Mannigfaltigkeiten und Modulformen

F. Hirzebruch

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

MPI 91–10

Mannigfaltigkeiten und Modulformen

F. Hirzebruch, Bonn

In meinem Vortrag auf der DMV–Tagung (Bremen, September 1990) habe ich versucht, einen Überblick über die Theorie der elliptischen Geschlechter zu geben, die von P.S. Landweber, S. Ochanine, R.E. Stong, E. Witten und anderen entwickelt wurde [La 1]. In dieser schriftlichen Fassung werde ich in erster Linie Teilbarkeitsaussagen nach Potenzen von 2 behandeln. Für eine Einführung in die Theorie vgl. auch [HBJ].

§ 1. Die Signatur und das $\hat{A}$–Geschlecht

Wir betrachten zunächst die Signatur $\operatorname{sign}(X)$ einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Wenn die Dimension von X gleich $4k$ ist, dann sei $H_{2k}(X)$ die ganzzahlige Homologie von X in der mittleren Dimension modulo Torsion. Für $\alpha, \beta \in H_{2k}(X)$ ist die Schnittzahl $\alpha \circ \beta$ definiert. Durch sie wird eine ganzzahlige unimodulare symmetrische Bilinearform auf dem Gitter $H_{2k}(X)$ erklärt. Tensoriert man dieses Gitter mit den reellen Zahlen, dann gibt es eine (nicht eindeutig bestimmte) Aufspaltung

$$(1.1) \qquad H_{2k}(X) \otimes \mathbb{R} = H_{2k}^{+} \oplus H_{2k}^{-} ,$$

so daß die Schnittform auf H^+_{2k} positiv–definit, auf H^-_{2k} negativ–definit ist und H^+_{2k}, H^-_{2k} bezüglich der Schnittform senkrecht aufeinander stehen. Dann ist per definitionem

$$(1.2) \qquad \operatorname{sign}(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^+_{2k} - \dim_{\mathbb{R}} H^-_{2k}$$

Die Signatur von X wird gleich 0 gesetzt, wenn die Dimension von X nicht durch 4 teilbar ist. Bezüglich des cartesischen Produkts, der disjunkten Vereinigung und des Orientierungswechsels hat die Signatur folgende Eigenschaften

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sign}(X \times Y) &= \operatorname{sign}(X)\operatorname{sign}(Y) \\ \operatorname{sign}(X+Y) &= \operatorname{sign}(X) + \operatorname{sign}(Y) \\ \operatorname{sign}(-X) &= -\operatorname{sign}(X) \end{aligned}$$

Ferner gilt für eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit W mit Rand

$$(1.4) \qquad \operatorname{sign}(\partial W) = 0$$

Eine "Invariante", die jeder kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine komplexe Zahl oder ein Element in einer kommutativen Algebra über $\mathbb{C}$ zuordnet, sodaß wie für die Signatur (1.3) und (1.4) gelten, nennt man ein Geschlecht, eine Bezeichnung, die ich 1953 einführte [Hi 1] wegen der Analogie zum arithmetischen Geschlecht algebraischer Mannigfaltigkeiten. Die kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bilden, wenn man berandende Mannigfaltigkeiten vernachlässigt, den graduierten Cobordismus–Ring Ω^*, und das fundamentale Resultat von R. Thom aus dem Jahre 1953 besagt [Th]

$$\Omega^* \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}[P_2, P_4, P_6, \dots] \quad , \tag{1.5}$$

wo $P_n = P_n(\mathbb{C})$ der komplexe projektive Raum der komplexen Dimension n ist. Ein Geschlecht φ ist durch seine Werte auf den P_{2n}, d.h. durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(P_{2n}) t^{2n} \tag{1.6}$$

bestimmt. Für die Signatur ist diese Potenzreihe gleich $\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = (1-t^2)^{-1}$.

Aus der Thomschen Cobordismustheorie folgt, daß jedes Geschlecht durch die Pontrjaginschen Zahlen der Mannigfaltigkeit ausdrückbar ist. Die Pontrjaginschen Klassen $p_i \in H^{4i}(X,\mathbb{Z})$ können als reelle Kohomologieklassen durch Differentialformen vom Grade $4i$ gegeben werden, die mit Hilfe des Krümmungstensors einer Riemannschen Metrik berechenbar sind. Insbesondere ergibt sich der 1953 bewiesene Signatursatz [Hi 1]. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(X) = \tfrac{1}{3}\, p_1[X] && \text{für } \dim X = 4 \\
&\operatorname{sign}(X) = \tfrac{1}{45}\,(7p_2 - p_1^2)[X] && \text{für } \dim X = 8 \\
&\operatorname{sign}(X) = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}\,(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)[X] && \text{für } \dim X = 12
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Atiyah und Singer haben 1962 den Signatur–Operator eingeführt und konnten so den Signatursatz als Spezialfall des Indexsatzes für lineare elliptische Operatoren auf Mannigfaltigkeiten erhalten ([AS], p. 577).

Ochanine [O 1] hat folgenden Satz bewiesen.

Satz. Die Signatur einer differenzierbaren Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension 8k+4 ist durch 16 teilbar.

Für 4–dimensionale Mannigfaltigkeiten stammt der Satz von V.A. Rohlin (1952).

Erinnern wir zunächst an den Begriff der Spin–Struktur einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X der Dimension n mit Riemannscher Metrik. (Vgl. z.B. [AH 2]). Die Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ ist (für $n \geq 2$) die universelle Überlagerung von $SO(n)$. Es handelt sich um eine doppelte Überlagerung. Eine Spin–Struktur ist eine Anhebung der Strukturgruppe $SO(n)$ des Tangentialbündels von X auf $\mathrm{Spin}(n)$. Sie existiert genau dann, wenn die zweite Stiefel–Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ verschwindet (vgl. z.B. [BH II], p. 350). Wenn $w_2 = 0$, dann kann man, wie mir S. Ochanine erklärte, mit Hilfe von Steenrodschen Quadraten sehr leicht sehen (vgl. [Wa], p. 253, und [HBJ]), daß für $\dim X = 8k+4$ die quadratische Form der Mannigfaltigkeit gerade ist, d.h. $\alpha\circ\alpha$ ist gerade für alle $\alpha \in H_{2k}(X)$. Also gilt nach einem bekannten Satz über unimodulare Formen, daß $\mathrm{sign}(X) \equiv 0 \bmod 8$ (das ist praktisch eine Aussage für topologische Mannigfaltigkeiten, da die Stiefel–Whitneyschen Klassen topologisch definierbar sind). Der zusätzliche Faktor 2 bei Rohlin und Ochanine spielt eine fundamentale Rolle. Für die Dimension 4 werde auf die Ergebnisse von S.K. Donaldson und M.H. Freedman hingewiesen, für die sie 1986 die Fields Medaille erhielten (siehe Proceedings, ICM Berkeley). Für die Dimension $8k+4 \geq 12$ ist seit langem bekannt, daß man mit Hilfe der Sätze von Milnor und Kervaire über exotische Sphären topologische Mannigfaltigkeiten mit $w_2 = 0$ und Signatur 8 konstruieren kann, die also keine differenzierbare Struktur zulassen. (Vgl. den Bericht in

[Hi 2], § 3).

Der Satz von Ochanine kann auf Ganzzahligkeitsaussagen über $\hat{A}$–Geschlechter zurückgeführt werden. Stellt man die Pontrjaginschen Klassen p_i von X formal als i–te elementar–symmetrische Funktionen von hinreichend vielen Variablenquadraten x_j^2 da, wo x_j die Dimension 2 hat, dann ist das $\hat{A}$–Geschlecht so erklärt:

$$(1.8)\qquad \hat{A}(X) = \Big(\prod_j \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2}\Big)[X]$$

Es ist ([Hi 1], 1.6)

$$(1.9)\qquad \prod_j \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2} = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{1}{2^7\cdot 45}(-4p_2 + 7p_1^2)$$
$$- \frac{1}{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}(16p_3 - 44p_2p_1 + 31p_1^3) + \dots$$

Für eine 4–dimensionale Mannigfaltigkeit ist $\hat{A}(x) = -\frac{p_1}{24}[X]$, und man hat also die Beziehung

$$(1.10)\qquad \operatorname{sign}(X) = -8\,\hat{A}(X)$$

In [BH II], § 25, wurde gezeigt, daß $A(X) = 2^{4k}\hat{A}(X)$ für eine 4k–dimensionale Mannigfaltigkeit ganzzahlig ist. Für ein komplexes Vektorraum–Bündel V wurde $\hat{A}(X,V)$ (dort $\hat{A}(X,0,V)$ genannt) eingeführt. Man erhält $\hat{A}(X,V)$, indem man den Ausdruck in (1.9) mit dem Chernschen Charakter von V multipliziert und dann auf dem Grundzyklus von X auswertet. Diese rationalen Zahlen haben wieder nur eine

Potenz von 2 im Nenner ([BH II], § 25.5). Ihre Einführung wurde so motiviert. Wenn für eine kompakte komplexe n–dimensionale Mannigfaltigkeit die erste Chernsche Klasse verschwindet, d.h. wenn die Strukturgruppe des Tangentialbündels von $U(n)$ auf $SU(n)$ reduzierbar ist, und wenn V ein holomorphes Vektorraum–Bündel ist, dann ist $\hat{A}(X,V)$ die holomorphe Eulersche Zahl von X mit Koeffizienten in der Garbe der Keime der holomorphen Schnitte von V (siehe [Hi 1]). Dies führte in [BH II], § 25.6, zu der Vermutung, daß $\hat{A}(X,V)$ stets eine ganze Zahl ist, falls X eine Spin–Mannigfaltigkeit ist, und daß diese Zahl gerade ist, sofern $\dim X \equiv 4 \bmod 8$ und V die Komplexifizierung eines reellen Bündels ist. Diese Vermutung wurde von Atiyah und mir bewiesen ([Hi 3], 4.2) und zwar auf die Bottsche Periodizität zurückgeführt. Atiyah und Singer ([AS], p. 571) interpretierten wieder als Anwendung des allgemeinen Indexsatzes $\hat{A}(X)$ als Index des Dirac–Operators:

Für eine Spin–Mannigfaltigkeit X der Dimension $n = 2\ell$ hat man vermöge der Spinor–Darstellungen Δ^+, Δ^- von $Spin(n)$ zwei komplexe Vektorraum–Bündel $E^\pm$ der Dimension $2^{\ell-1}$ über X, die zum tangentiellen Prinzipal–Spin(n)–Bündel assoziiert sind. Der Dirac–Operator ist für Schnitte von $E^\pm$ definiert. Es seien H^+, H^- die endlich–dimensionalen Vektorräume der harmonischen Schnitte von E^+, E^-. Dann ist

$$\hat{A}(X) = \dim H^+ - \dim H^- \tag{1.11}$$

Man kann den Dirac–Operator auch erweitern auf die Schnitte von $E^\pm \otimes V$, wo V ein komplexes Vektorraum–Bündel ist. Dabei benutzt man einen Zusammenhang in V. Als Index erhält man dann $\hat{A}(X,V)$. Falls $\dim X \equiv 4 \bmod 8$ und $V = V' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, wo V' reell ist, dann ist $\hat{A}(X,V)$ gerade. Man kann nämlich über den harmonischen Spinoren eine schief–symmetrische nicht ausgeartete Form definieren: Die Bündel $E^\pm \otimes V$ haben eine symplektische Struktur, die mit dem Dirac–Operator verträglich ist (vgl. auch

[BH II], Ende von 26.5).

Es sei T die komplexe Erweiterung des reellen Tangentialbündels von X. Die Chernschen Klassen von T sind im wesentlichen die Pontrjaginschen Klassen von X. Deshalb läßt sich $\hat{A}(X,T)$ durch die Pontrjaginschen Klassen von X ausdrücken. Für den Chernschen Charakter von T gilt die Formel

$$\text{(1.12)} \qquad \mathrm{ch}(T) = \dim X + p_1 + \frac{p_1^2-2p_2}{12} + \frac{p_1^3-3p_2p_1+3p_3}{360} + \dots$$

und man erhält nach (1.9)

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{aligned} &\hat{A}(X,T) = \tfrac{5}{6}\, p_1[X] = -20\,\hat{A}(X) && \text{für } \dim X = 4 \\ &\hat{A}(X,T) = \tfrac{1}{720}\,(-124p_2 + 37p_1^2)[X] && \text{für } \dim X = 8 \\ &\hat{A}(X,T) = \frac{1}{2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\,(656p_3-124p_2p_1+11p_1^3)[X] && \\ & && \text{für } \dim X = 12 \end{aligned}$$

Beachte, daß $\hat{A}(X,T)$ kein Geschlecht ist. Es gilt jedoch

$$\text{(1.14)} \qquad \hat{A}(X\times Y,T) = \hat{A}(X)\hat{A}(Y,T) + \hat{A}(X,T)\hat{A}(Y)$$

Aus den Formeln (1.7), (1.9), (1.13) folgt, daß sich die Signatur für 8– und 12–dimensionale Mannigfaltigkeiten wie folgt durch $\hat{A}(X)$ und $\hat{A}(X,T)$ ausdrücken läßt.

$$\text{(1.15)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{sign}(X) = -\hat{A}(X,T) + 24\hat{A}(X) && \text{für } \dim X = 8 \\ &\mathrm{sign}(X) = 8\hat{A}(X,T) - 32\hat{A}(X) && \text{für } \dim X = 12 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir den Satz von Ochanine für $\dim X = 12$. Für $\dim X = 4$ (Satz von Rohlin) ergibt er sich aus (1.10). Die Formeln (1.10) und (1.15) sind der Beginn interessanter Beziehungen zwischen der Signatur und getwisteten $\hat{A}$–Geschlechtern, welche in jeder Dimension $8k+4$ mit Hilfe von $\hat{A}(X,V)$ gerade (V Komplexifizierung eines reellen Bündels) zum Satz von Ochanine führen. Die Theorie der elliptischen Geschlechter klärt diese Beziehung auf.

§ 2. Getwistete Signaturen und getwistete $\hat{A}$–Geschlechter

Der Signatur–Operator auf einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X (mit Riemannscher Metrik) kann mit einem komplexen Vektorraum–Bündel V über X getwistet werden ([AS], p. 585). Der Index ist gleich $\operatorname{sign}(X,V)$, eine Zahl, die mit Hilfe der Pontrjaginschen Klassen von X und der Chernschen Klassen c_i von V so gegeben wird $(c_i \in H^{2i}(X,\mathbb{Z}))$

$$\operatorname{sign}(X,V) = (\operatorname{ch}(V) \prod_j \frac{x_j/2}{\sinh x_j/2}(e^{x_j/2} + e^{-x_j/2}))[X] \tag{2.1}$$

Hierbei ist

$$\operatorname{ch}(V) = \dim V + c_1 + \frac{c_1^2-2c_2}{2} + \frac{c_1^3-3c_2c_1+3c_3}{6} + \dots$$

der Chernsche Charakter von V. Hat X die Dimension $2n$, dann läuft j in der Formel (2.1) von 1 bis n. Man kann nicht beliebig viele j wählen, da der Ausdruck unter dem Produktzeichen in (2.1) keine mit 1 beginnende Potenzreihe ist. Wendet man auf V die Adamsche Operation ψ_2 an mit

$$\mathrm{ch}(\psi_2 V) = \dim V + 2c_1 + 2^2\,\frac{c_1^2-2c_2}{2} + 2^3\,\frac{c_1^3-3c_2c_1+3c_3}{6} + \dots ,$$

dann erhält man die stabile Schreibweise

$$\text{(2.2)}\qquad \mathrm{sign}(X,V) = \Big(\mathrm{ch}(\psi_2 V)\cdot\prod_j \frac{x_j}{\mathrm{tgh}\,x_j}\Big)[X]$$

Die ganze Zahl $\mathrm{sign}(X,V)$ ist eine ganzzahlige Linearkombination von gemischten Pontrjagin–Chern–Zahlen des Paares (X,V) geteilt durch eine zu 2 teilerfremde ganze Zahl.

Für eine Spin–Mannigfaltigkeit X der Dimension $2n$ ist nach (2.1)

$$\text{(2.3)}\qquad \mathrm{sign}(X,V) = \hat{A}(X,(E^+\oplus E^-)\otimes V) ,$$

wo E^+ und E^- die beiden Spinorbündel sind (§ 1). Insbesondere ist

$$\text{(2.4)}\qquad \mathrm{sign}(X) = \hat{A}(X,E^+\oplus E^-) = \hat{A}(X,E^+) + \hat{A}(X,E^-)$$

Der Chernsche Charakter von $E^+ \oplus E^-$ ist ([BH II], p. 350)

$$\mathrm{ch}(E^+ \oplus E^-) = \prod_{j=1}^{n} (e^{x_j/2} + e^{-x_j/2}) .$$

Er involviert nur die Pontrjaginschen Klassen von X, während E^+ und E^- für sich allein auch die Eulersche Klasse $\prod x_j$ enthalten. Die Euler–Poincarésche Charakteristik $e(X)$ ist gleich $\hat{A}(X,E^+) - \hat{A}(X,E^-)$. Es folgt

$$\hat{A}(X,E^+) = \tfrac{1}{2}\,(e(X) + \mathrm{sign}(X)) \ . \tag{2.5}$$

Für die 2n–dimensionale Sphäre ist also

$$\hat{A}(S^{2n},E^+) = ch(E^+)[S^{2n}] = 1$$

und damit E^+ ein Bündel über S^{2n} mit n–ter Chernscher Klasse gleich $\pm(n-1)!$ und also ein erzeugendes Element der K–Theorie von S^{2n}. Dies entspricht der Rechnung, die in [BH II], § 26, durchgeführt wurde.

Die getwisteten Signaturen $\mathrm{sign}(X,V)$ sind für das elliptische Geschlecht von Wichtigkeit, wenn V zum komplexifizierten Tangentialbündel T von X vermöge einer Darstellung von $U(n)$ $(n = \dim X)$ assoziiert ist. In der Tat werden nur Tensorprodukte von äußeren und symmetrischen Potenzen von T und Linearkombinationen davon vorkommen. Natürlich ist V dann die Komplexifizierung der entsprechenden Bildungen für das reelle Tangentialbündel. Die Chernschen Klassen von V lassen sich durch die Pontrjaginschen Klassen von X ausdrücken und $\mathrm{sign}(X,V)$ ist dann eine Linearkombination von Pontrjaginschen Zahlen von X mit rationalen Koeffizienten (nach (2.2) mit ungeraden Nennern), also eine Cobordismus–Invariante.

Bevor wir aber zu den elliptischen Geschlechtern kommen, sei an Teilbarkeitsaussagen bezüglich Potenzen von 2 erinnert.

Es sei X eine 2n–dimensionale Spin–Mannigfaltigkeit mit 2d Vektorfeldern, die überall linear unabhängig sind. Dann folgt aus (2.1) und (2.3), daß $\mathrm{sign}(X,V)$ durch 2^d teilbar ist. In (2.1) kann man nämlich d von den Variablen x_j gleich 0 setzen. In der

Tat braucht man für diese Teilbarkeit nicht, daß X eine Spin–Struktur zuläßt, und es gelten sogar schärfere Resultate (vgl. [A] und [B], wo auf die Arbeiten von D. Frank, K.H. Mayer und W. Schwarz hingewiesen wird).

Das $\hat{A}$–Geschlecht ist für eine 4k–dimensionale Mannigfaltigkeit X im allgemeinen nicht ganzzahlig. Jedoch ist $2^{4k}\hat{A}(X) = A(X)$ ganzzahlig. Als Polynom in den Pontrjaginschen Klassen ist $A(X)$ genau durch $2^{\alpha(k)}$ teilbar, wo $\alpha(k)$ die Anzahl der Einsen in der dyadischen Darstellung von k ist. Es gilt

$$A(P_{2k}) = (-1)^k \begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

und $\begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix}$ enthält die Primzahl 2 genau mit dem Exponenten $\alpha(k)$. Wenn X in $\mathbb{R}^{8k-2q}$ einbettbar ist, dann ist $A(X)$ durch 2^{q+1} teilbar ([AH 1], 3.8) und so ergibt sich, daß P_{2k} nicht in $\mathbb{R}^{8k-2\alpha(k)}$ einbettbar ist.

§ 3. Das elliptische Geschlecht. Vorbereitungen

Für ein komplexes Vektorraum–Bündel E betrachten wir die äußeren Potenzen $\Lambda^i E$, die symmetrischen Potenzen $S^i E$ und die formalen Summen in einer Unbestimmten

$$\Lambda_t E = \sum_{i \geq 0} \Lambda^i E \cdot t^i$$

$$S_t E = \sum_{i \geq 0} S^i E \cdot t^i \ .$$

Im ersten Fall handelt es sich um eine endliche Potenzreihe, im zweiten Fall bricht sie dagegen nicht ab. Es gilt

(3.1) $$\Lambda_{-t}E \cdot S_tE = 1 \ ,$$

in Verallgemeinerung der Beziehung

$$(1-t)(1+t+t^2+t^3+...) = 1 \ .$$

Für das Vektorraum–Bündel E über der Basis X möge eine $\mathbb{C}^*$–Aktion gegeben sein, die auf X trivial ist. Dann zerlegt sich E in Eigenraum–Bündel E_n, auf denen $q \in \mathbb{C}^*$ durch Multiplikation mit q^n operiert. Nehmen wir an, daß nur die E_n mit $n > 0$ von 0 verschieden sind. Wir schreiben E in der Form

(3.2) $$E = \sum_{n>0} q^n E_n \ ,$$

wodurch die gegebene Operation angedeutet wird (Spur–Bildung). Entsprechend ist dann die direkte Summe $\Lambda^* E$ der äußeren Potenzen so zu schreiben

(3.3) $$\Lambda^* E = \prod_{n>0} \Lambda_{q^n} E_n \ ,$$

und für die direkte Summe der symmetrischen Potenzen folgt

(3.4) $$S^* E = \prod_{n>0} S_{q^n} E_n \ ,$$

allerdings ist dies jetzt als unendliche Potenzreihe in der Unbestimmten q zu betrachten. Formal kann man auch in (3.2) eine Potenzreihe zulassen, z.B.

$$E = 8 \sum_{n>0} q^n .$$

Hier ist gemeint, daß E_n das triviale 8–dimensionale Bündel ist. In diesem Fall gilt (siehe (3.1))

$$\Lambda^* E \cdot S^* E = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1+q^n}{1-q^n} \right]^8 \tag{3.5}$$

Hier sind wir endlich bei Modulformen angelangt. Oft multipliziert man (3.5) noch mit $\Lambda^* E_0 = 16$, wo E_0 ein 4–dimensionales triviales Vektorraum–Bündel ist. Setze

$$\epsilon = \frac{1}{16} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-q^n}{1+q^n} \right]^8 \tag{3.6}$$

und $q = e^{2\pi i \tau}$, wo $\tau \in \mathbb{H}$ (obere Halbebene von $\mathbb{C}$).

Dieses unendliche Produkt ist kompakt gleichmäßig konvergent in $\mathbb{H}$ (d.h. für $|q| < 1$) und definiert in $\mathbb{H}$ eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_0(2)$ vom Gewicht 4. Dabei entsteht $\Gamma_0(2)$ aus der Gruppe

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \bmod 2 \right\}$$

nach Division durch das Zentrum, das aus der Einheitsmatrix und ihrer negativen besteht. Die Gruppe $\Gamma_0(2)$ operiert auf $\mathbb{H}$ durch gebrochene lineare Transformationen. Halten wir hier gleich fest, daß der graduierte Ring aller Modulformen zu $\Gamma_0(2)$ der freie Polynomring $\mathbb{C}[\delta,\epsilon]$ ist, wo

$$(3.7)\qquad \delta = \frac{1}{4} + 6\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ d \text{ ungerade}}} d\Big)q^n$$

eine Modulform vom Gewicht 2 ist. Ferner kann man ϵ auch in der Gestalt

$$(3.8)\qquad \epsilon = \frac{1}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d\mid n}(-1)^d d^3\Big)q^n$$

schreiben. Wir führen noch die beiden Modulformen

$$(3.9)\qquad \tilde{\delta} = -\frac{\delta}{2}\,,\quad \tilde{\epsilon} = \frac{1}{4}(\delta^2-\epsilon)$$

ein. Es gilt

$$(3.10)\qquad \tilde{\epsilon} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\mid n\\ n/d \text{ ungerade}}} d^3\Big)q^n = q\,\frac{\prod_{2\mid n}(1-q^n)^8}{\prod_{2\nmid n}(1-q^n)^8}\,.$$

Die Gruppe $\Gamma_0(2)$ hat zwei Spitzen. Der Quotient $\mathbb{H}/\Gamma_0(2)$ ist die zweifach punktierte Riemannsche Zahlenkugel. In jeder Spitze hat eine Modulform eine Potenzreihenentwicklung bezüglich eines ortsuniformisierenden Parameters, den man in jeder Spitze q nennen kann. Die Formeln (3.7) und (3.8) geben die q–Entwicklungen von δ und ϵ in der offensichtlichen Spitze $\tau = i\infty$ an. Eine geeignete Transformation zeigt, daß $\tilde{\delta}$, $\tilde{\epsilon}$ in (3.9) und (3.10) die q–Entwicklungen in der anderen Spitze für δ und ϵ sind.

Für die Ausführungen in diesem Paragraphen verweisen wir auf [La 1] und besonders auf den Artikel [Za] von Don Zagier in diesen Proceedings.

§ 4. Der äquivariante Signatursatz

Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$ auf der die Kreislinie differenzierbar operiert. Die Gruppe S^1 operiert dann auch auf der Homologie. Die Aufspaltung (1.1) kann äquivariant vorgenommen werden. Es wird definiert

$$\operatorname{sign}(X;q) = \operatorname{Spur}(q,H^+_{2k}) - \operatorname{Spur}(q,H^-_{2k}) \quad . \tag{4.1}$$

Der äquivariante Signatursatz [AS] drückt die endliche Laurentsche Reihe $\operatorname{sign}(X;q)$ durch getwistete Signaturen der Fixpunktmannigfaltigkeit der S^1–Aktion aus und zwar gilt

$$\operatorname{sign}(X;q) = \operatorname{sign}(X^{S^1}, \Lambda^* N \otimes S^* N) \tag{4.2}$$

Hierbei ist folgendes zu beachten.

a) Die Komponenten von X^{S^1} sind getrennt zu behandeln.

b) Mit N wird das Normalbündel jeweils einer Komponente bezeichnet, dem eine komplexe Struktur zu geben ist, so daß die Eigenbündel nur Drehfaktoren q^n haben mit $n > 0$. Damit ist N orientiert. Die Komponente von X^{S^1} wird so orientiert, daß ihre Orientierung zusammen mit der des konjugiert–komplexen Bündels $\overline{N}$ die gegebene Orientierung von X liefert. Für $\Lambda^* N$, $S^* N$ siehe (3.3) und (3.4). Wegen (3.1) liefert jede

Komponente eine rationale Funktion in q .

In der Tat weiß man, daß S^1 auf der Homologie trivial operiert, $\mathrm{sign}(X;q)$ hängt also nicht von q ab . Man kann das auch (4.2) und (3.1) entnehmen. Die rationalen Funktionen auf der rechten Seite haben für $q = 0$ und $q = \infty$ keinen Pol, während die linke Seite als endliche Laurentsche Reihe höchstens für $q = 0$ oder $q = -\infty$ einen Pol haben kann. Die Gleichung (4.2) besagt also, daß sich die rationalen Funktionen, die den Fixpunktkomponenten zugeordnet sind, zu einer Konstanten, der Signatur von X , aufsummieren. (Vgl. [AH 2]).

Ist V ein komplexes Vektorraum–Bündel, das zum Tangentialbündel von X assoziiert ist, dann ist auch $\mathrm{sign}(X,V;q)$ erklärt. Es gilt

$$(4.3) \qquad \mathrm{sign}(X,V;q) = \mathrm{sign}(X^{S^1}, \Lambda^* N \otimes S^* N \otimes V) \quad ,$$

wo rechts V im Sinne von (3.2) aufzufassen ist. (Hier können aber beliebige Drehzahlen n vorkommen.) Jetzt läßt sich das obige Argument nicht mehr durchführen. Im allgemeinen hängt $\mathrm{sign}(X,V;q)$ von q ab.

§ 5. Das elliptische Geschlecht

Der freie Schleifenraum $\mathscr{L}X$ besteht aus allen differenzierbaren Abbildungen der Kreislinie in X . Auf $\mathscr{L}X$ operiert $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ wie folgt: die Schleife $t \longmapsto s(t)$, wo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, geht über in $t \longmapsto s(t-\tau)$. Die Verwendung von $\mathscr{L}X$ soll uns hier nur motivieren. Wir erlauben uns deshalb, einige Überlegungen ohne besondere Vorsichtsmaßnahmen durchzuführen. Der Schleifenraum $\mathcal{L}X$ wird als unendlich–dimensionale S^1–Mannigfaltigkeit angesehen. Die Fixpunktmannigfaltigkeit $(\mathcal{L}X)^{S^1}$ besteht aus den konstanten Schleifen und ist deshalb gleich X.

$$(5.1) \qquad (\mathcal{L}X)^{S^1} = X \subset \mathcal{L}X \ .$$

Der Tangentialraum von $\mathcal{L}X$ in einem Punkte x_0 von X besteht aus den Schleifen im Tangentialraum von X in x_0. Eine solche Schleife hat formal eine Fourier–Entwicklung

$$(5.2) \qquad s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nt + b_n \sin 2\pi nt) \ ,$$

wo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und a_0 sowie a_n, b_n $(n \geq 1)$ reelle Tangentialvektoren von X im Punkte x_0 sind. Sieht man a_n+ib_n als Vektor in der Komplexifizierung des reellen Tangentialraumes an, dann ergibt sich aus (5.2) für das Normalbündel N von X in $\mathcal{L}X$

$$(5.3) \qquad N = \sum_{n=1}^{\infty} q^n T \quad (q = e^{2\pi i \tau}) \ ,$$

wo T wie in § 1 die Komplexifizierung des reellen Tangentialbündels von X ist. Die an sich gar nicht definierte äquivariante Signatur von $\mathcal{L}X$ kann vermöge (5.3) mit Hilfe der rechten Seite von (4.2), wobei man dort X durch $\mathcal{L}X$ ersetzt, erklärt werden. Wir haben

$$(5.4) \qquad \operatorname{sign}(\mathcal{L}X;q) = \operatorname{sign}(X, \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^n} T \prod_{n=1}^{\infty} S_{q^n} T) \ ,$$

vgl. (3.2), (3.3), (3.4).

Für uns ist (5.4) die Definition von $\operatorname{sign}(\mathscr{L}X;q)$. Wir setzen noch

(5.5) $$\Phi(X) = \operatorname{sign}(\mathscr{L}X;q)$$

und haben damit das elliptische Geschlecht $\Phi(X)$ erklärt. Es ist leicht zu sehen, daß Φ ein Geschlecht mit Werten in den formalen Potenzreihen in der Unbestimmten q mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Die Koeffizienten sind getwistete Signaturen, die sich durch Pontrjaginsche Zahlen ausdrücken lassen (vgl. § 1). Das konstante Glied in der Potenzreihe ist die Signatur. Da die Potenzreihe für $|q| < 1$ kompakt gleichmäßig konvergiert, hat man für jedes q im Einheitskreis ein Geschlecht mit Werten in $\mathbb{C}$. Deshalb spricht man oft im Plural von elliptischen Geschlechtern. Es ist

(5.6) $$\Phi(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{sign}(X,R_m)q^m$$

$$= \operatorname{sign}(X) + 2\operatorname{sign}(X,T)q + \ldots$$

mit

$$R_1 = 2T \text{ und } R_2 = 2T + T\otimes T + \Lambda^2 T + S^2 T = 2(T + T\otimes T)$$

Bei der Definition des elliptischen Geschlechtes als äquivariante Signatur des Schleifenraumes sind wir den Ideen von E. Witten [Wi] und anderen Physikern gefolgt. Formel (5.4) ist die Formel (25) in [Wi].

Die Mannigfaltigkeit X habe die Dimension $4k$, die Pontrjaginschen Klassen von X seien als elementar–symmetrische Funktionen in $2k$ Variablenquadraten x_j^2 dargestellt und entsprechend die Chernschen Klassen des $4k$–dimensionalen komplexen Vektorraum–Bündels T als die elementar–symmetrischen Funktionen in $x_1,\dots,x_{2k}$, $-x_1,\dots,-x_{2k}$. Die Methoden in [BH I] zur Berechnung Chernscher Klassen mit Hilfe von Gewichten von Darstellungen liefern

$$\Phi(X) = \prod_{j=1}^{2k} x_j \, G(x_j) \; [X] \quad , \tag{5.7}$$

wobei (siehe 2.1)

$$G(x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^n e^{-x})(1+q^n e^{x})}{(1-q^n e^{-x})(1-q^n e^{x})} \quad . \tag{5.8}$$

Setzt man $q = e^{2\pi i \tau}$, wo $\tau \in \mathbb{H}$ (obere Halbebene der komplexen Zahlen), dann ist $G(x)$ eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit x als komplexer Veränderlicher. Die Funktion hat Pole erster Ordnung in den Punkten des Gitters $L = 2\pi i \; (\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ und Nullstellen erster Ordnung in den Punkten des verschobenen Gitters $\pi i + L$. Es gilt

$$G(x+2\pi i) = G(x) \; , \quad G(x+2\pi i \tau) = -G(x)$$

Die Funktion

$$F(x) = \epsilon^{1/4} \cdot G(x) \tag{5.9}$$

hat das Residuum 1 in den Polstellen. Sie ist der elliptischen Kurve $\mathbb{C}/L$ mit ausgezeichnetem Zweiteilungspunkt $\pi i + L$ kanonisch zugeordnet. Ihr Quadrat ist elliptisch bezüglich L . Es ist leicht zu sehen, daß der Koeffizient von x^n in der geraden Funktion $xF(x)$ eine Modulform vom Gewicht n zu $\Gamma_0(2)$ ist. Es ist nämlich $\lambda xF(\lambda x)$ die entsprechende Funktion für das Gitter $\lambda^{-1}L$. Deshalb ist

$$\varphi(X) = \epsilon^{k/2}\Phi(X) \tag{5.10}$$

eine Modulform zu $\Gamma_0(2)$ vom Gewicht 2k . (Es muß noch kontrolliert werden, daß sie in den Spitzen holomorph ist.) Meistens wird $\varphi(X)$ als das (universelle) elliptische Geschlecht bezeichnet. Im Sinne von [Hi 1] gehört es zur charakteristischen Potenzreihe $xF(x)$.

Das von uns eingeführte elliptische Geschlecht $\Phi(X)$ ist eine holomorphe Funktion in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mit τ als Variablen. Es ist eine Modulfunktion zu $\Gamma_0(2)$, also invariant unter $\Gamma_0(2)$, falls k gerade, d.h. $\dim X \equiv 0 \bmod 8$. Für k ungerade ändert die Funktion $\Phi(X)$ ihr Vorzeichen unter $\tau \longrightarrow \tau+1$. Gemäß § 3 ist $\Phi(X)$ ein Polynom vom Grade $\leq k$ in $\delta/\sqrt{\epsilon}$, welches gerade ist für k gerade und ungerade für k ungerade. Die Entwicklung von $\Phi(X)$ in der Spitze $\tau = i\infty$ wird durch (5.4) gegeben. Wie sieht die Entwicklung in der anderen Spitze aus?

Wir betrachten dafür die eindeutig bestimmte Funktion $\tilde{F}(x)$, die meromorph in $\mathbb{C}$ ist mit folgenden Eigenschaften:

- die Funktion $\tilde{F}^2$ ist elliptisch bezüglich L ,
- der Polstellendivisor ist L ,
- der Nullstellendivisor ist das verschobene Gitter $\pi i\tau + L$,
- das Residuum in den Polstellen ist gleich 1 .

Das zugehörige Geschlecht zur Potenzreihe $x\tilde{F}(x)$ ist eine Modulform zu $\Gamma^0(2)$ vom Gewicht 2k , wobei $\Gamma^0(2)$ durch die Matrizen von $SL_2(\mathbb{Z})$ mit $b \equiv 0 \bmod 2$ gegeben wird. Die Entwicklung in $i\infty$ ist eine Potenzreihe in $q^{1/2}$. Ersetzt man hier $q^{1/2}$ durch q, dann erhält man eine Modulform zu $\Gamma_0(2)$, deren q–Entwicklung die Entwicklung von $\varphi(x)$ in der anderen Spitze von $\Gamma_0(2)$ ist. Das Ergebnis lautet so: Es ist

$$\Phi(X) = \left(\prod_{j=1}^{2k} x_j \tilde{G}(x_j)\right)[X] \quad , \tag{5.11}$$

wobei

$$\tilde{G}(x) = \frac{q^{-1/4}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} \frac{\prod_{2\nmid n}(1-q^n e^{-x})(1-q^n e^{x})}{\prod_{2\mid n}(1-q^n e^{-x})(1-q^n e^{x})}$$

und

$$\tilde{F}(x) = \tilde{\epsilon}^{1/4}\, \tilde{G}(x)$$

Es ist

$$\Phi(X) = q^{-k/2} \hat{A}(X, \prod_{2\nmid n} \Lambda_{-q^n} T \cdot \prod_{2\mid n} S_{q^n} T) \tag{5.12}$$

$$\varphi(X) = \tilde{\epsilon}^{k/2} \Phi(X)$$

In allen Formeln ist n eine natürliche Zahl ≥ 1. Die Formel (5.12) ist die Formel (27) in [Wi].

In naheliegender Weise können wir von der Signatur– und von der $\hat{A}$–Spitze reden. Das elliptische Geschlecht $\Phi(X)$ als Funktion von $\tau \in \mathbb{H}$ (mit $q = e^{2\pi i\tau}$) ist holomorph in $\mathbb{H}$, in der Signatur–Spitze nimmt es den Wert $\operatorname{sign}(X)$ an, in der $\hat{A}$–Spitze hat es einen Pol der Ordnung $\leq k/2$. Bezüglich des in der $\hat{A}$–Spitze zu verwendenden ortsuniformisierenden Parameters q ist der Koefizient von $q^{-k/2}$ gleich $\hat{A}(X)$, der Koeffizient von $q^{1-(k/2)}$ ist $-\hat{A}(X,T)$.

Das Geschlecht $\Phi(X)$ ist bezüglich der Signatur–Spitze ein Polynom in $\delta/\sqrt{\epsilon}$, bezüglich der $\hat{A}$–Spitze wird $\Phi(X)$ durch dasselbe Polynom in $\tilde{\delta}/\sqrt{\tilde{\epsilon}}$ gegeben. Da nach (3.7), (3.9), (3.10)

$$8\tilde{\delta}/\sqrt{\tilde{\epsilon}} = -q^{-1/2}(1 + 20q + \ldots) \;,$$

wobei alle Koeffizienten ganzzahlig sind, folgt sofort, daß in der $\hat{A}$–Spitze das elliptische Geschlecht $\Phi(X)$ ein Polynom in $8\tilde{\delta}/\sqrt{\tilde{\epsilon}}$ ist, wobei die Koeffizienten ganzzahlige Linearkombinationen von getwisteten $\hat{A}$–Geschlechtern sind. Für $\dim X = 4k$ ist

$$\Phi(X) = a_k(8\tilde{\delta}/\sqrt{\tilde{\epsilon}})^k + a_{k-2}(8\tilde{\delta}/\sqrt{\tilde{\epsilon}})^{k-2} + \ldots \tag{5.13}$$

mit

$$a_k = (-1)^k\hat{A}(X)\,, \quad a_{k-2} = (-1)^{k-1}(20k\hat{A}(X) + \hat{A}(X,T))$$

In der Signatur–Spitze ist

$$\Phi(X) = a_k(8\delta/\sqrt{\epsilon})^k + a_{k-2}(8\delta/\sqrt{\epsilon})^{k-2} + \ldots \tag{5.14}$$

Da $\delta/\sqrt{\epsilon} = 1 + 32q + \ldots$, erhält man

$$\mathrm{sign}(X) = 8^k a_k + 8^{k-2} a_{k-2} + \dots$$

und damit die Formeln (1.10) und (1.15). Da $2\mathrm{sign}(X,T)$ der Koeffizient von q in $\Phi(X)$ ist, folgt z.B. für 8–dimensionale Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{sign}(X,T) = 2^{11} \cdot \hat{A}(X)$$

und für 12–dimensionale Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{sign}(X,T) = -2^9 \cdot 33\, \hat{A}(X) + 2^7 \hat{A}(X,T) \ .$$

§ 6. Das elliptische Geschlecht und die Primzahl 2. (Vgl. [La 3])

Da die getwisteten $\hat{A}$–Geschlechter für eine beliebige kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit X in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ liegen, ergibt sich aus (5.14), daß

(6.1) $$\Phi(X) \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}, \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}]$$

Für eine Spin–Mannigfaltigkeit X sind die getwisteten $\hat{A}$–Geschlechter ganze Zahlen und für $\dim X \equiv 4 \bmod 8$ die hier vorkommenden getwisteten $\hat{A}$–Geschlechter sogar gerade ganze Zahlen. Für die q–Entwicklung von δ^2/ϵ gilt

(6.2) $$\delta^2/\epsilon \equiv 1 \bmod 64$$

Dies folgt aus (3.8), (3.9), (3.10) und deshalb ist

(6.3) $$\delta/\sqrt{\epsilon} \equiv 1 \bmod 32$$

Als Verallgemeinerung des Satzes von Ochanine (§ 1) erhalten wir unter Verwendung von (5.14) und der Kongruenzen (6.2) und (6.3)

Satz. Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Betrachte die q–Entwicklung des elliptischen Geschlechtes in der Signatur–Spitze (siehe (5.4) und (5.5)). Für k ungerade ist

(6.4) $$\Phi(X) \equiv 0 \bmod 16, \quad \text{d.h.}$$

alle Koeffizienten der q–Entwicklung sind durch 16 teilbar, insbesondere die Signatur von X. Es ist

(6.5) $$\frac{\Phi(X)}{16} \equiv \frac{\operatorname{sign}(X)}{16} \bmod 32 \ ,$$

d.h. die Koeffizienten der q–Entwicklung von $\Phi(X)$ sind abgesehen vom konstanten Glied durch 2^9 teilbar, zum Beispiel

$$\operatorname{sign}(X,T) \equiv 0 \bmod 2^8$$

Für k gerade ist

(6.6) $$\Phi(X) \equiv \operatorname{sign} X \bmod 2^{12} \ ,$$

zum Beispiel ist

$$\operatorname{sign}(X,T) \equiv 0 \bmod 2^{11} .$$

E. Witten hat darauf hingewiesen, daß man nur für Spin–Mannigfaltigkeiten den Schleifenraum $\mathscr{L}X$ als orientierbar ansehen und an die Existenz eines Signatur–Operators für $\mathscr{L}X$ denken kann. Wäre dann $\mathscr{L}X$ endlich–dimensional, dann müßte die äquivariante Signatur konstant sein. Die für Spin–Mannigfaltigkeiten gültigen Kongruenzen

$$\Phi(X) = \operatorname{sign}(\mathscr{L}X;q) \equiv \operatorname{sign} X \bmod 2^9 \quad \text{für } \dim X \equiv 4 \bmod 8$$

$$\Phi(X) = \operatorname{sign}(\mathscr{L}X;q) \equiv \operatorname{sign} X \bmod 2^{12} \quad \text{für } \dim X \equiv 0 \bmod 8$$

deuten an, daß modulo Potenzen von 2 eine gewisse Starrheit der Signatur für $\mathscr{L}X$ erhalten bleibt.

Auch für beliebige kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten gilt für die q–Entwicklung an der Signatur–Spitze eine Kongruenz, nämlich

(6.7) $$\Phi(X) \equiv \operatorname{sign}(X) \bmod 32 ,$$

zum Beispiel

$$\operatorname{sign}(X,T) \equiv 0 \bmod 16$$

(vgl. hierzu [B]). Da es für den Cobordismus–Ring Ω^* keine Relationen zwischen den Pontrjaginschen Zahlen modulo Potenzen von 2 gibt, folgt, daß das Polynom vom Gewicht k in $p_1,\dots,p_k$ für $\operatorname{sign}(X,T)$, wobei $\dim X = 4k$, als Polynom durch 16 teilbar ist. Für $k=2$ ist zum Beispiel

$$\mathrm{sign}(X,T) = 2^{11}\hat{A}(X) = 2^3 A(X)$$

$$= \frac{16}{45}(-4p_2 + 7p_1^2)$$

Wir kommen auf die Kongruenz (6.7) im nächsten Paragraphen zurück.

§ 7. Das elliptische Geschlecht für die komplexen projektiven Räume

Das Geschlecht $\varphi(X)$ (siehe 5.10) hat die charakteristische Potenzreihe $x/f(x)$, wo $f(x) = 1/F(x)$. Erinnern wir daran, daß $f(x)$ in kanonischer Weise dem Gitter $L = 2\pi i(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$ mit ausgezeichneten Zweiteilungspunkt $\pi i + L$ von $\mathbb{C}/L$ zugeordnet ist. Die Funktion $f(x)$ hat in $\mathbb{C}$ das Gitter L als Nullstellendivisor und das verschobene Gitter $\pi i + L$ als Polstellendivisor. Die Funktion $f(x)$ ist ungerade. Ihre Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt hat das lineare Glied x. Die Funktion $f(x)^2$ ist elliptisch bezüglich L. Die Funktion $f(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$f'(x)^2 = 1 - 2\delta\, f(x)^2 + \epsilon\, f(x)^4 \quad , \tag{7.1}$$

wo δ, ϵ die in § 3 eingeführten Modulformen für $\Gamma_0(2)$ vom Gewicht 2 bzw. 4 sind, aufzufassen als Invarianten des Gitters. Die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ ist das elliptische Integral

$$g(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-2\delta t^2+\epsilon t^4}} \tag{7.2}$$

Für die komplexen projektiven Räume P_{2n} der reellen Dimension 4n wird das elliptische Geschlecht $\varphi(P_{2n})$ wie folgt angegeben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(P_{2n})t^{2n} = (1-2\delta t^2+\epsilon t^4)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.3}$$

Beispiel:

$$\varphi(P_2) = \delta\ , \ \varphi(P_4) = \tfrac{3}{2}\,\delta^2 - \tfrac{1}{2}\,\epsilon\ ,$$

$$\varphi(P_6) = \tfrac{5}{2}\,\delta^3 - \tfrac{3}{2}\,\delta\epsilon$$

Für das elliptische Geschlecht Φ gilt demnach

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(P_{2n})t^{2n} = (1-2\alpha t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}}\ , \tag{7.4}$$

wobei $\alpha = \delta/\sqrt{\epsilon}$.

Die Formel (7.3) folgt aus der Tatsache, daß $(1+x^2)^{2n+1}$ die totale Pontrjaginsche Klasse von P_{2n} ist, wo x erzeugendes Element von $H^2(P_{2n},\mathbb{Z})$ ist, also $x^{2n}[P_{2n}] = 1$. Deshalb ist $\varphi(P_{2n})$ der Koeffizient von x^{2n} in $(x/f(x))^{2n+1}$, also das Residuum im Nullpunkt von

$$\frac{dx}{f(x)^{2n+1}} = \frac{g'(y)dy}{y^{2n+1}} = \text{Koeffizient von } y^{2n} \text{ in } (1-2\delta y^2+\epsilon y^4)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

In der Tat war (7.3) der Ausgangspunkt für die Einführung der elliptischen Geschlechter durch Ochanine [O 2]. Als Überblick über die weitere historische Entwicklung siehe [La 2] und für die Einführung der Modulformen in die Theorie [Ch] und [Za]. Setzen wir in (7.4) für $\alpha = \delta/\sqrt{\epsilon}$ die q–Entwicklung ein

$$\alpha = \Phi(P_2) = 1 + 32q + \dots ,$$

dann ergibt sich wegen der Kongruenz (6.3)

$$1 - 2\alpha t^2 + t^4 \equiv (1-t^2)^2 \bmod 64$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(P_{2n}) t^{2n} \equiv (1-t^2)^{-1} \bmod 32 \ .$$

Dies liefert die Kongruenz (6.7) für die P_{2n} und damit für jede kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit X, da X in $\Omega^* \otimes \mathbb{Q}$ gleich einer Linearkombination von Produkten projektiver Räume ist, deren Koeffizienten rationale Zahlen mit ungeraden Nennern sind.

Als Polynom in α ist $\Phi(P_{2n})$ das n–te Legendresche Polynom. Die Gleichung (7.4) ist nämlich eine der klassischen Definitionen dieser Polynome (siehe [La 3] und [PS] p. 85). Insbesondere kann man $\operatorname{sign}(P_{2n},T)$ berechnen:

$$\operatorname{sign}(P_{2n},T) = 8n(n+1) \ .$$

Landweber [La 3] hat das Bild von Ω^* in $\mathbb{Q}[\alpha]$ unter der Abbildung

$$\Phi : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{Q}[\alpha]$$

bestimmt. Es gilt mit $\gamma = (\alpha^2-1)/4$

(7.5)
$$\Phi(\Omega^*) = \mathbb{Z}[\alpha, 2\gamma, 2\gamma^2, \ldots, 2\gamma^{2^s}, \ldots] \ .$$

Das Auftreten der Potenzen von 2 hat zu tun mit der Tatsache, daß das A–Geschlecht einer 4k–dimensionalen Mannigfaltigkeit als Polynom in den Pontrjaginschen Klassen durch $2^{\alpha(k)}$ teilbar ist (§ 2).

§ 8. Mannigfaltigkeiten mit S^1–Aktion

Es sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$, auf der die Kreislinie S^1 operiert. Nach (4.3) können wir das äquivariante elliptische Geschlecht definieren (für $\lambda \in S^1$)

(8.1)
$$\Phi(X)_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{sign}(X, R_m; \lambda) q^m$$

Man kann $\Phi(X)_\lambda$ auch ansehen als die äquivariante Signatur des Schleifenraumes $\mathscr{L}X$, auf dem $S^1 \times S^1$ operiert (mit $(q,\lambda) \in S^1 \times S^1$). Im allgemeinen hängt $\Phi(X)$ wirklich von λ ab. Beispiele erhält man durch Betrachtung der Involution I, die durch $\lambda = -1$ gegeben wird. In [HS] wurde gezeigt, daß

$$\Phi(X)_I = \Phi(X^I \cdot X^I) \ , \tag{8.2}$$

wo X^I die Fixpunktmannigfaltigkeit von I ist und $X^I \cdot X^I$ der Durchschnitt von X^I mit einer "Verschiebung" von X^I, die transversal zu X^I ist. Dieser Durchschnitt ist kanonisch orientiert. Wählt man für X die komplexe projektive Ebene und für I eine projektive Involution, für die X^I aus einer projektiven Geraden und einem Punkt besteht, dann ist $X^I \cdot X^I$ ein positiv–orientierter Punkt, also $\Phi(X)_I = 1$, während $\Phi(X) = \delta/\sqrt{\epsilon} = 1 + 32q + \ldots$ ist. Also ist zum Beispiel $\operatorname{sign}(X,T) = 16$, aber $\operatorname{sign}(X,T;I) = 0$.

Witten hat vermutet, daß für eine Spin–Mannigfaltigkeit X, auf der S^1 operiert, das äquivariante elliptische Geschlecht nicht von λ anhängt. Dies wurde von C. Taubes und danach von R. Bott und C. Taubes [BT] bewiesen. Für die $\hat{A}$–Spitze (siehe 5.12) hat man ebenfalls Starrheit, so hängen z.B. $\hat{A}(X;\lambda)$ und $\hat{A}(X,T;\lambda)$ nicht von λ ab. Für $\hat{A}(X;\lambda)$ wurde dies in [AH 2] bewiesen. Für die Entwicklung bis zu dem fundamentalen Satz über die Starrheit des elliptischen Geschlecht für S^1–Aktionen auf Spin–Mannigfaltigkeiten vgl. [La 2] und [LS].

Wegen der Starrheit geht Formel (8.2) über in

$$\Phi(X) = \Phi(X^I \cdot X^I) \tag{8.3}$$

Die Beziehung (8.3) gilt also für die in einer S^1–Aktion auf einer Spin–Mannigfaltigkeit enthaltene Involution.

Die Komponenten von X^I können unterschiedliche Kodimensionen haben, jedoch sind alle Kodimensionen $\equiv 0 \bmod 4$ oder alle $\equiv 2 \bmod 4$. Je nachdem nennt man die S^1–Aktion von geradem oder ungeradem Typ (vgl. [AH 2]). Eine kurze Andeutung zum Beweis von Bott und Taubes: Sie zeigen mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Atiyah, Bott und Singer, daß $\Phi(X)_\lambda$, das von q und λ abhängt, als Funktion von λ mero–

morph auf $\mathbb{C}^*$ erweitert werden kann. Setzt man $\lambda = e^{2\pi i z}$ und $q = e^{2\pi i \tau}$, dann erhält man als Funktion von z eine elliptische Funktion für das Gitter $\mathbb{Z}\cdot 2\tau + \mathbb{Z}$, welche bei der Substitution $z \longrightarrow z+\tau$ invariant bleibt (bei geradem Typ der S^1–Aktion) oder das Vorzeichen ändert (bei ungeradem Typ). Bott und Taubes zeigen (und hier wird es schwierig), daß diese elliptische Funktion keine Pole hat, also konstant ist. Das heißt, daß $\Phi(X)_\lambda$ nur von q abhängt, also gleich $\Phi(X)$ ist. Bei ungeradem Typ folgt, daß $\Phi(X) = 0$ ist.

Die Komponenten von $X^I \cdot X^I$ haben alle eine Kodimension $\equiv 0 \bmod 8$ (gerader Typ) oder eine Kodimension $\equiv 4 \bmod 8$ (ungerader Typ). Im letzten Fall ist $\Phi(X) = 0$, also insbesondere $\operatorname{sign}(X) = \operatorname{sign}(X,T) = \hat{A}(X) = \hat{A}(X,T) = 0$. Im geraden Fall ergibt sich folgender Satz [HS].

Satz. Gegeben sei eine 4k–dimensionale Spin–Mannigfaltigkeit X, auf der S^1 operiert. Die Aktion von S^1 sei von geradem Typ. Es sei I die in der S^1–Aktion enthaltene Involution. Die Kodimension von X^I sei $\geq 4r$. Dann hat das elliptische Geschlecht $\Phi(X)$ in der $\hat{A}$–Spitze einen Pol der Ordnung $\leq \frac{k}{2} - r$. Deshalb verschwinden in der q–Entwicklung die Koeffizienten von $q^{-k/2}$ bis $q^{-k/2+r-1}$. Falls $r > 0$, dann $\hat{A}(X) = 0$. Falls $r > 1$, dann $\hat{A}(X,T) = 0$. Falls $r > 2$, dann $\hat{A}(X,\Lambda^2 T) = 0$. Wenn $r \geq k/2$, dann hängt $\Phi(X)$ nicht von q ab ($\Phi(X) = \operatorname{sign} X$). Falls $r > k/2$, dann $\Phi(X) = 0$.

Der Satz folgt aus (8.3), da $\dim(X^I \cdot X^I) \leq 4k-8r$ und $\Phi(X^I \cdot X^I)$ in der $\hat{A}$–Spitze deshalb einen Pol der Ordnung $\leq \frac{k}{2} - r$ hat.

Diese Überlegungen verallgemeinern den Satz über das Verschwinden des $\hat{A}$–Geschlechtes in [AH 2].

In [HS] wird als Folgerung von (8.3) bewiesen, daß $\Phi(X)$ für jede homogene Spin–Mannigfaltigkeit nicht von q abhängt, also gleich $\mathrm{sign}(X)$ ist. (Für dim $X \equiv 4 \bmod 8$ ist sogar $\mathrm{sign}(X) = 0$). Der Cobordismus–Ring $\Omega^* \otimes \mathbb{Q}$ wird von homogenen Spin–Mannigfaltigkeiten (z.B. von den quaternionalen projektiven Räumen) und von der komplexen projektiven Ebene erzeugt. In der Dimension 4 gibt es keine homogene Spin–Mannigfaltigkeit als erzeugendes Element. Die 4–Sphäre berandet. Das elliptische Geschlecht, in Abhängigkeit von einem Parameter α, kann charakterisiert werden als das Geschlecht, das auf allen homogenen Spin–Mannigfaltigkeiten den Wert $\mathrm{sign}(X)$ und auf der komplexen projektiven Ebene den Wert α annimmt. Auf dem Schleifenraum $\mathscr{L}X$ einer homogenen Spin–Mannigfaltigkeit (homogen bezüglich einer zusammenhängenden kompakten Lieschen Gruppe G) ist also der Signatur–Operator als starr bezüglich der Aktion von $S^1 \times G$ anzusehen.

Literatur

[A] M.F. Atiyah: Vector fields on manifolds. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes NRW, Düsseldorf, 200, 7–24 (1970).

[AH 1] M.F. Atiyah et F. Hirzebruch: Quelques théorèmes de non–plongement pour les variétés différentiables. Bull. Soc. Math. France 87, 383–396 (1959).

[AH 2] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch: Spin–manifolds and group actions. In: Essays on Topology and Related Topics. Mémoires dédiés à Georges de Rham, p. 18–28, Springer–Verlag 1970.

[AS] M.F. Atiyah and I.M. Singer: The index of elliptic operators III. Ann. Math. 87, 546–604 (1968).

[B] M. Bendersky: Cobordism Span of a Manifold and Elliptic Genera. Math. Z. 202, 483–492 (1989).

[BH I] A. Borel and F. Hirzebruch: Characteristic classes and homogeneous spaces I. Amer. J. Math. 80, 458–538 (1958).

[BH II] A. Borel and F. Hirzebruch: Characteristic classes and homogeneous spaces II. Amer. J. Math. 81, 315–382 (1959).

[BT] R. Bott and C. Taubes: On the rigidity theorems of Witten. J. Amer. Math. Soc. 2, 137–186 (1989).

[Ch] D.V. Chudnovsky and G.V. Chudnovsky: Elliptic modular functions and elliptic genera. Topology 27, 163–170 (1988).

[Hi 1] F. Hirzebruch: Topological Methods in Algebraic Geometry. Springer–Verlag 1966.

[Hi 2] F. Hirzebruch: The signature theorem: Reminiscences and recreation. In: Prospects in Mathematics, Ann. Math. Stud. 70, 3–31 (1971).

[Hi 3] F. Hirzebruch: A Riemann–Roch theorem for differentiable manifolds. Séminaire Bourbaki (Février 1959), Exp. 177.

[HBJ] F. Hirzebruch, Th. Berger, and R. Jung: Manifolds and Modular Forms. Vieweg Braunschweig/Wiesbaden, to appear.

[HS] F. Hirzebruch and P. Slodowy: Elliptic genera, involutions, and homogeneous Spin manifolds. Geometriae Dedicata 35, 309–343 (1990).

[La 1] P.S. Landweber (Ed.): Elliptic Curves and Modular Forms in Algeraic Topology, Proceedings Princeton 1986. Lecture Notes in Math. 1326, Springer–Verlag 1988.

[La 2] P.S. Landweber: Elliptic Genera: an Introductory Overview. In [La 1], p. 1–10.

[La 3] P.S. Landweber: Elliptic Cohomology and Modular Forms. In [La 1], p. 55–68.

[LS] P.S. Landweber and R.E. Stong: Circle actions on Spin manifolds and characteristic numbers. Topology 27, 145–161 (1988).

[O 1] S. Ochanine: Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K–théorie réelle. Bull. Soc. Math. France, Mémoire No. 5, 1981.

[O 2] S. Ochanine: Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques. Topology 26, 143–151 (1987).

[PS] G. Pólya and G. Szegö: Problems and Theorems in Analysis Vol. II. Springer–Verlag 1976.

[Th] R. Thom: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. 28, 17–86 (1954).

[Wa] C.T.C. Wall: Surgery on Compact Manifolds. Academic Press 1970.

[Wi] E. Witten: The index of the Dirac operator in loop space. In [La 1], p. 161–181.

[Za] D. Zagier: Note on the Landweber–Stong elliptic genus. In [La 1], p. 216–224.

Die Arbeiten [A], [AH 1], [AH 2], [AS], [BH I], [BH II], [Hi 1], [Hi 2], [Hi 3] kann man auch in den jeweiligen gesammelten Abhandlungen finden:

M. Atiyah:	Collected Works. Oxford University Press 1988
A. Borel:	Oeuvres, Collected Papers. Springer–Verlag 1983
F. Hirzebruch:	Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers. Springer–Verlag 1987.