Positive Krümmung und Topologie

differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Matthias Kreck

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

MPI/91–20

Here T_κ^d denotes the composition of $T_\kappa : \underline{\underline{A}}^\kappa \longrightarrow R-mod$ with the diagonal embedding $\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^\kappa$. Let $\xi_{T,\kappa}(X)$ be the restriction on the summand $T_\kappa^d(X)$ of the map $T\left(\bigoplus_{i=1}^{\kappa} X\right) \longrightarrow T(X)$ which is induced by the codiagonal map $\bigoplus_{i=1}^{\kappa} X \longrightarrow X$. Then we have the natural transformation

$$\xi_{T,\kappa} : T_\kappa^d \longrightarrow T \, .$$

2.2 Lemma. Let $N : \underline{\underline{A}}^n \longrightarrow R-mod$ be the functor satisfying condition 1.2 and $T = N^d$. Then $\eta_{T,n}$ is a split monomorphism and $\xi_{T,n}$ is a split epimorphism.

Proof. Let $X_1, \cdots, X_n \in Ob\, \underline{\underline{A}}$ and let

$$\alpha(X_1, \cdots, X_n) : \bigoplus_{i=1}^{n} T\left(X_1 \oplus \cdots \oplus \hat{X}_i \oplus \cdots \oplus X_n\right) \longrightarrow T\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i\right)$$

be induced by the inclusion

$$X_1 \oplus \cdots \oplus \hat{X}_i \oplus \cdots \oplus X_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} X_i \, .$$

Then 2.1 implies that the column in the following diagramm is exact.

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{i=1}^{n} T(X\oplus\cdots\oplus\hat{X}\oplus\cdots\oplus X) \arrow[d, "\alpha"] & \\
T(X) = N(X,\cdots,X) \arrow[rr, shift left, "T(diag)"] \arrow[drr, "\eta_{T,n}"'] & & T\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X\right) \arrow[ll, shift left, "N(p_1,\cdots,p_n)"] \arrow[d, "pr"] & = N\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X, \cdots, \bigoplus_{i=1}^{n} X\right) \\
 & & T_n^d(X) \arrow[d] & \\
 & & 0 \, . &
\end{tikzcd}$$

Here pr is the projection in the decomposition 2.1 and

$$p_i : \bigoplus_{i=1}^{n} X \longrightarrow X$$

is the projection on the i-th summand. Hence we get

$$\begin{aligned}
\eta_{T,n} &= pr \circ T(diag) \, , \\
N p_1, \cdots, p_n) \circ T(diag) &= 1_{T(X)} \, , \\
N(p_1, \cdots, p_n) \circ \alpha &= 0 \, .
\end{aligned}$$

This shows that there is a retraction of $\eta_{T,n}$. A similar argument shows that $\xi_{T,n}$ has a section.

Lemma 2.3 Let $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{n}})$ be the category of all functors from $\underline{\underline{A}}^n$ to $R-mod$. Then there is a functor

$$\psi : \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{n}}) \longrightarrow \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{n}})$$

with the following properties

Positive Krümmung und Topologie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten [1)]

Matthias Kreck

Auf der Tagung der DMV in Bad Elster im September 1931 hielt Heinz Hopf einen Vortrag mit dem Titel "Über Zusammenhänge zwischen differentialgeometrischen Eigenschaften und topologischer Gestalt", der in den Jahresberichten 1932 in erweiterter Form abgedruckt wurde [H]. Darin diskutiert Hopf die allgemeine Fragestellung: "Welche Zusammenhänge und Bindungen bestehen zwischen den topologischen Eigenschaften einerseits und den differentialgeometrischen Eigenschaften andererseits?" ([H], S 210). Im Hauptteil der Arbeit wird über den Stand der Dinge bei Flächen berichtet und dabei besonderes Augenmerk auf Flächen konstanter, positiver oder negativer Krümmung gelegt. Am Schluß geht Hopf auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension ein und diskutiert mögliche Verallgemeinerungen der Sätze über Flächen.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, den heutigen Entwicklungsstand darzustellen sowie auf offene Probleme hinzuweisen. Dabei wird nur ein Aspekt, allerdings ein besonders attraktiver, betrachtet, nämlich die Beziehung zwischen positiver Krümmung und Topologie. Für eine andere wichtige Entwicklung der letzten Jahre sei auf den Artikel von U. Abresch [A] im gleichen Band hingewiesen.

---

1) Ausarbeitung eines Vortrages gehalten bei der Jubiläumstagung der DMV in Bremen am 22. September 1990

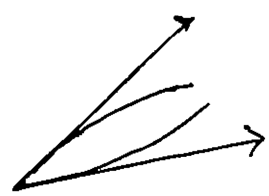
§ 1. Die Preisfrage

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g, d.h. auf jedem Tangentialraum ist eine Euklidische Metrik erklärt und diese Vorschrift hängt differenzierbar vom Fußpunkt des Tangentialraums ab. Eine solche Riemannsche Metrik erlaubt es, von Geodätischen ("kürzeste Verbindungskurven") zu reden und damit kann man in naheliegender Weise M zu einem metrischen Raum machen. Je nach Geschmack und Vorkenntnis kann man sich im folgenden M als Riemannsche Mannigfaltigkeit oder als metrischen Raum vorstellen. Wir wollen stets voraussetzen, daß der metrische Raum vollständig ist. Außerdem sei die Dimension von M stets ≥ 2 und M zusammenhängend.

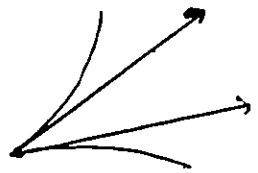
In dieser Situation ist die Schnittkrümmung K erklärt, die jedem 2–dimensionalen Unterraum E des Tangentialraums T_xM an der Stelle x die Gauß–Krümmung $K_x(E)$ des dadurch erzeugten geodätischen infinitesimalen Flächenstücks (= infinitesimale Fläche aller Geodätischen, deren Tangentialvektor in F liegt) zuordnet.

$$K : \{E \mid E \subseteq T_xM \text{ 2–dim. Unterraum}\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Schnittkrümmung ist die wichtigste differentialgeometrische Größe. Es drängt sich deshalb die Frage auf, zu welchen Funktionen K es eine Riemannsche Metrik gibt, deren Schnittkrümmung K ist. Besonders interessant sind die Fälle, wo K überall positiv oder negativ ist oder auch überall Null (flache Metrik). Denn diese Fälle haben eine sehr anschauliche Bedeutung. Bei positiver Metrik ziehen sich Geodätische zusammen, wie auf einer konvexen Fläche:



Bei negativer Metrik gehen die Geodätischen umgekehrt stets auseinander:



Für den Fall positiver Metrik stellt sich die

<u>Preisfrage</u>: Welche differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M haben eine vollständige Riemannsche Metrik g, so daß für jedes $x \in M$ gilt $K_x(E) \geq \delta$ für eine Konstante $\delta > 0$ und jede Tangentialebene $E \subsetneq T_xM$?

Im folgenden werden wir solche Metriken häufig als strikt positiv gekrümmt bezeichnen. Die Preisfrage erhält ihren Reiz nicht zuletzt durch die Tatsache, daß die einfachsten kompakten Mannigfaltigkeiten, die n–dimensionalen Sphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ eine solche Metrik haben ($n \geq 2$), nämlich die vom Euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ geerbte Metrik hat konstante Schnittkrümmung $K \equiv 1$. Diese Metriken induzieren wiederum positive Metriken auf den jeweiligen projektiven Räumen, eine weitere fundamentale Klasse von Mannigfaltigkeiten. Die zentrale Bedeutung der Sphären für die Preisfrage wird durch die folgende äquivalente Umformulierung der Positivität unterstrichen:

Sei $B_{\epsilon,\delta} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{\frac{1}{\delta}}$ und $\|x - e_1\| \leq \epsilon\}$ der Ball um e_1 vom Radius ϵ in der Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Eine n–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M hat Schnittkrümmung $K \geq \delta > 0$ genau dann, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $\epsilon > 0$ und eine Abbildung nach M gibt, so daß gilt:

a) f bildet B diffeomorph auf den ϵ–Ball in M mit Zentrum x ab

b) Die Abbildung f vergrößert den Abstand nicht, d.h. für je zwei Punkte $x,y \in B$ gilt: $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$.

Bei dieser Umformulierung beachte man, daß die Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ die konstante Schnittkrümmung δ hat, die Charakterisierung erfolgt also durch den Vergleich mit einem Raum der Krümmung δ dadurch, daß man verlangt, daß die Krümmung höchstens größer werden kann.

§ 2 Einige klassische Sätze

Die einzige Dimension, wo man die Preisfrage bisher vollständig beantworten kann, ist zwei.

Satz 1: Eine vollständige 2–dimensionale Mannigfaltigkeit mit strikt positiver Schnittkrümmung ist diffeomorph zu S^2 oder $\mathbb{RP}^2$ (reelle projektive Ebene).

Es ist nicht klar, wem dieser Satz zuzuschreiben ist. In der erwähnten Arbeit von Hopf wird die Behauptung ohne spezifische Zuordnung erwähnt, allerdings skizziert Hopf den Beweis und gibt Hinweise auf die Urheber einzelner Teile.

Beweisskizze: a) M ist kompakt. Wie Hopf sagt, stammt diese Behauptung im wesentlichen von Bonnet, der zeigt, daß der Durchmesser der Fläche durch das Minimum der Krümmung nach oben beschränkt ist.

b) Nach dem Satz von Gauß–Bonnet gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K_x \, dx = e(M),$$

wo e(M) die Eulersche Charakteristik ist.

c) Aus $K_x \geq \delta > 0$ folgt $e(M) > 0$ und nach der Klassifikation der Flächen folgt M diffeomorph zur Sphäre oder zur projektiven Ebene.

q.e.d.

Es sei an dieser Stelle schon darauf hingewiesen, daß dieser Beweis wenig Hoffnung auf Verallgemeinerungen in höheren Dimensionen macht, da sowohl die Punkte b) wie insbesondere c) in höheren Dimensionen nicht bekannt sind. Der Teil a) allerdings läßt sich leicht verallgemeinern (und sogar verschärfen).

Satz 2 (Bonnet, Myers 1933 [M]): Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) mit $K \geq \delta > 0$ ist kompakt.

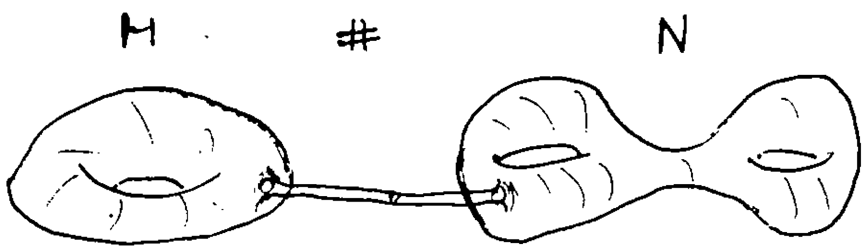
Neben dem Ausschluß aller nicht kompakten Mannigfaltigkeiten ergibt sich aus diesem Satz ein weiteres interessantes topologisches Hindernis:

Korollar 3: Sei (M,g) wie in Satz 2. Dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ endlich.
Beweis: Sonst wäre die universelle Überlagerung nicht kompakt, aber die universelle Überlagerung erbt von M eine strikt positive Metrik.

Für Dimension von M gerade gilt sogar der folgende

Satz 4 (Synge 1936 [Sy]): (M,g) wie in Satz 2, dim(M) gerade. Wenn M orientierbar ist, ist M einfach–zusammenhängend, wenn M nicht orientierbar ist, ist $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2$.

Wenn M und N Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik sind, kann man sich fragen, ob daraus konstruierte Mannigfaltigkeiten wie das Produkt oder (falls dim(M) = dim(N)) die zusammenhängende Summe wieder eine solche Metrik zulassen. Für das Produkt ist die Frage nach wie vor offen, denn die Produktmetrik hat Nullstellen (siehe Problemliste). Die zusammenhängende Summe erklärt sich durch das folgende Bild



und für sie folgt bei nicht–trivialen Fundamentalgruppen eine negative Antwort, da bei Dimension größer als 2 gilt: $\pi_1(M \# N) = \pi_1(M) * \pi_1(N)$, das freie Produkt der beiden Gruppen. Zum Beispiel hat der n–dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ eine strikt positive Metrik, während $\mathbb{R}P^n \# \mathbb{R}P^n$ keine solche Metrik zuläßt. Auf die Existenz strikt positiver Metriken bei der zusammenhängenden Summe einfach–zusammenhängender Mannigfaltigkeiten wird später zurückgekommen.

Um anzudeuten, was die Schwierigkeiten bei der Verallgemeinerung von Satz 1 auf höhere Dimensionen sind, sei kurz die Dimension 3 diskutiert. Wenn M^3 eine strikt positive Metrik hat, ist $\pi_1(M^3)$ endlich. Aus Poincaré–Dualität folgt, daß die universelle Überlagerung $\tilde{M}$ homotopieäquivalent zu S^3 ist. Falls die Poincaré–Vermutung gilt, wäre $\tilde{M}$ diffeomorph zu S^3. Falls ferner die endlichen freien Quotienten von S^3 diffeomorph zu den Raumformen $SU(2)/_G$, $G \subset SU(2)$ endlich, wären (Raumformenproblem), wäre das Problem in Dimension 3 gelöst. Aber sowohl die Poincaré–Vermutung wie das Raumformenproblem sind offen (?!)

§ 3 Ergebnisse nach 1960

Zwischen der Mitte der dreißiger Jahre und dem Ende der fünfziger Jahre hat es keine spektakulären Fortschritte gegeben. (Wenn man schärfere Krümmungsschranken als die Positivität voraussetzt, sieht die historische Situation anders aus. Es sei insbesondere auf den Sphärensatz hingewiesen, vgl. die Diskussion in [A].) Erst die Entwicklung der Theorie der charakteristischen Klassen, die der globalen Analysis mit den Indexsätzen von

Atiyah und Singer, der K–Theorie, der Vergleichssätze von Toponogov oder auch der Morse–Theorie führte zu einem neuen Aufschwung und zwar sowohl was weitere topologische Hindernisse betrifft wie die Existenz weiterer Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik. Zur Verdeutlichung der Situation sei darauf hingewiesen, daß bis 1960 kein einziges topologisches Hindernis für die Existenz strikt positiver Metriken auf <u>einfach–zusammenhängenden</u> kompakten Mannigfaltigkeiten bekannt war, während die einzigen bekannten Beispiele einfach–zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik die Sphären und komplexen, quaternionellen bzw. cayleschen projektiven Räume waren.

Eine Kombination der in ähnlichem Zusammenhang entwickelten Bochner–Methode mit dem Atiyah–Singer–Indexsatz führte zu dem ersten topologischen Hindernis im einfach–zusammenhängenden Fall. Es geht dabei sogar um Hindernisse für ein viel schwächeres Ziel, nämlich die Existenz einer Metrik mit positiver Skalarkrümmung. Die <u>Skalarkrümmung</u> k erhält man durch Mitteln über alle Tangentialebenen an der Schnittkrümmung, sie ist also eine Funktion

$$k : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn eine Metrik strikt positive Schnittkrümmung hat, ist natürlich auch die Skalarkrümmung strikt positiv.

<u>Satz 5 (Lichnerowicz 1963 [L])</u>: Sei M eine Spin–Mannigfaltigkeit. Wenn es eine Metrik mit Skalarkrümmung $k \geq 0$ und an einer Stelle > 0 gibt, gilt $\hat{A}(M) = 0$.

Dabei hat eine Mannigfaltigkeit eine Spin–Struktur ω, wenn die Übergangsfunktionen des Tangentialbündels sich auf Spin(n) hochheben lassen, wo Spin(n) die 2–fache Überlagerung von SO(n) ist. Eine Spin–Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Spin–Struktur. Das einzige Hindernis für die Existenz einer Spin–Struktur auf einer orientierten Mannigfaltigkeit ist das Verschwinden der zweiten Stiefel–Whitney–Klasse $w_2(TM) \in H^2(M;\mathbb{Z}/_2)$. Das $\hat{A}$–Geschlecht $\hat{A}(M) \in \mathbb{Z}$ wurde von Hirzebruch [Hir$_1$] eingeführt und spielt eine große Rolle in Topologie und Analysis. Es ist eine Linearkombination von Pontrjagin Zahlen ([Hir$_1$], S. 197). Die Verbindung zur Analysis wird durch den Atiyah–Singer–Indexsatz [AS] hergestellt, denn das $\hat{A}$–Geschlecht ist der Index des Dirac–Operators $D(M, g\ \omega)$

$$\operatorname{ind} D(M, g, \omega) = \hat{A}(M).$$

In letzter Zeit wurde das $\hat{A}$–Geschlecht im Zusammenhang mit elliptischen Geschlechtern betrachtet (vgl. dazu den Vortrag von F. Hirzebruch [Hir$_2$] im gleichen Band).

Beweisskizze: Aus der Weitzenböck–Formel und der Tatsache $k \geq 0$ und $k \not\equiv 0$ folgt, daß es gar keine nicht-trivialen harmonischen Spinoren gibt, d.h. es gibt keine nicht–trivialen Lösungen des Dirac–Operators. Analoges gilt für den adjungierten Dirac–Operator. Insbesondere ist $\operatorname{ind} D(M, g, \omega) = 0$. Nach dem Atiyah–Singer–Indexsatz [AS] ist $\operatorname{ind} D(M, g, \omega) = \hat{A}(M)$.

q.e.d.

Da die Pontrjagin–Klassen in den durch 4 teilbaren Dimensionen konzentriert sind, verschwindet $\hat{A}(M)$ für $\dim M \equiv 0 \bmod 4$. Der erste interessante Fall ist Dimension 4. Eine der wichtigsten 4–Mannigfaltigkeiten ist die K3–Fläche $K := \{[z_0, z_4, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid \Sigma z_i^4 = 0\}$. Sie hat triviale kanonische Klasse und deshalb $w_2(TK) = 0$. Also hat K eine Spin–Struktur. $\hat{A}(K) = -\frac{1}{24} \int_K p_1(K)$ und die erste Pontrjagin–Zahl von K ist: $\int_K p_1(K) = -48$. Also ist $\hat{A}(K) = 2 \not\equiv 0$ und somit läßt die K3–Fläche keine Metrik mit strikt positiver Skalarkrümmung zu und erst recht nicht mit strikt positiver Schnittkrümmung. Da die K3–Fläche kompakt und einfach–zusammenhängend ist, gibt es also Mannigfaltigkeiten mit diesen topologischen Eigenschaften, die keine strikt positive

Metrik zulassen. Durch Bildung des n–fachen Produkts erhält man solche Beispiele in allen durch 4 teilbaren Dimensionen.

Unter Verwendung ähnlicher Argumente und dem Indexsatz für eine Familie von Dirac–Operatoren hat Hitchin 1973 den Satz von Lichnerowicz verallgemeinert. Und zwar kann man das $\hat{A}$–Geschlecht auch K–theoretisch beschreiben, allerdings nur für Spin–Mannigfaltigkeiten, weil man dazu die K–Theorie Thomklasse benötigt, die es nur für Spin–Mannigfaltigkeiten gibt. Die K–Theorie Thomklasse ersetzt die Linearkombination der Pontrjagin–Zahlen, was aus einem Riemann–Roch–artigen Satz folgt [Hir_1]. Der Vorteil ist, daß man auf diesem Weg auch eine interessante Invariante in nicht durch 4 teilbaren Dimensionen bekommt, genauer für Dimensionen $n \equiv 1$ oder 2 mod 8 die Invariante $\alpha(M) \in \mathbb{Z}/_2$. Es gilt dann

Satz 6 (Hitchin 1973 [Hit]): Falls M eine kompakte Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension $n \equiv 1$ oder 2 mod 8 ist und eine Metrik mit Skalarkrümmung $k \geq 0$ und $k \not\equiv 0$ zuläßt, gilt $\alpha(M) = 0$.

Der Satz läßt eine besonders interessante Anwendung zu. Aus Arbeiten von Adams [Ad] und Kervaire–Milnor [KM] folgt, daß es in allen Dimensionen $n \equiv 1$, 2 mod 8 und $n > 8$ eine exotische Sphäre Σ gibt, also eine Mannigfaltigkeit, die homöomorph aber nicht diffeomorph zu S^n ist, mit $\alpha\ (\Sigma) \not\equiv 0$. Dies liefert Beispiele von exotischen Sphären, die keine strikt positiven Metriken zulassen, d.h. der Unterschied zur Standardsphäre S^n ist sehr groß. Durch Bilden der zusammenhängenden Summe folgt sogar:
Jede kompakte Spin–Mannigfaltigkeit M^n der Dimension $n \equiv 1$, 2 mod 8 und $n > 8$ hat eine differenzierbare Struktur, bzgl. derer es keine strikt positive Metrik gibt. Insbesondere hängt die Existenz einer positiven Metrik im allgemeinen von der differenzierbaren Struktur ab, ein gegenüber den niedrigen Dimensionen 2 und 3, wo das nicht passieren

kann, völlig neues Phänomen.

Die Sätze von Lichnerowicz und Hitchin sind anschaulich bisher nicht zu erklären, dafür ist der Beweis recht einfach (unter Verwendung schwieriger Sätze wie dem Index-Satz). Der folgende Bettizahlensatz von Gromov ist vielleicht eher plausibel, aber der Beweis ist ziemlich trickreich. Wir haben die Eigenschaft einer Metrik, strikt positive Schnittkrümmung zu haben, geometrisch als Zwang der Geodätischen, sich zusammenzuziehen, gedeutet. Das weist anschaulich darauf hin, daß die Fundamentalgruppe nicht zu groß werden kann und in der Tat haben wir schon bemerkt, daß sie endlich ist (aber beliebige Ordnung haben kann, wie schon die Linsenräume zeigen). Die Fundamentalgruppe ist ein Maß für die Anzahl der 2–dimensionalen Löcher. Für (n+1)–dimensionale Löcher ist ein Maß durch die n–te Bettizahl, also den Rang der n–ten Homologie gegeben, wobei noch ein Grundkörper F, über dem die Homologie gebildet wird, frei gewählt werden kann. Wir bezeichnen diese Bettizahl mit $b_n(M;F)$. Man kann sich fragen, ob positive Metriken Schranken an die Bettizahlen implizieren und das ist tatsächlich der Fall.

Satz 7 (Gromov 1981) [G]: Es gibt eine Konstante c(n), so daß für jede n–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) mit nicht–negativer Schnittkrümmung und jeden Körper F gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i(M;F) \leq c(n).$$

Der Beweis ist ziemlich kompliziert und auf den Versuch einer Skizze soll hier verzichtet werden (siehe die Diskussion in [A]). Es soll aber eine wichtige Konsequenz gezogen werden. Wir haben schon als Konsequenz des Satzes von Bonnet–Myers gesehen, daß die zusammenhängende Summe von zwei nicht einfach–zusammenhängenden

Mannigfaltigkeiten nie eine strikt positive Metrik trägt und uns gefragt, wie es im einfach–zusammenhängenden Fall aussieht. Die Bettizahlen von dem komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ sind $b_i(\mathbb{C}P^n;F) = \begin{cases} 1 & i \text{ gerade} \leq 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Also wird für $n > 1$ die Summe $\Sigma\, b_i$ für $\underbrace{\mathbb{C}P^n \# \ldots \# \mathbb{C}P^n}_{k}$ mit wachsendem k beliebig groß und aus dem Satz von Gromov erhalten wird das folgende Beispiel:

<u>Beispiel:</u> $n > 1$. Es gibt ein k, so daß $\underbrace{\mathbb{C}P^n \# \ldots \# \mathbb{C}P^n}_{k}$ keine Metrik mit positiver Schnittkrümmung trägt (obwohl $\mathbb{C}P^n$ eine solche Metrik besitzt).

Nach diesen Sätzen über topologische Hindernisse soll nun über die Mannigfaltigkeiten berichtet werden, wo man die Existenz einer Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung nachweisen kann. Dabei werden nur einfach–zusammenhängende Mannigfaltigkeiten betrachtet.

Die Konstruktion oder der Existenznachweis einer solchen Metrik ist ein sehr schwieriges Problem. Einer der wenigen systematischen Ansätze, nämlich aus einfachen Beispielen durch Bildung z.B. der zusammenhängenden Summe kompliziertere zu gewinnen, ist nicht verwendbar (vgl. das obige Beispiel). Es gibt allerdings eine zwar sehr spezielle dafür aber besonders interessante Situation, wo man gute Chancen hat, die Existenzfrage zu entscheiden, nämlich bei <u>homogenen Räumen und homogenen Metriken</u>. Hier betrachtet man kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M,g) bei der die Gruppe G der Isometrien transitiv auf M operiert. Sei $x \in M$ fest und $H_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ die Standgruppe in x, dann ist M diffeomorph zu G/H_x. Da G als Isometrie operiert, ist die Metrik vollständig durch ihren Wert an der Stelle x bestimmt. Damit ist man in einer vergleichsweise übersichtlichen Situation und tatsächlich gelang es zunächst Berger (1961), die sogenannten normal–homogenen Räume mit Metriken strikt positiver Schnittkrümmung zu realisieren. Neben den Standardbeispielen der Sphären und projektiven Räume zeigte er, daß es nur zwei weitere Beispiele gibt, und zwar je eins in Dimension 7 und 13 [B]. Gut 10 Jahre später klassifizierten Wallach [W] und Berard Bergery [BB] die restlichen homogenen Räume mit positiver Metrik. Es stellte sich heraus, daß nur noch die Fahnenmannigfaltigkeiten der projektiven Ebenen (komplex, quaternionell, cayleysch) dazukommen (Dimension 6, 12, 24) sowie eine unendliche Serie in Dimension 7 [AW], die Wallach–Räume, auf die später noch genauer eingegangen wird.

Die einzigen bekannten nicht–homogenen Beispiele wurden von Eschenburg konstruiert. Sie sind eng mit den homogenen Räumen verwandt. Sei wieder H eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Liegruppe G. Wenn G nicht abelsch ist, operiert H von rechts bzw. von links auf zwei Weisen auf G, d.h. man hat eine Operation von $H \times H$ auf G. Wenn nun U eine abgeschlossene Untergruppe von $H \times H$ ist, operiert U auf G und wenn die Operation frei ist, ist G/U eine Mannigfaltigkeit, die aber i.a. nicht homogen ist. Sie wird als Doppelquotient bezeichnet wird. Eschenburg [E_1], [E_2], zeigt, daß man auf diese Weise eine nicht–homogene 6–dimensionale und eine unendliche Familie von nicht–homogenen 7–dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Metriken strikt positiver Schnittkrümmung erhält und unter gewissen Zusatzvoraussetzungen sind das die einzigen Möglichkeiten.

Die Ergebnisse von Berger, Allof, Wallach, Berard Bergery und Eschenburg seien etwas unpräzise wie folgt zusammengefaßt.

<u>Satz 8 (Berger 1963 [B], Wallach 1972 [W], Allof–Wallach 1975 [AW], Berard Bergery 1976 [BB]):</u>

Die einzigen einfach–zusammenhängenden kompakten homogenen Räume, die eine homogene Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung zulassen, sind die Sphären, projektiven Räume, je ein Beispiel in den Dimensionen 6, 7, 12, 13, 24 und eine unendliche

Familie in Dimension 7, die Wallach Räume (s.u.).

Satz 9 (Eschenburg 1982/1984 [E_1], [E_2]):
Es gibt eine nicht–homogene kompakte einfach–zusammenhängende 6–dimensionale Mannigfaltigkeit, einen Doppelquotienten $SU(3)/_{S^1 \times S^1}$, sowie eine unendliche Familie von kompakten nicht–homogenen einfach–zusammenhängenden 7–dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Doppelquotienten der Form $SU(3)/_{S^1}$, die eine Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung zulassen.

Soweit mir bekannt, sind dies alle in der Literatur vorkommenden Beispiele einfach–zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik.

§ 4 Offene Probleme

In diesem Abschnitt sollen einige Probleme vorgestellt werden, die zumeist schon länger untersucht wurden. Diese Situation ist angesichts der in § 2 und § 3 deutlich gewordenen großen Diskrepanz zwischen topologischen Hindernissen und Existenzaussagen nicht verwunderlich.

Problem 1: Finde weitere topologische Hindernisse für die Existenz strikt positiver Metriken.

Eine damit zusammenhängende Frage, die man vielleicht in absehbarer Zeit entscheiden kann, ist, welche Mannigfaltigkeiten bordant zu einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit strikt positiver Metrik sind, wobei man an verschiedene Bordismustheorien denken könnte, z.B. orientierten Bordismus, Spin–Bordismus oder als Extremfall gerahmten Bordismus. Hintergrund dieser Frage ist in erster Linie, ob es neben dem

$\hat{A}$–Geschlecht im Falle von Spin–Mannigfaltigkeiten weitere charakteristische Zahlen gibt, die ein Hindernis darstellen.

Ein wichtiger Spezialfall von Problem 1 ist:

Problem 2: Zeige, daß die Eulersche Charakteristik einer geradedimensionalen Mannigfaltigkeit mit strikt positiver Metrik positiv ist.

Für den Fall von Flächen folgt dies wie oben bemerkt aus dem Satz von Gauß–Bonnet. Indirekt weist bereits Hopf in dem erwähnten Artikel von 1932 auf dieses Problem hin, indem er nach einer Verallgemeinerung der Aussage über Flächen fragt. S.S. Chern hat das Problem in [Ch] diskutiert.

Problem 3: Was sind die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik? Insbesondere: Ist jede abelsche Untergruppe der Fundamentalgruppe zyklisch (S.S. Chern)?

Die Frage ist äquivalent zur Bestimmung derjenigen endlichen Untergruppen der Isometriegruppe einer einfach–zusammenhängenden strikt positiv gekrümmten Mannigfaltigkeit, welche frei operieren. Für den Fall der Sphären und der Standardmetrik wurde diese Frage von J. Wolf [Wo] gelöst und es stellt sich heraus, daß die abelschen Untergruppen zyklisch sind. Deshalb ist Problem 3 für die metrischen Raumformen, d.h. für die endlichen Quotienten der Sphären mit der Standardmetrik, gelöst. Nach Satz 4 ist das Problem nur für ungerade–dimensionale Mannigfaltigkeiten interessant.

Problem 4: Besitzt jede Mannigfaltigkeit mit strikt positiv gekrümmter Metrik eine differenzierbare effektive S^1–Aktion?

Diese Frage findet sich bei Yau [Y]. Neben der Tatsache, daß alle bekannten Beispiele diese Eigenschaft haben, spielt möglicherweise die Vorstellung eine Rolle, daß die Gruppe der Isometrien positive Dimension haben sollte. Es sei bemerkt, daß für Spin–Mannigfaltigkeiten die Existenz einer effektiven S^1–Aktion nach Atiyah–Hirzebruch [AH] das Verschwinden des $\hat{A}$–Geschlechts impliziert, Problem 4 paßt also gut zusammen mit Satz 3.

<u>Problem 5</u>: Besitzt $S^2 \times S^2$ eine Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung?

Diese Frage wird auch als Hopf–Vermutung bezeichnet. Es traten immer mal wieder Konstruktionen einer solchen Metrik auf, die sich aber stets als falsch herausstellten. Es liegt nahe, mit der Produktmetrik anzufangen und diese zu deformieren. Aber bisher war dieser Ansatz nicht erfolgreich. Mehr Information über die Situation allgemeiner Produktmannigfaltigkeiten findet man in [BDS].

<u>Problem 6</u>: Gibt es eine exotische Sphäre mit Metrik strikt positiver Schnittkrümmung?

Nach Satz 6 gibt es in Dimension $n \equiv 1,2 \bmod 8$ und $n > 8$ exotische Sphären, die noch nicht einmal eine Metrik strikt positiver Skalarkrümmung zulassen. Das einzige bekannte Resultat, was zu Hoffnungen auf Existenzaussagen Anlaß gibt, ist die Konstruktion einer Metrik auf einer exotischen 7–Sphäre durch Gromoll und Meyer [GM], welche Schnittkrümmung ≥ 0 hat und die auf einer dichten Teilmenge > 0 ist. Dieses Problem wird im Zusammenhang mit Problem 8 in § 5 noch einmal kurz diskutiert.

Problem 7: Wie sieht die Topologie des Raumes aller Metriken mit strikt positiver Schnittkrümmung aus?

Genauer ist folgendes gemeint: Auf dem Raum aller Metriken operiert die Gruppe der Diffeomorphismen Diff(M). Im Quotientenraum nach dieser Operation von Diff(M) ist der Teilraum der strikt positiven Metriken modulo der Operation von Diff(M) enthalten. Es wird nach der Topologie dieses Raumes gefragt, z.B. wann er zusammenhängend ist. In § 5 wird ein Kandidat angegeben, wo dieser Raum möglicherweise nicht zusammenhängend ist. Soweit bekannt gibt es bisher keine Informationen zu Problem 7 außer für Dimension 2: Für S^2 folgt aus dem Uniformierungssatz, daß der Raum der strikt positiv gekrümmten Metriken zusammenhängend ist.

Problem 8: Kann man in der Kategorie der strikt positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten kürzen, d.h. folgt aus der Existenz einer solchen Metrik auf M und $M \# N$ die Existenz für N ?

Nach Satz 7 gilt selbst für einfach–zusammenhängende Mannigfaltigkeiten i.a. nicht, daß, wenn M und N strikt positiv gekrümmt sind, dasselbe für $M \# N$ gilt. Sollte man dagegen kürzen können, könnte man exotische Sphären mit strikt positiver Metrik finden (siehe § 5). Die Antwort auf Problem 8 wäre positiv, wenn die Hindernisse entweder additiv unter zusammenhängender Summe wären oder durch Ungleichungen wie im Satz 7 gegeben wären. Alle bisher bekannten Hindernisse sind von diesem Typ.

Diese Auswahl von Problemen ist sicher stark subjektiv, sie sollte aber geeignet sein, den Eindruck weiterzugeben, daß die Untersuchung des Verhältnisses von positiver Krümmung und Topologie erst am Anfang steht.

§ 5 Die Wallach Räume

Seien k und ℓ teilerfremde natürliche Zahlen. Sei $i_{k,\ell}: S^1 \longrightarrow SU(3)$ die Einbettung $z \longmapsto \begin{bmatrix} z^k & & 0 \\ & z^\ell & \\ 0 & & z^{-k-\ell} \end{bmatrix}$. Dann sind die Wallach–Räume definiert als

$$W_{k,\ell} := SU(3)/i_{k,\ell}(S^1) .$$

Diese harmlos aussehenden Räume haben es in sich. Sie sind sehr spezielle homogene Räume, lassen aber wie bereits erwähnt für $k\ell(k+\ell) \neq 0$ homogene Metriken mit positiver Schnittkrümmung zu Allof–Wallach [AW], die wir Allof–Wallach–Metriken nennen wollen. Da $H^4(W_{k,\ell};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/_{k^2+k\ell+\ell^2}$, liefern sie unendlich viele verschiedene Homotopietypen. Die Frage nach der Klassifikation der Homöomorphie– bzw. Diffeomorphietypen kann man auf ein zahlentheoretisches Problem reduzieren.

Satz 10 (S. Stolz + M.K. 1988 [KS_1]): Sei $(k,\ell) = 1 = (\tilde{k},\tilde{\ell})$ und $k^2 + k\ell + \ell^2 = \tilde{k}^2 + \tilde{k}\tilde{\ell} + \tilde{\ell}^2 =: N$.

i) $W_{k,\ell}$ und $W_{\tilde{k},\tilde{\ell}}$ sind genau dann homöomorph, wenn $k\ell(k+\ell) \equiv \tilde{k}\tilde{\ell}(\tilde{k}+\tilde{\ell}) \bmod 2^3 \cdot 3 \cdot N$.

ii) $W_{k,\ell}$ und $W_{\tilde{k},\tilde{\ell}}$ sind genau dann diffeomorph, wenn $k\ell(k+\ell) \equiv \tilde{k}\tilde{\ell}(\tilde{k}+\tilde{\ell}) \bmod 2^5 \cdot 7^{\lambda(N)} \cdot 3 \cdot N$, wo $\lambda(N) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } N \equiv 0 \bmod 7 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Unterscheidung der Wallach Räume beruht auf ziemlich subtilen Invarianten, die man aus dem Spektrum gewisser Differentialoperatoren ablesen kann und der Beweis, daß diese Invarianten den Diffeomorphie– bzw. Homöomorphietyp festlegen, ist sehr indirekt. Eine vollständige Lösung des zahlentheoretischen Problems, auf das die

Klassifikation zurückgeführt wird, ist nicht bekannt. Es gibt aber eine bessere zahlentheoretische Umformulierung der Frage, ob homöomorphe Wallach–Räume diffeomorph sind (vgl. [KS_1]) und Computerrechnungen von Don Zagier und Andrew Odlyzko haben das folgende überraschende Resultat ergeben:

Für $k^2 + k\ell + \ell^2 < 2955367597$ sind homöomorphe Wallach–Räume diffeomorph, aber

Beispiel [KS_1]: $W = W_{-56788,5227}$ und $W' = W_{-42652,61213}$ sind homöomorph aber nicht diffeomorph (in diesem Fall ist $k^2 + k\ell + \ell^2 = 2955367597$).

Dieses Beispiel gibt auch die erste positive Antwort auf die Verallgemeinerung von Problem 6: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Metrik strikt positiver Schnittkrümmung. Gibt es auf M eine weitere differenzierbare Struktur, die eine solche Metrik zuläßt? Problem 6 ist der Fall $M = S^n$.

Falls Problem 8 eine positive Antwort hätte, man also bei Mannigfaltigkeiten mit strikt positiver Metrik "kürzen" könnte, würde das Beispiel der Wallach Räume eine positive Antwort auf Problem 6 beinhalten. Dies beruht auf der Tatsache, daß falls W und W' homöomorphe aber nicht diffeomorphe Wallach Räume sind, es exotische 7–Sphären Σ gibt, so daß $W \# \Sigma$ diffeomorph zu W' ist ([KS_1]). Da im obigen Beispiel W und W' strikt positiv gekrümmte Metriken zulassen, würde aus der Gültigkeit der Kürzungsregel folgen, daß die exotische 7–Sphäre Σ, die nicht diffeomorph zu S^7 ist, da W und W' verschieden sind, eine strikt positive Metrik trägt (Σ ist übrigens das 7–fache des Erzeugers $\Sigma(E_8)$ der Gruppe der 7–dimensionalen Homotopiesphären). Sollte man umgekehrt zeigen können, daß Σ keine strikt positive Metrik zuläßt, folgt natürlich, daß man nicht "kürzen" kann.

Wenn man zu Problem 7 ein Beispiel angeben möchte, bei dem der Raum der strikt positiv gekrümmten Metriken nicht zusammenhängend ist, bietet sich in Analogie zu dem entsprechenden Problem für die Skalarkrümmung an, nach zwei Mannigfaltigkeiten mit strikt positiv gekrümmter Metrik zu suchen, die auf sehr indirekte Weise diffeomorph sind. Dann kann man den Diffeomorphismus benutzen, um die Metrik der zweiten Mannigfaltigkeit auf die erste zurückzuziehen und, wenn man Glück hat, erhält man so zwei Metriken, die im Raum der positiv gekrümmten Metriken (modulo $\mathrm{Diff}(M)$) in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

Bei den Wallach Räumen erhält man offensichtliche und explizite Diffeomorphismen, falls die Untergruppen $i_{k,\ell}(S^1)$ konjugiert sind. Für $k^2 + k\ell + \ell^2 < 19153920223641$ zeigen wieder die Computerrechnungen von Don Zagier und Andrew Odlyzko, daß dies die einzigen diffeomorphen Räume ergibt. Aber man hat

<u>Beispiel ([KS_1])</u>: $W = W_{-4638661,582656}$ und $W' = W_{-2594149,5052965}$ sind diffeomorph (obwohl die entsprechenden Einbettungen von S^1 nicht konjugiert sind). In diesem Fall ist $k^2 + k\ell + \ell^2 = 19153920223641$.

<u>Frage</u>: Seien W und W' wie im obigen Beipiel. Sei $f : W \longrightarrow W'$ ein Diffeomorphismus und g und g' Allof–Wallach–Metriken. Liegen g und f^*g' in verschiedenen Zusammenhangskomponenten im Raum aller strikt positiv gekrümmten Metriken auf W (modulo $\mathrm{Diff}(W)$)?

<u>§ 6 Positive Skalarkrümmung</u>

Angesichts der Schwierigkeiten zu entscheiden, ob eine Mannigfaltigkeit eine Metrik mit strikt positiver Schnittkrümmung zuläßt, liegt es nahe, die Frage zu vereinfachen, indem man nach Metriken mit strikt positiver Skalarkrümmung sucht. Zur Erinnerung, die Skalarkrümmung an der Stelle $x \in M$ ist der Mittelwert der Schnittkrümmungen für alle Tangentialebenen im Tangentialraum an x. Wir wollen uns dabei wieder auf kompakte Mannigfaltigkeiten beschränken.

Wir haben schon gesehen, daß eines der wenigen bekannten Hindernisse für positive Metriken in Wirklichkeit ein Hindernis für Metriken mit positiver Skalarkrümmung ist, nämlich der Satz von Lichnerowicz bzw. Hitchin, daß für eine Spin–Mannigfaltigkeit M mit Metrik positiver Skalarkrümmung gilt

$$\alpha(M) = 0 \ ,$$

wobei $\alpha(M) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } \dim M \equiv 0 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } \dim M \equiv 1 \text{ oder } 2 \bmod 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Tatsache, daß die Skalarkrümmung durch Mitteln der Schnittkrümmung entsteht, gibt einem eine viel größere Flexibilität bei der Konstruktion solcher Metriken. Dies wird zum Beispiel bei dem folgenden Ergebnis von Gromov und Lawson [GL] bzw. Schoen–Yau [SY] deutlich, die zeigen, daß man eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung in der Umgebung einer eingebetteten Sphäre in M, deren Kodimension mindestens 3 ist, so abändern kann, daß sie eine Standardform hat. Das erlaubt es, eine Umgebung dieser Sphäre herauszuschneiden und eine "duale" Sphäre stattdessen einzukleben, also genauer $S^k \times \mathring{D}^{n-k}$ herauszunehmen und stattdessen $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ einzukleben, also surgery durchzuführen in der Klasse der Mannigfaltigkeiten mit Metrik positiver Skalarkrümmung (wenn $k \leq n-3$). Wenn z.B. M^n und N^n eine Metrik positiver Skalarkrümmung zulassen, bette $S^0 \times \mathring{D}^n$ so in $M + N$ ein, daß der Schnitt mit

M und N nicht leer ist. Dann ist das Resultat von surgery gleich der zusammenhängenden Summe, es folgt also, daß $M \# N$ wieder eine Metrik positiver Skalarkrümmung besitzt, ein Resultat, daß, wie wir gesehen haben, nicht für die Schnittkrümmung gilt. Mann kann aber noch eine viel weitergehende Folgerung ziehen, wenn man die Morse–Theorie benutzt. Diese besagt z.B. daß zwei einfach–zusammenhängende Spin–Mannigfaltigkeiten M und N der Dimension ≥ 5, die Spin–bordant sind (d.h. $M + (-N)$ berandet eine kompakte Spin–Mannigfaltigkeit), auseinander durch eine Folge von surgeries der Kodimension ≥ 3 hervorgehen. Also folgt

Satz 11 (Gromov–Lawson 1980 [GL] Schoen–Yau 1979 [SY]): Wenn M eine einfach–zusammenhängende Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 5 ist, die Spin–bordant zu einer Mannigfaltigkeit N mit positiver Skalarkrümmung ist, so besitzt auch M eine Metrik positiver Skalarkrümmung.

Wenn M eine orientierte Mannigfaltigkeit ist, die keine Spin–Struktur zuläßt, kann man mit ähnlichen Methoden sogar zeigen:

Satz 12 (Gromov–Lawson 1980 [GL]): Eine einfach–zusammenhängende orientierte kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 5 ohne Spin–Struktur läßt eine Metrik positiver Skalarkrümmung zu.

Auf dem Hintergrund dieses Ergebnisses liegt die von Gromov und Lawson geäußerte Vermutung nahe, daß die α–Invariante im Spin–Fall das einzige Hindernis ist. Im Jahr 1990 wurde diese Vermutung durch S. Stolz tatsächlich bewiesen.

Satz 13 (S. Stolz 1990 [S]): Eine einfach–zusammenhängende Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 5 läßt genau dann eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung zu, wenn $\alpha(M) = 0$ ist.

Nach Satz 11 würde es reichen, eine Familie von Erzeugern des Unterraums Ker α des Spin–Bordismusrings anzugeben, welche eine Metrik positiver Skalarkrümmung besitzen. Leider ist aber überhaupt kein Erzeugendensystem des Spin–Bordismusrings bekannt. Die Idee von S. Stolz ist die folgende. Es ist leicht zu zeigen, daß der Totalraum eines Bündels eine Metrik positiver Skalarkrümmung zuläßt, wenn die Faser eine solche Metrik besitzt und die Strukturgruppe isometrisch operiert. Also reicht es zu zeigen, daß jede einfach–zusammenhängende Spin–Mannigfaltigkeit mit $\alpha=0$ Spin–bordant zu solch einem Totalraum ist. In der Tat zeigt Stolz, daß das der Fall ist, man kann sogar Faser und Strukturgruppe fest wählen, nämlich die quaternionale projektive Ebene $\mathbb{H}P^2$ und als Strukturgruppe $PSp(3)$. Der Beweis besteht in der Reduzierung auf ein Problem der stabilen Homotopietheorie, das mit Hilfe der Adams Spektralsequenz gelöst wird.

Eine schöne Übersicht über Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung findet man in [RS], wo auch nicht einfach–zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und der nicht kompakte Fall diskutiert werden. Dort steht auch eine detaillierte Skizze des Beweises von Satz 13.

Es sei zum Schluß angemerkt, daß die Methoden von Stolz nicht nur zum Beweis von Satz 12 führen, sondern auch eine wichtige Rolle bei der Konstruktion der elliptischen Homologie spielen [KS_2], was Querverbindungen zu den elliptischen Geschlechtern ergibt (vgl. dazu den Vortrag von Hirzebruch [Hir_2]).

Literatur

[A] Abresch, U.: Endlichkeitssätze in der Riemann'schen Geometrie, in diesem Band.

[Ad] Adams, J.F.: On the groups J(x); IV, Topology 5, (1966), 21–71.

[AW] Aloff, S., Wallach, N.R.: An infinite family of distinct 7–manifolds admitting positively curved Riemannian structures. Bull. AMS 81 (1975), 93–97.

[AH] Atiyah, M.F., Hirzebruch, F.: Spin–manifolds and group actions, in: Essays on Topology and Related Topics, Springer Verlag, 1970, 18–28.

[AS] Atiyah, M.F., Singer, I.: The index of elliptic operators: III, Ann. of Math. 87 (1968), 546–604.

[BB] Berard Bergery, L.: Les variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 47–68.

[B] Berger, M.: Les Variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes courbure strictement positive, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1961), 179–246.

[BDS] Bourgignon, J.P., Deschamps, A., Sentenac, P.: Conjecture de H. Hopf sur les produits de variétés, Ann. Math. Scient. Ecole Norm. Sup. 4 (1972), fasc. 2.

[Ch] Chern, S.S.: On the curvatura integra in a Riemannian manifold, Ann. Math. 46 (1945), 674–684.

[E_1] Eschenburg, J.–H.: New examples of manifolds with strictly positive curvature, Invent. math. 66 (1982), 469–480.

[E_2] Eschenburg, J.–H.: Freie isometrische Aktionen auf kompakten Liegruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen. Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster 32 (1984).

[GM] Gromoll, D., Meyer, W.: An exotic sphere with nonnegative sectional curvature. Ann. of Math. 100 (1974), 401–406.

[G] Gromov, M.: Curvature, diameter and Betti numbers, Comm. Math. Helv. 56 (1981), 179–195.

[GL] Gromov, M., Lawson, H.B.: The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature, Ann. of Math. 111 (1980), 423–434.

[Hir_1] Hirzebruch, F.: Topological methods in algebraic geometry, Grundlehren 131, Springer (1966).

[Hir_2] Hirzebruch, F.: Mannigfaltigkeiten und Modulformen, in diesem Band.

[Hit] Hitchin, N.: Harmonic spinors, Adv. Math. 14 (1974), 1–55.

[H] Hopf, H.: Über Zusammenhänge zwischen differentialgeometrischen Eigenschaften und topologischer Gestalt, Jahr. D.M.V. 16 (1932), 209–229.

[KM] Kervaire, M.A., Milnor, J.: Groups of homotopy spheres I, Ann. Math. 77 (1963), 504–537.

[KS_1] Kreck, M., Stolz, S.: Some homeomorphic but not diffeomorphic homogeneous 7–manifolds with positive sectional curvature. To appear, J.Diff. Geom.

[KS_2] Kreck, M., Stolz, S.: $\mathbb{H}P^2$–bundles and elliptic homology, preprint Bonn (1990)

[L] Lichnerowicz, A.: Spineurs harmonique, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B 257 (1963), 7–9.

[M] Myers, S.B.: Riemannian manifolds in the large, Duke Math. J. 1 (1935), 39–49.

[RS] Rosenberg, J., Stolz, S.: Manifolds of positive scalar curvature, preprint 1990.

[S] Stolz, S.: Simply connected manifolds of positive scalar curvature, preprint 1990.

[Sy] Synge, J.: On the connectivity of spaces of positive curvature, Quart. J. Math. 7, 1936, 316–320.

[SY] Schoen, R., Yau, S.T.: On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math. 28 (1979), 159–183.

[W] Wallach, N.R.: Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. of Math. 96 (1972), 277–295.

[Wo] Wolf, J.: Spaces of constant curvature, Mc Graw–Hill (1966).

[Y] Yau, S.T.: Problem Section, Ann. Math. Stud. 102 (1982), 669–706.

Für weiter Literaturhinweise siehe das umfangreiche Verzeichnis in [A].