Théorèmes de Riemann-Roch pour les Champs de Deligne-Mumford

B. TOEN

July 7, 1997

Contents

1 Introduction

Le but de ce qui suit est d'étudier la G-théorie des champs de Deligne-Mumford , et en particulier de chercher à démontrer des formules de type Riemann-Roch. L'étude des espaces de G-théorie nous amènera à définir une nouvelle cohomologie pour les champs algébriques , que nous appellerons la cohomologie à coefficient dans les représentations. L'idée intuitive est de considérer des cycles sur l'espace des modules dont les coefficients sont dans l'anneau des représentations des groupes d'isotropie des points de cet espace. On pourra alors démontrer un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour des morphismes de champs non nécessairement représentables. Ce qui permettra par exemple d'obtenir une formule de type Hirzebruch-Riemann-Roch , pour la caratéristique d'Euler d'un faisceau cohérent. Il est à noter qu'une telle formule ne peut exister pour les théories cohomologiques utilisées usuellement (anneaux de Chow , cohomologie étale , de Betti ...[G2, Vi2]).

L'idée centrale vient de la remarque suivante.
Considèrons un champ quotient d'une variété par un groupe fini opérant trivialement

$$F = [V/H]$$

Alors le site étale F_{et} est le site H-équivariant de V. Comme H est fini la cohomologie de F_{et} à coefficient dans une théorie cohomologique rationnelle est isomorphe à la cohomologie de V_{et}. On perd donc toute l'information équivariante , et on montrera que ceci interdit la fomule de Hirzebruch-Riemann-Roch pour cette cohomologie.
Par contre les espaces de G-théorie de F sont les espaces de G-théorie des H-faisceaux cohérents sur V. Dans le cas où l'odre de H est premier à la caractéristique du corps de base , ces faisceaux se décomposent suivant les représentations irréductibles de H. Ce qui implique que l'espace $G(F)$ est canoniquement équivalent à l'espace $G(V) \otimes K_0(H)$. On interprete cette équivalence en disant que la G-théorie de F est la G-théorie de V "à coefficient dans les représentations de H".

A la vue de cette exemple , l'idée naturelle est de définir la cohomologie de F comme la cohomologie de F_{et} à coefficient dans les représentations des groupes d'isotropie de F. C'est la traduction des "cycles à coefficient des l'anneau de Grothendieck des groupes d'isotropie" cités plus haut.
Les points communs de cette cohomologie avec la G-théorie des champs permet de démontrer le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour des morphismes plus généraux que les morphismes pprojectifs , et par là même une formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch. On disposera donc de classes de Chern

qui donnerons une formule

$$\chi(F,\mathcal{F}) = \int_F Ch(\mathcal{F}).Td(T_F)$$

pour la caratéristique d'Euler d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un champ lisse et propre F.

L'article est organisé de la façon suivante.

Le premier chapitre est là pour fixer le vocabulaire et les notations ainsi que rappeler quelques résultats généraux concernant la cohomologie généralisée et les champs de Deligne-Mumford.

Le second chapitre comporte l'étude des espaces de G-théorie des champs. Il y a deux principaux type de résultats (outre les généralités connues) : tout d'abord un résultat de descente étale de la G-théorie rationelle. Et par la suite deux théorèmes de "dévissage" , permettant d'exprimer l'espace de G-théorie d'un champ en fonction d'espaces de G-théorie de certains espaces algébriques.

Dans le troisième chapitre on revoit rapidement la cohomologie "naive" des champs , et l'application à un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour des morphismes projectifs (donc représentables). Les résultats seront utiles dans l'étude de la cohomologie à coefficient dans les représentations.

Enfin , le dernier chapitre comporte la définition et les propriétés de la cohomologie à coefficient dans les représentations , qui se comporte comme la cohomologie usuelle (localisation , homotopie , classes de Chern ...). Pour finir on démontre le théorème principal , qui était le but essentiel de ce travail et qui étend le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au cas de cette cohomologie ainsi qu'á certains morphismes propres , dont les morphismes projectifs et les morphismes propres vers des variétés.

Un appendice contient quelques notations , et les théorèmes principaux de la K-théorie des catégorie exactes.

REMERCIEMENTS: Je remercie trés sincèrement J. TAPIA et C. SIMPSON , qui ont encadrés ce travail durant cette année , et qui m'ont accordé de nombreuses discussions ainsi que de précieux conseils .

La majeure partie du présent travail à été éffectuée durant un séjour à l'institut Max Planck , que je tiens à remercier pour la qualité de son acceuil.

2 Préliminaires

2.1 Cohomologie généralisée

2.1.1 Homotopie simpliciale

Commençons par rappeler les définitions et notations empruntées à la théorie de l'homotopie simpliciale.

Ens est la catégorie des ensembles , et Ab celle des groupes abéliens.
Comme d'habitude , Δ désigne la catégorie simpliciale standard , dont les objets sont les ensembles finis ordonnés $[n] := \{0, \ldots, n\}$ et les morphismes les applications croissantes. On note aussi $\Delta^{(p)}$ la sous-catégorie pleine des objets $[q]$ avec $q \ \leq \ p$.
Ainsi , $SEns := Ens^{\Delta^{op}}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux. Si A est un ensemble simplicial $A : \Delta^{op} \to Ens$, on notera A_p l'ensemble des p-simplexes de A , c'est par définition $A([p])$. Ainsi Δ^p est l'ensemble simplicial dont les q-simplexes sont $(\Delta^p)_q := Hom_{\Delta}([q], [p])$.
La catégorie $SEns$ possède des Hom internes définis par

$$Hom_s(A, B)_p := Hom_{SEns}(A \times \Delta^p, B)$$

qui est l'espace des morphismes de A dans B.
Pour $0 \ \leq \ j \ \leq \ n$ on note $\delta_n^j : \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n+1\}$ la j-ème face standard dans Δ.

Si C est une petite catégorie avec C_0 comme ensemble d'objets et C_1 comme ensemble de morphismes , on note $B(C)$ son classifiant. C'est un ensemble simplicial définit par $B(C)_p := \underbrace{C_1 \times_{C_0} \cdots \times_{C_0} C_1}_{p+1\ fois}$.

Si A est un ensemble simplicial , on lui associe sa réalisation géométrique , notée $\mid A \mid$. Le foncteur $\mid \bullet \mid : SEns \to Top$ est l'adjoint à gauche du foncteur $Sing : Top \to SEns$ qui , à un espace topologique X , associe $Sing(X) : p \mapsto Hom_{cont}(S^p, X)$, où $S^p := \{x \in \mathbf{R}^{p+1} / x_i \geq 0 \ et \ \sum x_i - 1 = 0\}$ est le simplexe simplicial standard. Si $t \in A_0$, est un point de A , on pose $\pi_n(A, t) := \pi_n(\mid A \mid, t)$ pour $n > 0$, et $\pi_0(A) := \pi_0(\mid A \mid)$.

Un morphisme $f : A \to B$ de $SEns$ est une cofibration si c'est un monomorphisme , c'est à dire que f est injectif sur chaque objet. C'est une équivalence faible si $\forall \ t \in A_0 \ et \ \forall \ n > 0 \ f_* : \pi_n(A, t) \to \pi_n(B, f(t))$ est un isomorphisme , ainsi que $f_* : \pi_0(A) \to \pi_0(B)$. f est une cofibration triviale si c'est une cofibration et une équivalence faible.
Enfin , f est une fibration si elle possède la propriété de relèvement suivante :

pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & A \\ i\downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

où i est une cofibration triviale , il existe un morphisme $w : D \to A$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & A \\ i\downarrow & \overset{w}{\nearrow} & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

Si l'unique morphisme $A \to *$ est une fibration , on dit que A est fibrant. Ce qui est équivalent au fait que A est un ensemble simplicial de Kan ([M]).
Il existe un foncteur $Ex^\infty : SEns \to SEns$ et un morphisme naturel $Id \to Ex^\infty$ tel que $A \to Ex^\infty(A)$ soit une cofibration triviale , et $Ex^\infty(A)$ est fibrant.
Par l'intermédiare de cette construction , on supposera toujours que les ensembles simpliciaux rencontrés sont fibrants. En particulier , toute équivalence faible admettra alors un inverse à homotopie près ([M]).

Définition 2.1 *Soit $G_\bullet$ un groupe abélien simplicial (i.e. un objet de $SAb := Ab^{\Delta^{op}}$). On définit le complexe normalisé par*

$$N(G_\bullet)_n := \bigcap_{j=1}^{j=n-1} Ker\delta_n^j$$

et la différentielle est induite par δ_0.

Si on note $C^{\leq 0}(Ab)$ la catégorie des complexes de groupes abéliens nuls en degré positif , N devient un foncteur $SAb \to C^{\leq 0}(Ab)$

Proposition 2.2 *Le foncteur N possède un adjoint à droite $K : C^{\leq 0}(Ab) \to SAb$ qui induit une équivalence de catégories une fois que l'on a localisé SAb le long des équivalences faibles , et $C^{\leq 0}(Ab)$ le long des quasi-isomorphismes.*

Le foncteur K est la construction de Dold-Puppe décrite dans ([M]).

Si I est une petite catégorie , la catégorie des I-diagramme dans $SEns$ est la catégorie $SEns^I$ des foncteurs covariants $I \to SEns$. L'ensemble des morphismes dans cette catégorie sera noté $Hom_I(-,-)$.On définit le I-diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} I/- & : & I & \to & SEns \\ & & i & \mapsto & B(I/i) \end{array}$$

avec I/i désignant la catégorie des objets de I muni de morphisme vers i.

Définition 2.3 *[B-K] Le foncteur $Hom_{sI}(I/-,-) : SEns \to SEns^I$ défini par*

$$\begin{array}{rcccl} Hom_{sI}(I/-,A) & : & I & \to & SEns \\ & & i & \mapsto & Hom_s(B(I/i),A) \end{array}$$

possède un adjoint à droite noté $Holim_I$.

Le foncteur $Holim_I$ est la "limite projective homotopique". Par exemple , si I est la catégorie définie par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \downarrow \\ 2 & \to & 0 \end{array}$$

alors $Holim_I \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & & \downarrow \\ A_2 & \to & A_0 \end{pmatrix}$ est le produit fibré homotopique $A_2 \underset{A_0}{\overset{\sim}{\times}} A_1$.
Les deux propriétés essentielles de la limite homotopique sont données dans la proposition suivante. Pour la démonstration on renvoie à [B-K].

Proposition 2.4 *[B-K] Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux I-diagrammes et $f : A \to B$ un morphisme. Si f_i est une équivalence faible (resp. une fibration) $\forall\ i$, alors $Holim_I(f) : Holim_I(A) \to Holim_I(B)$ est aussi une équivalence faible (resp. une fibration).*

2.1.2 Préfaisceaux simpliciaux

Rappelons la théorie de la cohomologie généralisée de Jardine ([J2]).

Soit C un site , et $SPr(C)$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles simpliciaux. Si F et G sont deux préfaisceaux simpliciaux on définit l'espace des morphismes $Hom_s(F,G)$ par $Hom_s(F,G)_p := Hom_{SPr(C)}(F\times\Delta^p,G)$. Une équivalence d'homotopie $F\to G$ est un chemin de F à G dans $Hom_s(F,G)$. De même , on peut définir le préfaisceau des morphismes $\mathcal{HOM}(F,G)$, défini par

$$\begin{array}{ccc} C & \to & SEns \\ U & \to & Hom_s(F_{|U},G_{|U}) \end{array}$$

Ainsi $\Omega F := \mathcal{HOM}_s(S^1,F)$ est le préfaisceau des lacets libres de F. Si (F,t) est un préfaisceau simplicial pointé , on notera $\Omega_*F := \mathcal{HOM}_s((S^1,*),(F,t))$, l'espace des morphismes pointés de S^1 vers F. C'est le préfaisceau des lacets de F de base t.

Si t est un point global de F (i.e. section globale de F_0) , on définit les préfaisceaux d'homotopie associés à F par

$$\begin{array}{lllll} \pi_0^{Pr}(F) & : C & \to & & Ens \\ & U & \mapsto & & \pi_0(F(U)) \\ \pi_n^{Pr}(F,t) & : C & \to & Gp & (Ab \; si \; n \geq 1) \\ & U & \mapsto & & \pi_n(F(U), t_{|U}) \end{array}$$

Les faisceaux d'homotopie $\pi_0(F)$ et $\pi_n(F,t)$ sont les faisceaux associés aux préfaiceaux $\pi_0^{Pr}(F)$ et $\pi_n^{Pr}(F,t)$.

Un morphisme de préfaisceaux simpliciaux $f : F \to G$ est

- une cofibration , si c'est un monomorphisme (i.e. f est une cofibration sur chaque objet $U \in C$)
- une équivalence faible , si $\forall\, n$, $\forall\, X \in C$ et pour tout point global $t \in F(X)$, les applications induites

$$f_* : \pi_0(F) \to \pi_0(G)$$

$$f_* : \pi_n(F,t) \to \pi_n(G, f(t))$$

  sont des isomorphismes de *faisceaux* sur C/X
- une fibration si f possède la propriété de relèvement des cofibrations triviales comme dans le cas des ensembles simpliciaux

Un préfaisceau simplicial F est fibrant si $F \to *$ est une fibration.

Théorème 2.5 *[J2] Avec ces définitions la catégorie $SPr(C)$ est une catégorie de modèles fermée.*

En particulier pour tout préfaisceau simplicial F il existe une cofibration triviale $i : F \to HF$ où HF est un préfaisceau simplicial fibrant. L'espace de cohomologie de C à coefficient dans F est $H(C,F) := HF(C) := Hom_s(*, HF)$. Si C possède un objet final X , on obtient un isomorphisme canonique $HF(X) \simeq H(C,F)$.

Définition 2.6 *[J2] Soit (F,t) un préfaisceau simplicial pointé sur C. La cohomologie de C à coefficient dans F est*

$$H^m(C,F) := \pi_{-m}(H(C,F), t) \qquad pour \; -m \geq 1$$

$$H^0(C,F) := \pi_0(H(C,F))$$

Si $(F_i)_{i\in I}$ est un I diagramme dans $SPr(C)$, on peut définir sa limite homotopique objet par objet

$$\begin{array}{rccc} Holim_I(F_i): & C & \rightarrow & SEns \\ & V & \mapsto & Holim_I(F_i(V)) \end{array}$$

Ainsi si $(F,t) \xrightarrow{f} (G,u)$ est un morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointés , on définit la fibre homotopique de f par

$$Hofibre(f,u) := Holim \begin{pmatrix} (F,t) & \xrightarrow{f} & (G,u) \\ & & \uparrow \\ & & * \end{pmatrix}$$

Avec cette définition on dit que $(F,t) \rightarrow (G,u) \xrightarrow{f} (H,v)$ est une suite exacte (ou suite de fibration) si f est une fibration , et le moprhisme naturel $(F,t) \rightarrow Hofibre(f,v)$ est une équivalence faible.

Les principales propriétés de la cohomologie à coefficients dans des préfaisceaux simpliciaux sont résumées dans la proposition suivante. Comme on peut s'y attendre , la cohomologie relève les fibrations locales et équivalences faibles locales (pour la définition des fibrations locales voir [J2]. Lorsque C a suffisement de points , c'est dire que c'est une fibration fibres par fibres).

Proposition 2.7 *[J2]*

1. *Si* $(F,t) \rightarrow (G,u) \rightarrow (H,v)$ *est une suite de fibration* locale *alors* $(H(C,F),t) \rightarrow (H(C,G),u) \rightarrow (H(C,H),v)$ *est une suite de fibration d'ensembles simpliciaux pointés*

2. *Si* $f : F \rightarrow G$ *est une équivalence faible , alors l'application induite* $f_* : H(C,F) \rightarrow H(C,G)$ *aussi*

3. *Si* (F,t) *est un préfaisceau simplicial pointé , alors il existe une suite spectrale*
$$E_2^{p,q} = H^q(C, \pi_q(F,t)) \Rightarrow H^m(C,F)$$

Rappelons que la propriété (3) provient de la décomposition de Postnikov de F ([J2]) , qui se fait naturellement objet par objet.

Soit X un objet de C et $U \rightarrow X$ un recouvrement. Alors le nerf de U/X est l'objet simplicial de C définit par

$$\mathcal{N}(U/X)_p := \underbrace{U \underset{X}{\times} U \dots \underset{X}{\times} U}_{p+1\ fois}$$

et les faces et dégénéréscences induites par les projections et les diagonales.

Définition 2.8 *[Th] L'espace de cohomologie de Čech de X à coefficients dans F pour le recouvrement U est*

$$\check{H}(U/X, F) := Holim_{[p]\in\Delta}\, F(\mathcal{N}(U/X)_p)$$

Les relations entre cohomologie de X est cohomologie de Čech sont données par le théroème de descente.

Théorème 2.9 *Soit X un objet de C et U/X un recouvrement de X , et F un préfaisceau simplicial sur C. Alors le morphisme naturel*

$$H(X, F) = HF(X) \to \check{H}(U/X, HF)$$

est une équivalence faible.

<u>**Preuve:**</u> Voir [T].

Si un préfaisceau simplicial F vérifie la conclusion du théorème précédent on dira qu'il vérifie la propriété de Mayer-Vietoris pour le recouvrement U/X.

Définition 2.10

1. *Si un préfaisceau simplicial F vérifie la propriété de Mayer-Vietoris pour tout $X \in C$ et tout recouvrement U/X , on dira que F est un champ.*
2. *Un préfaisceau F tel que , pour tout $X \in C$ le morphisme naturel $F(X) \to HF(X)$ est une équivalence faible , est appelé flasque ("flabby").*

Ainsi le théroème 2.9 se traduit par le fait que tout préfaisceau simplicial fibrant est un champ. De même tout préfaisceau simplicial flasque est un champ. La réciproque est aussi vraie (voir 2.11).

Le théorème 2.5 implique que pour tout préfaisceau simplicial F , il existe une cofibration triviale $F \to F^\circ$ avec F° qui est flasque , donc un champ. On dira que , $F \to F^\circ$ est une *résolution flasque* de F et que F° est le *champ associé à F* . Remarquer que la propriété d'être fibrant implique que "l'espace des résolutions flasques de F est contractile". Ce qui revient à dire que si on choisit pour chaque F un champ associé F° , alors la correspondance $F \leadsto F^\circ$ est un foncteur *flexible* (voir [S]) de $SPr(C)$ dans lui même.

Remarque 2.11 *Comme les sections globales d'un champ F sont déterminées de façon locale , une équivalence faible de champ $f : F \to G$ est en fait une équivalence faible globale. C'est à dire que pour tout objet U de C , $f : F(U) \to G(U)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. De plus comme les ensembles simpliciaux que l'on considère sont fibrants , f est en fait une équivalence faible globale. Ceci entraine qu'un champ F est un préfaisceau* *simplicial flasque. On distinguera les notations de la façon (arbitraire) suivante : on appellera champ les objets géométrqiues (champ de Deligne-Mumford) , et préfaisceau flasque l'orsqu'il s'agit de coefficients de cohomologie (G-théorie par exemple).*

On notera $\mathcal{CH}(C)$ l'espace des préfaisceaux simpliciaux flasques sur le site C. Tout comme on recolle des faisceaux on peut recoller des champs. Ce qui s'exprime en disant que le préfaisceau simplicial suivant

$$\begin{array}{ccc} C & \to & SEns \\ U & \mapsto & \mathcal{CH}(C/U) \end{array}$$

est lui même flasque.

La plupart des préfaisceaux simpliciaux que l'on utilisera seront des préfaisceaux pointés par 0. Les points de bases seront toujours sous-entendus , et égaux à 0.

Pour finir notons que si A est un préfaisceau de groupes abéliens sur C , et $F = K(A, n) := K(A[n])$, où $A[n]$ désigne le complexe égal à A en degré $-n$ et nul partout ailleur , alors on a un isomorphisme canonique

$$H^m(C, F) \simeq H^{n+m}(C, A) \qquad 0 \geq m \geq -n$$

2.2 Champs algébriques

Les références pour tout ce chapitre , et toutes les propriétés générales des champs , sont [L-M] , et [D-M]. On garde les même notations qu'au paragraphe précédent , avec $C = (Sch/k)_{et}$ le grand site des schémas quasi-projectifs sur un corps k , muni de la topologie étale. Une variété est un objet de C.

Définition 2.12 *Soit n un entier naturel.*

1. *Un préfaisceau simplicial sur C est n-tronqué si pour $m \geq n+1$ les préfaisceaux d'homotopie $\pi_m^{Pr}(F, t)$ sont nuls pour tout point global $t \in F$*
2. *Un n-champ est un champ qui est n-tronqué*

Si $n = 0$, un n-champ est tout simplement un faisceau d'ensemble sur C.

Le cas qui nous interesse pour la suite est le cas $n = 1$. Pour simplifier les notations on dira champ pour 1-champ , et préfaisceau simplicial flasque pour ∞-champ. De même , pour un diagramme de champs sur C

$$\begin{array}{ccc} F & \to & H \\ & & \uparrow \\ & & G \end{array}$$

on écrira $F \underset{H}{\times} G$ pour la limite homotopique

$$Holim \begin{pmatrix} F & \to & H \\ & & \uparrow \\ & & G \end{pmatrix}$$

et même $F \times G$ quand les morphismes vers H sont clairs.

Définition 2.13 *1. Un champ F est représentable s'il existe un espace algébrique X de type fini et séparé sur k et une équivalence faible de préfaisceaux simpliciaux $F \simeq X$*

2. Soit $F \xrightarrow{f} G$ un morphisme de champs. On dit que f est représentable si pour tout objet U de C et tout morphisme $U \to G$ la fibre $f^{-1}(U) := F \times U$ est représentable

Si $f : F \to G$ est un morphisme représentable , pour tout schéma U et tout morphisme $U \to G$ de C , on a un morphisme induit par changement de base $f : f^{-1}(U) \to U$ qui est un morphisme d'espaces algébriques. Dans ce cas si $\mathcal{P}$ est une propriété de morphismes d'espaces algébriques , de nature locale pour la tologie étale , on dira que f possède $\mathcal{P}$ si tous les changements de bases $f : f^{-1}(U) \to U$ possèdent $\mathcal{P}$.

Par exemple $\mathcal{P}$ peut être *étale , lisse , plat , non-ramifié , fini , de type fini , séparé , régulier , un fibré vectoriel où projectif* ...

Définition 2.14 *[D-M] Un champ F sur C est algébrique (de Deligne-Mumford) s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

1. Le morphisme diagonal

$$\Delta : F \to F \underset{Speck}{\times} F$$

est représentable , fini

2. Il existe un schéma X et un morphisme étale surjectif

$$p : X \to F$$

La première condition implique automatiquement que le morphisme p est toujours représentable. En effet dire que Δ est représentable est équivalent à dire que tout morphisme d'un schéma $U \to F$ est représentable.
Si $p : X \to F$ est un morphisme comme dans (2) , on construit le nerf de p , noté $X_\bullet$. Il est défini par

$$X_q := \underbrace{X \underset{F}{\times} X \ldots \underset{F}{\times} X}_{q+1\ fois}$$

Alors $X_\bullet$ est un groupoide dans C qui représente un préfaisceau simplicial 1-tronqué. Mais ce n'est généralement pas un champ. En fait F est le *champ associé* à $X_\bullet$. C'est à dire qu'il existe une équivalence faible canonique

$$F \simeq (X_\bullet)^\circ$$

Exemple:

L'exemple que l'on donne ici est essentiel. En effet on verra (2.18) que tout champ algébrique est localement de cette forme.

Soit H un groupe fini qui opère sur un schémas V séparé sur k. On veut construire le champ quotient $[V/H]$ dont la géométrie doit être la géométrie H-équivariante de V.
Soit $f : V_\times H \to V$ l'action de H sur V. On peut définir le groupoide classifiant $B(V/H)$ de la façon habituelle

$$\begin{array}{c} B(V/H)_0 = V \\ B(V/H)_1 = V_\times H \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} s: & B(V/H)_1 & \to & B(V/H)_0 \\ & (v,h) & \mapsto & v \\ b: & B(V/H)_1 & \to & B(V/H)_0 \\ & (v,h) & \mapsto & f(v,h) \\ i: & B(V/H)_1 & \to & B(V/H)_1 \\ & (v,h) & \mapsto & (f(v,h),h^{-1}) \\ e: & B(V/H)_0 & \to & B(V/H)_1 \\ & v & \mapsto & (v,e) \end{array}$$

où s (resp. b , i , e) est le morphisme "source" (resp. "but" , "inverse" , "élément neutre") du groupoide $B(V/H)$.
Alors $B(V/H)$ représente un préfaisceau simplicial dont le champ associé est par définition le champ $[V/H]$.

On peut expliciter en terme de champ. Pour X un schéma de C , on a une équivalence faible fonctorielle en X , entre $[V/H](X)$ et le classifiant du groupoide des H-torseurs $P \to X$ munit de morphisme $h : P \to V$ H-équivariant. Dans ce cas le morphisme canonique de groupoide $V \to B(V/H)$, induit un morphisme de champs associés $V \to [V/H]$ qui est un H-torseur , et donc vérifie la condition (2) de la définition 2.14. Quand à la condition (1) , le morphisme diagonal Δ , est représentable fini car H est fini. Ceci implique que $[V/H]$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford.

Si F est un champ , le site F_{et} est le site défini par :
les objets sont les F-schéma $f : X \to F$, un morphisme de (X,f) á (Y,g) est un couple (h,H) , avec $h : X \to Y$ et H une homotopie de $g \circ h$ vers f , et (h,H) est couvrant si h est surjectif étale.
Ce site est muni d'un faisceau d'anneau induit par les faisceaux structuraux des

schémas de F_{et}. On le note $\mathcal{O}_F$. Il est à noter que le site annelé $(F_{et}, \mathcal{O}_F)$ est noethérien , car l'on s'est restreint aux schémas de type fini sur $Speck$. Cette dernière remarque justifie la définition suivante.

Définition 2.15 *La catégorie des faisceaux cohérents sur un champ algébrique F est la catégorie $Coh(F_{et}, \mathcal{O}_F)$ des faisceaux de $\mathcal{O}_F$-modules localement de présentation finie sur F_{et}.*

On la note $Coh(F)$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur F , son support est le plus grand sous-champ fermé et réduit Y de F tel que $\mathcal{F}$ soit nul sur le complémentaire $F - Y$.

On peut aussi définir la catégorie des fibrés vectoriel sur F , $Vect(F)$, comme la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_F$-modules localement libres de rang fini sur F_{et}.

Par extension , F_{et} désignera par la suite , le site des champs algébriques G , munis de morphismes étales $G \to F$, et dont les familles couvrantes sont les morphismes $G \to G'$ qui sont étales et surjectifs. Comme tout champ algébrique étale sur F est recouvert par un schéma étale sur F , les deux sites ont des topos équivalents. La cohomologie de F_{et} est donc bien définie.

On dira que $p : F \to G$ est propre s'il possède la propriété habituelle suivante: pour tout anneau de valuation discrete (A, m) de corps des fractions K et tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SpecK & \to & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ SpecA & \to & G \end{array}$$

il existe un morphisme $SpecA \to F$ qui complète le diagramme.
Remarquons qu'un morphisme propre n'est pas forcement *représentable* .

Définition 2.16 *[G2] Soit F un champ de Delign-Mumford. Un espace de modules pour F est un espace algébrique M séparé sur k , et muni d'un morphisme propre*

$$p : F \to M$$

tel que

1. *p est universel pour les morphismes vers les espaces algébriques séparés sur $Speck$*

2. *pour tout corps algébriquement clos L extension de k , le morphisme induit*

$$p : \pi_0(F(SpecL)) \to M(SpecL)$$

est bijectif

Exemple:Si $F = [V/H]$ est un champ quotient d'une variété par un groupe fini , alors la variété quotient $M = V/H$ est l'espace des modules de F.

Le principal résultat est le théorème d'existence. Le corollaire est un corollaire de la démonstration. Il est cité dans [F-C].

Théorème 2.17 *Tout champ algébrique de Deligne-Mumford possède un espace de modules*

Corollaire 2.18 *Soit F un champ algébrique et $p : F \to M$ la projection sur son espace de modules. Il existe un recouvrement étale $U \to M$ tel que le champ induit $F \underset{M}{\times} U$ soit équivalent à un champ de la forme $[V/H]$, où V est un schéma de C , H un faisceau constant sur V , de groupes finis opérants sur V , et $U \simeq V/H$.*

A l'aide des espaces de modules on peut facilement décrire les "points" ainsi que les sous-champs fermés d'un champ algébrique. Pour cela on rappelle qu'un sous-champ G de F est fermé (resp. ouvert) si l'inclusion canonique $G \hookrightarrow F$ est représentable par une immersion fermée (resp. ouverte).

Tout d'abord le corollaire montre que les sous-champs fermés de F sont les sous-champs de la forme $F_Y := F \underset{M}{\times} Y$ où Y est un sous-espace algébrique fermé de M. De plus Y est l'espace des modules deF_Y. On dira que F_Y est de codimension d dans F si Y est de codimension d dans M.

Définition 2.19 *Un point de F est un point de M. Si $SpecL \to M$ est représentant d'un point x de F , alors la gerbe résiduelle de F en x est $\widetilde{x} := F \underset{M}{\times} SpecL$.*

A propos du terme "gerbe" dans la définition précédente. On rappelle qu'un 1-champ F est une gerbe sur M s'il est localement (pour la topologie étale sur M) équivalent à un champ de la forme $[V/H]$, où H est un groupe opérant trivialement sur V. On dit que la gerbe est triviale si le morphisme naturel $F \to M$ possède une section $M \to F$. Ce qui est équivalent au fait que F est équivalent à $[M/H]$, avec H un groupe fini.

Soit x est un point de F , et $k(x)$ le corps résiduel de x dans M. Alors $\widetilde{x}$ est une gerbe étale sur $k(x)$. Soit K une cloture algébrique de $k(x)$. Alors la gerbe induite par changement de base $\widetilde{x}_K \to SpecK$, posséde des sections $SpecK \to \widetilde{x}_K$. Le choix d'une telle section définit une équivalence de champ sur $SpecK$

$$\widetilde{x}_K \simeq [SpecK/H_x]$$

où H_x est un groupe fini , défini par la section. Le choix d'une autre section , induit un automorphisme interieur de H_x. Ainsi , la classe de conjugaison de H_x est bien défini.

Définition 2.20 *La classe du groupe H_x est apellé (par abus de language) le groupe d'isotropie du point x de F.*

On peut voir à l'aide du corollaire 2.18 que tout champ algébrique F possède un sous-champ ouvert dense F° qui est une gerbe. En effet si $F = [V/H]$, $U = V/H$ et $f : H \to Aut_k(V)$ est l'action de H sur V. Soit $H_0 = Kerf$. Comme l'action induite de $K = H/H_0$ ne fixe pas le point générique de V , il existe un sous-schéma ouvert $U^\circ \hookrightarrow U$ tel que $F^\circ = F \underset{U}{\times} U^\circ$ soit une gerbe sur V/K. En intègrant cette construction sur M_{et} on a le résultat annoncé.

En particulier , si x est un point de F , la gerbe résiduelle $\widetilde{x}$ est *vraiment une gerbe* sur $SpecL$.

Terminons par la définition du champ des ramifications.

Définition 2.21 *Soit F un champ sur $(Sch/k)_{et}$. Alors le champ des ramifications de F est le champ*

$$I_F := F \underset{F \underset{k}{\times} F}{\times} F$$

pour le morphisme diagonal $\Delta : F \to F \underset{k}{\times} F$

On dispose d'un morphisme canonique $\pi : I_F \to F$. Si F est un champ de Deligne-Mumford , alors π est représentable fini , et fait de I_F un F-champ en groupes.
Dans le cas où $F = [V/H]$ est un champ quotient par un groupe fini on a une équivalence canonique

$$I_F \simeq [\hat{V}/H]$$

avec $\hat{V} = \{(x,h) \in X \times H / h.x = x\}$, et l'action de H est donnée par

$$h'.(x,h) = (h'.x, h'hh'^{-1})$$

Or on a une décomposition

$$\hat{V} = \coprod_{h \in H} V^h$$

où V^h est la sous-variété des points fixes de h. Ainsi on a une déscription complète de I_F

$$I_F \simeq \coprod_{[h] \in c(H)} [V^h / Z_h]$$

avec $c(H)$ l'ensemble des classes de conjugaisons de H , et Z_h le sous-groupe centralisateur de h dans H.

3 G-théorie des champs de Deligne-Mumford

Dans cette section on étudie la K-théorie des faisceaux cohérents sur un champ de Deligne-Mumford F sur un corps k. Aprés avoir montré que l'on dispose des mêmes propriétès générales que dans le cas des schémas (localisation , homotopie , axiome du projectif ...) , on s'interresse aux propriétés de descente étale. On démontre un théorème de descente analogue á celui de Brown pour la G-théorie des schémas. Enfin , on utilise ce dernier résultat pour donner deux "calculs" des espaces de G-théorie d'un champ de Deligne-Mumford. Ce sont ces derniers énoncés qui permettront de ramener toutes les démonstrations aux cas connus des schémas.

3.1 Généralités

F désigne un champ de Deligne-Mumford sur k , $Coh(F)$ (resp. $Coh(F)^p$) la catégorie des faisceaux cohérents sur F (resp. des cohérents dont le support est de codimension $\geq p$ dans F).

Tout au lond de cette section et jusqu'á la fin de l'article , on supposera que k est algébriquement clos. Hypothèse simplificatrice mais qui n'est pas indispensable. Elle peut-etre éliminée par descente galoisienne par exemple (voir 3.10).

Définition 3.1 *L'espace de G-théorie de F est*

$$G(F) := K(Coh(F))$$

Les espaces $K(Coh_p(F))$ sont notés $G^p(F)$ et

$$G^{p/p+1}(F) := G^p(F)/G^{p+1}(F)$$

Les groupes de G-théorie de F sont $G_i(F) := \pi_i(G(F), 0)$.

De manière analogue on peut définir $K(F) := K(Vect(F))$, ainsi que $K_i(F) := \pi_i(K(F), 0)$.

Si $f : F \to F'$ est un morphisme représentable plat , alors le foncteur exact

$$f^* : Coh(F') \to Coh(F)$$

induit un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$f^* : G(F') \to G(F)$$

Si un morphisme propre (représentable ou pas) $p : F \to F'$ est un morphisme de dimension cohomologique fini ($R^i p_* = 0$ pour i assez grand) , alors par les méthode de [Q] , le foncteur

$$p_* : Coh(F) \to Coh(F')$$

induit un morphisme bien déterminé á homotopie prés

$$p_* : G(F) \to G(F')$$

De cette façon , $F \mapsto G(F)$ est un foncteur contravariant pour les morphismes plats représentables , et covariant (flexible [S]) pour les morphismes propres de dimension cohomologique fini.
De la même maniere , $F \mapsto G(F)$ est contravariant (flexible) pour les morphismes de Tor-dimension finie (par exemple si F' est lisse).
Remarquer aussi qu'un morphisme propre est toujours de dimension cohomologique fini s'il est représentable , ou si les champs vérifient l'hypothèse 3.12.

Enfin , si V est un faisceau localement libre sur F , alors le produit tensoriel par V est exact , on peut donc définir le produit par V

$$V \otimes - : G(F) \to G(F)$$

Le théorème de localisation de Quillen ([Q]) implique que $\forall p$

$$G^{p+1}(F) \to G^p(F) \to G^{p/p+1}(F)$$

est une suite exacte de fibration. De plus on connait l'espace de droite.

Proposition 3.2 *Soit $F^{(p)}$ l'ensemble des points de codimension p de F , et $\forall x \in F^{(p)}$, $\widetilde{x}$ la gerbe résiduelle de F au point x. Il existe alors une équivalence faible canonique*

$$\bigvee_{x \in F^{(p)}} G(\widetilde{x}) \xrightarrow{\simeq} G^{(p/p+1)}(F)$$

<u>Preuve:</u> Si x est un point de F , on note $\overline{x}$ le sous-champ intègre de point générique x. Si $\mathcal{I}_x$ est l'idéal de $\overline{x}$, $\overline{x}_{(n)}$ désignera le sous-champ défini par l'idéal $(\mathcal{I}_x)^n$.
On rappelle alors que l'on a une équivalence de catégories

$$Coh_p(F)/Coh_{p+1}(F) \simeq \bigoplus_{x \in F^{(p)}} \varinjlim_{n} \varinjlim_{U, x \in U} Coh(U \cap \overline{x}_{(n)})$$

où U parcours tous les sous-champs ouverts contenant le point x. Le résultat provient alors des deux lemmes suivants et de la propriété de localisation [Q].

Lemme 3.3 *Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *un système projectif de champs algébriques avec des morphismes de transitions affines et plats. Alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{i \in I} G(F_i) \longrightarrow G(\varprojlim_{i \in I} F_i)$$

est une équivalence faible.

Lemme 3.4 *Soit* F *un champ algébrique , et* F_{red} *le champ réduit associé. Alors l'immersion* $F_{red} \to F$ *canonique induit une équivalence faible*

$$G(F_{red}) \simeq G(F)$$

Preuve: Le premier lemme provient de la continuité du foncteur K ([Q]) et de l'équivalence de catégories

$$Coh(\varprojlim_{i \in I} F_i) \simeq \varinjlim_{i \in I} Coh(F_i)$$

Le second est une application du théorème de dévissage ([Q]). En effet , on prend $A = Coh(F)$, et $B = Coh(F_{red})$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de F_{red} dans F. Si M est objet de A , il existe un entier m avec $\mathcal{I}^m M = 0$. On peut alors filtrer M par

$$0 = \mathcal{I}^m M \subseteq \mathcal{I}^{m-1} M \ldots \subseteq \mathcal{I} M \subseteq M$$

$\square$

Si F est un champ algébrique , on note $(CFl/F)_{et}$ le site des champs algébriques plats sur F muni de la topologie étale. Alors G est un préfaisceau simplicial sur $(CFl/F)_{et}$. Comme pour le cas des schémas , on a

Proposition 3.5 *Soit* F *un champ algébrique.*
Le préfaisceau simplicial G *sur* $(CFl/F)_{et}$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. *(localisation) si* F' *est un sous-champ fermé de* F *et* $U = F - F'$ *le sous-champ ouvert complémentaire. Alors la suite induite par les inclusions*

   $$G(F') \to G(F) \to G(U)$$

   est une suite de fibration

2. *(axiome du projectif) Soit* $p : V \to F$ *un fibré vectoriel de rang* r *, et* $\pi : P \to F$ *le fibré projectif asocié. Alors on a une équivalence faible*

   $$\begin{array}{ccc} G(F) & \to & G(P) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \bigoplus_{i=0}^{i=r} p^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_P(i) \end{array}$$

3. *(homotopie) si $p : V \to F$ est un fibré vectoriel , alors $p^* : G(F) \to G(V)$ est une équivalence faible*

Preuve: (1) Soit $Coh(G)_F$ la catégorie des cohérents sur G de support contenu dans F. On va montrer qu'il existe une équivalence de catégorie

$$\frac{Coh(G)}{Coh(G)_F} \simeq Coh(U)$$

De plus on sait que

$$\frac{Coh(G)}{Coh(G)_F} \simeq \lim_{\vec{n}} Coh(F_n)$$

avec F_n le sous-schéma d'efini par la puissance n-ème de l'idéal de F. La localisation ([Q]) et les lemmes 3.3 , 3.4 implique (1).

Comme pour les schémas l'équivalence de catégorie précédente vient du fait que tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur U s'étend à un faisceau cohérent $\mathcal{F}'$ sur F. Fait qui vient de

Lemme 3.6 *Tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{N}$ sur F_{et} est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents.*

Preuve: Soit $\mathcal{N}$ un faisceau quasi-cohŕent sur F et $p : X \to F$ un recouvrement étale. Alors , $p^*\mathcal{N}$ est quasi-cohérent , donc limite inductive des ses sous-faisceaux cohérents

$$p^*\mathcal{N} = \lim_{\vec{\alpha}} \mathcal{G}_\alpha$$

On définit le faisceau quasi-cohérent sur F , $\mathcal{F}_\alpha$ par le carré cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\alpha & \to & \mathcal{F} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ p_*\mathcal{G}_\alpha & \to & p_*p^*\mathcal{F} \end{array}$$

Alors

$$\mathcal{F} = \lim_{\vec{\alpha}} \mathcal{F}_\alpha$$

De plus , $p^*\mathcal{F}_\alpha$ est un sous-faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{G}_\alpha$. Or p est un recouvrement étale , donc fidèlement plat. On en déduit que $\mathcal{F}_\alpha$ est cohérent.

Soit $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion. Alors on sait que l'on a un isomorphisme canonique $i^*i_*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$. Or $i_*(\mathcal{F})$ est quasi-cohérent , et donc limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Et donc

$$\mathcal{F} \simeq \lim_{\overrightarrow{\alpha \in A}} i^*\mathcal{F}_\alpha$$

or $\mathcal{F}$ est cohérent , donc il existe $\alpha \in A$ avec $\mathcal{F} \simeq i^*\mathcal{F}_\alpha$. $\mathcal{F}_\alpha$ est le faisceau cohérent cherché.
$\square$

(3) provient de (2) appliquer à l'immersion

$$\mathbf{P}(V) \hookrightarrow \mathbf{P}(V \oplus \mathcal{O}_F)$$

(2) On utilise le théorème 3.7 , qui permet de se ramener au cas où F est un champ quotient. Puis on utilise [Th2] , dans lequel Thomason démontre l'axiome du projectif pour tout champ quotient d'un schéma par un schéma en groupe quelconque.
On peut aussi refaire la preuve de Quillen pour des schémas ([Q]) sans pratiquement rien changer.
$\square$

3.2 Théorème de descente

Comme on travaille avec la topologie étale , il est raisonnable (et même indispensable) de travailler avec la G-théorie á coefficients rationnels. On pose donc , pour tout champ F (voir [Th])

$$G(F)_{\mathbf{Q}} := G(F) \otimes \mathbf{Q}$$

Remarquons tout d'abors que le préfaisceau $G_{\mathbf{Q}}$ *n'est pas* flasque sur F_{et}. En effet , prenons par exemple $F = [V/H]$, avec H fini qui opère trivialement sur V. Alors , comme $G_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur V_{et} , on sait que ([T])

$$H(F_{et}, G_{\mathbf{Q}}) \simeq holim_H G(V) \otimes \mathbf{Q} \simeq G(V) \otimes \mathbf{Q}$$

Mais il est clair que le morphisme d'oubli de l'action de H

$$G_{\mathbf{Q}}(F) \to G_{\mathbf{Q}}(V)$$

n'est pas une équivalence faible (sauf si $H = \{e\}$). Ainsi il est en général faux que

$$G_{\mathbf{Q}}(F) \simeq H(F_{et}, G_{\mathbf{Q}})$$

En réalité , on verra que la projection sur l'espace des modules

$$p : F \to M$$

induit toujours une équivalence faible

$$p_* : H(F_{et}, G_{\mathbf{Q}}) \simeq G_{\mathbf{Q}}(M)$$

Le théorème de descente est le suivant

Théorème 3.7 *Soit F un champ algébrique et $p : F \to M$ la projection sur son espace des modules.*
Alors $p_*(G_{\mathbf{Q}})$ est flasque sur M_{et}.

Remarquons d'abord que ce théorème généralise le théorème de descente de Brown ([Br-G]). En effet quand F est un schéma , $M = F$ et $p = Id$, et donc le théroème dit que $G_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur F_{et}.

La preuve procède par récurrence sur la dimension de F , afin de se ramener au cas où F est de dimension zéro. Pour traiter ce cas on aura besoin du lemme suivant , qui sera aussi utile par la suite.

Lemme 3.8 *Soit $F \to SpecK$ une gerbe sur un corps K , K^{sp} une clôture séparable de K , et $H = Gal(K^{sp}/K)$. On note $F^{sp} \to SpecK^{sp}$ la gerbe induite. Alors le morphisme canonique $q : F^{sp} \to F$, induit une équivalence faible*

$$q^* : G_{\mathbf{Q}}(F) \to G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})^H$$

<u>Preuve:</u> On commence par éclaircir les notations.
H opère par automorphismes sur $SpecK^{sp}$, et donc , par fonctorialité , on a une opération $H \to Aut_F(F^{sp})$. Donc H opère sur l'espace $G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})$, que l'on voit alors comme un H-diagramme. Dans ce cas

$$G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})^H := Holim_H G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})$$

est l'espace des invariants homotopiques de H.
Comme H est profini , et que $G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})$ est un espace rationnel , la suit spectrale de Bousfield-Kan ([B-K]) dégenerre et donne des isomorphismes canoniques $\pi_m(G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})^H) \simeq G_m(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}}$. De plus par continuité du foncteur G , on a

$$G_m(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}} \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ K \hookrightarrow K_i \; galois \; fini}} G_m(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$$

avec $H_i = Gal(K_i/K)$, et $F_i = F \times_{SpecK} SpecK_i$.
Il reste à montrer que le morphisme naturel $G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$ est une équivalence faible pour tout i.
Soit $p : F_i \to F$ la projection , et m_i l'odre de H_i. Alors la formule de projection implique que

$$p_* \circ p^* = \times m_i : G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F)_{\mathbf{Q}}$$

Et de même

$$p^* \circ p_* = \sum_{h \in H_i} h^* \sim \times m_i : G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}} \to G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$$

Ainsi , $\frac{1}{m_i}p_*$ est un inverse d'homotopie de p^*. $\Box$

Preuve du théorème: On peut toujours supposer que F est réduit.
Si F est de dimension nulle , c'est le lemme précédent.
Dans le cas général , on va démontrer par récurrence descendante sur m , que $p_*G^m_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M_{et}.

Si $m > DimF$, on a $G^m_{\mathbf{Q}} = *$, et le résultat est trivial , car $*$ est fibrant.
Passons de $m+1$ à m. Pour cela on considère la suite de fibrations globales sur M_{et}

$$p_*G^{m+1}_{\mathbf{Q}} \to p_*G^m_{\mathbf{Q}} \to p_*G^{m/m+1}_{\mathbf{Q}}$$

Par récurrence il reste donc à montrer que $p_*G^{m/m+1}_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M_{et}.
Soit $F^{(m)}$ l'ensemble des points de codimension m de F , et pour chaque $x \in F(m)$, $\widetilde{x}$ la gerbe résiduelle sur x. On note $p_x : \widetilde{x} \to x$ la projection.
Pour chaque point $x \in F^{(m)}$, on a un morphisme $\widetilde{x} \to F$, qui induit un morphisme de site

$$\widetilde{x} : \widetilde{x}_{et} \to F_{et}$$

De même , on a des morphismes $x : x \to M$, et donc un morphisme de site induit

$$x : x_{et} \to M_{et}$$

Alors , la proposition 3.2 donne une équivalence faible *globale* canonique

$$G^{m/m+1}_{\mathbf{Q}} \simeq \bigvee_{x\in F^{(m)}} \widetilde{x}_*G_{\mathbf{Q}}$$

Enfin , comme $p_* \circ \widetilde{x}_* = x_* \circ (p_x)_*$, on a une équivalence faible (globale) sur M_{et}

$$p_*G^{m/m+1}_{\mathbf{Q}} \simeq \bigvee_{x\in F^{(m)}} x_* \circ (p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$$

Mais , $\widetilde{x}$ est de dimension nulle , donc $(p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$, est flasque sur x_{et}. De plus , les images directes x_* preservent les préfaisceaux flasques. En conclusion , chaque préfaisceau $x_* \circ (p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M_{et} , et donc la "somme directe" , $\bigvee_{x\in F^{(m)}} x_* \circ (p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$ aussi. Ceci termine la preuve que $p_*G^{m/m+1}_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M_{et} , et par récurrence la preuve du théorème.
$\Box$

Corollaire 3.9 *Le morphisme canonique*

$$G_{\mathbf{Q}}(F) \to H(M_{et}, p_*G_{\mathbf{Q}})$$

est une équivalence faible.

Preuve: Il suffit de prendre les sections globales.
□

Corollaire 3.10 *Soit $Y \to M$ un revêtement galoisien de groupe H , et $p : F' \to F$, le revêtement induit. Alors p induit une équivalence faible*

$$p^* : G_{\mathbf{Q}}(F) \to G_{\mathbf{Q}}(F')^H$$

Preuve: Il suffit d'appliquer le théorème 2.9 au recouvrement $Y \to M$, et le corollaire précédent.
□

Terminons par une application de ce théorème.
Soit $p_* K_{\mathbf{Q}}$ le préfaisceau de K-théorie de F sur M_{et}. On a un morphisme canonique

$$e : p_* K_{\mathbf{Q}} \to p_* G_{\mathbf{Q}}$$

De plus , le produit tensoriel de fibrés vectoriels induit des produits

$$p_* K_{\mathbf{Q}} \wedge p_* K_{\mathbf{Q}} \to p_* K_{\mathbf{Q}}$$

$$p_* K_{\mathbf{Q}} \wedge p_* G_{\mathbf{Q}} \to p_* G_{\mathbf{Q}}$$

Lemme 3.11 *Si F est lisse , alors*

$$e : p_* K_{\mathbf{Q}} \to p_* G_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible sur M_{et}.

Preuve: En utilisant 2.18 , on se ramne à démontrer que le morphisme canonique

$$K_m([V/H]) \to G_m([V/H])$$

avec V lisse , et H un groupe fini opérant sur V , est un isomorphisme. Mais ceci est vrai car tout faisceau cohérent sur F est quotient d'un fibré vectoriel ([Th2]).
□

Le lemme , les considérations précédentes et le théorème 3.7 donnent un produit quand F est lisse

$$G_m(F)_{\mathbf{Q}} \otimes G_n(F)_{\mathbf{Q}} \to G_{m+n}(F)_{\mathbf{Q}}$$

3.3 Théorèmes de dévissages

On entend par "dévissage" de la G-théorie d'un champ de Deligne-Mumford F , une description de l'espace $G(F)$ en fonction d'espaces de G-théories de certains espaces algébriques définis par F.
On donne deux types de dévissage. Le premier exprime les espaces $G(F)_{\mathbf{Q}}$ d'un champ éventuellement singulier en fonctions de certains "espaces des représentations irréductibles". Cette description utilise les images directes , et ne préserve donc pas le produit dans le cas où F est lisse.
Le deuxième résultat exprime les espaces $G(F)_{\mathbf{C}} := G(F) \otimes \mathbf{C}$ d'un champ lisse en fonction de la G-théorie étale du champ I_F des ramifications. Dans ce cas , la construction utilise les images réciproques et préserve donc la structure multiplicative.

On fera l'hypothèse suivante pour toute la suite de l'article. Elle assure en particulier que les morphismes propres sont de dimension cohomologique finie.

Hypothèse 3.12 *Si F est un champ de Deligne-Mumford d'espace des modules M , on suppose que pour tout point $x \in M$, l'ordre du groupe d'isotropie de x est premier á la caractéristique de k.*

3.3.1 Dévissage suivant les représentations irréductibles

On va décomposer l'espace de G-théorie d'un champ F , suivant les représentations irréductibles des groupes d'isotropie des points de F. On commence par les gerbes triviales , puis on généralise dans deux directions. En premier lieu , on va considérer une situation ramifiée , c'est à dire le cas où l'action de H sur V n'est pas triviale. Deuxièmement , à l'aide des théorèmes de descentes , on va intégrer ce dévissage sur M_{et} , et obtenir ainsi une décomposition globale de l'espace $G(F)_{\mathbf{Q}}$.

Commençons par rappeler la définition du champ des représentations irréductibles génériques , $\mathcal{S}$, d'un champ de Deligne-Mumford F.

Définition 3.13 *Soit F un champ de Deligne-Mumford. On définit $\mathcal{A}$ comme le faisceau en groupes sur F_{et} associé au préfaisceau*

$$(s : U \to F) \mapsto \pi_1(F(U), s)$$

Remarquer que $\mathcal{A}$ est le faisceau en groupes sur F_{et} représenté par $\pi : I_F \to F$.

Si H est un groupe , on notera $Rep_k(H)$ l'ensemble des classes de conjugaisons des représentations irréductibles de H sur k. Ainsi , au faisceau $\mathcal{A}$ sur F_{et} on associe un préfaisceau

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{S}: & F_{et} & \to & Ens \\ & U & \mapsto & Rep_k(\mathcal{A}(U)) \end{array}$$

Tout comme le cas où F est un espace algébrique , on peut réaliser le faisceau $\mathcal{S}$ sur F_{et}.
Pour cela , si $E \to F$ est un morphisme étale de champs algébriques , alors E représente un faisceau d'ensembles sur F_{et} défini par

$$\begin{array}{ccc} F_{et} & \to & Ens \\ (U \to F) & \mapsto & Hom_U(U, E \underset{F}{\times} U) \end{array}$$

Proposition 3.14 *Soit E un faisceau d'ensembles finis sur F_{et}. Alors il existe un champ algébrique $F(E)$ munit d'un morphisme étale*

$$q : F(E) \to F$$

qui représente F. De plus , pour deux tels champs $F(E)$ et $F(E)'$, il existe une équivalence (unique à homotopie prés) entre $F(E)$ et $F(E)'$.

On dispose ainsi d'un champ algébrique étale sur F

$$q : F(\mathcal{S}) \to F$$

que l'on note encore

$$q : \mathcal{S} \to F$$

Et donc , si S est l'espace des modules de $\mathcal{S}$, on a un morphisme d'espace algébrique

$$q : S \to M$$

Définition 3.15 *Le champ $\mathcal{S}$ est appelé le champ des représentations irréductibles génériques de F. De même S est l'espace des représentations irréductibles génériques de F.*

Remarquer que le morphisme $q : S \to M$, n'est à priori pas étale. Mais il est fini.
On peut déterminer S dans le cas où $F = [V/H]$ est un champ quotient. Et donc connaitre la structure locale (sur M_{et}) de S.

Soit V une variété , et H un groupe fini opérant sur V. On note H_0 le sous-groupe de H qui opère trivialement. Le groupe H opère par conjugaison sur H_0 et donc par automorphisme sur $R_0 := Rep_k(H_0)$. Ainsi H opère sur la variété

$V \times R_0$. Alors la projection $V \times R_0 \to V$ est un morphisme H-équivariant , qui induit un morphisme étale

$$[V \times R_0/H] \to [V/H]$$

Le champ $\mathcal{S}$ est équivalent á $[V \times R_0/H]$, et donc

$$S = (V \times R_0)/H$$

Cette description permet de voir que $q : S \to M$ est un morphisme fini , qui est localement de la forme

$$(V \times R_0)/H \to V/H$$

Exemples:

- Si $F = [V/H]$, où H opère trivialement sur V. Alors $H_0 = H$, et donc $\mathcal{S}$ est le faisceau constant associé à R_0 sur F_{et}. Dans ce cas $S = M \times Rep_k(H)$ est étale sur M.

- Si F est une gerbe de groupe H sur M_{et}. Si on intègre la construction précédente sur M_{et} , on obtient un espace algébrique S étale sur M , qui représente un faisceau localement constant de fibre $Rep_k(H)$.
  On peut même préciser la monodromie de ce faisceau. Pour cela , on rappelle ([Gi]) que chaque gerbe sur M_{et} détermine un $Out(H)$-torseur. Mais on a un morphisme de groupe

  $$Out(H) \to Aut(Rep_k(H))$$

  Ainsi , si le $Out(H)$-torseur est caractérisé par un morphisme

  $$\pi_1^{et}(M, \bar{x}) \to Out(H)$$

  on obtient un morphisme induit

  $$\pi_1^{et}(M, \bar{x}) \to Aut(Rep_k(H))$$

  qui est la monodromie du faisceau localement constant S sur M_{et}.

- Supposons qu'il existe un recouvrement étale $U \to M$ tel que le champ induit sur U soit équivalent à $[V/H]$, avec H un groupe *abélien* fini. Dans ce cas l'opération de H sur R_0 est triviale , et donc localement $S = M \times R_0$. Ainsi , $q : S \to M$ est un revêtement étale de fibre R_0.

L'intérêt de l'espace S est qu'il possède *génériquement* la même G-théorie rationnelle que le champ F.

Si $p : F \to M$ est la projection sur l'espace des modules et $M_1 \hookrightarrow M$ un sous-espace fermé , on note

$$q_1 : \mathcal{S} \underset{M}{\times} M_1 \to M$$

$$p_1 : F \underset{M}{\times} M_1 \to M$$

les projections induites.

Théorème 3.16 *Soit F un champ de Deligne-Mumford , et F_1 le sous-champ fermé réduit de F minimal tel que $F - F_1$ soit une gerbe sur $M - M_1$. On note $q : S \to M$ et $p : F \to M$ les projections.*
Alors on a deux suites exactes de fibrations sur M_{et}

$$((q_1)_* G_{\mathbf{Q}}) \to q_* G_{\mathbf{Q}} \vee ((p_1)_* G_{\mathbf{Q}}) \to p_* G_{\mathbf{Q}}$$

La preuve comporte trois parties. La première traite le cas des gerbes triviales , la seconde celui des champs quotients par des groupes finis , et la troisième intègre la seconde sur M_{et}.

On en tire un corollaire important.

Corollaire 3.17 *Il existe une section homotopique canonique*

$$s : G \to p_* G$$

qui scinde le morphisme de projection

$$p_* : p_* G \to G$$

En particulier il existe une décomposition

$$p_* G \simeq G \vee G_{F/M}$$

Preuve: Il suffit de remarquer que le morphisme $S \to M$ possède une section canonique $M \to S$, donnée par la représentation unité. Le corollaire vient alors du théorème et d'une récurrence sur la dimension de F. $\square$

MISE EN GARDE: Pour la suite de la démonstration on note G au lieu de $G_{\mathbf{Q}}$.

Cas des gerbes triviales:

Soit $F = [V/H]$, avec H fini qui opère trivialement sur M. On a vu que $S = V \times R$, avec R l'ensemble des classes de représenttions de H sur k. Nous allons construire une équivalence naturelle

$$G(F) \simeq \bigvee_R G(V)$$

Lemme 3.18 *Soit $\rho_1, \ldots, \rho_r$ un système de représentants des éléments de R. On note $\widetilde{\rho_i}$ les H-faisceaux cohérents définis par ρ_i sur V. Alors le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=1}^{i=r} G(V) & \to & G(F) \\ \vee \mathcal{F}_i & \mapsto & \bigoplus_{i=1}^{i=r} \mathcal{F}_i \otimes \widetilde{\rho_i} \end{array}$$

est une équivalence faible

Preuve: Un inverse homotopique est construit en décomposant chaque faisceau cohérent le long des représentations irréductibles de H.
□

Cas des champs quotients:

On commence par supposer que $F = [X/H]$, avec X une variété et H un groupe fini opérant sur X.

Soit H_0 le sous-groupe de H opérant trivialement sur X (groupe d'isotropie générique de F). Alors $H/H_0 = H'$ opère génériquement sans points fixes. Il existe donc une sous-variété ouverte dense X_0 de X , tel que $X_1 = X - X_0$ soit exactement l'ensemble des points fixes de l'action de H'. On pose $F_1 = [X_1/H]$, c'est le sous-champ ramifié de F (i.e. $F - F_1$ est le plus grand sous-champ ouvert de F qui soit une gerbe). La projection canonique $p : X \to F$ induit un morphisme entre les deux suites exactes de localisation 3.5

$$\begin{array}{lllll} G(F_1) & \to & G(F) & \to & G(F - F_1) \\ p_* \uparrow & & p_* \uparrow & & p_* \uparrow \\ G([X_1/H_0])^H & \to & G([X/H_0])^H & \to & G([X_0/H_0])^H \end{array}$$

où dans la seconde , le groupe H opère sur les variétés X_1 , X et X_0 , mais aussi sur le sous-groupe distingué H_0 par conjugaison.
Le théorème de descente 3.10 implique que le morphisme de droite est une équivalence faible. On obtient ainsi une suite exacte longue

Proposition 3.19 *Sous les mêmes notations , on a une suite exacte de fibration , naturelle pour la localisation étale sur M_{et}*

$$G([X_1/H_0])^H \to G(F_1) \vee G([X/H_0])^H \to G(F)$$

Il reste donc à voir que les espaces $G([X_1/H_0])^H$ et $G([X/H_0])^H$ s'identifient naturellement aux espaces $G(S_{|M_1})$ et $G(S)$. Pour cela on rappelle la construction explicite de l'espace S en fonction de X , H_0 et l'action de H.

Soit $R_0 = Rep_k(H_0)$. D'aprés l'hypothèse 3.12 , c'est un ensemble fini. L'opération par conjugaison $H \to Aut(H_0)$, induit une opération $H \to Aut(R_0)$.

De plus , le faisceau $\mathcal{S}$ restreint à X est le faisceau constant de fibre R_0. C'est un H-faisceau compatible avec l'action de H sur X. Et , par définition des sections globales , le faisceau S est donc défini par

$$\begin{array}{cccc} S: & (X/H)_{et} & \to & Ens \\ & (U \to X/H) & \mapsto & \mathcal{S}(U \underset{X/H}{\times} X)^H \end{array}$$

Comme $\mathcal{S}$ est représenté sur X par l'espace $X \times R_0$, il s'ensuit que S est représenté sur X/H par l'espace quotient

$$(X \times R_0)/H \to X/H$$

Ainsi , $G(S)$ est coniquement équivalent à $G((X \times R_0)/H)$. L'identification provient enfin du lemme suivant

Lemme 3.20 *Soit V une variété , et H un groupe fini qui opère sur V. On note $p_* : G(V) \to G(V/H)$ la projection. Alors , p_* induit une équivalence faible*

$$p_* : G(V)^H \overset{\simeq}{\rightrightarrows} G(V/H)$$

Preuve: Remarquons d'abord que l'on peut supposer que H opère fidèlement sur V.

On note $M = V/H$, et M_1 la sous-variété fermée de V tel que p soit un revêtement étale au dessus de $U = M - M_1$. Si $U' = p^{-1}(U)$, alors le morphisme induit

$$p : U' \to U$$

est un revêtement galoisien de groupe H. Dans ce cas on sait déja (3.7 pour une variété) que p_* induit une équivalence faible

$$p_* : G(U')^H \overset{\simeq}{\rightrightarrows} G(U)$$

On termine alors par récurrence sur la dimension en considérant le diagramme de suites de fibrations suivant

$$\begin{array}{ccccc} G(V_1)^H & \to & G(V)^H & \to & G(U')^H \\ p_* \downarrow & & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\ G(M_1) & \to & G(M) & \to & G(U) \end{array}$$

□

Le lemme permet alors de dire que $G((X \times R_0)/H) \simeq G(X \times R_0)^H$, et le lemme 3.18 identifie naturellement $G(X \times R_0)$ et $G([X/H_0])$. Ce qui termine la preuve du théorème dans le cas des champs quotients.

□

Cas général:

Comme le théorème 3.16 est une globalisation sur M_{et} du cas déja traité des champs quotients , il suffit de montrer que l'on peut recoller la construction du paragraphe précédent sur M_{et}. Le problème rencontré ici est que pour un champ F *équivalent* à un champ quotient , la construction précédente dépend du choix d'une équivalence $F \simeq [X/H]$. Pour rendre cette construction indépendante de ce choix on va considérer toutes les équivalences possibles en même temps , en prenant une limite inductive.

Commençons par le cas d'un champ F et de deux variétés X et Y munies de morphismes étales

$$f : X \to F$$

$$g : Y \to F$$

qui induisent des équivalences

$$F \stackrel{\simeq}{\to} [X/G]$$

$$F \stackrel{\simeq}{\to} [Y/H]$$

avec G et H deux groupes finis qui opérent sur X et Y. On considére $Z = X \underset{F}{\times} Y$. Alors

$$h : Z \to F$$

est un $K = G \times H$-torseur qui induit un diagramme commutatif d'équivalences

$$\begin{array}{ccc} F & \to & [Y/H] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X/G] & \to & [Z/K] \end{array}$$

On note S_X , $[S_Y]$ et $[S_Z]$ les trois espaces sur M des champs $[X/G]$, $[Y/H]$ et $[Z/K]$. Alors par naturalité de la suite exacte 3.19 , on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} G((S_X)_{|M_1}) & \to & G(F_1) \vee G(S_X) & \to & G(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ G((S_Z)_{|M_1}) & \to & G(F_1) \vee G(S_Z) & \to & G(F) \\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ G((S_Y)_{|M_1}) & \to & G(F_1) \vee G(S_Y) & \to & G(F) \end{array}$$

Fixons nous un point fermé géométrique $x_0 : Spec(k^{sep}) \to F$.
Notons $Pr(F)$ la catégorie des couples $(X \stackrel{f}{\to} F, x)$, avec $X \to F$ un revêtement galoisien , $x : Spec(k^{sep}) \to X$ un point fermé géométrique tel que $f(x) = x_0$. Cette catégorie est filtrante.
En appliquant le foncteur G , on obtient un diagramme filtrant d'équivalences

faibles , noté $NPr(F)$. Le diagramme précédent montre que l'on peut passer à la limite inductive sur $NPr(F)$, et obtenir une suite exacte

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ X\in NPr(F)}} G((S_X)_{|M_1}) \to G(F_1) \vee \lim_{\substack{\rightarrow \\ X\in NPr(F)}} G(S_X) \to G(F)$$

Mais , on a une équivalence faible canonique

$$G(S) \stackrel{\simeq}{\to} \lim_{\substack{\rightarrow \\ X\in NPr(F)}} G(S_X)$$

qui est compatible avec les immersions fermées

$$G((S_X))_{|M_1}) \to G(S_X)$$

Et donc , on a un diagramme , avec la suite du haut exacte

$$\begin{array}{ccccc}
\lim_{\substack{\rightarrow \\ X\in NPr(F)}} G((S_X)_{|M_1}) & \to & G(F_1) \vee \lim_{\substack{\rightarrow \\ X\in NPr(F)}} G(S_X) & \to & G(F) \\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow & & \| \\
G(S_{|M_1}) & \to & G(F_1) \vee G(S) & \to & G(F)
\end{array}$$

Ainsi , la suite du bas étant équivalente à une suite exacte est exacte. Cette suite est , de plus , compatible avec la localisation étale sur M , et ne dépend que de F.

Passons au cas plus général où $F \to M$ est un champ de Deligne-Mumford sur M.
Alors , sur chaque ouvert étale $U \to M$, tel que $F \to U$ est équivalent à un champ quotient , on dispose d'une suite exacte comme précédemment. Ces suites étant compatibles avec les changement de base étale sur M_{et} , on peut les recoller et obtenir le résultat annoncé dans le théorème 3.16.
$\square$

Remarque: On verra par la suite (on peut le déduire du lemme 3.20) que la projection

$$p : F \to M$$

sur son espace des modules induit une équivalence faible

$$p_* : G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(M)_{\mathbf{Q}}$$

Ainsi , le théorème précédent donne aussi une suite exacte de fibration

$$H((\mathcal{S}_{M_{et}})_{et}, G_{\mathbf{Q}}) \to G(F_1)_{\mathbf{Q}} \vee H(\mathcal{S}_{et}, G_{\mathbf{Q}}) \to G(F)_{\mathbf{Q}}$$

Donnons une application de ce théorème au cas des champs de Deligne-Mumford de dimension 1 sur $k = \mathbf{C}$. On continue de noter G pour $G \otimes \mathbf{Q}$.

On note $x_1, \ldots, x_r \in M$ les points de ramifications. Ainsi , F est une gerbe sur $M - \{x_1, \ldots, x_r\}$.
$q : S \to M$ est un revêtement ramifié en $x_1, \ldots, x_r$, d'ordre $r_0 = Card(R_0)$, où $R_0 = Rep_k(H_0)$, et H_0 est le groupe d'isotropie générique de F.
Notons a_j le nombre de points de S au dessus de x_j. C'est le nombre d'orbites de R_0 , sous l'action du groupe fondamental

$$\pi_1^{et}(Spec\mathcal{O}_{x_j,M} - x_j) \to Aut(R_o)$$

Alors $S_{|M_1}$ consiste en une réunion de s points , avec

$$s = \sum_{j=1}^{j=r} a_j$$

Notons , aussi b_j l'ordre du groupe d'isotropie de x_j. Comme , c'est un groupe cyclique , on a

$$G(\widetilde{x_i}) \simeq \bigvee_{j=1}^{j=b_i} G(\mathbf{C})$$

Les morphismes d'inductions , donnent des applications

$$\{1, \ldots, a_j\} \to \mathbf{Q}^{b_j}$$

Et donc des morphismes d'inductions

$$\bigvee_{j=1}^{j=r} G(\mathbf{C})^{a_j} \to \bigvee_{j=1}^{j=r} G(\mathbf{C})^{b_j}$$

avec $G(\mathbf{C})^n = G(\mathbf{C}) \vee G(\mathbf{C}) \ldots \vee G(\mathbf{C})$ En rassemblant tout ceci dans la suite exacte du théorème 3.16 , on a

$$G(F) \simeq \frac{G(S) \vee \bigvee_{j=1}^{j=r} G(\mathbf{C})^{b_j}}{\bigvee_{j=1}^{j=r} G(\mathbf{C})^{a_j}}$$

Par exemple si $F = \mathcal{M}_1^1$ est le champ des modules des courbes elliptiques. Le groupe d'isotropie générique est $\mathbf{Z}/2$, et comme il ne possède aucun automorphisme , S est un revêtement étale d'ordre 2 sur $M = \mathbf{P}^1$. Donc $S = \mathbf{P}^1 \coprod \mathbf{P}^1$. De plus on a deux points de ramifications x_1 et x_2 , avec $a_1 = a_2 = 2$ et $b_1 = 4$, $b_2 = 6$. Donc

$$G(F) \simeq \frac{G(\mathbf{P}^1)^2 \vee G(\mathbf{C})^{10}}{G(\mathbf{C})^4}$$

En particulier

$$Rang G_0(F) = 10$$

3.3.2 G-théorie et champ des ramifications

Dans la construction précédente on a dévissé la G-théorie suivant la stratification naturelle de M. Ici on dévisse suivant les composantes connexes du champ I_F. Pour le cas d'un champ quotient $[V/H]$, c'est un dévissage suivant les éléments de H.
Le résultat que l'on obtient est une généralisation du théorème démontré par Vistoli dans [Vi].

On suppose que F est un champ de Deligne-Mumford lisse.

MISE EN GARDE: On note G pour $G \otimes \mathbf{C}$ et K pour $K \otimes \mathbf{C}$, avec $\mathbf{C}$ le corp des nombres complexes.

Théorème 3.21 *Soit F un champ lisse. Alors I_F est un champ lisse , et il existe un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres graduées*

$$G_*(F) \xrightarrow{\simeq} H^{-*}((I_F)_{et}, G)$$

De plus cet isomorphisme est fonctoriel pour les images réciproques de morphismes représentables , ainsi que pour les images directes d'immersions fermées.

Comme précédemment la preuve comporte deux parties. La première pour les champs quotients , et puis un recollement sur M_{et}.

Montrons d'abord que I_F est lisse. Comme la question est locale sur M_{et} , on peut supposer que $F = [V/H]$. On sait alors que $I_F = [\hat{V}/H]$. Il suffit donc montrer que $\hat{V}$ est lisse si V l'est. Mais les composantes connexes de $\hat{V}$ sont les V^h. Or localement , l'action d'un élément $h \in H$ sur V est linéaire , donc V^h est lisse.

<u>Cas des champs quotients:</u>

Soit $F = [V/H]$ un champ quotient avec V une variété lisse. On fixe quelques notations.
Si $h \in H$, on note $< h >$ le sous-groupe cyclique engendré par h. On désigne par Z_h le centralisateur de h dans H.
Si $h \in H$, soit $h(\mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre de fonctions de $< h >$ dans $\mathbf{C}$. On a une projection

$$\begin{array}{rccc} e_h : & h(\mathbf{C}) & \rightarrow & \mathbf{C} \\ & f & \mapsto & f(h) \end{array}$$

Soit $c(H)$ l'ensemble des classes de conjugaisons de H.
D'aprés la remarque suivant 2.21 , il faut construire un isomorphisme de $\mathbf{C}$-

algèbres

$$G_*(F) \simeq \bigoplus_{h \in c(H)} G_*(V^h)^{Z_h}$$

Ce morphisme est défini par la construction suivante.
Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur F. On regarde $\pi^*\mathcal{F}$ sur I_F , avec $\pi : I_F \to F$ la projection. On dispose donc de faisceaux cohérents $\mathcal{F}_h$ sur V^h qui sont munis d'une action de Z_h , et par restriction de $< h >$. Ceci définit un morphisme

$$G(F) \to \bigvee_{h \in c(H)} G([V^h / < h >])$$

soit $R = Rep_{\mathbf{C}}(< h >)$, et $\mathbf{C}(R)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathbf{C}$. Le morphisme naturel

$$\mathbf{C}(R) \to K_o(< h >, \mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}$-vectoriels. Le membre de droite est une $\mathbf{C}$-algèbre pour le produit tensoriel des représentations. Par transport de structure le membre de droite est une $\mathbf{C}$-algèbre.

C'est une $\mathbf{C}$-algèbre pour le produit tensoriel. Le lemme 3.18 , donne une équivalence canonique

$$G([V^h / < h >]) \simeq G(V^h) \otimes \mathbf{C}(R)$$

qui est compatible avec le produit. Mais l'on dispose d'un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$\chi : \mathbf{C}(R) \to \mathbf{C}(h)$$

qui á une représentation associe son caractère. En composant avec e_h on a un morphisme

$$G(F) \to G(V^h)$$

qui prèserve le produit. De plus , par construction ce morphisme est Z_h-équivariant. On obtient ainsi le morphisme cherché

$$G(F) \to \bigvee_{h \in c(H)} G(V^h)^{Z_h}$$

On peut montrer que c'est une équivalence faible en procédant par récurrence sur la dimension des support des faisceaux , comme dans la preuve de 3.7. C'est ce qui est fait dans un cadre topologique dans [A-S]. Il existe aussi la preuve originale de Vistoli ([Vi]).

Cas général:

D'aprés 3.7 , il suffit de construire

$$K_*(F) \to H^*((I_F)_{et}, K)$$

qui redonne le morphisme précédent losque $F=[V/H]$.
En fait , on construit un morphisme

$$K(F)\to K(I_F)$$

que l'on composera avec le moprhisme canonique

$$K(I_F)\to H((I_F)_{et},K)$$

Pour cela , on rappelle que la donnée d'un fibré vectoriel sur I_F est équivalente á la donnée suivante

- pour chaque morphisme
$$s:X\to I_F$$
la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{V}_s$ sur X
- pour chaque triangle
$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{s}{\to} & F \\ f\downarrow & \nearrow s' & \\ X' & & \end{array}$$
et $\phi:s\Rightarrow s'\circ f$ une homotopie , la donnée d'un isomorphisme
$$\Theta_{s,s',f,H}:f^*\mathcal{V}_{s'}\simeq\mathcal{V}_s$$
qui est un 1-cocycle en ϕ.

Remarquons que par définition , la donnée de $s:X\to I_F$ est équivalente à la donnée d'un couple (f_s,a_s) où

$$f_s:X\to F$$

et $a_s\in\pi_1(F(X),f_s)$ est un automorphisme de l'objet f_s de F au-dessus de X. De plus , une homotopie entre s et s' dans $I_F(X)$, est donnée par une homotopie $\phi:f_s\Rightarrow f_{s'}$ dans $F(X)$, telle que

$$a_s=\phi^{-1}.a_{s'}.\phi$$

Soit $\mathcal{V}$ un fibré vectoriel sur F. On considère $\pi^*\mathcal{V}$ sur I_F. Ainsi , pour chaque section $s:X\to I_F$ on a $\mathcal{V}_X$ qui est un fibré vectoriel sur X muni d'une action du groupe $\pi_1(F(X),f_s)$. Par restriction , $\mathcal{V}_X$ est muni de l'action du groupe engendré par a_s , que l'on note $<s>$. Comme ce groupe est cyclique , son action sur $\mathcal{V}_X$ se diagonalise canoniquement. On obtient ainsi une somme directe de fibrés vectoriels

$$\mathcal{V}_X\simeq\bigoplus_{i=1}^{i=r}\mathcal{V}_X^i$$

où r est l'ordre de $< s >$, et a_s opère par multiplication par ζ^i sur $\mathcal{V}^i_X$, avec ζ une racine primitive de 1 dans $\mathbf{C}$. On obtient de cette façon des fibrés vectoriels $\mathcal{V}^i$ sur X munis d'une action du centralisateur de a_s dans $\pi_1(F(X), f_s)$. En faisant varier X dans $(I_F)_{et}$, on obtient des fibrés vectoriels $\mathcal{V}^i$ sur I_F. On considère alors l'élément

$$\sum_{i=1}^{i=r} \zeta^i.\mathcal{V}^i \in K(F) \otimes \mathbf{C}$$

Alors ,

$$\mathcal{V} \mapsto \sum_{i=1}^{i=r} \zeta^i.\mathcal{V}^i$$

est le morphisme cherché $K(F) \to K(I_F) \otimes \mathbf{C}$.
□

Ces deux derniers théorèmes de dévissages peuvent être vus comme des faits "motiviques". En effet , on aurait les mêmes théorèmes pour toute théorie autre que la G-théorie , vérifiant certains axiomes (localisation et 3.18 essentiellement). Le théorème 3.16 permet de dire que le "type homologique rationnelle" d'un champ F est une suite de quotients des "types homologiques rationnelles" des espaces des représentations irréductibles génériques des strates naturelles de F. Alors que 3.21 dit que le "type cohomologique" á coefficient dans $\mathbf{C}$ d'un champ lisse est le "type cohomologique" (á coefficient dans $\mathbf{C}$) de $(I_F)_{et}$ (ou de l'espace des modules de I_F (4.8)).

4 Théorème de Riemann-Roch pour la cohomologie naive

Dans la section précédente , on a vu que la G-théorie d'un champ de Deligne-Mumford lisse , s'exprimait comme la G-théorie étale du champ des ramifications I_F. Dans cette section on étudie pour tout champ de Deligne-Mumford F , la cohomologie étale de F à coefficient dans une théorie cohomologique (au sens de [G]). On démontre ainsi un théorème de Riemann-Roch , qui relie G-théorie étale de F et sa cohomologie. Ce théorème n'est valable que pour les morphismes projectifs (donc représentables) de champs. Il ne permet donc pas de déduire une formule de Hirzebruch-Riemann-Roch pour la caratéristique d'Euler d'un faisceau cohérent. On montrera par un exemple trés simple que la cohomologie de F_{et} n'est pas suffisante pour avoir une telle formule. C'est pour cela que l'on introduira dans la section suivante la cohomologie "à coefficient dans les représentations". Ce chapitre sera alors appliqué au champ I_F.

4.1 Cohomologie naive des champs

Soit Γ une théorie cohomologique au sens de [G]. On dispose donc de complexes de groupes abéliens $\Gamma(i)$ sur $(Sch/k)_{et}$. Est associé comme toujours un entier d qui vaut 1 ou 2.
En prenant une résolution injective , on suppose que ce sont des complexes d'injectifs.
On considère les complexes $\tau_{\leq 0}\Gamma(i)[di]$. Ce sont les complexes définis par

$$(\tau_{\leq 0}\Gamma(i)[2i])^m := \begin{cases} \Gamma(i)^{m+di} & si\ m < 0 \\ Ker\left(\Gamma(i)^{di} \to \Gamma(i)^{di+1}\right) & si\ m = 0 \\ 0 & si\ m > 0 \end{cases}$$

On effectue la construction de Dold-Puppe sur le comlexe $\tau_{\leq 0}\Gamma(i)[di]$ pour obtenir un préfaisceau simplicial que l'on note

$$\mathcal{H}^i := K(\tau_{\leq o}\Gamma(i)[di])$$

Par définition

$$\mathcal{H} = \bigvee_{i=o}^{i=\infty} \mathcal{H}^i$$

On notera $\mathcal{H}(F) := H(F_{et}, \mathcal{H})$ l'espace de cohomologie d'un champ F à coefficient dans $\mathcal{H}$.

Définition 4.1 *Soit F un champ de Deligne-Mumford. La cohomologie naive de F à coefficient dans la théorie Γ est défini par*

$$H^j_{naive}(F, \Gamma(i)) := H^{-j+di}(F_{et}, \mathcal{H}^i)$$

Si $F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée , la cohomologie de F à support dans F' est

$$\mathcal{H}_{F'}(F) := Hofibre\left(\mathcal{H}(F) \to \mathcal{H}(F - F')\right)$$

Les produits

$$\Gamma(i) \otimes \Gamma(j) \to \Gamma(i+j)$$

induisent des accouplements de préfaisceaux simpliciaux

$$\mathcal{H}^i \wedge \mathcal{H}^j \to \mathcal{H}^{i+j}$$

Et donc un produit gradué

$$\mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

sur $(Sch/k)_{et}$.

On a un morphisme de complexes de préfaisceaux

$$C_1 : \mathbf{Z}[1] \to \tau_{\leq 0}\Gamma(1)[d]$$

où on a posé

$$\mathbf{Z}^m = \begin{cases} \mathcal{O}^* & si\ m = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ceci se transforme en un morphisme de préfaisceaux simpliciaux

$$C_1 : Pic \to \mathcal{H}^1$$

Plus généralement , la construction de Gillet ([G]) des classes de Chern donne des morphismes de préfaisceaux simpliciaux sur $(Sch/k)_{te}$

$$C_i : K \to \mathcal{H}^i$$

Ainsi , si F est un champ de Deligne-Mumford , on a des classes de Chern

$$C_i : H^{-m}(F_{et}, K) \to H^{m+di}_{naive}(F, \Gamma(i))$$

qui vérifient tous les axiomes habituels.

Les propriétés de cette cohomologie proviennent des propriétés de Γ données dans [G].

Proposition 4.2 *1.* $F \mapsto H^*_{naive}(F, \Gamma(\bullet))$ *est un foncteur contravariant pour les morphismes représentables de champs lisses , à valeur dans les anneaux gradués commutatifs*

2. Soit $p : V \to F$ *un fibré vectoriel. Alors*

$$p^* : H^*_{naive}(F, \Gamma(\bullet)) \to H^*_{naive}(V, \Gamma(\bullet))$$

est un isomorphisme

3. Si $\pi : P \to F$ *est le fibré projectif associé á un fibré vectoriel de rang* $r+1$ *, et* $x = C_1(\mathcal{O}_P(1))$ *, alors le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^{i=r} H^*_{naive}(F, \Gamma(\bullet)) & \to & H^*_{naive}(P, \Gamma(\bullet)) \\ \sum x_i & \mapsto & \sum \pi^*(x_i).x^i \end{array}$$

est un isomorphisme

4. Soit $j : F' \to F$ *une immersion fermée de champs lisses , avec* $p = Codim(F', F)$*. Alors il existe un morphisme de préfaisceaux sur* F_{et}

$$j_* : j_*\mathcal{H}^i \to \mathcal{H}^{i+dp}$$

De plus ce morphisme induit une équivalence faible

$$\mathcal{H}^i(F') \simeq \mathcal{H}^{i+dp}_{F'}(F)$$

Preuve: Comme ce sont des assertions locales pour la topologie étale sur F , on se ramène au cas connues des variétés.
$\square$

Les propriétés (3) et (4) permettent de définir des images directes pour les morphismes projectifs de champs lisses.
Soit $f : F' \to F$ un morphisme projectif de champs lisses. Il admet donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} F' & \stackrel{f}{\to} & F \\ j\downarrow & \nearrow p & \\ P & & \end{array}$$

où $j : F' \to F$ est une immersion fermée , et $p : P \to F$ un fibré projectif associé á un fibré vectoriel de rang $r+1$.
On définit

$$\begin{array}{cccc} p_* : & H^*_{naive}(P, \Gamma(\bullet)) & \to & H^*_{naive}(F, \Gamma(i)) \\ & \sum_{i=0}^{i=r} p^*(x_i).x^i & \mapsto & x_r \end{array}$$

et $f_* := p_* \circ j_*$. On peut vérifier que cette définition est indépendante de la factorisation choisie. Ainsi

$$F \mapsto H^*_{naive}(F, \Gamma(\bullet))$$

est un foncteur covariant pour les morphismes projectifs de champs lisses.

Pour un morphisme $f : F \to F'$ projectif de champs lisses , on dispose de la formule de projection

$$f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y$$

pour $x \in H^*_{naive}(F, \Gamma(\bullet))$ et $y \in H^*_{naive}(F', \Gamma(\bullet))$.

On termine par l'extension aux champs éventuellement singuliers.

Pour cela on fera une hypothèse supplémentaire sur le mophisme j_* de la propriété (4).

Hypothèse 4.3 *Le morphisme "image directe" précédent fait de*

$$F \mapsto \mathcal{H}(F)$$

un foncteur flexible ([S]) pour les morphismes projectis de champs lisses

Cette hypothèse est un peu plus forte que celle demandée dans [G]. En effet , Gillet demande que pour deux immersions fermées

$$F'' \stackrel{j'}{\hookrightarrow} F' \stackrel{j}{\hookrightarrow} F$$

de champs lisses , les morphismes $j_* \circ (j')_*$ et $(j \circ j')_*$ soient égaux dans la catégorie homotopique. Ce qui pourrait se traduire par le fait que $F \mapsto \mathcal{H}(F)$ soit "1-flexible" pour les immersions fermées de champs lisses. L'hypothèse précédente demande des conditions de compatibilité supérieure pour l'homotopie de $j_* \circ (j')_*$ á $(j \circ j')_*$, puis des homotopies entre ces homotopies ...
par les résultats de [S] , on peut alors supposer que $F \mapsto \mathcal{H}(F)$ est un vrai foncteur covariant. En fait , pour tout diagramme fini de morphismes projectifs de champs lisses , on peut bouger chacun des morphismes dans leurs classes d'homotopie pour rendre le diagramme commutatif.

Nous n'avons pas vérifié que toutes les théories cohomologiques vérifiaient cette hypothèse. Mais donnons quelques exemples fondamentaux.

Exemples:

- Si $k = \mathbf{C}$ le corps des nombres complexes , la cohomologie de Betti vérifie 4.3. On peut le voir en utilisant la dualité de Poincaré et la covariance (stricte) de l'homologie singulière.
- Si l'on ne considère que des champs lisses , et si k est de caractéristique nulle , la cohomologie de De Rham algébrique (3.12) vérifie 4.3. Il y a deux moyens de la voir. Soit en utilisant les images directes construites dans [H] à l'aide des morphismes traces , qui sont fonctoriels. Ou bien , en utilisant la construction de Keller ([K]) de l'homologie périodique d'une catégorie exacte , où les images directes proviennent des images directes de faisceaux cohérents , qui sont évidemment fonctorielles.
- Pour un corps quelconque , la théorie de Gersten ([G]). Là aussi les images directes proviennent des images directes en G-théories qui sont flexibles (ou même fonctorielles si on utilise les constructions de Thomason de [Th]).
- si l'on se restreint aux variétés lisses , la théorie des anneaux de Chow supérieurs de Bloch ([B]). Les images directes sont fonctorielles , mais ce sont les images réciproques qui deviennent flexibles.

Grâce à cette hypothèse on définit l'homologie d'un champ plongeable dans champ lisse

Définition 4.4 *Soit F un champ tel qu'il existe une immersion fermée*

$$F \hookrightarrow F'$$

avec F' lisse. On définit l'homologie de F par

$$(\mathcal{H}')^i(F) := \mathcal{H}_F^{p-i}(F')$$

où $p = Dim(F')$ *et*

$$H_j^{naive}(F,\Gamma(i)) := H^{dp-j}_{naive,F}(F',\Gamma(p-i)) = \pi_{-j+di}((\mathcal{H}')^i)$$

Cette définition est indépendante du choix du plongement $F \hookrightarrow F'$.

Les propriétés de l'homologie se déduisent automatiquement de 4.2. Notons simplement que $F \mapsto \mathcal{H}'(F)$ est covariant pour les morphismes projectifs , et contravariant pour les morphismes représentables de champs lisses. Comme la cohomologie l'homologie vérifie la localisation.

Enfin , pour des raisons de compatibilité on travaille avec

$$\mathcal{H}'_{\mathbf{Q}} := \mathcal{H}' \otimes \mathbf{Q}$$

Soit F un champ de Deligne-Mumford. On va approcher F par des variétés lisses , et ainsi approcher l'homologie de F. Pour cela on utilise le lemme de chow pour les champs ([D-M]).

Proposition 4.5 *[D-M] Soit F un champ de Deligne-Mumford. Alors il existe une variété quasi-projective X et un morphisme propre surjectif*

$$q : X \to F$$

qui est génériquement fini

Définition 4.6 *On appelle un tel couple (X, q) une enveloppe de Chow rationelle.*
Si $q : X \to F$ est une telle enveloppe , on note

$$\mathcal{N}(X/F)$$

le nerf de X au-dessus de F.

La covariance de $\mathcal{H}'$ permet de construire un diagramme simplicial

$$\mathcal{H}'(\mathcal{N}(X/F)_m)$$

en appliquant $\mathcal{H}'$ à la variété simpliciale avec faces et dégénérescences projectives. On pose

$$\mathcal{H}'(X/F) := Hocolim_{[m]\in\Delta^{op}}\mathcal{H}(\mathcal{N}(X/F)_m)$$

Le terme d'enveloppe de Chow rationelle est justifié par la proposition suivante

Proposition 4.7 *Soit $q : X \to F$ une enveloppe de Chow rationelle , avec F plongeable dans un champ lisse. Alors on a un une équivalence faible*

$$q_* : \mathcal{H}'(X/F)_{\mathbf{Q}} \to \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}}$$

Preuve: On écrit $\mathcal{H}$ pour $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}$.

Comme les colimites homotopiques préservent les suites exactes de cofibrations , on peut raisonner par récurrence sur la dimension de F. La suite exacte suivante

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ F' \hookrightarrow F\ Codim(F',F)>0}} \mathcal{H}'(F') \to \mathcal{H}'(F) \to \lim_{\substack{\longrightarrow \\ F' \hookrightarrow F\ Codim(F',F)>0}} \mathcal{H}'(F-F')$$

où F' parcours les sous-champs fermés de F , permet de se ramener au cas où F est une gerbe sur un point générique de M. On suppose donc que F est une gerbe sur $SpecK$, avec K un corps contenant k.
Soit L/K une extension galoisienne qui trivialise F , et $\Gamma = Gal(L/K)$ son groupe de Galois. On considère l'extension des scalaires

$$X_L \to F_L$$

Le groupe Γ opère sur

$$(q_L)_* : \mathcal{H}'(X_L/F_L) \to \mathcal{H}'(F_L)$$

De plus , comme les coefficients sont rationnels et que Γ est fini , l'action de Γ est semi-simple. Or si Γ opère semi-simplement sur un espace X , alors le morphisme canonique

$$Hocolim_{\Gamma}(X) \to Holim_{\Gamma}(X)$$

est une équivalence faible. En utilisant 3.10 , on a ainsi

$$Hocolim_H\left(\mathcal{H}'(F_L)\right) \simeq \mathcal{H}'(F)$$

De même , en utilisant que les colimites commutent entre elles , et qu'elles preservent les équivalences faibles , on a

$$Hocolim_{\Gamma}\left(\mathcal{H}'(X_L/F_L)\right) \simeq \mathcal{H}'(X/F)$$

Ainsi , il suffit de montrer que $(q_L)_*$ est une équivalence faible. On peut donc supposer que $F = [SpecK/H]$, avec H un groupe fini.
On considère le changement de base $SpecK \to F$ induit par le H-torseur canonique. Par le même argument que précédemment , il suffit de montrer que

$$(q_K)_* : \mathcal{H}'(X_K/SpecK) \to \mathcal{H}'(SpecK)$$

est une équivalence faible.
Soit L/K une extension normale telle que X possède un point dans L. Supposons que la proposition soit démontrée pour $SpecL \to SpecK$. Alors , en effectuant le changement de base de K à L , on peut supposer que $q : X \to SpecK$

admet une section $s : SpecK \to X$, ce que nous ferons. Mais alors s_* est une section homotopique de $q_* : \mathcal{H}'(X/SpecK) \to \mathcal{H}'(SpecK)$.
Il reste à montrer la proposition pour $SpecL \to SpecK$. On a vu que c'est vrai si l'extension est séparable. Il reste le cas purement inséparable.
On va montrer que si $p : SpecL \to SpecK$ est fini purement inséparable , alors

$$p_* : \mathcal{H}(SpecL) \to \mathcal{H}(SpecK)$$

est une équivalence faible.
La formule de projection implique que

$$p_* \circ p^* = \times d$$

avec $d = [L : K]$. Montrons de même que

$$p^* \circ p_* = \times d$$

Pour cela on forme le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} Spec(L \otimes_K L) & \stackrel{a}{\to} & SpecL \\ b \downarrow & & \downarrow p \\ SpecL & \stackrel{p}{\to} & SpecK \end{array}$$

Le transfert donne $p^* \circ p_* = a_* \circ b^*$. Mais comme L/K est purement inséparарble , les morphismes a et b possède une section

$$j : SpecL \stackrel{\Delta}{\to} Spec(L \otimes_K L)$$

qui est une immersion nilpotente. Ainsi

$$j_* : H_*^{naive}(SpecL, \Gamma(\bullet)) \to H_*^{naive}(Spec(L \otimes_K L), \Gamma(\bullet))$$

est un isomorphisme. Et particulier on a

$$a_* = (j_*)^{-1} = b_*$$

et donc $a_* \circ b^* = b_* \circ b^*$. Et par la formule de projection pour b

$$p^* \circ p_* = a_* \circ b^* = b_* \circ b^* = \times d$$

$\square$

Ce dernière proposition permet d'étendre la définition de l'homologie au cas des champs qui ne se plongent pas forcément dans un champ lisse. Pour cela on prend une enveloppe de Chow rationnelle $X \to F$, et on pose

$$\mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}} := \mathcal{H}'(X/F)_{\mathbf{Q}}$$

Comme les enveloppes de Chow forment une catégorie filtrante

$$F \mapsto \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}}$$

devient un foncteur flexible. On peut le rendre strictement fonctoriel en prenant le limite inductive

$$\varinjlim_{X \to F \ env \ Chow \ rat.} \mathcal{H}'(X/F)_{\mathbf{Q}}$$

On dispose ainsi d'une bonne théorie homologie-cohomologie pour tous les champs. Mais on ne s'aventure pas plus loin dans cette voie , car il s'avère difficile d'utiliser cette définition pour définir la transformation de Riemann-Roch. On se restreint donc aux champs qui se plongent dans un champ lisse.

Le corollaire suivant justifie le terme de cohomologie naive. En effet il montre que toute l'information homologique rationnelle est déjà dans l'espace des modules.

Corollaire 4.8 *Soit F un champ , et $p : F \to M$ la projection sur son espace de modules. Alors il existe une équivalence faible*

$$p_* : \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}} \to \mathcal{H}'(M)_{\mathbf{Q}}$$

Preuve: Pour construire le morphisme p_* , on prend une enveloppe de Chow rationnelle $X \to F$, et $r : X \to M$ le morphisme induit. On construit p_* par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}'(X/F)_{\mathbf{Q}} & \simeq & \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow p_* \\ \mathcal{H}'(X/M)_{\mathbf{Q}} & \stackrel{r_*}{\to} & \mathcal{H}'(M)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

Ce morphisme ne dépend pas (à homotopie près) du choix de l'enveloppe $X \to F$.
Montrons que c'est une équivalence faible.

En localisant sur M , on se ramène par récurrence sur la dimension au cas où F est une gerbe lisse. Dans ce cas on peut remplacer l'homologie par la cohomologie , et en localisant sur M_{et} on suppose que la gerbe est triviale. On suppose donc que $F = [X/H]$ avec H un groupe fini et X une variété lisse.
Comme les définitions de $\mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}}$ et p_* ne dépendent pas de l'enveloppe choisie , on peut prendre $X \to F$ le H-torseur universel. Dans ce cas le diagramme précédent est équivalent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} Hocolim_H \mathcal{H}'(X)_{\mathbf{Q}} & \simeq & \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow p_* \\ \mathcal{H}'(X)_{\mathbf{Q}} & \stackrel{Id}{\to} & \mathcal{H}'(M)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

Et toujours le même argument de semi-simplicité de l'action de H plus la descente 3.10 , permet de dire que le morphisme de gauche est une équivalence faible.
$\square$

Remarque:C'est ce dernier corollaire qui permet de voir sur un exemple très simple que cette cohomologie ne peut pas donner de formule de Hirzebruch-Riemann-Roch. Le contre exemple est le suivant.
Soit $F = [Speck/H]$ avec H un groupe fini abélien par exemple. Dans ce cas le fibré tangent est trivial , et la transformation de Riemann-Roch

$$\tau_F : K_0(F) \to H^{d*}_{naive}(F, \Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}}$$

est le caractère de Chern. Elle est donc multiplicative. Le corollaire précédent implique que

$$p_* : H^{d*}_{naive}(F, \Gamma(\bullet)) \simeq H^{d*}_{naive}(Speck, \Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}}$$

Supposons que la théorie cohomologique vérifie

$$H^{d*}_{naive}(Speck, \Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$$

C'est le cas pour la plupart des théories énnoncées dans [G]. Si la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch était vérifiée on aurait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_0(F) & \stackrel{Ch}{\to} & H^{d*}_{naive}(F, \Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}} \\ p_* \downarrow & & \wr p_* \\ \mathbf{Q} & \stackrel{Id}{\to} & \mathbf{Q} \end{array}$$

En identifiant $K_0(F)$ avec le groupe de Grothendieck des représentations de H dans k , on aurait pour tout $k[H]$-module V de dimension finie

$$Ch(V) = Dim(V^H)$$

Prenons V de dimension 1 non triviale. Alors $V^H = (0)$. Soit m l'ordre de H , alors $V^{\otimes m} = 1$. On aurait donc

$$Ch(V^{\otimes m}) = Ch(V)^m = Ch(1) = 1 \Rightarrow Ch(V) \neq 0$$

Ce qui est absurde.

4.2 Théorème de Riemann-Roch I

Bien que l'on viennent de voir que le théorème de Riemann-Roch n'était pas vérifié pour la projection sur l'espace des modules

$$p : F \to M$$

il existe tout de même une formule de Riemann-Roch pour les morphismes projectifs (donc représentables). On ne la démontre pas , car la preuve suit mot pour mot celle de [G]. En effet le théorème du projectif implique le théorème pour les fibrés projectifs. Pour les immersions fermées on utilise la déformation suivant le cone normal (qui existe pour les champs). Le théorème obtenu est le suivant

Théorème 4.9 *Soit F un champ lisse.Alors il existe une unique transformation de Riemann-Roch*

$$\tau_F : K_m(F) \to H^{d*+m}_{naive}(F, \Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}}$$

qui vérifie

1. *$\tau_F(x) = Ch(x).Td(T_F)$ où T_F est le fibré tangent de F*
2. *Si F est une variété lisse , τ_F coincide avec la transformation de Riemann-Roch de [G]*
3. *Si $f : F \to F'$ est un morphisme étale représentable , de champs lisses alors*
$$f^* \circ \tau_{F'} = \tau_F \circ f^*$$
4. *Si $f : F \to F'$ est un morphisme projectif de champs lisses alors*
$$f_* \circ \tau_F = \tau_{F'} \circ f_*$$

On peut aussi étendre le théorème aux champs singuliers qui se plongent dans un champ lisse par le procédé habituel. Il est aussi possible qu'en utilisant les enveloppes de Chow on puisse se débarrasser de toute hypothèse , mais nous ne savons pas le faire.

Remarquons enfin , que si l'on prend la théorie de Gersten , ou bien celle des groupes de Chow supérieur de Bloch , on obtient un théorème de Riemann-Roch à valeur dans les groupes de Chow de F. Il est à noter que rationnellement , ces groupes de Chow sont isomorphes à ceux introduits par Vistoli dans ([Vi2]). On répond donc partiellement à la question posée dans l'introduction à propos de l'existence d'un théorème de Riemann-Roch pour les morphismes propres représentables. Il est possible que le théorème précédent se généralise aux morphismes propres représentables sans trop de difficultés.

5 Théorème de Riemann-Roch pour la cohomologie à coefficient dans les représentations

On vient de voir que la cohomologie naive de F ne suffisait pas pour avoir une formule de Riemann-Roch. Dans cette section on introduit une nouvelle cohomologie qui permettra d'avoir un tel énoncé par la suite. La définition est motivée par 3.21.

5.1 Cohomologie à coefficient dans les représentations

Soit F un champ algébrique et Γ une théorie cohomologique au sens de [G]. Par convention , on fait l'hypothèse 4.3. On peut s'en débarasser en supposant que les champs sont plongeables dans un champ lisse.

Définition 5.1 *On définit la cohomologie à coefficient dans les représentations de F pour Γ par*

$$H^*_{rep}(F,\bullet) := H^*_{naive}(I_F, \Gamma(\bullet)\otimes \mathbf{C})$$

où I_F est le champ des ramifications de F.
De même l'homologie de F est définie par

$$H^{rep}_*(F,\bullet) := H^{naive}_*(I_F, \Gamma(\bullet)\otimes \mathbf{C})$$

On peut justifier le nom de "cohomologie à coefficients dans les représentations" par l'exemple suivant. On prend $F = [X/H]$ une gerbe triviale de groupe H. Alors $I_F = [X\times H/H]$ où H opère par conjugaison sur $X\times H$. Ceci implique que

$$H^*_{rep}(F,\bullet) \simeq H^*(X,\Gamma(\bullet))\otimes \mathbf{C}(H)$$

avec $\mathbf{C}(H)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions centrales sur H à valeur dans $\mathbf{C}$. Comme $\mathbf{C}(H)$ s'identifie par l'intermédiaire des caratères à la $\mathbf{C}$-algèbre des représentations de H , $K_0(H,k)\otimes \mathbf{C}$, $H^*_{rep}(F,\bullet)$ peut se voir comme la cohomologie de$X$ à coefficient dans l'algèbre des représentations $K_0(H,k)\otimes \mathbf{C}$.

Remarquer que $H^*_{rep}(F,\bullet)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre bi-graduée commutative , et que $H^{rep}_*(F,\bullet)$ est un $H^*_{rep}(F,\bullet)$-module gradué.

Si $f: F' \hookrightarrow F$ est un morphisme représentable , alors le morphisme induit sur les ramifications

$$f : I_{F'} \to I_F$$

est encore représentable , et donc on a une image réciproque

$$f^* : H^*_{rep}(F,\bullet) \to H^*_{rep}(F',\bullet)$$

qui est un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres graduées.

Si $f: F' \to F$ est un morphisme projectif , alors le morphisme induit

$$f : I_{F'} \to I_F$$

est encore projectif , et donc on a une image directe

$$f_* : H_*^{rep}(F', \bullet) \to H_*^{rep}(F, \bullet)$$

Les images directes et réciproques sont liées par la formule de projection usuelle pour un morphisme projectif

$$f : F' \to F$$

et pour $x \in H_*^{rep}(F', \bullet)$, $y \in H^*_{rep}(F, \bullet)$ alors on a

$$f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y$$

Si $F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée , alors la suite exacte de localisation pour $I_{F'} \hookrightarrow I_F$ donne une suite exacte longue en homologie

$$\ldots H_*^{rep}(F, \bullet) \stackrel{j_*}{\to} H_*^{rep}(F', \bullet) \to H_*^{rep}(F' - j(F), \bullet) \to H_{*-1}^{rep}(F, \bullet) \ldots$$

Si F est lisse , alors I_F aussi , et donc le morphisme naturel

$$H^j_{rep}(F, (i)) \to H^{rep}_{dp-j}(F, (p-i))$$

avec $p = DimF$, est un isomorphisme.

Si $V \to F$ est un fibré vectoriel alors le morphisme induit

$$p : I_V \to I_F$$

est aussi un fibré vectoriel , mais le rang peut changer. Quoiqu'il en soit on a bien que

$$p^* : H^*_{rep}(F, \bullet) \to H^*_{rep}(V, \bullet)$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres graduées.

On a vu durant la preuve du théorème 3.21 , qu'il existait un morphisme naturel de $\mathbf{C}$-algèbres

$$K_*(F) \otimes \mathbf{C} \to H^{-*}((I_F)_{et}, K \otimes \mathbf{C})$$

En composant avec les classes de Chern

$$C_i : K \otimes \mathbf{C} \to \mathcal{H}^i$$

sur $(I_F)_{et}$ on obtient des classes de Chern

$$C_i : K_m(F)_{\mathbf{C}} = K_m(F) \otimes \mathbf{C} \to H^{m+di}_{rep}(F, (i))$$

Et aussi un caractère de Chern

$$Ch : K_m(F)_{\mathbf{C}} \to H^{m+d*}_{rep}(F, \bullet)$$

On vient de démontrer la proposition suivante

Proposition 5.2 *La cohomologie à coefficient dans les représentations vérifie les propriétés suivantes*

1. *(fonctorialité) $F \mapsto H^*_{rep}(F, \bullet)$ est un foncteur contravariant pour les morphismes représentables à valeur dans les* **C***-algèbres bi-graduées.*
   $F \mapsto H^{rep}_*(F, \bullet)$ est un foncteur covariant pour les morphismes projectifs à valeur dans les $H^*_{rep}(-, \bullet)$-modules bi-gradués

2. *(localisation) Si $j : F \hookrightarrow F'$ est une immersion fermée , alors il existe une suite exacte longue*

$$\dots H^{rep}_*(F, \bullet) \xrightarrow{j_*} H^{rep}_*(F', \bullet) \to H^{rep}_*(F' - j(F), \bullet) \to H^{rep}_{*-1}(F, \bullet) \dots$$

3. *(dualité) Si F est lisse , le morphisme naturel*

$$H^*_{rep}(F, \bullet) \to H^{rep}_{dp-*}(F, (p - *))$$

   est un isomorphisme

Nous n'avons pas énoncé l'axiome du projectif. Il existe mais est un peu délicat à écrire. En effet si $P \to F$ est un fibré projectif , le fibré projectif induit $I_P \to I_F$ possède un rang qui varie suivant les composantes connexes de I_F.

Terminons ce paragraphe par deux remarques sur cette cohomologie , qui montre qu'elle est assez naturelle.

1. Supposons que k soit de caractéristique nulle , que F soit lisse et que Γ soit la cohomologie de De Rham algébrique. Alors $H^*_{rep}(F, \bullet)$ possède une définition ne faisant intervenir que le champ F , de la façon suivante. Rappelons tout d'abord les constructions de Keller ([K] , voir aussi [Mc] pour une autre construction) de l'homologie périodique d'une catégorie exacte.

   Soit $\mathcal{E}$ une catégorie k-linéaire et exacte. Keller lui associe un complexe double $CP(\mathcal{E})$ de k-espaces vectoriels. Le spectre associé au complexe simple $sCP(\mathcal{E})$ sera noté $\mathcal{CP}(\mathcal{E})$. On l'appellera l'espace de cohomologie périodique de $\mathcal{E}$.
   On dispose alors des propriétés suivantes :

   - $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{CP}(\mathcal{E})$ est un foncteur de la catégorie des catégories exactes k-linéaires (et foncteurs exacts k-linéaires) , vers la catégorie des spectres.

- si R est une k-algébre , il exsite une équivalence faible naturelle

$$CP(R) \overset{\simeq}{\to} CP(\mathcal{E})$$

oú $\mathcal{E}$ est la catégorie des R-modules projectifs de type fini et $CP(R)$ est le complexe d'homologie périodique habituel ([L])
- si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie de Serre , alors les foncteurs naturels de la suite

$$\mathcal{B} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$$

induisent une suite exacte de fibration

$$\mathcal{CP}(\mathcal{B}) \to \mathcal{CP}(\mathcal{A}) \to \mathcal{CP}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$$

- si $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un foncteur exact qui induit une équivalence sur les catégories dérivées , alors le morphisme induit

$$F_* : \mathcal{CP}(\mathcal{E}) \to \mathcal{CP}(\mathcal{E}')$$

est une équivalence faible

Bien entendu , la liste n'est pas exhaustive. En particulier la troisième propriété que l'on cite n'est qu'un cas particulier d'une propriété de localisation bien plus générale ([K]).

Posons alors

$$HP_* := \pi_* \mathcal{CP}(Coh(F))$$

Alors , on peut montrer que ([T2])

$$F \mapsto HP_*(F)$$

est un foncteur contravariant pour les morphismes représentables de champs lisses et à valeur dans les k-algèbres graduées. Il est aussi covariant pour les morphismes propres de champs lisses. De plus on peut construire des classes de Chern

$$C_i : K_m(F) \to HP_m(F)$$

et démontrer que la transformation de Riemann-Roch obtenue vérifie le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch pour un champ lisse et propre.

D'autre par les calculs fait dans [F-T, B-N] , montre qu'il existe un isomorphisme naturel de k-algèbres

$$\bigoplus_m HP_m(F) \otimes \mathbf{C} \simeq \bigoplus_m H^{m+2*}_{naive}(I_F, \Gamma(\bullet)) = H^{m+2*}_{rep}(F, \bullet)$$

Et par cet isomorphisme , les classes de Chern correspondent.

Cet exemple illustre le fait que la géométrie des champs algébrique est une sorte de géométrie algébrique non-commutative , dans un sens analogue que celui de la géométrie non-commutative de Connes ([C]).

2. Supposons que l'on prenne la théorie de Gersten. Dans ce cas aussi il existe une construction globale donnant les $\mathbf{C}$-vectoriels $H_*^{rep}(F, \bullet)$ Nous ne le démontrerons pas ici (voir [T3] pour les détails). Indiquons juste que la construction consiste à prendre la filtration par la codimension sur les espaces de G-théorie de F. Est associée à cette filtration une suite spectrale , dont le terme "$E_1 \otimes \mathbf{C}$" forme un complexe d'homologie isomorphe à $H_*^{rep}(F, \bullet)$ Par contre on ne retrouve pas la même graduation , et on ne dispose pas à priori de produits. Ici aussi , il existe une tansformation de Riemann-Roch définie de façon interne à F et qui coincide avec celle définie plus haut.

5.2 Théorème de Riemann-Roch II

On en arrive au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour la cohomologie à coefficient dans les représentations.
Cette fois-ci nous sommes obligés de faire les hypothèses 4.3 , et que les champs sont plongeables dans des champs lisses. Pour se passer de la seconde il faudrait montrer que la transformation de Riemann-Roch pour les variétés lisses

$$\tau : K \to \mathcal{H}_{\mathbf{Q}}$$

est un morphisme flexible pour les morphismes projectifs.

MISE EN GARDE : Pour tout ce qui suit , tout est à coefficient dans $\mathbf{C}$. C'est à dire que l'on note G pour $G \otimes \mathbf{C}$, $\Gamma(*)$ pour $\Gamma(*) \otimes \mathbf{C}$ ...

Définition 5.3 *Soit F un champ lisse. Alors on définit la transformation de Riemann-Roch τ_F par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} G_m(F) & \simeq & H^{-m}((I_F)_{et}, G) \\ \tau_F \downarrow & & \downarrow \tau_{I_F} \\ H_{rep}^{m+d*}(F, \bullet) & = & H_{naive}^{m+d*}(I_F, \Gamma(\bullet)) \end{array}$$

où le morphisme de droite est défini dans la section précédente.
Si $F \hookrightarrow F'$ est une immersion fermée avec F lisse on définit

$$\tau_F^{F'} : G_m(F) \to H_{d*-m}^{rep}(F, \bullet)$$

comme le morphisme induit sur les fibres du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_m(F') & \to & G_m(F'-F) \\ \tau_{F'} \downarrow & & \downarrow \tau_{F'-F} \\ H_{rep}^{m+d*}(F',\bullet) & \to & H_{rep}^{m+d*}(F'-F,\bullet) \end{array}$$

Théorème 5.4 *Soit F un champ sur k , et qui est plongeable dans un champ lisse.*

1. *$\tau_F^{F'}$ est indépendant du plongement choisi , on le note τ_F , et on pose $\tau_F(\mathcal{O}_F) := Td(F)$.*
2. *Si $x \in G_m(F)$ et $y \in K_n(F)$, alors*

$$\tau_F(y.x) = Ch(y).\tau_F(x)$$

3. *Si $F = X$ est une variété quasi-projective , alors τ_F est le morphisme défini dans [G]*
4. *Si $p : F \to F'$ est un morphisme projectif de champs plongeables dans des champs lisses , on a*
$$p_* \circ \tau_F = \tau_{F'} \circ p_*$$
5. *Si $f : F' \to F$ est un morphisme étale de champs plongeables dans des champs lisses , alors*
$$f^* \circ \tau_F = \tau_F \circ f^*$$
6. *Soit $q : F \to V$ un morphisme propre , avec F un champ plongeable dans un champ lisse , et V une variété quasi-projective. Alors il existe une projection*
$$q_* : H_*^{rep}(F,\bullet) \to H_*^{rep}(V,\bullet)$$
qui étend la covariance pour l'homologie , et tel que
$$\tau_V \circ q_* = q_* \circ \tau_F$$

On tire de (6) le corollaire suivant , en faisant $V = Speck$

Corollaire 5.5 *Avec les mêmes hypothèses , soit F un champ propre plongeable dans un champ lisse , alors pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur F on a*

$$\chi(F,\mathcal{F}) = \int_F \tau_F(\mathcal{F})$$

De plus , si F est lisse

$$\chi(F,\mathcal{F}) = \int_F Ch(\mathcal{F}).Td(F)$$

Preuve du théorème:

(1) provient de (4) pour une immersion fermée de champs lisses. De plus , par définition , il suffit de montrer (4) et (6) pour des champs lisses. Tout le reste en découle.

(4) est le théorème 4.9 appliqué aux champs des ramifications.

Démontrons (6) , pour $q : F \to V$ propre , F et V lisses.

Commençons par définir le morphisme image directes

$$q_* : H_*^{rep}(F, \bullet) \to H_*(V, \bullet)$$

On va construire q_* , par un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*^{rep}(F,\bullet) & \stackrel{q_*}{\to} & H_*(V,\bullet) \\ p_* \downarrow & \nearrow r_* & \\ H_*^{naive}(F,\Gamma(\bullet)) & & \end{array}$$

Construisons p_* et r_*.

Commençons par r_*. Le morphisme q se factorise par $r : M \to V$, où M est l'espace des modules de F. On définit r_* à l'aide de 4.8 , par la composition

$$H_*^{naive}(F, \Gamma(\bullet)) \simeq H_*(M, \Gamma(\bullet)) \stackrel{r_*}{\to} H_*(V, \Gamma(\bullet))$$

Remarquons que l'on a aussi un morphisme

$$r_* : H^{-*}(F_{et}, G) \to G_*(V)$$

défini par la composition

$$H^{-*}(F_{et}, G) \simeq G_*(M) \stackrel{r_*}{\to} G_*(V)$$

Avant de passer à la construction de p_* , montrons que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{-*}(F_{et},G) & \xrightarrow{\tau_F} & H_*^{naive}(F,\Gamma(\bullet)) \\ r_* \downarrow & & \downarrow r_* \\ G_*(V) & \xrightarrow{\tau_V} & H_*(V,\Gamma(\bullet)) \end{array}$$

Pour cela on utilise le lemme suivant.

Lemme 5.6 *Soit $f : X \to F$ un morphisme propre et génériquement fini , avec X une variété lisse , et F un champ lisse. Alors les morphismes induit*

$$f_* : G_m(X) \to H^{-m}(F, G)$$

sont surjectifs

Preuve: Comme X et F sont lisses , on peut utiliser la formule de projection. On trouve alors que

$$f_* \circ f^*(y) = y.f_*(1)$$

Il suffit donc de montrer que $f_*(1)$ est inversible dans $H^0(F_{et}, G)$. Pour cela on utilise le théorème de Riemann-Roch naif 4.9 , avec la théorie de Gersten. On dispose donc d'un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$Ch : H^0(F_{et}, G) \simeq \bigoplus_{i=0}^{i=DimF} CH^i(F)$$

avec $CH^i(F)$ les groupes de Chow naifs de codimension i de F. Il suffit donc de montrer que $Ch(f_*(1))$ est inversible dans $CH^*(F)$. Ce qui est équivalent au fait que le terme de degré zéro $Ch(f_*(1))_0$ soit non nul. Or , par définition Ch_0 est le rang , donc

$$Ch(f_*(1)) = Rangf_*\mathcal{O}_X = Degf \neq 0$$

□

Soit $f : X \to F$ comme dans le lemme , et $y \in H^{-m}(F_{et}, G)$. Alors $y = f_*(x)$, $x \in G_m(X)$. On applique alors le théorème 4.9 , au morphisme composé

$$g : X \to V$$

ainsi qu'à f On obtient la formule cherchée

$$\tau_V \circ r_*(y) = \tau_V \circ g_*(x) = g_* \circ \tau_X(x) = r_* \circ f_*\tau_X(x) = r_* \circ \tau_F(y)$$

Il nous reste à définir p_* et montrer qu'il commute avec τ.
On utilise pour cela le théorème 3.16. Noter que ce théorème est aussi vrai pour la théorie d'homologie

$$\mathcal{H}'_{rep}(F) \doteq \mathcal{H}'(I_F)$$

En effet , seules sont utilisées les propriétés de localisation , et de dévissage suivant les représentations (3.18) , propriétés vérifiées par $\mathcal{H}'$.
Ainsi , on sait (3.17) qu'il existe une décomposition canonique

$$\mathcal{H}'_{rep}(F) \simeq \mathcal{H}'(F) \vee \mathcal{H}'_{rep}(F/M)$$

On définit p_* par la projection

$$p_* : \mathcal{H}'_{rep}(F) \to \mathcal{H}'(F)$$

Montrons que

$$p_* \circ \tau_F = \tau_F \circ p_*$$

où le premier τ_F est pour $\mathcal{H}_{rep}(F)$, et le second pour $\mathcal{H}(F)$.
Remarquer que l'on note

$$p_* : G(F) \to H(F_{et}, F)$$

la projection déduite de la décomposition

$$G(F) \simeq G(M) \vee G(F/M)$$

et de l'identification canonique

$$H(F_{et}, G) \simeq G(M)$$

On note $F_d \hookrightarrow F_{d-1} \hookrightarrow \dots F_0 = F$ la stratification naturelle de F , et $\mathcal{S}_i \to F_i$ le faisceau des représentations irréductibles génériques. On se fixe un représentant de

$$\tau_F : G(F) \to \mathcal{H}_{rep}(F)$$

On notera $G(F)_{et} := H(F_{et}, G)$.
Ce morphisme définit des morphismes

$$\tau^F_{F_i} : G(F_i) \to \mathcal{H}'_{rep}(F_i)$$

$$\tau^F_{F_i} : G(F_i)_{et} \to \mathcal{H}'(F_i)$$

Comme $\mathcal{S}_i$ est un revêtement étale de F_i , on obtient aussi , en "remontant" $\tau^F_{F_i}$ de F_i á $\mathcal{S}_i$, des morphismes

$$\tau^F_{\mathcal{S}_i} : G(\mathcal{S}_i)_{et} \to \mathcal{H}(\mathcal{S}_i)$$

Le choix de ces morphismes permet d'avoir des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} G(F_i) & \stackrel{\tau^F_{F_i}}{\to} & \mathcal{H}_{rep}(F_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G(F_{i+1}) & \stackrel{\tau^F_{F_{i+1}}}{\to} & \mathcal{H}_{rep}(F_{i+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G(F_i) & \stackrel{\tau^F_{F_i}}{\to} & \mathcal{H}_{rep}(F_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G(\mathcal{S}_i)_{et} & \stackrel{\tau^F_{\mathcal{S}_i}}{\to} & \mathcal{H}'(\mathcal{S}_i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G(\mathcal{S}_{i+1})_{et} & \stackrel{\tau^F_{\mathcal{S}_i}}{\to} & \mathcal{H}'(\mathcal{S}_{i+1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}})_{et} & \stackrel{\tau^F_{\mathcal{S}_{i+1}}}{\to} & \mathcal{H}'((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}}) \end{array}$$

Et donc un morphisme induit

$$\frac{G(F_{i+1}) \vee G(\mathcal{S}_i)_{et}}{G((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}})_{et}} \overset{\tau^F_{F_i} \vee \tau^F_{\mathcal{S}_i}}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{H}'_{rep}(F_{i+1}) \vee \mathcal{H}'(\mathcal{S}_i)}{\mathcal{H}'((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}})}$$

Notons $\widetilde{G}(F_i)$ et $\widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_i)$ les espaces construits par récurrrence sur i et par la formule

$$\widetilde{G}(F_i) = \frac{\widetilde{G}(F_{i+1}) \vee G(\mathcal{S}_i)_{et}}{G((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}})_{et}}$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_i) = \frac{\widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_{i+1}) \vee \mathcal{H}'(\mathcal{S}_i)}{\mathcal{H}'((\mathcal{S}_i)_{F_{i+1}})}$$

On dispose d'un morphisme induit

$$\tau^F_{F_i} : \widetilde{G}(F_i) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_i)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G}(F_i) & \overset{\tau^F_{F_i}}{\longrightarrow} & \widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_i) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ G(F_i) & \overset{\tau^F_{F_i}}{\longrightarrow} & \mathcal{H}'_{rep}(F_i) \end{array}$$

On voit aussi par récurrence descendante sur i , que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G}(F_i) & \overset{\tau^F_{F_i}}{\longrightarrow} & \widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_i) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ G(F_i)_{et} & \overset{\tau^F_{F_i}}{\longrightarrow} & \mathcal{H}'(F_i) \end{array}$$

On termine en faisant $i = 0$ et en utilisant les diagrammes homotopiquements commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} G(F) & \overset{\simeq}{\longleftarrow} & \widetilde{G}(F_0) \\ p_* \downarrow & \swarrow & \\ G(F)_{et} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}'_{rep}(F) & \overset{\simeq}{\longleftarrow} & \widetilde{\mathcal{H}}'_{rep}(F_0) \\ p_* \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{H}'(F) & & \end{array}$$

□

En dernière remarque , notons que si l'on se restreint au cas de $G_0(F)$, on peut enlever l'hypothèse que F est plongeable dans un champ lisse.

Théorème 5.7 *Soit F un champ de Deligne-Mumford. Alors il existe un morphisme de Riemann-Roch*

$$\tau_F : G_0(F) \to H^{rep}_{d*}(F, \bullet)$$

vérifiant les mêmes propriétés que celles de 5.4

<u>Preuve:</u> On reprend les notations précédentes , et on raisonne par récurrence sur $dimF$, gardant à l'esprit que τ_X existe pour tout espace algébrique (à l'aide des enveloppes de Chow par exemple [G2]).
La suite exacte suivante (3.16)

$$G_0(S_{M_1}) \to G_0(F_1) \oplus G_0(S) \to G_0(F) \to 0$$

permet de conclure.
□

References

[A-S] M. Atiyah and G. Segal , "On Equivariant Euler Characteristics" J. Geom. Phys. **6** (1989),671 − 677.

[B] S. Bloch "Higher Algebraic K-theory and Algebraic Cycles" , Adv. in Math. **61** pp. 267 − 304.

[B-K] A.K. Bousfield and D.M. Kan , "Homotopy Limits , Completions and Localisations" , Lecture Notes inMathematics No. **304** , Springer-Verlag , Berlin , 1975.

[Br-G] Brown and Gersten "Algebraic K-theory and Generalized Cohomology"

[B-N] J.L. Brylinski and V. Nistor "Cyclic Cohomology of Etale Groupoids" , K-theory Vol **8** , No 4pp. 341 − 366 , 1994.

[C] A. Connes , "Non-commutative Differential Geometry" , Publ. Math. IHES **62** (1985) pp. 257 − 360.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford "The Irreducibility of the Moduli Space of Curves of a Given Genus" , Publ. Math.IHES **36** (1969) , pp. 75 − 110.

[F-C] G. Faltings and Chai "Degeneration of Abelien Varietes" Springer

[F-T] B.L. Feigin and B.L. Tsygan , "Additive K-theory" in K-theory , Aritmetic and Geometry , LectureNotes in Math. No. **1289** , Springer-Verlag , Berlin 1987.

[Fr] E. Friedlander "Etale Homotopy Type of Simplicial Schemes" Ann. of Math. Studies **104** , Princeton 1982.

[G] H. Gillet "Riemann-Roch Theorems for Higher Algebraic K-theory" , Adv. in Math. **40** , pp. 203 − 289(1981).

[G2] H. Gillet "Intersection Theory on Algebraic Stacks and Q-Varieties" J. Pure Appl. Algebra **34** (1984) pp. 193 − 240.

[Gi] Giraud "Cohomologie Non Abélienne" Springer-Verlag Berlin Heidelberg N.Y. 1971.

[H] R. Hartshorne "On the De Rham Cohomology of Algebraic Varietes" Publ. Math. IHES **45** (1975)pp. 5 − 99.

[J1] Jardine "Generalised Etale Cohomology Theory" , Birkhauser

[J2] Jardine "Simplicial Presheaves" J. Pure and Appl. Algebra J. Pure Appl. Algebra **47** (1987) pp. 35 − 87.

[K] B. Keller "Cyclic Homology of Exact Categories" Preprint.

[L] J.L. Lauday "Cyclic Homology" , Grundlerhen der math. wissenschaften , vol. **310** Springer-Verlag, Berlin , Heidelberg , and New-York (1992).

[L-M] G. Laumont et Moret-Bailly , "Champs Algébriques" , Prépublication d'Orsay (1992).

[M] J.P. May "Simplicial Object in Algebraic Topology" Van Nostrand , Princeton , N.J. 1967.

[Mc] R. McCarty , "The Cyclic Homology of an Exact categorie" , J. Pure and Appl. Alg.**93** (1994) pp. 251 – 296.

[Q] D. Quillen , Higher Algebraic K-theory I , in "Algebraic K-theory" (H. Bass Ed.) , Lecture NotesNo. **341** , Springer-Verlag , Berlin , 1977.

[S] C. Simpson "Flexible Sheaves" Preprint.

[Th] R.W. Thomason "Algebraic K-theory of Schemes and of Derived Categories" , in Grothendieck Festschriftvol III , Birkhauser 1990 , pp. 247–436.

[Th2] R.W. Thomason "Algebraic K-theory of Group Schemes Actions" Annals of Math. Studies **113** Princeton , 1983 pp. 539 – 563.

[T] B. Toen "Cohomologie Généralisée des Objets Simpliciaux" Preprint.

[T2] B. Toen "Homologie Périodique des Champs de Deligne-Mumford" Preprint.

[T3] B. Toen "Un Théorème de Riemann-Roch pour les Champs de Deligne-Mumford" Preprint.

[Vi] A. Vistoli "Higher Algebraic K-theory of Finite Group Actions" Duke Math. Journal No **63** (1991) pp. 399–.

[Vi2] A. Vistoli "Intersection Theory on Algebraic Satcks and their Moduli Spaces" Invent. Math. **97** (1989) pp 613 – 669.