} \left(\frac{P}{Q}(\overline{X} \cdot \pi)\right)(g),$$

für alle g aus $\mathcal{G}(\mathcal{K}) - V(Q)$.

Da aufgrund des obengesagten für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und alle g aus $\mathcal{G}(\mathcal{K}) - V(Q)$

$$\begin{aligned} d\pi(\partial_i (\partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n})) \left(\frac{P}{Q}(\overline{X})\right)(\pi(g)) &= \partial_i (\partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n})\left(\frac{P}{Q}(\overline{X})\right)(\pi(g)), \\ &= \partial_i (d\pi(\partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n})\left(\frac{P}{Q}(\overline{X})\right)(\pi(g)), \\ &= d\pi(\partial_i) d\pi(\partial_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{t_n})\left(\frac{P}{Q}(\overline{X})\right)(\pi(g)), \end{aligned}$$

läßt sich $d\pi$ auf diese Weise zu einem Algebrahomomorphismus von $\mathcal{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ nach $\mathcal{K}[D(\overline{\mathcal{G}})]$ fortsetzen. Für alle homogenen Polynome R aus $\mathcal{K}[\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_N]$ vom Grad D', $D' \in \mathbb{N}$, und alle Vektoren $t = (t_0, \ldots, t_N) \in \mathbb{N}^d$ erhalten wir, da F und π

auf $\mathcal{U}$ übereinstimmen und F_0 in keinem Punkt von $\mathcal{U}$ verschwindet:

$$(\Delta^t \frac{F^*R}{F_0^{D'}}(X))(\zeta) = d\pi(\Delta_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot d\pi(\Delta_d)^{t_d} \; (\frac{R(\overline{X})}{\overline{X}_0^{D'}})(\pi(\zeta)) \;, \qquad \zeta \in \mathcal{U}.$$

Damit ist Lemma 7 vollständig bewiesen.

(5.12) Bemerkung: Hat Γ Torsionspunkte, dann kann man die Gruppe Γ_{Tor} der Torsionspunkte von Γ als algebraische Untergruppe auffassen und kann den Quotienten $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Gamma_{Tor}$ bilden. Dieser ist auch eine kommutative Gruppenvarietät.

Nach Lemma 6 gilt dann: $D = D(\overline{\mathfrak{G}}) \leq D(\mathfrak{G})$ (siehe (5.1)). Mit Proposition 3 können wir Interpolationsprobleme mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und c^*D auf $\overline{\mathfrak{G}}$ lösen. Interpolationsprobleme auf Γ_{Tor} mit den Parametern Γ_{Tor}, 1 und card Γ_{Tor} sind nach Proposition 2 lösbar. Wie im Beweis der Proposition 3 können wir diese Lösungen zusammenkleben und erhalten eine Lösungen auf $\mathfrak{G}$. Damit ist nun der Satz 1 vollständig bewiesen.

(5.13) Wir wollen nun die Konstante c^* etwas näher betrachten. 1) Abhängigkeit von der Auswahl von Erzeugendensystemen von $\overline{\Gamma}$

Ist $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_{\overline{m}}$ ein weiteres Erzeugendensystem von $\overline{\Gamma}$. Dann existieren ganze Zahlen c_{ij}, $1 \leq i \leq \overline{m}$, $1 \leq j \leq m$ mit

$$\overline{\gamma}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} (\gamma_j + \hat{\mathfrak{G}}) \,, \qquad 1 \leq i \leq \overline{m} .$$

Außerdem existiert eine Zahl $\overline{\gamma}_0$ aus $\overline{\Gamma}$ und eine Zahl $k_1 = k_1(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_{\overline{m}})$, so daß

$$\overline{\Gamma}_{\pm}(S) \subseteq \overline{\gamma}_0 + \overline{\Gamma}(k_1 S) .$$

Hierbei ist $\overline{\Gamma}_{\pm}(S)$ in Bezug auf die Generatoren $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_{\overline{m}}$ und $\overline{\Gamma}(k_1 S)$ in Bezug auf das Erzeugendensystem $\gamma_j + \hat{\mathfrak{G}}$, $1 \leq j \leq m$, definiert. Das Interpolationsproblem auf $\mathfrak{G}$ mit den Parametern $\Gamma(S)$, T und $k_1 c^* D$ ist dann lösbar.

2) Abhängigkeit von einer Auswahl von Gruppen und einer Auswahl von $\mathcal{K}$-rationalen Punkten

Die Mengen $E = E(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})$ und $\bar{H} = \bar{H}(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})$ seien wie in Kapitel 2 definiert. Für alle (über $\mathcal{K}$ definierten) algebraischen Gruppenvarietäten $\mathfrak{G}$ mit (über $\mathcal{K}$ definierten) analytischen Untergruppen $\mathcal{A}$ und endlich erzeugten Untergruppen Γ ($\subseteq \mathfrak{G}(\mathcal{K})$) können wir nun rekursiv endliche Mengen $\hat{H} = \hat{H}(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})$ auf die folgende Weise definieren.

Ist $\mathfrak{G}$ eine kommutative ,algebraische Gruppenvarietät der Dimension 1, dann setzen wir: $\hat{H}(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G}) = \{(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})\}$.

Ist $\mathfrak{G}$ eine kommutative, algebraische Gruppenvarietät der Dimension $n \geq 2$, dann setzen wir

$$\hat{H}(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G}) = \{(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})\} \cup \{\hat{H}(\Gamma\cap H_e,\mathcal{A}\cap H_e,\mathfrak{G}\cap H_e) \mid e\in E(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})-\{(0,0,0)\}\} \cup$$
$$\cup \{\hat{H}(\Gamma/\Gamma\cap H_e,\mathcal{A}/\mathcal{A}\cap H_e,\mathfrak{G}/\mathfrak{G}\cap H_e) \mid e\in E(\Gamma,\mathcal{A},\mathfrak{G})-\{(0,0,0)\}\}\}.$$

Bezeichnen wir mit pr_i, $1\leq i\leq 3$, die Projektion von $\hat{H}$ auf die i-te Komponente und wählen wir zu jedem Element Λ aus $pr_1 \hat{H}$ ein endliches Erzeugendensytem E_Λ, dann hängt die Konstante c^* im Satz 1 nur $\bar{E} = \{E_\Lambda \mid \Lambda \text{ aus } pr_1 \hat{H}\}$, $pr_2 \hat{H}$ und $pr_3 \hat{H}$ ab.

Literaturverzeichnis:

[Fa-Wü]: G. Faltings, G. Wüstholz: Einbettungen kommutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften, J. reine angew. Math. 354 (1984), 175-205

[Gr]: W. Gröbner: Algebraische Geometrie II, BI-Hochschultaschenbuchverlag 737/737a, Mannheim , 1970

[Ha]: R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 3. korrigierte Auflage, 1983

[Kn-La]: F. Knop, H. Lange: Commutative algebraic groups and intersections of quadratics, Math. Ann. 267, 555 -571 (1984)

[Ko]: E.R. Kolchin: Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York-London, 1973

[La-Ru]: H. Lange, W. Ruppert: Complete systems of addition laws on abelian varieties, Inv. Math. 79 (1985), 603-610

[La]: H. Lange: Theorie Des Nombres,Translationes sur les groupes algébriques commutatifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t.300, Serie I, 1985

[Ma 1]: D. Masser: Interpolation on group varieties, in: Progress in Mathematics, Vol 31, Birkhäuser, Boston (1983)

[Ma-Wü1]:D. Masser, G. Wüstholz: Zero estimates on group varieties I, Inv. Math. 64 (1981), 489-516

[Ma-Wü2]: D. Masser, G. Wüstholz: Zero estimates on group varieties II, Inv. Math. 80 (1985), 233-267

[Ne]: Ju. V. Nesterenko: Estimates for the characteristic function of a prime ideal, Math. UdSSR, Sbornik,Vol 51 (1985), 9-32

[Ph]: P. Philippon: Lemme de zeros dans les groupes algébriques commutatifs, Harvard Preprint 1985

[Ro]: M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Am. J. Math. 78 (1956), 401-443

[Se1]: J.-P. Serre, Quelques propriétiés des groupes algébriques commutatifs in Astérisques 69-70 (1979), Paris

[Se2]: J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42

[Wa]: F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983

[Wü1]: G. Wüstholz: Multiplicity estimates on group varieties, MPI-Bonn Preprint 1984

[Wü2]: G. Wüstholz: Über das Abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes I, Inv. Math. 72 (1983), 363-407