Schématisation des types d'homotopie

B. Toen*

Résumé

Nous proposons une définition des types d'homotopie schématiques discutés dans le manuscrit non publié de A. Grothendieck *Pursuing stacks.* Nous construisons un foncteur de schématisation associant à tout ensemble simplicial X, et tout corps k, un type d'homotopie schématique sur k, $X \otimes k$. Nous étudierons les propriétés de ce foncteur, et nous montrerons qu'il s'agit d'une généralisation de la complétion rationnelle et p-adique lorsque X est nilpotent et $k = \mathbb{Q}$ ou $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. En général, l'objet $X \otimes k$ est nouveau et donne une nouvelle approche à la théorie de l'homotopie rationnelle et p-adique pour le cas non-nilpotent.

Abstract

We propose a definition for the schematic homotopy types considered in A. Grothendieck's unpublished manuscript *Pursuing stacks.* We construct a schematization functor which associate to any simplicial set X, and any field k, a schematic homotopy type over k, $X \otimes k$. We study the properties of this functor, and we show that it generalizes the rational and p-adic completion when X is nilpotent and $k = \mathbb{Q}$ or $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. In general, the object $X \otimes k$ is new and gives a new approach to the rational and p-adic homotopy theory for the non-nilpotent case.

Mots clés: Champs, théorie de l'homotopie, homotopie rationnelle, homotopie p-adique.

Table des matières

*Max Planck Institut fur Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany. e-mail:toen@mpim-bonn.mpg.de

0 Introduction

Dans son volumineux manuscript *Pursuing stacks*, A. Grothendieck présente une vision au centre de laquelle se trouve une notion mystérieuse de *types d'homotopie schématiques*, objets devant jouer le rôle des types d'homotopie dans le cadre de la géométrie algébrique (voir [Gr, p. 443 – 592]). Il propose de plus l'existence d'une relation entre la théorie de l'homotopie usuelle et la théorie de l'homotopie schématique, et ce à l'aide d'un foncteur de *schématisation* qui associe à tout espace topologique X (généralement simplement connexe ou nilpotent) et tout schéma S, un type d'homotopie schématique $X \otimes S$, reflétant les propriétés cohomologiques de X relativement à S. Ce foncteur devait alors être compris comme une généralisation du foncteur de rationnalisation de Quillen-Sullivan, et plus généralement la théorie de l'homotopie rationnelle devait posséder une nouvelle interprétation en termes de types d'homotopie schématiques sur $S = Spec\,\mathbb{Q}$. Il s'agissait donc en particulier (mais pas seulement), d'une tentative de rapprochement entre la théorie des modèles algébriques des types d'homotopie et la théorie des champs.

Bien que ces deux théories se soient beaucoup développées indépendemment ces dernières années (voir [Q, Bo, Bo-Gu, Su, Dw-Ho, K, G, Ma] et [J1, B, Tam, H-S]), les travaux reprenant le point de vue de [Gr] ont été quasi-inexistants (en dehors de [B-E] et dans les limites de ma connaissance), et ce jusqu'à l'introduction de la notion de champs et de formes très présentables par C. Simpson, donnant une solution raisonable au problème de la schématisation en caractéristique nulle (voir [S2] et [S4, Thm. 6.1]).

Plus récemment, nous avons proposé une approche nouvelle à ce problème, qui utilise un point de vu Galoisien et Tannakien sur la théorie de l'homotopie (voir le manuscript [To2] ainsi que [To1]). Ce nouveau point de vu possède deux avantages majeurs, qui sont d'une part la possibilité de définir le foncteur de schématisation au-dessus de tout schéma de base et ce pour tout espace topologique (éventuellement non-nilpotent), mais aussi de pouvoir appliquer la théorie à des situations abstraites, élargissant ainsi le cadre de la théorie de l'homotopie (tout comme la dualité de Tannaka permet d'élargir la notion de groupe fondamental). Cependant, cette approche reste à l'heure actuelle à un stade conjectural, et la dualité de Tannaka pour les catégories supérieures un programme tout juste entamé.

Le but principal de ce travail est de proposer une défintion générale des types d'homotopie schématiques sur un anneau k et de démontrer l'existence du foncteur de schématisation lorsque k est un corps, ceci sans faire appel aux techniques de catégories de Segal utilisées dans [To2] et en restant dans le cadre de l'algèbre homotopique standard. Nous montrerons alors dans un travail ultérieur que les concepts et les résulats de cet article possèdent en réalité l'interprétation Tannakienne annoncée dans [To2]. Nous espèrons ainsi donner une réponse à une des questions centrales qui est posée dans [Gr].

Bien que le formalisme Tannakien soit totalement absent de ce travail il nous a guidé dans le choix des définitions et des théorèmes que nous donnons. Il nous semble donc judicieux de rappeler brièvement en quoi le foncteur de schématisation est lié à la dualité de Tannaka.

Pour cela, rappelons que pour tout CW-complexe pointé (X, x), le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ s'interprète comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre $\omega_x : Loc_0(X) \longrightarrow Ens$, où $Loc_0(X)$ est la catégorie des faisceaux localement constants sur X. Cet isomorphisme remarqué par A. Grothendieck a alors donné lieu à une vision abstraite des groupes fondamentaux, dont l'aboutissement en est la notion de catégories multi-galoisiennes qui permet de donner une interprétation purement catégorique de la théorie de l'homotopie 1-tronquée ([SGA1, V]). L'analogue linéaire de cette théorie est la notion de catégories Tannakiennes, intoduite par N. Saavedra dans [Sa], et qui donne une interprétation catégorique de la théorie homotopique des gerbes affines. Par analogie avec le cas précédent ces gerbes affines sont alors considérées comme des 1-types d'homotopie algébriques (voir schématiques, même si cette terminologie n'a jamais été utilisée). L'analogue k-linéaire de la théorie Galoisienne du groupe fondamental est alors la théorie algébrique du groupe fondamental (voir [D1, §10]).

Dans [To1, Cor. 3.3] nous avons montré comment la théorie Galoisienne du groupe fondamental se généralisait à l'homotopie supérieure, et ceci en démontrant un énoncé proposé par A. Grothendieck dans une lettre à L. Breen (voir [Gr]). Cet énoncé affirme que le H_∞-espace $\Omega_x X$, des lacets sur X de bases x, est naturellement équivalent au H_∞-espace des endomorphismes dérivés du foncteur fibre $\omega_x : Loc(X) \longrightarrow Top$, où $Loc(X)$ est la catégorie simpliciale des ∞-champs localement constants sur X. En se basant sur le cas 1-tronqué, nous prétendons alors qu'un analogue k-linéaire de ce dernier résultat doit donner naissance à la schématisation de X sur $S = Spec\, k$. C'est la recherche de cette linéarisation qui nous a naturellement mené à la notion de catégorie Tannakienne supérieure. Cette notion, qui n'est pas encore totalement définie, est un analogue de nature homotopique de la notion usuelle mais où l'algèbre linéaire est remplacé par de l'algèbre homologique. Ainsi, tout comme les foncteurs fibres de catégories Tannakiennes sont à valeurs dans des catégories de k-modules, ceux des catégories Tannakiennes supérieures prendront leurs valeurs dans des catégories de complexes de k-modules. De même, on sait que l'objet dual d'une catégorie Tannakienne est une gerbe affine, ou encore un 1-champ dont le faisceau des lacets est représenté par un schéma affine. On s'attend donc à ce que le dual d'une catégorie Tannakienne supérieure soit un ∞-champ dont le champ des lacets est un champ affine (en un sens convenable). Comme la méta-définition de [To2] est qu'un type d'homotopie schématique est exactement le champ dual d'une catégorie Tannakienne supérieure, ceci permet peut-être d'eclaircir la définition des types d'homotopie schématiques que l'on donne dans cet article (voir 2.13).

Ce travail est découpé en trois grandes parties. Nous commencerons par des rappels sur la théorie des champs (i.e. des préfaisceaux simpliciaux), incluant les définitions et propriétés de bases, mais aussi les décompositions de Postnikov, la cohomologie à coefficients locaux, la théorie du délaçage ainsi que quelques liens avec les schémas en groupes affines sur un corps. Ce premier chapitre ne possède rien de bien original, et tous les résultats sont de toute évidence des faits connus ou encore faisant partie du folklore de la théorie. Nous invitons donc le lecteur à le considérer comme une annexe de notations, de définitions et de références (lorsque celles-ci existent).

Le second chapitre est consacré aux définitions des champs affines et des types d'homotopie schématiques, ainsi qu'à l'étude de certaines de leur propriétés. Nous y avons inclus un chapitre sur la théorie homotopique des algèbres co-simpliciales, qui est utilisée constamment par la suite. On y donne en particulier une esquisse de preuve de l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée simpliciale, pour laquelle nous ne connaissons pas de références. La structure simpliciale sera alors utilisée pour donner la définition de champs affines, qui est une généralisation de nature homotopique de la notion de schéma affine. Autant que je sache, il s'agit d'une notion nouvelle, bien que possèdant des avatars dans les travaux sur l'homotopie rationnelle et p-adique, ainsi que dans [S4, §6]. Il semblerait aussi que cette notion soit intimement liée à celle de "schémas simpliciaux affines unipotents" discutés dans [Gr].

En utilisant la notion de champ affine, nous définissons les types d'homotopie schématiques pointés comme étant les champs dont le champ des lacets est un champ affine. Tout comme les champs affines généralisent les schémas affines, les types d'homotopie schématiques pointés sont des généralisations des gerbes affines neutres. Nous donnons aussi une version non-pointée de cette notion, analogue au cas des gerbes non-neutres. Peu de leur propriétés générales seront étudiées dans ce travail, mais nous donnerons un procédé de construction de types d'homotopie schématique à partir d'un schéma en groupes affine simplicial et plat.

Enfin, lorsque k est un corps, nous donnerons des critères de reconnaissances des champs affines et de types d'homotopie schématiques, ne faisant intervenir que leurs faisceaux d'homotopie. Ils seront tous deux utilisés crucialement dans la construction du foncteur de schématisation, et sont essentiellement les seuls exemples que l'on connaisse. Ces critères permettent aussi de faire un lien avec la théorie des champs très présentables de C. Simpson, et nous irons jusqu'à conjecturer que les deux théories sont en un certain sens équivalentes (voir 2.26).

Dans le troisième et dernier chapitre nous donnerons une preuve de l'existence du foncteur de schématisation, qui est le résultat principal de ce travail. En clair, nous démontrerons que pour tout ensemble simplicial X et tout corps k, il existe un type d'homotopie schématique $X \otimes k$ est un morphisme $X \longrightarrow X \otimes k$ satisfaisant une certaine propriété universelle. les théorèmes principaux de cet article peuvent se résumer ainsi.

Théorème 0.1 *(voir 3.4, 3.11 ,3.17 et 3.18) Pour tout ensemble simplicial pointé et connexe X, il existe un unique type d'homotopie schématique pointé $X \otimes k$ et un morphisme $X \longrightarrow X \otimes k$, vérifiant les propriétés suivantes.*

1. *Le champ $X \otimes k$ et l'ensemble simplicial X possèdent les mêmes systèmes locaux de k-espaces vectoriels de dimension fini. De plus, pour V un tel système local on a*

$$H^i(X \otimes k, V) \simeq H^i(X, V).$$

2. *Les faisceaux d'homotopie $\pi_i(X \otimes k, *)$ sont représentés par des schémas en groupes affines, qui sont de plus unipotents pour $i > 1$. En particulier, $\pi_1(X \otimes k, *)$ s'identifie naturellement au complété affine du groupe $\pi_1(X, x)$ sur k.*

3. *Lorsque X est simplement connexe et de type fini, les faisceaux d'homotopie $\pi_i(X \otimes k, *)$ sont naturellement isomorphes aux complétés unipotents des groupes $\pi_i(X, x)$. En particulier, le champ $X \otimes \mathbb{Q}$ est un modèle pour le type d'homotopie rationnelle de X. De même, le champ $X \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ est un modèle pour le type d'homotopie p-adique de X.*

Insistons ici sur le fait que l'objet $X \otimes k$ est nouveau et ne semble pas avoir été considéré (et encore moins défini) auparavant, bien que dans le cas simplement connexe il coincide en un certain sens avec les modèles pour l'homotopie rationnelle et p-adique de [Q, Su, K, G, Ma]. De plus, des exemples très simples montrent que dès que X n'est pas simplement connexe le champ $X \otimes k$ est généralement beaucoup plus gros que la k-localisation de X, la grande différence entre ces deux objets résidant dans le point (1) du théorème précédent. En effet, alors que la k-localisation ne voit que la partie nilpotente du groupe fondamental de X, le champ $X \otimes k$ contient l'information sur toutes les représentations linéaires, et c'est précisemment l'existence des représentations semi-simples qui implique que le champ $X \otimes k$ ne sera pratiquement jamais de type fini.

Les résultats 3.17 et 3.18 donnent aussi un nouveau point de vue, et de nouvelles preuves, des théorèmes fondamentaux de l'homotopie rationnelle et p-adique. Notons aussi que les preuves que l'on en donne sont totalement indépendantes de résultats antérieurs.

Pour clôre cette introduction signalons que la théorie présentée de cet article n'est pas sans relations avec d'autres travaux.

Tout d'abord, il existe au moins deux approches antérieures au problème de la schématisation des types d'homotopie tel qu'il est énoncé dans [Gr]. La première, qui est exposée dans [B-E], donne une construction de la "sphère schématique stable" en caractéristique positive. Il n'est pas tout à fait clair que cette construction soit comparable à celle de cet article, même si cette sphère schématique stable ressemble de très près à ce que l'on pourrait appelé dans notre language un spectre affine (analogue stable des champs affines). La seconde approche a été introduite dans [S2]. Ici aussi la comparaison avec notre construction n'est pas immédaite. Il semble cependant que la théorie des champs présentables et très présentables soient intimement liées à celle des types d'homotopie schématiques (voir 2.26), bien que la première semble plus générale, car elle permet de considérer des champs qui ne soient pas connexes. De même, la forme très présentable d'un espace topologique X (qui joue le rôle de la schématisation sur $\mathbb{C}$ pour la théorie de [S2]) est un objet contenant plus d'informations que sa schématisation $X \otimes \mathbb{C}$, car il tient compte des familles de représentations du groupe fondamental. En contre partie, la forme très présentable d'un espace ne possède pas de modèle qui soit un champ (i.e. n'est pas représentable), et l'information homotopique qu'elle contient est de ce fait parfois délicate à décrire.

Il y a aussi de très fortes relations avec la topologie algébrique, et en particulier avec la théorie des modèles algébriques des types d'homotopie. Pour ce qui est du cas simplement connexe, ou plus généralement du cas nilpotent, les théories d'homotopie p-adique et rationnelle ont été très largement développées, et le problème principal a pour ainsi dire été résolu (voir [Q, Bo-Gu, Su, Dw-Ho, K, G, Ma]). A ce sujet, le présent travail n'apporte rien d'autre qu'un nouveau point de vu et peut-être de nouvelles preuves. En contre partie, le foncteur de schématisation que nous construisons peut être considéré comme une réponse possible à la question de la généralisation des travaux cités ci-dessus au cas non-nilpotent. Il existe aussi une autre approche qui consiste à utiliser une version équivariante de l'homotopie rationnelle et p-adique, et à appliquer celle-ci aux revêtements universels (voir [Br-Sz, Go-Ha-Ta]). Cette approche parrait dans certains cas plus fine que celle que nous présentons dans ce travail, mais ne semble pas adaptée aux problèmes de la géométrie algébrique que nous souhaitons aborder par la suite (e.g. la théorie de Hodge non-abélienne). Il me semble cependant un problème intéressant de savoir comment ces deux points de vu sont reliés, et plus particulierement comment à l'aide des constructions de [Br-Sz, Go-Ha-Ta] retrouver l'objet $X \otimes k$.

Une des raisons qui m'a poussé à construire le champ $X \otimes k$ est la théorie de Hodge non-abélienne de C. Simpson, et en particulier la question 2.3.4 de [S5]. Ce travail est donc lié de très près à cette théorie, et a été beaucoup influencé par les techniques qui y sont utilisées. Plus précisemment, le formalisme Tannakien permettra par la suite de munir le champ $X \otimes \mathbb{C}$ d'une structure de Hodge mixte non-abélienne, lorsque X est l'espace topologique sous-jacent à une variété lisse et projective sur $\mathbb{C}$. Cette construction, qui fait l'objet du travail en cours [Ka-To], est une généralisation de la construction de la structure de Hodge sur le complété pro-algébrique du groupe fondamental décrite dans [S1]. Nous montrerons en particulier comment la structure de Hodge sur le champ $X \otimes \mathbb{C}$ permet d'obtenir des informations sur l'homotopie supérieure de X.

Dans une tout autre direction, la notion de champ affine semble aussi liée à la "géométrie algébrique dérivée", et aux travaux de M. Konstevich, M. Kapranov et K. Berhend sur le sujet. Cependant, alors que les types d'homotopie schématiques sont définis à l'aide d'algèbres co-simpliciales, le cadre naturel pour la géométrie algébrique dérivée semble plutôt être celui des algèbres simpliciales. Les deux sujets semblent donc en un certain sens duaux l'un de l'autre, et il serait certainement intéressant de possèder un formalisme qui les réunis. Une tentative pour accomplir cela serait de développer une théorie permettant de "faire de la géométrie algébrique dans des catégories de modèles monoidales", et fait actuellement l'objet du travail en cours [To-Ve]. Notons au passage que ceci est aussi lié de très près à la dualité de Tannaka supérieure, où "faire de la géométrie algébrique dans une 1-catégorie de Segal monoidale" semble indispensable.

Enfin, il y a évidemment les quelques 600 pages de [Gr], dont il est extrément difficile de faire une comparaison avec le point de vu adopté ici. Notons à ce sujet que l'objet que A. Grothendieck appelle "schématisation" d'un espace X semble plus proche de notre affination $(X \otimes k)^{uni}$ que de notre schématisation $X \otimes k$ (voir 3.3). A vrai dire la question de l'existence du champ $X \otimes k$, bien que fortement inspiré des considération sur la théorie de l'homotopie que l'on trouve dans les lettres de A. Grothendieck à L. Breen, ne semble pas avoir été considéré dans [Gr]. Cependant, la motivation principale de ce travail est née d'un désir de comprendre certains passages de [Gr], et de ce fait ce manuscript a eut une influence déterminante sur les définitions et les énoncés qui apparaissent dans cet article. Ce travail s'insère donc naturellement dans le vaste programme proposé par C. Simpson et intitulé "la poursuite de la poursuite des champs" (ou encore comme l'a suggéré D. Husemöller lors d'une conversation sur le sujet "la 2-poursuite des champs").

Remerciements: Je voudrais tout d'abord remercier C. Simpson, qui par l'intermédiaire d'articles, de discussions et de correspondences a beaucoup influencé ce travail. Je remercie aussi particulierement H. Baues, qui m'a suggèrer d'utiliser une version dérivée de la construction des complétions affines des groupes discrets afin de construire le foncteur de schématisation. Le lecteur remarquera que ceci est une étape fondamentale dans la preuve du théorème 3.4.

Pour de nombreuses discussions, remarques et correspondences sur le sujets je remercie aussi les personnes suivantes: L. Breen, A. Hirschowitz, L. Katzarkov, T. Pantev, J. Sauloy, M. Spitzweck, D. Stanley, J. Tapia et G. Vezzosi.

La majeure partie de ce travail a été effectuée à l'institut Max Planck de Bonn durant l'année 1999−2000, que je tiens à remercier pour son hospitalité et ses conditions de travails exceptionnelles.

Notations et conventions: Pour un univers U nous appellerons U-ensemble (resp. U-ensemble simplicial, resp. U-groupe, resp. ...) un ensemble (resp. un ensemble simplicial, resp. un groupe, resp. ...) qui est un élément de U. La catégorie des U-ensembles (resp. U-ensembles simpliciaux, resp. U groupes, resp ...) sera alors notée $U-Ens$ (resp. $U-SEns$, resp. $U-Gp$, resp. ...). Nous ferons une exception avec l'expression U-catégorie, que nous réservons à la notion usuelle (voir [SGA4, $IDef.1.2$]), désignant une catégorie C telle que étant donné deux objets X et Y, l'ensemble des morphismes de X vers Y dans C est un U-ensemble. Pour désigner une catégorie appartenant à U nous parlerons de catégorie U-petite.

Pour la suite nous fixerons U un univers contenant les nombres naturels, et V un univers avec $U \in V$. Comme il en est l'usage, nous noterons Δ la catégorie simpliciale standard. C'est la catégorie U-petite dont les objets sont les nombres naturels $[n]$, et dont les morphismes de $[m]$ vers $[n]$ sont les applications croissantes de $\{0, \dots, m\}$ vers $\{0, \dots, n\}$. Pour tout V-catégorie C, nous noterons SC la V-catégorie des objets simpliciaux dans C (i.e. la V-catégorie des foncteurs de Δ^o vers C), et pour $F \in SC$ nous noterons $F_n := F([n])$. Nous identifierons systématiquement C à la sous-catégorie pleine de C^{Δ^o} formée des foncteurs constant $F : \Delta^o \longrightarrow C$.

Si C est une V-catégorie, et X un objet de C, nous noterons h_X le V-préfaisceau simplicial sur C qu'il représente. C'est donc le foncteur défini par $h_X(Y) := Hom(Y, X)$, où l'ensemble $Hom(Y, X)$ est vu comme un ensemble simplicial constant. De même, si X est un objet simplicial de C, nous noterons h_X le V-préfaisceau simplicial dont le préfaisceau des simplexes de dimension n est défini par la formule $(h_X)_n(Y) := Hom(Y, X_n)$.

Nous utiliserons les définitions de catégories de modèles fermées énoncées dans [Ho]. Elle seront toujours des V-catégories. On supposera implicitement que lorsqu'elles seront engendrées par cofibrations (voir [Ho, §2.1]), les ensembles générateurs des cofibrations et cofibrations triviales seront des V-ensembles (de même, les ordinaux apparaissant dans les colimites transfinies seront des éléments de V). Rappelons que la catégorie $V-SEns$ est une catégorie de modèles fermée, monoidale symétrique pour le produit direct, et engendrée par cofibrations pour la convention ci-dessus (voir [Ho, §3]). Les Hom internes de $V-SEns$ seront notés $\underline{Hom}$, et ces Hom dérivés $\mathbb{R}\underline{Hom}$ (voir [Ho, §4]). Une catégorie de modèles fermée simpliciale sera alors une V-catégorie de modèles fermée, qui est un module sur $V-SEns$ (au sens de [Ho, 4.2.28]). Enfin, si M est une catégorie de modèles fermée $Ho(M)$ désignera sa catéorie homotopique. C'est une catégorie qui est naturellement équivalente à une V-catégorie. Les ensembles de morphismes dans $Ho(M)$ seront notés $[-,-]_M$.

Enfin, pour une catégorie de modèles fermée M nous noterons M_* la catégorie de modèles de ses objets pointés. Lorsque de plus M est une catégorie de modèles simpliciales, il en est de même de M_*. Ses Hom simpliciaux seront alors notés $\underline{Hom}_*$ (voir [Ho, 4.2.19]).

1 Rappels sur les champs

Dans ce premier chapitre nous avons rassemblé un certains nombres de définitions et de résultats standards de la théorie des préfaisceaux simpliciaux sur un site de Grothendieck. Pour ce qui est des preuves et des détails techniques nous renvoyons le lecteur à [J1, H-S, G-J].

Nous commencerons par rappeler la définition de la structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux, ainsi que ces principales propriétés. L'existence de cette structure de catégorie de modèles nous sera utile tout au long de ce travail. Dans les paragraphes suivants nous rappellerons comment elle permet de définir la cohomologie d'un préfaisceau simplicial à valeurs dans un système local. Nous donnerons aussi une brève démonstration d'un théorème de comparaison avec la cohomologie définie par foncteurs dérivés, ainsi qu'un critère pour s'assurer qu'un préfaisceau simplicial possède une décomposition de Postnikov convenable. Nour terminerons ce chapitre par un apperçu de la théorie du délaçage dans le cadre des préfaisceaux simpliciaux, et un bref rappel sur les schémas en groupes affines sur un corps.

Pour tout ce chapitre C désignera une catégorie V-petite, et $SPr(C)$ la catégorie des préfaisceaux en V-ensembles simpliciaux sur C. La catégorie $SPr(C)$ est donc une V-catégorie. Nous supposerons que C possède des produits fibrés, et qu'elle est munie d'une topologie de Grothendieck (au sens de [SGA3, IV]). Pour fixer les idées, notons que par la suite C sera la catégorie des U-schémas affines sur $Spec\, k$, pour k un anneau commutatif, et la topologie sera engendrée par les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts (i.e. la topologie $fpqc$ de [SGA3, IV.6.3]).

1.1 Rappel des définitions

On commence par munir la catégorie $SPr(C)$ d'une structure de catégorie de modèles que nous appellerons le structure forte (dans la littérature on trouve aussi l'expression "structure niveaux par niveaux"), et qui a étée introduite pour la première fois dans [Bo-Ka]. Il s'agit du cas où l'on considère la topologie discrète, et donc où l'on voit C comme une simple catégorie. On appellera alors fibration forte (resp. équivalence forte) tout morphisme de $SPr(C)$, $f : F \longrightarrow F'$, tel que pour tout objet $X \in C$ le morphisme $f_X : F(X) \longrightarrow F(X')$ soit une fibration (resp. une équivalence) dans $V - SEns$. Pour ces définitions, C étant V-petite, la catégorie $SPr(C)$ est une catégorie de modèles fermée simpliciale (voir [G-J, $Ex.II$.6.9]). Les Hom simpliciaux de cette dernière seront notés $\underline{Hom}$. En clair, ceci signifie que pour $X \in V - SEns$ et $F, F' \in SPr(C)$ on peut définir fonctoriellement dans $SPr(C)$ des objets $X \otimes F$, $\underline{Hom}(F, F')$ et $(F')^X$ satisfaisant à la formule d'adjonction

$$\underline{Hom}(X, \underline{Hom}(F, F')) \simeq \underline{Hom}(X \otimes F, F') \simeq \underline{Hom}(F, (F')^X).$$

Ces Hom simpliciaux étant compatibles avec la structure de catégorie de modèles on peut définir des Hom simpliciaux dérivés (voir [Ho, §4.3])

$$\mathbb{R}_f \underline{Hom}(F, F') := \underline{Hom}(QF, RF') \in Ho(V - SEns),$$

où $QF \longrightarrow F$ est un remplacement cofibrant, et $F' \longrightarrow RF'$ un remplacement fibrant. Noter l'indice f dans la notation $\mathbb{R}_f$, qui fait référence à la structure forte. Ces objets sont bien définis et fonctoriels comme objets de la catégorie homotopique $Ho(V - SEns)$. De plus, la formule d'adjonction précédente induit une formule d'adjonction dérivée

$$\mathbb{R}_f \underline{Hom}(X, \mathbb{R}_f \underline{Hom}(F, F')) \simeq \mathbb{R}_f \underline{Hom}(X \otimes F, F') \simeq \mathbb{R}_f \underline{Hom}(F, (RF')^X),$$

où $F' \longrightarrow RF'$ est un remplacement fibrant.

Pour $X \in C$, on dispose du foncteur d'évaluation en X

$$\begin{array}{cccc} j_X : & SPr(C) & \longrightarrow & V - SEns \\ & F & \mapsto & F(X). \end{array}$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche noté j_X^*, et l'adjonction (j_X^*, j_X) est une adjonction de Quillen. En particulier, pour tout $X \in C$, $j_X^*(*)$ est un objet cofibrant de $SPr(C)$. Or, il est clair que $j_X^*(*)$ est isomorphe à h_X. Ainsi, pour tout objet du site $X \in C$, le préfaisceau simplicial qu'il représente h_X est un objet cofibrant. Dans le cas où $X = e$ est un objet final, nous noterons comme il en est l'usage

$$\begin{array}{cccc} \Gamma := j_e : & SPr(C) & \longrightarrow & V - SEns \\ & F & \mapsto & F(e), \end{array}$$

le foncteur des sections globales. Son adjoint à gauche j_e^* est le foncteur qui associe à $X \in V - SEns$ le préfaisceau constant $\underline{X}$. Remarquer que lorsque C ne possède pas d'objet final les préfaisceaux constants ne sont généralement pas cofibrants. De plus, le foncteur des sections globales $\Gamma(-) := \underline{Hom}(*, -)$ n'est alors plus de Quillen à droite en général.

Revenons au cas où C est munie d'une topologie de Grothendieck. A un objet $F \in SPr(C)$ on associe ses préfaisceaux d'homotopie de la façon suivante. Pour tout $X \in C$, et tout 0-simplexe $s \in F(X)_0$, on définit le m-ème préfaisceau d'homotopie de F pointé en s par

$$\begin{array}{cccc} \pi_m^{pr}(F,s): & (C/X)^o & \longrightarrow & V - Gp \\ & (u : Y \to X) & \mapsto & \pi_m(F(Y), u^*(s)). \end{array}$$

C'est un préfaisceau en V-groupes sur C/X qui est abélien lorsque $m > 1$. Le préfaisceau des composantes connexes de F est défini par

$$\begin{array}{cccc} \pi_0^{pr}(F): & C^o & \longrightarrow & V - Ens \\ & X & \mapsto & \pi_0(F(X)). \end{array}$$

On définit alors les faisceaux d'homotopie de F comme étant les faisceaux associés aux préfaisceaux d'homotopie. Ils seront notés

$$\pi_m(F,s) := a(\pi_m^{pr}(F,s)) \qquad \pi_0(F) := a(\pi_0^{pr}(F)).$$

Définition 1.1 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme de préfaisceaux simpliciaux sur le site C.*

- *Le morphisme f est une équivalence si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*
  - *Le morphisme induit $\pi_0(f) : \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(F')$ est un isomorphisme de faisceaux sur C.*
  - *Pour tout objet $X \in C$, tout $m > 0$ et tout 0-simplexe $s \in F(X)_0$, les morphismes induits*
  $$\pi_m(f,s) : \pi_m(F,s) \longrightarrow \pi_m(F', f(s))$$
  sont des isomorphismes de faisceaux sur C/X.
- *Le morphisme f est une cofibration si c'est une cofibration forte.*

Il est démontré dans [H-S, Thm. 5.1] que ceci munit bien $SPr(C)$ d'une structure de catégorie de modèles simpliciale. Remarquons au passage que toute équivalence forte est une équivalence, que toute fibration est une fibration forte, et que tout fibration triviale est une équivalence forte. De même, toute équivalence entre objets fibrants dans $SPr(C)$ est une équivalence forte.

Les Hom simpliciaux dérivés relativement à cette nouvelle structure seront notés respectivement $\mathbb{R}\underline{Hom}$. De même, lorsque C possèdera un objet final e, le foncteur dérivé à droite des sections globales sera noté $\mathbb{R}\Gamma$. On dispose aussi des isomorphismes d'adjonctions analogues à ceux décrits précédemment

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(X \times F, F') \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(X, \mathbb{R}\underline{Hom}(F,F')) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}(F, (RF')^X).$$

Il existe une relation entre les deux structures de catégorie de modèles sur $SPr(C)$ connue sous le nom de localisation de Bousfield à gauche (voir [Hi]). Nous n'insiterons pas trop sur cette notion et nous nous contenterons de retenir que le fait que $SPr(C)$ soit une localisation de Bousfield à gauche de $SPr(C)$ munie de la structure forte, implique l'existence d'une jolie caractérisation des objets fibrants dans $SPr(C)$. Le lecteur remarquera qu'il s'agit d'un analogue de nature homotopique de la définition d'un faisceau.

Lemme 1.2 *Un objet $F \in SPr(C)$ est fibrant si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites.*

1. *Pour tout objet $X \in C$, $F(X)$ est fibrant dans $V - SEns$ (i.e. F est fortement fibrant).*
2. *Pour tout objet $X \in C$, et tout recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de X dans C, le morphisme naturel*

$$F(X) \longrightarrow Holim_{[m]\in\Delta} \prod_{(i_0,\ldots,i_m)\in I^{m+1}} F(U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_m})$$

est une équivalence dans $V - SEns$.

Preuve: C'est une conséquence directe de [H-S, Prop. 6.1] et du critère général caractérisant les objets fibrants d'une catégorie de modèles qui est une localisation de Bousfield à gauche (i.e. un objet $X \in L_{\mathcal{C}}M$ est fibrant si et seulement s'il est fibrant dans M est $\mathcal{C}$-local, voir [Hi, 3.4.16]). Le lemme se déduit aussi du résultat plus général [H-S, Lem. 9.2] en faisant $n = 0$. $\Box$

Remarquer que s'il l'on considère des préfaisceaux en groupoides plutôt que des préfaisceaux simpliciaux, alors la seconde condition du lemme précédent est exactement équivalente à la condition usuelle d'être un champ (voir [J2] pour plus de détails sur les relations entre préfaisceaux simpliciaux et champs en groupoides). La définition suivante est alors naturelle. Notons qu'il s'agit aussi du point de vue adopté dans [H-S] pour développer la théorie des n-champs de Segal.

Définition 1.3 *Un champ sur C est un objet fibrant de la catégorie $SPr(C)$. Par extension, tout objet F de la catégorie homotopique $Ho(SPr(C))$ sera appelé un champ.*

Avec ce langage, le champ associè à un préfaisceau simplicial F est simplement un de ses modèles fibrants.

1.2 Produits fibrés homotopiques et décomposition de Postnikov

Soit I une catégorie V-petite, et $SPr(C)^I$ la catégorie des foncteurs de I vers $SPr(C)$. On peut munir $SPr(C)^I$ d'une structure de catégorie de modèles engendrée par cofibrations où les équivalences (resp. les cofibrations) sont définies niveaux par niveaux (i.e. $F \longrightarrow F'$ est une équivalence si et seulement si pour tout $i \in I$, $F(i) \longrightarrow F'(i)$ est une équivalence dans $SPr(C)$). Noter que cette structure n'est pas celle que nous avons utilisée pour définir $SPr(C)$, mais est une structure de type injective analogue à celle définie dans [J1, Thm. 2.3]. La catégorie de modèles ainsi obtenue est une catégorie de modèles fermée simpliciale, et ces Hom simpliciaux seront notés $\underline{Hom}_I$. En particulier, on dispose du foncteur des sections globales

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(I,-): & SPr(C)^I & \longrightarrow & V - SEns \\ & F & \mapsto & \underline{Hom}_I(*,F) \end{array}$$

dont l'adjoint à gauche est le foncteur qui associe à $X \in V - SEns$ le foncteur constant de valeurs X, $\underline{X} : I \longrightarrow SPr(C)$. L'adjonction $(\underline{-}, \Gamma(I,-))$ est alors une adjonction de Quillen, et le foncteur dérivé à droite de $\Gamma(I,-)$ sera alors noté

$$Holim_I := \mathbb{R}\Gamma(I,-) : Ho(SPr(C)^I) \longrightarrow Ho(SPr(C)).$$

C'est le foncteur de limite homotopique le long de I. Il est naturellement isomorphe au foncteur $Holim_I$ construit de façon standard à partir de la structure simpliciale sur $SPr(C)$ (voir [Hi, §19]).

Il est important de remarquer que la définition de $Holim_I$ dépend de la topologie de C, et en général, la comparaison entre les limites homotopiques pour différentes topologie n'est pas aisée. On dispose cependant du critère général suivant. Il permettra par la suite d'avoir dans certains cas des décompositions de Postnikov raisonables, que l'on sait ne pas exister en général.

Lemme 1.4 *Soit $F : I \longrightarrow SPr(C)$ un I-diagramme de préfaisceaux simpliciaux, tel que pour tout $i \in I$, F_i soit un champ. Alors, si on note $Holim_I^{triv} F \in Ho(SPr(C))$ la limite homotopique de F lorsque C est muni de la topologie triviale, le morphisme naturel*

$$Holim_I^{triv} F \longrightarrow Holim_I F$$

est un isomorphisme dans $Ho(SPr(C))$.

Preuve: C'est immédiat, car toute résolution fibrante $F \longrightarrow F'$ est telle que le morphisme induit $F_i \longrightarrow F'_i$ soit une équivalence forte. Ainsi, $F \longrightarrow F'$ est aussi une résolution fibrante lorsque C est muni de la topologie triviale. $\Box$

Nous allons maintenant étudier deux cas particulier du foncteur précédent. Il s'agit du cas où I possède trois objets 0, 1 et 2 et deux uniques morphismes non triviaux $1 \to 0$, $2 \to 0$, et du cas oú I est la catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné des entiers naturels.

Commençons par examiner le premier cas, et notons 0, 1 et 2 les objets de I, et $a : 1 \to 0$, $b : 2 \to 0$ ses morphismes non triviaux. Un objet de $SPr(C)^I$ est alors la donnée d'un diagramme de préfaisceaux simpliciaux

$$F_1 \xrightarrow{a} F_0 \xleftarrow{b} F_2.$$

Pour tout objet $F \in Ho(SPr(C)^I)$ nous utiliserons la notation

$$F_1 \times^h_{F_0} F_2 := Holim_I F,$$

que nous appellerons le produit fibré homotopique de F_1 et F_2 au-dessus de F_0. Un cas particulièrement important est celui où $F_2 = *$. L'objet $F_1 \times^h_{F_0} *$ est alors la fibre homotopique du morphisme $a : F_1 \longrightarrow F_0$ au point $b : * \longrightarrow F_0$.

Il est facile de vérifier que les objets fibrants dans $SPr(C)^I$ sont exactement les diagrammes tels que F_i soit un champ pour tout i, et tels que les morphismes a et b soient des fibrations. En particulier, si $F \in SPr(C)^I$ est fibrant, pour tout i et tout $X \in C$, $F_i(X)$ est un ensemble simplicial fibrant, et les morphismes $a_X : F_1(X) \to F_0(X)$, $b_X : F_2(X) \to F_0(X)$ sont des fibrations d'ensembles simpliciaux.

Supposons maintenant que $F \in SPr(C)^I$ soit fibrant et muni d'un morphisme $s : * \longrightarrow F$, qui induit donc des morphismes $s_i : * \longrightarrow F_i$, et $s : * \longrightarrow F_1 \times^h_{F_0} F_2$. Alors, en utilisant les suites exactes longues d'homotopie associées aux produits fibrés homotopiques d'ensembles simpliciaux, on obtient une suite exacte longue de préfaisceaux en groupes sur C

$$\pi^{pr}_{m+1}(F_0,s_0) \xrightarrow{\partial} \pi^{pr}_m(F_1 \times^h_{F_0} F_2, s) \xrightarrow{a\times b} \pi^{pr}_m(F_1,s_1) \times \pi^{pr}_m(F_2,s_2) \xrightarrow{a-b} \pi^{pr}_m(F_0,s_0) \xrightarrow{\partial} \pi^{pr}_{m-1}(F_1 \times^h_{F_0} F_2, s)$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi^{pr}_1(F_1 \times^h_{F_0} F_2, s) \xrightarrow{a\times b} \pi^{pr}_1(F_1,s_1) \times \pi^{pr}_1(F_2,s_2) \xrightarrow{a-b} \pi^{pr}_1(F_0,s_0) \xrightarrow{\partial}$$

$$\pi^{pr}_0(F_1 \times^h_{F_0} F_2) \xrightarrow{a\times b} \pi^{pr}_0(F_1) \times \pi^{pr}_0(F_2) \xrightarrow{a-b} \pi^{pr}_0(F_0).$$

Par convention, lorsque P n'est pas un groupe abélien, dire que la suite $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{a-b} P$ est exacte signifie que l'image de u est exactement l'équaliseur des morphismes a et b. De même, dire que la suite

$$\pi^{pr}_1(F_1,s_1) \times \pi^{pr}_1(F_2,s_2) \xrightarrow{a-b} \pi^{pr}_1(F_0,s_0) \xrightarrow{\partial} \pi^{pr}_0(F_1 \times^h_{F_0} F_2) \xrightarrow{a\times b} \pi^{pr}_0(F_1) \times \pi^{pr}_0(F_2)$$

est exacte siginifie que l'image de $a-b$ est égale à la fibre de ∂ au point global s, et que l'image de ∂ est ègale à la fibre du morphisme $a\times b$ prise au point global (s_1,s_2).

En utilisant l'exactitude du foncteur de faisceautisation, on en déduit une suite exacte longue sur les faisceaux d'homotopie

$$\pi_{m+1}(F_0,s_0)\xrightarrow{\partial}\pi_m(F_1\times^h_{F_0}F_2,s)\xrightarrow{a\times b}\pi_m(F_1,s_1)\times\pi_m(F_2,s_2)\xrightarrow{a-b}\pi_m(F_0,s_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{m-1}(F_1\times^h_{F_0}F_2,s)$$

$$\cdots\xrightarrow{\partial}\pi_1(F_1\times^h_{F_0}F_2,s)\xrightarrow{a\times b}\pi_1(F_1,s_1)\times\pi_1(F_2,s_2)\xrightarrow{a-b}\pi_1(F_0,s_0)\xrightarrow{\partial}$$

$$\pi_0(F_1\times^h_{F_0}F_2)\xrightarrow{a\times b}\pi_0(F_1)\times\pi_0(F_2)\xrightarrow{a-b}\pi_0(F_0).$$

L'existence de cette suite exacte longue et un analogue du lemme des cinqs impliquent en particulier que l'objet $F_1\times^h_{F_0}F_2$ ne dépend pas de la topologie de C. En d'autres termes, si $F\in SPr(C)^I$ est un objet, et si on note $F_1\times^{hf}_{F_0}F_2$ le produit fibré homotopique lorsque C est muni de la topologie triviale, alors le morphisme naturel dans $Ho(SPr(C))$, $F_1\times^{hf}_{F_0}F_2\longrightarrow F_1\times^h_{F_0}F_2$ est un isomorphisme. Une conséquence remarquable de ce fait est que la catégorie de modèles $SPr(C)$ est propre à droite (i.e. les changements de bases le long de fibrations préservent les équivalences). Pour plus de références sur ce point le lecteur pourra consulter [H-S, §3].

Supposons maintenant que I soit la catégorie définie par l'ensemble ordonné des entiers naturels. Ses objets sont donc les entiers $n\in\mathbb{N}$, et il existe un unique morphisme non trivial de n vers m si et seulement si $n>m$. La catégorie I peut donc se représenter schématiquement par

$$\dots m\longrightarrow m-1\longrightarrow\dots 1\longrightarrow 0,$$

et un objet de $SPr(C)^I$ est donc la donnée pour tout entier n d'un préfaisceau simplicial $F_n\in SPr(C)$, et de morphismes $f_n:F_n\longrightarrow F_{n-1}$. La limite homotopique de $F\in SPr(C)^I$ sera alors notée $Holim_nF_n$.

Comme le foncteur de faisceautisation ne commute pas avec les limites infinis, on ne disposera pas en général d'une suite exacte de Milnor reliant les faisceaux d'homotopie de $Holim_nF_n$ avec ceux de F. Ceci entraine aussi qu'il n'existe pas de décomposition de Postnikov en général. Nous allons cependant utiliser le lemme 1.4 et la suite exacte de Milnor de [G-J, Prop. VI.2.15] pour donner un critère de convergence des décompositions de Postnikov. Pour cela nous supposerons connu le cas absolou (tel qu'il est décrit dans [G-J, §VI] par exemple).

Soit $*\longrightarrow F$ un préfaisceau simplicial pointé tel que $\pi_0(F)\simeq *$. Quitte a contracter le 0-squelette de F (ce qui changera F en un préfaisceau simplicial équivalent) on pourra même supposer que F est 0-réduit, et donc que $\pi_0^{pr}(F)\simeq *$. De plus, quitte à prendre un remplacement fibrant pour la structure forte on pourra supposer que $F(X)$ est un ensemble simplicial fibrant pour tout objet $X\in C$. Rappelons que le préfaisceau en groupes $\pi_1^{pr}(F,*)$ opère naturellement sur $\pi_n^{pr}(F,*)$, et de même le faisceau en groupes $\pi_1(F,*)$ opère sur $\pi_n(F,*)$. Nous utiliserons alors les préfaisceaux simpliciaux $K(\pi_1^{pr}(F,*),\pi_n^{pr}(F,*),n+1)$ définis dans le paragraphe suivant. Ce sont des préfaisceaux simpliciaux pointés, connexes et fibrants pour la structure forte, et avec

$$\pi_i^{pr}(K(\pi_1^{pr}(F,*),\pi_n^{pr}(F,*),n{+}1),*)\simeq *\ pour\ i\neq 1,n{+}1\qquad \pi_1^{pr}(K(\pi_1^{pr}(F,*),\pi_n^{pr}(F,*),n{+}1),*)\simeq\pi_1^{pr}(F,*)$$

$$\pi_{n+1}^{pr}(K(\pi_1^{pr}(F,*),\pi_n^{pr}(F,*),n+1),*)\simeq\pi_n^{pr}(F,*),$$

et dont l'action du π_1^{pr} sur le π_n^{pr} est celle donnée précédemment.

Considérons la tour de Postnikov de F, $\{\tau_{\leq n}F\}_n$, définie objets par objets de C comme dans [G-J, VI.3]. Il s'agit d'un diagramme

$$\cdots\longrightarrow\tau_{\leq n}F\xrightarrow{p_n}\tau_{\leq n-1}F\xrightarrow{p_{n-1}}\dots\tau_{\leq 0}F=*\ ,$$

où la fibre homotopique du morphisme p_n est équivalente pour la structure forte au préfaisceau simplicial $K(\pi_n^{pr}(F,*),n)$. On peut donc trouver pour $n>1$, un diagramme homotopiquement cartésien pour la structure forte

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq n}F & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi_1^{pr}(F,*),1) & \longrightarrow & K(\pi_1^{pr}(F,*),\pi_n^{pr}(F,*),n+1), \end{array}$$

qui un diagramme classifiant pour la fibration $\tau_{\leq n}F \longrightarrow \tau_{\leq n-1}F$. Mais comme les produits fibrés homotopiques sont indépendants à équivalences près de la topologie sur C, on trouve aussi des diagrammes homotopiquement cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq n}F & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\pi_1(F,*),1) & \longrightarrow & K(\pi_1(F,*),\pi_n(F,*),n+1). \end{array}$$

La proposition suivante est due à J.F. Jardine (voir [J1, Lem. 3.4]).

Proposition 1.5 *Soit $*\longrightarrow F$ un préfaisceau simplicial pointé avec $\pi_0(F)\simeq *$, et E_n un modèle fibrant pour $K(\pi_n(F,*),n+1)$. Supposons qu'il existe un entier N, tel que pour tout entier $i\geq 0$ et tout $n>i+N$ on ait*

$$\pi_i^{pr}(E_n,*)\simeq 0.$$

Alors le morphisme naturel

$$F\longrightarrow Holim_n\tau_{\leq n}F$$

est un équivalence.

Preuve: Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Holim_{n>0}\tau_{\leq n}F \arrow[dl, "q"] \\ & \tau_{\leq 1}F & \end{tikzcd}$$

Comme $Holim_{n>0}\tau_{\leq n}F$ est naturellement équivalent à $Holim_n\tau_{\leq n}F$, il suffit de montrer que le morphisme f est une équivalence. De plus, une utilisation de la suite exacte longue en homotopie montre qu'il suffit de démontrer que le morphisme induit sur les fibres homotopiques des morphismes p et q est une équivalence. Ceci implique que l'on peut remplacer F par la fibre homotopique de p, et donc se ramener au cas où F est simplement connexe (i.e. $\pi_1(F,*)\simeq\pi_0(F)\simeq *$).

On peut clairement supposer que F est un champ, ce que nous ferons. De plus, quitte en remplacer le diagramme $\{\tau_{\leq n}F_n\}_n$ par un diagramme qui lui est équivalent, on peut aussi supposer que chaque $\tau_{\leq n}F$ est un champ, et que chacun des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq n}F & \longrightarrow & \tau_{\leq n-1}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & E_n, \end{array}$$

est homotopiquement cartésien pour la structure forte. D'après [G-J, Prop. $VI.2.15$], il existe pour tout $i\geq 0$ d'une suite exacte courte de préfaisceaux

$$0\longrightarrow Lim_n^1\pi_{i+1}^{pr}(\tau_{\leq n}F,*)\longrightarrow \pi_i^{pr}(Holim_n^{triv}\tau_{\leq n}F,*)\longrightarrow Lim_n\pi_i^{pr}(\tau_{\leq n}F,*)\longrightarrow 0\ ,$$

où $Holim^{triv}$ désigne la limite homotopique pour la topologie triviale. Cependant, l'hypothèse faite sur les préfaisceaux d'homotopie de E_n entraine que le système projectif $\{\pi_i^{pr}(\tau_{\leq n}F,*)\}_n$ est stationnaire. La suite exacte précédente se réduit donc un isomorphisme de préfaisceaux

$$\pi_i^{pr}(Holim_n^{triv}\tau_{\leq n}F,*) \simeq \pi_i^{pr}(\tau_{\leq n}F,*),$$

pour $n > i+N$. En passant aux faisceaux d'homotopie on en déduit que le morphisme naturel $Holim_n^{triv}\tau_{\leq n}F \longrightarrow \tau_{\leq n}F$ induit des isomorphismes de faisceaux

$$\pi_i(Holim_n^{triv}\tau_{\leq n}F) \simeq \pi_i(\tau_{\leq n}F,*),$$

pour $n > i+N$. Or, comme on a $\pi_i(F,*) \simeq \pi_i(\tau_{\leq n}F,*)$ dès que $i \leq n$, ceci implique clairement que le morphisme $F \longrightarrow Holim_n^{triv}\tau_{\leq n}F$ est une équivalence. Le lemme 1.4 implique alors qu'il en est de même du morphisme naturel $F \longrightarrow Holim_n\tau_{\leq n}F$. $\Box$

Remarquer que la condition $\pi_i^{pr}(E_n) = 0$ pour $n > i+N$ est équivalent à la condition que $H^{n+1-i}(X,\pi_n(F,*)) = 0$, pour tout $n > i+N$ et tout objet du site $X \in C$.

1.3 Cohomologie des préfaisceaux simpliciaux

Nous considèrerons essentiellement le cas particulier des préfaisceaux simpliciaux pointés $s : * \longrightarrow F$ tels que le morphisme induit sur le faisceau des composantes connexes $* \longrightarrow \pi_0(F)$ soit un isomorphisme. Un tel F sera appelé un préfaisceau simplicial pointé et connexe.

Définition 1.6 *Un système local M sur un préfaisceau simplicial pointé et connexe F, est la donnée d'un faisceaux en groupes abéliens M, et d'une action de $\pi_1(F,s)$ sur M. Un morphisme entre deux tels systèmes locaux M et M', est la donnée d'un morphisme de faisceaux de groupes $M \longrightarrow M'$ qui commute avec les actions de $\pi_1(F,s)$.*

La catégorie abéliennes des systèmes locaux sur F ainsi définie sera notée $SysLoc(F)$.

Rappelons que pour un V-groupe G on peut construire son classifiant $K(G,1)$, qui est un V-ensemble simplicial défini de la façon suivante. On commence par définir $E(G,1)$, qui est l'ensemble simplicial nerf du morphisme naturel $G \longrightarrow *$. Ainsi, $E(G,1)_m := G^{m+1}$, et les faces et dégénérescences sont données par les projections et les diagonales. Le groupe G opère sur $E(G,1)$ en opèrant sur lui-même à gauche. On définit alors $K(G,1) := E(G,1)/G$. Cette construction s'étend naturellement au cas où G est un V-ensemble simplicial muni d'une loi de groupe. En effet, on forme alors l'ensemble bisimplicial $K(G,1)_{p,q} := K(G_p,1)_q$, et on définit $K(G,1)$ comme son ensemble simplicial diagonal. Ainsi, on a $K(G,1)_n = K(G_n,1)_n$. On peut aussi commencer par former l'ensemble bisimplicial nerf du morphisme $G \longrightarrow *$, et appeler sa diagonale $E(G,1)$. Le groupe G opère alors sur $E(G,1)$ et on a $K(G,1) = E(G,1)/G$. Rappelons aussi que l'ensemble simplicial $K(G,1)$ est naturellement pointé (par l'image de l'identité de $E(G,1)$), et qu'il existe des isomorphismes naturels $\pi_m(K(G,1),*) \simeq \pi_{m-1}(G,e)$.

Lorsque G est un groupe abélien simplicial l'ensemble simplicial $K(G,1)$ hérite d'une loi de groupe abélien induite par celle de G. On peut alors itérer la construction précédente et poser

$$E(G,m) := E(K(G,m-1),1) \qquad K(G,m) := K(K(G,m-1),1).$$

La fonctorialité des constructions précédentes permet de définir pour tout préfaisceau en groupes simpliciaux G sur C, des préfaisceaux simpliciaux $E(G,1)$ et $K(G,1)$. De plus, lorsque G est abélien on dispose aussi des préfaisceaux simpliciaux $E(G,m)$ et $K(G,m)$. Le groupe simplicial $K(G,m-1)$ opère sur $E(G,m)$ et on a $K(G,m) = E(G,m)/K(G,m-1)$. Nous définirons par convention $K(G,0)$ comme étant le faisceau de groupes simpliciaux G.

Soit G un préfaisceau en groupes opèrant sur un préfaisceau en groupes abéliens M à travers un morphisme de préfaisceaux $\rho : G \longrightarrow \underline{Aut}_C(M)$. Alors le groupe G opère encore de façon naturelle sur les préfaisceaux en groupes abéliens simpliciaux $K(M, m-1)$, pour $m > 0$. On peut donc former le produit semi-direct de G par $K(M, m-1)$, qui est un préfaisceau en groupes simpliciaux noté $G \times_\rho K(M, m-1)$. On notera par la suite $K(G, M, m) := K(G \times_\rho K(M, m-1), 1)$. On dispose de plus d'une suite exacte de préfaisceaux en groupes simpliciaux

$$K(M, m-1) \longrightarrow G \times_\rho K(M, m) \longrightarrow G.$$

En en prenant l'image par le foncteur $K(-, 1)$ on en déduit deux nouveaux morphismes

$$K(M, m) \longrightarrow K(G, M, m) \xrightarrow{p} K(G, 1).$$

Pour $m = 0$, on définit par convention $K(G, M, 0)$ comme étant le préfaisceau en groupes $G \times_\rho M$, produit semi-direct de G par M. La suite exacte longue en homotopie implique alors que $K(M, m)$ est naturellement équivalent dans $SPr(C)$ à la fibre homotopique du morphisme p, et ceci pour tout $m \geq 0$. Le préfaisceau simplicial $K(G, M, m)$ est donc caractérisé à équivalence forte près par le fait que

$$\pi_i(K(G, M, m), *) = * \textit{ pour } i \neq 1, m \qquad \pi_1^{pr}(K(G, M, m), *) \simeq G \qquad \pi_m(K(G, M, m), *) \simeq M,$$

et par l'action de G sur M.

Soit maintenant F un préfaisceau simplicial connexe, et $\rho : G = \pi_1(F, s) \longrightarrow \underline{Aut}_C(M)$ un système local. On dispose d'un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$p^* : \mathbb{R}\underline{Hom}(F, K(G, M, m)) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(F, K(G, 1)).$$

De plus, il existe un morphisme naturel dans $Ho(SPr(C))$, $F \longrightarrow \tau_{\leq 1} \simeq K(G, 1)$, qui définit donc un point $* \in \mathbb{R}\underline{Hom}(F, K(G, 1))$. Nous définissons alors $\mathbb{R}\underline{Hom}_\rho(F, K(M, m))$ comme étant la fibre homotopique du morphisme p^* au point $*$. Remarquer que si ρ est le morphisme trivial alors l'ensemble simplicial $\mathbb{R}\underline{Hom}_\rho(F, K(M, m))$ est naturellement équivalent à $\mathbb{R}\underline{Hom}(F, K(M, m))$.

Définition 1.7 *Le m-ème groupe de cohomologie du préfaisceau simplicial pointé et connexe F, à coefficients dans le système local $\rho : \pi_1(F, s) \longrightarrow \underline{Aut}_C(M)$ est défini par*

$$H^m(F, M) := \pi_0(\mathbb{R}\underline{Hom}_\rho(F, K(M, m))).$$

Plus généralement, si $F \in SPr(C)$ est un préfaisceau simplicial (non pointé) et M un faisceau de groupes abéliens sur C, nous noterons

$$H^m(F, M) := \pi_0 \mathbb{R}\underline{Hom}(F, K(M, m)).$$

Lorsque $F = h_X$, pour X un objet du site C, ces groupes seront notés $H^m(X, M)$, et $H^m(C, M)$ si X est l'objet final de C.

En utilisant les suites exactes longues en homotopie associées à des fibrations, il est facile de vérifier les deux faits suivants.

- Le groupe $H^0(F, M)$ s'identifie naturellement au sous-groupe de $\Gamma(M)$ invariant par l'action de $\Gamma(\pi_1(F, s))$.
- Pour toute suite exacte de systèmes locaux $0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, il existe une suite exacte longue fonctorielle

$$0 \longrightarrow H^0(F, M) \longrightarrow H^0(F, M') \longrightarrow H^0(F, M'') \longrightarrow H^1(F, M) \longrightarrow \cdots$$

$$H^m(F, M) \longrightarrow H^m(F, M') \longrightarrow H^m(F, M'') \longrightarrow H^{m+1}(F, M) \longrightarrow \cdots$$

Lorsque $(F,s)=(K(G,1),*)$, pour G un préfaisceau en groupes sur C, les foncteurs $H^m(F,M)$ sont en réalité des foncteurs dérivés. Comme nous ne connaissons pas de références générales sur le sujet nous donnerons une esquisse de preuve du théorème suivant. Il s'agit de toute évidence d'un résultat faisant partie du "folklore" de la théorie.

Théorème 1.8 *Soit G un préfaisceau en groupes sur C et $(F,s)=(K(G,1),*)$. Alors, pour tout entier m, le foncteur*

$$\begin{array}{cccc} H^m(F,-): & SysLoc(F) & \longrightarrow & V-Ab \\ & (\rho : G \to M) & \mapsto & H^m(F,M) \end{array}$$

est isomorphe au m-ème foncteur dérivé du foncteur $H^0(F,-)$.

Esquisse de preuve: Commençons par traiter le cas où $G=\{1\}$ est trivial. Il faut alors montrer que pour tout faisceau de groupes abéliens M sur C, $H^m(C,M)$ est isomorphe à la cohomologie de C, calculée par foncteur dérivés, à coefficients dans M (que nous noterons $H^m_{der}(C,-)$). Pour cela, notons $C^-(C,Ab)$ la catégorie des complexes de préfaisceaux en V-groupes abéliens sur C qui sont concentrés en degrés négatif ou nuls (avec une différentielle de degré $+1$). Pour chaque objet E de cette catégorie, on dispose de ses préfaisceaux de cohomologie $\underline{H}^n_{pr}(E)$, dont les faisceaux associés seront notés $\underline{H}^n(E)$. Un quasi-isomorphisme est par définition un morphisme de $C^-(C,Ab)$, $f: E \longrightarrow E'$, tel que pour tout m, le morphisme induit $H^m(f): \underline{H}^m(E) \longrightarrow \underline{H}^m(E')$ soit un isomorphisme de faisceaux. On notera alors $D^-(C,Ab)$ la catégorie obtenue à partir de $C^-(C,Ab)$ en inversant formellement les quasi-isomorphismes. Il est alors bien connu que les foncteurs de cohomologie par foncteurs dérivés se calculent par la formule suivante

$$H^m_{der}(C,M) \simeq [\underline{\mathbb{Z}}, M[m]]_{D^-(C,Ab)},$$

où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le préfaisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$, et $M[m]$ est le complexe concentré en degré $-m$ et de valeurs M.

Introduisons $SAb(C)$, la catégorie des préfaisceaux en V-groupes abéliens simpliciaux sur C. D'après [G-J, Cor. $III.2.3$] il existe une équivalence de catégories $\Gamma : C^-(C,Ab) \longrightarrow SAb(C)$ (où Γ est défini termes à termes au-dessus de C). De plus, en remplaçant les ensembles simpliciaux par des groupes abéliens simpliciaux dans les paragraphes précédents, on munit $SAb(C)$ d'une structure de catégorie de modèles où les équivalences et les fibrations sont detectées dans $SPr(C)$ (i.e. en oubliant la structure de groupes). A l'aide de [G-J, Cor. $III.2.7$] on voit que le foncteur Γ est compatible avec la formation des faisceaux de cohomologie et d'homotopie, et qu'il définit une bijection de l'ensembles des quasi-isomorphismes de $C^-(C,Ab)$ vers l'ensemble des équivalences de $SAb(C)$. Il induit donc une équivalence sur les catégories homotopiques associées

$$\Gamma : D^-(C,Ab) = Ho(C^-Ab(C)) \simeq Ho(SAb(C)).$$

Ainsi, pour tout préfaisceau en groupes abéliens M on a

$$[\underline{\mathbb{Z}}, M[m]]_{D^-(C,Ab)} \simeq [\Gamma(\underline{\mathbb{Z}}), \Gamma(M[m])]_{Ho(SAb(C))}.$$

Cependant $\Gamma(\underline{\mathbb{Z}})$ est équivalent dans $SAb(C)$ au préfaisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$, et $\Gamma(M[m])$ est équivalent à $K(M,m)$. On a donc

$$H^m_{der}(C,M) \simeq [\underline{\mathbb{Z}}, M[m]]_{Ho(C^-Ab(C))} \simeq [\underline{\mathbb{Z}}, K(M,m)]_{Ho(SAb(C))}.$$

Pour achever la démonstration dans ce premier cas, on fait appel à l'adjonction de Quillen

$$-\otimes \mathbb{Z} : SPr(C) \longrightarrow SAb(C) \qquad j : SAb(C) \longrightarrow SPr(C),$$

où $-\otimes \mathbb{Z}$ est le foncteur d'abélianisation, et j est le foncteur d'oublie de la structure de groupes. Cette adjonction descent en une adjonction sur les catégories homotopiques, et donne

$$H^m_{der}(C,M) \simeq [\underline{\mathbb{Z}}, K(M,m)]_{Ho(SAb(C))} \simeq [*, j(K(M,m))]_{Ho(SPr(C))} \simeq \pi_0 \mathbb{R}\underline{Hom}(*, K(M,m)) \simeq H^m(C,M).$$

Revenons au cas général où $F = K(G,1)$, pour G un préfaisceau en groupes. Rappelons que l'on peut définir un site G-équivariant C/BG. Ses objets sont ceux de C, et ils seront notés symboliquement $X \longrightarrow BG$ pour $X \in C$. La donnée d'un morphisme dans C/BG

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & BG & \end{tikzcd}$$

est la donnée d'un couple (f,x), où $f : X \to Y$ est un morphisme de C, et $x \in G(X)$. Les morphismes se composent naturellement par la formule $(g,y) \circ (f,x) = (g \circ f, f^*(y).x)$, pour $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ et $x \in G(X)$, $y \in G(Y)$. La topologie sur C/BG est définie en décrétant que les familles couvrantes dans C/BG sont celles qui sont couvrantes dans C. Il est clair que C/BG possède des produits fibrés, mais il ne possède pas de produits finis en général (et encore moins d'objet final). De plus, la donnée d'un préfaisceau (resp. d'un faisceau) sur C/BG est naturellement équivalente à celle d'un préfaisceau (resp. d'un faisceau) sur C muni d'une action de G. Il existe donc une équivalence de catégorie $SPr(C/BG) \simeq G - SPr(C)$, où $G - SPr(C)$ est la catégorie des objets de $SPr(C)$ munis d'une action de G. Ceci montre aussi que la catégorie abélienne $SysLoc(K(G,1))$ est équivalente à la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur C/BG, et donc possède suffisemment d'injectifs.

Rappelons aussi que pour tout objet $F \in SPr(C)$, on peut considérer la catégorie des objets sur F, $SPr(C)/F$, qui est naturellement munie d'une structure de catégorie de modèles fermée simpliciale. De plus, pour tout morphisme $f : F \longrightarrow F'$ on dispose d'une adjonction de Quillen

$$\begin{array}{cccc} f_! : & SPr(C)/F & \longrightarrow & SPr(C)/F' \\ & (G \to F) & \mapsto & (G \to F \to F') \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f^* : & SPr(C)/F' & \longrightarrow & SPr(C)/F \\ & (G \to F') & \mapsto & (F \times_G F' \to F). \end{array}$$

Comme $SPr(C)$ est une catégorie de modèles propre à droite l'adjonction précédente est en réalité une équivalence de Quillen dès que f est une équivalence.

Notons alors $\underline{Hom}_F$ les Hom simpliciaux de $SPr(C)/F$. On vérifie à l'aide des définitions et de l'équivalence de Quillen ci-dessus, que pour tout système local $\rho : G \longrightarrow \underline{Aut}_C(M)$ sur $K(G,1)$, on dispose d'isomorphismes naturels

$$H^m(K(G,1),M) \simeq \pi_0 \mathbb{R}\underline{Hom}_{K(G,1)}(K(G,1), K(G,M,m)).$$

En utilisant un argument tout à fait similaire à celui utilisé dans [To1, §2.3] on peut démontrer qu'il existe une équivalence de Quillen de la catégorie de modèles $SPr(C)/K(G,1)$ vers la catégorie de modèles $SPr(C/BG)$. Ainsi, on en déduit un isomorphisme naturel

$$H^m(K(G,1),M) \simeq \pi_0 \mathbb{R}\underline{Hom}_{BG}(*, K(M,m)_{BG}),$$

où $\underline{Hom}_{BG}$ désigne le Hom simplicial de la catégorie de modèles simpliciale $SPr(C/BG)$, et $K(M,m)_{BG}$ est le préfaisceau simplicial sur C/BG correspondant à travers l'équivalence $SPr(C/BG) \simeq G - SPr(C)$ au préfaisceau simplicial $K(M,m)$ muni de son action naturelle. En faisant appel au cas particulier traité précédemment pour le site C/BG, on voit que $H^m_\rho(K(G,1),M)$ est isomorphe à $H^m_{der}(C/BG,M)$. En particulier, si M correspond à un objet injectif dans la catégorie des systèmes locaux sur $K(G,1)$, on a $H^m(K(G,1),M) = 0$ pour $m > 0$. On en déduit que la collection de foncteurs $\{H^m(K(G,1),-)\}_m$ forme un foncteur cohomologique effaçable, et qu'il est donc isomorphe au foncteur dérivé de $H^0(K(G,1),-)$. $\Box$

Remarquer que le théorème précédent appliqué au site C/X, des objets sur un objet X, montre que le foncteur $H^m(X,-)$ est le m-ème foncteur dérivé du foncteur des sections globales $\Gamma : Ab(C/X) \longrightarrow Ab$. Ainsi, pour les préfaisceaux simpliciaux représentables par des objets du site, la cohomologie que nous avons défini dans 1.7 coincide avec la cohomologie usuelle.

1.4 H_∞-Champs

Dans ce paragraphe nous avons rassemblé quelques résultats de la théorie du délaçage dans le cadre des préfaisceaux simpliciaux. Les références pour le cas topologique sont [Se1, Se2].

Soit $s : * \longrightarrow F$ un préfaisceau simplicia pointé. On définit le préfaisceau des lacets de base s par la formule

$$\begin{array}{cccc} \Omega_s F : & C^o & \longrightarrow & V - SEns \\ & X & \mapsto & \Omega_{s(X)}F(X). \end{array}$$

Ici, pour un ensemble simplicial pointé (X,x), $\Omega_x X$ est défini comme étant l'ensemble simplicial des morphismes de Δ^1 vers X qui envoient les deux sommets de Δ^1 sur x. La définition précédente fournit un foncteur $\Omega : SPr(C)_* \longrightarrow SPr(C)_*$ de la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés vers elle même. On peut vérifier que ce foncteur est en réalité de Quillen à droite. Il se dérive donc en un foncteur sur les catégories homotopiques

$$\mathbb{R}\Omega : Ho(SPr(C)_*) \longrightarrow Ho(SPr(C)_*).$$

A l'aide de la suite exacte longue en homotopie on vérifie aisément que les faisceaux d'homotopie de $\mathbb{R}\Omega_s F$ sont donnés par

$$\pi_m(\mathbb{R}\Omega_s F, *) \simeq \pi_{m+1}(F,s) \qquad \pi_0(\mathbb{R}\Omega_s F) \simeq \pi_1(F,s).$$

En particulier, ceci montre que l'on peut calculer $\mathbb{R}\Omega_* F$ en supposant que C est muni de la topologie triviale. Pour être plus précis, ceci veut dire que si l'on note $\mathbb{R}_f\Omega_*$ le foncteur dérivé à droite de Ω_* lorsque C est muni de la topologie triviale, alors le morphisme naturel dans $Ho(SPr(C))$

$$\mathbb{R}_f\Omega_*(F) \longrightarrow \mathbb{R}\Omega_*(F)$$

est un isomorphisme. Ceci va nous permettre de généraliser sans trop de problèmes les résultats standards de [Se2] au cas des préfaisceaux simpliciaux.

Définition 1.9 *Un pré-Δ^o-préfaisceau simplicial est un foncteur*

$$\begin{array}{cccc} F : & \Delta^o & \longrightarrow & SPr(C) \\ & [m] & \mapsto & F_m \end{array}$$

tel que $F_0 = *$.

La catégorie des pré-Δ^o-préfaisceaux simpliciaux sera notée $Pr\Delta^o - SPr(C)$.

Cette définition, ainsi que les résultats qui vont suivre, vallent en particulier pour le cas où $C = *$ est le site trivial. Nous noterons dans ce cas $Pr - \Delta^o - SEns := Pr - \Delta^o - SPr(*)$, que nous appellerons la catégorie des pré-Δ^o-ensembles simpliciaux.

Comme $[0]$ est initial dans Δ^o, on peut identifier la catégorie $Pr\Delta^o - SPr(C)$ avec la catégorie des préfaisceaux sur $\Delta - [0]$ à valeurs dans $SPr(C)_*$, la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés. Comme $SPr(C)_*$ est une catégorie de modèles engendrée par cofibrations on peut alors appliquer [G-J, $\S II.6.9$] et munir $Pr\Delta^o - SPr(C)$ d'une structure de catégorie de modèles. Rappelons que les fibrations (resp. les équivalences) pour cette structure sont les morphismes $f : G \longrightarrow G$ tels que pour tout $[m] \in \Delta$, le morphisme induit $f_m : F_m \longrightarrow G_m$ soit une fibration (resp. une équivalence) dans $SPr(C)$.

Soit $F : \Delta^o \longrightarrow D$ un objet simplicial d'une catégorie D possédant des produits finis, et supposons que F_0 soit l'objet final dans D. Rappelons que l'on peut alors définir pour tout $n \geq 1$ le n-ème morphisme de Segal $F_n \longrightarrow F_1^n$. Il est induit par les n-morphismes dans Δ, $p_i : [1] \longrightarrow [n]$, où chaque p_i est défini par $p_i(0) = i$ et $p_i(1) = i+1$.

Définition 1.10 *Un objet F de $Pr\Delta^o - SPr(C)$ est appelé un H_∞-champ s'il vérifie les trois conditions suivantes.*

- *Pour tout n, F_n est un champ.*
- *Pour tout n, le morphisme de Segal*
$$F_n \longrightarrow F_1^n$$
est une équivalence dans $SPr(C)$.
- *La loi de monoide naturellement induite sur le faisceau $\pi_0(F_1)$ est une loi de groupe.*

Par extensions, nous appellerons encore H_∞-champ tout objet de la catégorie homotopique $Ho(Pr - \Delta^o - SPr(C))$ qui est isomorphe à un H_∞-champ.

Pour un objet $F \in Pr\Delta^o - SPr(C)$ on définit son préfaisceau simplicial classifiant BF, défini par $BF_n := (F_n)_n$. Si F est vu comme un préfaisceau bi-simplicial sur C, alors BF en est le préfaisceau simplicial diagonal. De plus, comme $F_0 = *$, BF est un préfaisceau simplicial réduit (i.e. $F_0 = *$), et en particulier peut-être vu comme un préfaisceau simplicial pointé, $BF \in SPr(C)_*$. Ceci définit évidemment un foncteur
$$B : Pr\Delta^o - SPr(C) \longrightarrow SPr(C)_*.$$
Ce foncteur possède un adjoint à droite, noté usuellement Ω_*. Pour mémoire rappelons que pour $F \in SPr(C)_*$, $\Omega_*(F)$ est défini par

$$\begin{array}{cccc} \Omega_*(F) : & \Delta^o & \longrightarrow & SPr(C) \\ & [m] & \mapsto & F^{\Delta^n_*} \end{array}$$

où Δ^m_* est l'ensemble simplicial pointé obtenu à partir de Δ^m en identifiant tous ses sommets en un point unique. En d'autres termes, $\Omega_* F_m$ est le préfaisceau simplicial des morphismes $\Delta^m \longrightarrow F$ qui envoient tous les sommets de Δ^m sur le point distingué de F.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème principal de la théorie du délaçage de G. Segal. Comme nous ne connaissons pas de référence précise nous donnerons quelques indications pour montrer qu'il se déduit du théorème original.

Théorème 1.11 *Le foncteur $\Omega_* : SPr(C)_* \longrightarrow Pr - \Delta^o - SPr(C)$ est de Quillen à droite, et son adjoint à gauche B préserve les équivalences. De plus les deux assertions suivantes sont vraies.*

1. *Pour tout objet $F \in SPr(C)_*$, $\mathbb{R}\Omega_*(F)$ est un H_∞-espace, et le morphisme d'adjonction*
$$B\mathbb{R}\Omega_* F \longrightarrow F$$
est un isomorphisme dans $Ho(SPr(C)_*)$ lorsque F est connexe (i.e. $\pi_0(F) \simeq *$).
2. *De même, si F est un H_∞-champ, alors le morphisme d'adjonction*
$$F \longrightarrow \mathbb{R}\Omega_*(BF)$$
est un isomorphisme dans la catégorie homotopique $Ho(Pr - \Delta^o - SPr(k))$.

Esquisse de preuve: Le fait que (B, Ω_*) soit une adjonction de Quillen pour la structure forte est immédiat. De plus, à l'aide du lemme 1.2 on vérifie sans problèmes que Ω_* envoie tout objet fibrant sur un objet fibrant. Le fait que le couple de foncteurs (B, Ω_*) est une adjonction de Quillen est alors une propriété général des localisations de Bousfield à gauche . Comme B préserve les équivalences fortes et que les fibrations triviales sont aussi des équivalences fortes, il est facile de voir que B préserve aussi les équivalences.

(1) Le fait que $\Omega_*(F)$ soit un H_∞-champ lorsque F est fibrant provient immédiatement de sa définition et du fait que $\pi_0(\Omega_*(F)) \simeq \pi_1(F,*)$. Pour voir que le morphisme d'adjonction est un isomorphisme, on peut par exemple utiliser le fait que le foncteur dérivé de Ω_* est indépendant de la topologie sur C. Quitte à contracter le 0-squelette de F on peut donc se ramener au cas où la topologie est triviale. Dans ce cas c'est une application de [Se2] objets par objets de C.

(2) Soit F un H_∞-champ, que l'on peut supposer fibrant dans $Pr - \Delta^o - SPr(C)$. Comme les morphismes de Segal $F_n \longrightarrow F_1^n$ sont des équivalences entre objets fibrants, ce sont des équivalences fortes. De plus, dire que $\pi_0(F)$ est un groupe est équivalent à dire que le morphisme $F_2 \longrightarrow F_1^2$, donné par la "multiplication" et la "première projection" est une équivalence. De même, c'est une équivalence forte. On voit ainsi que F est un H_∞-champ lorsque C est muni de la topologie triviale. De plus, on a vu que le foncteur dérivé $\mathbb{R}\Omega_*$ pouvait se calculer en utilisant la topologie triviale. On en déduit donc que l'on peut supposer que C est muni de la topologie triviale. Le résultat découle alors d'une application de [Se2] objets par objets de C. $\square$

1.5 Schémas en groupes affines

Pour tout ce paragraphe k sera un corps de caractéristique quelconque, et nous noterons par $(Aff/k)_{fpqc}$ le site des U-schémas affines sur $Spec\,k$ muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (voir [SGA3, VI.6.3]). Nous noterons alors $SPr(k)$ la catégorie des préfaisceaux en V-ensembles simpliciaux sur $(Aff/k)_{fpqc}$, munie de sa structure de catégorie de modèles décrite dans le chapitre précédent.

Notons $GpAff/k$ la catégorie des groupes dans Aff/k, dont nous appellerons les objets des schémas en groupes affines (ainsi un schéma en groupes affines sera toujours un élément de U). Tout objet $G \in GpAff/k$ représente un faisceau en groupes h_G. En notant $Gp(k)$ la catégorie des faisceaux en V-groupes sur $(Aff/k)_{fpqc}$, ceci induit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} h: & GpAff/k & \longrightarrow & Gp(k) \\ & G & \mapsto & h_G, \end{array}$$

qui par le lemme de Yoneda est pleinement fidèle. Les objets dans l'image essentielle de ce foncteur seront aussi appelés des schémas en groupes affines.

Rappelons alors que le fait que k soit un corps entraine que le foncteur h_G est exact (voir [De-Ga, $III, \S 3, n^o 7$]). Ceci signifie que pour tout suite exacte dans $GpAff/k$

$$1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 1$$

le suite induite

$$1 \longrightarrow h_{G_1} \longrightarrow h_{G_2} \longrightarrow h_{G_3} \longrightarrow 1$$

est une suite exacte de faisceaux sur $(Aff/k)_{fpqc}$. En particulier, la sous-catégorie de $Gp(k)$ formée des schémas en groupes affines est stable par noyaux, co-noyaux et images. De plus, d'après [Mi, III Thm. 4.3] on sait que si G est un schéma en groupe affine, X un schéma affine et P un h_G-torseur de faisceau quotient h_X, alors P est représentable par un schéma affine. Ainsi, la sous-catégorie pleine de $Gp(k)$ formée des schémas en groupes affines est aussi stable par extensions. Enfin, comme le foncteur d'oublie de la structure de groupe commute avec les limites, et qu'une U-limite projective de schémas affines est un schéma affine, on voit que la sous-catégorie pleine de $Gp(k)$ des schémas en groupes affines est aussi stable par U-limites projectives. Notons aussi que le faisceau image d'un morphisme de schémas en groupes affines $f: G \longrightarrow H$ est toujours représenté par un sous-schéma fermé dans H ([De-Ga, $III, \S 3, Thm. 7.2$]).

Rappelons enfin qu'un schéma en groupes affine G est la limite projective de ses quotients de types finis sur k. Ceci permet alors d'identifier la catégorie des schémas en groupes affines avec celle des Pro-objets dans la catégorie des schémas en groupes affines de types fini sur k (voir [De-Ga, $III, \S 3, Cor. 7.5$]).

Ces propriétés nous permettent d'identifier sans risque un schéma en groupes affine G au faisceau qu'il représente h_G. Ainsi, par la suite nous noterons G aussi bien pour désigner l'un ou l'autre.

Nous appellerons représentation linéaire d'un schéma en groupes affine G, la donnée d'un $G-\mathcal{O}$-module dont le $\mathcal{O}$-module sous-jacent est quasi-cohérent et appartient à U (voir [De-Ga, $II, \S 2$]). C'est donc la donnée d'un k-espace vectoriel V (éventuellement de dimension infini) de U, et pour tout schéma affine $Spec\, A \in Aff/k$ d'un morphisme de groupes $G(A) \longrightarrow Aut_A(V \otimes A)$, fonctoriel en A. La catégorie des représentations linéaires de G sera notée $Rep_k(G)$. Pour V une telle représentation, nous noterons encore par V le faisceau de $G-\mathcal{O}$-modules sous-jacent. Notons aussi que toute représentation linéaire est limite inductive de ses sous-représentations de dimension finie sur k. Ainsi, le catégorie $Rep_k(G)$ s'identifie à la catégorie des Ind-objets de la catégorie des représentations linéaires sur G de dimension finie. Remarquons enfin qu'une représentation linéaire V de dimension finie d, d'un schéma en groupes affine G, détermine une action de G sur le schéma en groupes affine $V \simeq \mathbb{G}_a^d$.

L'oublie de la structure de $\mathcal{O}$-module permet de voir une représentation linéaire de G comme un système local sur $K(G,1)$ (voir 1.6). Ceci fournit un foncteur $Rep_k(G) \longrightarrow SysLoc(K(G,1))$, qui est exact et fidèle, mais qui n'est pas pleinement fidèle en général. Ce foncteur nous permet de parler de cohomologie d'un schéma en groupes affine G à valeurs dans une représentation linéaire V. Par définition il s'agira de la cohomologie de $K(G,1)$ à valeurs dans le système local correspondant. Ces groupes de cohomologie seront simplement notés $H^i(K(G,1),V)$, et sont naturellement munis d'une structure de k-espaces vectoriels. Remarquer que $H^0(K(G,1),V)$ s'identifie naturellement au sous-k-espace vectoriel de V des points fixes par G, qui sera noté par la suite V^G.

Lemme 1.12 *Pour tout entier i, le foncteur*

$$H^i(K(G,1),-) : Rep_k(G) \longrightarrow k - Vect$$

est le i-ème foncteur dérivé du foncteur $H^0(K(G,1),-)$.

Esquisse de preuve: Soit $V \in Rep_k(G)$ une représentation linéaire de G. Le faisceau sous-jacent au système local $V \in SysLoc(K(G,1))$ étant quasi-cohérent, le préfaisceau simplicial $K(V,i)$ est fibrant en tant qu'objet de la catégorie $G - SPr(k)$, des préfaisceaux simpliciaux munis d'une action de G (ou encore des préfaisceaux simpliciaux sur le site équivariant $(Aff/k)/BG$). La cohomologie de $K(G,1)$ à valeurs dans V peut donc se calculer à l'aide de la topologie triviale sur Aff/k. Mais alors, on sait d'après le théorème 1.8 que le foncteur $H^i(K(G,1),-)$ est le i-ème foncteur dérivé du foncteur des sections globales sur la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur Aff/k, munis d'une action de G. Ainsi, d'après la proposition [SGA3, I Prop. 5.2.1] appliqué au préfaisceau d'anneaux constant $\mathbb{Z}$, on sait alors que $H^i(K(G,1),V)$ est la cohomologie de Hochschild de G à coefficients dans V. Une application du théorème [SGA3, I Thm. 5.3.1], mais cette fois pour le préfaisceau d'anneau $\mathcal{O}$, montre alors que $H^i(K(G,1),V)$ se calcule aussi par foncteurs dérivés dans la catégorie $Rep_k(G)$. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire 1.13 *Pour toute représentation linéaire V d'un schéma en groupes affine G, on a pour tout $i \geq 0$*

$$H^i(K(G,1),V) \simeq Colim_j H^i(K(G,1),V_j),$$

où V_j parcours les sous-représentations linéaires de V qui sont de dimension finie sur k.

Preuve: D'après le lemme précédent et [SGA3, I Prop. 5.2.1] on sait que les groupes de cohomologie $H^i(K(G,1),V)$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie de Hochschild de G à coefficients dans V (voir [De-Ga, $II, \S 3, n^o 3$] par exemple). Mais il est facile de voir que le complexe de Hochschild de V est la limite inductive des complexes de Hochschild de ses sous-représentations de dimension finie. $\Box$

Rappelons qu'un schéma en groupes affine G est unipotent, si pour toute représentation linéaire V non-nulle on a $V^G \neq 0$. D'après [De-Ga, $IV, \S 2, Prop. 2.5$] un schéma en groupe affine est unipotent si et seulement si pour tout sous-schéma en groupe fermé $K \hookrightarrow G$ il existe un morphisme non nul de schémas en groupes $K \longrightarrow \mathbb{G}_a$. De plus, la sous-catégorie pleine de $Gp(k)$ formée des schémas en groupes affines unipotents est stable par noyaux, co-noyaux, images, extensions et U-limites projectives (voir [De-Ga, $VI, \S 2, Prop. 2.3$]). Comme pour le cas des schémas en groupes affines, tout schéma en groupes affine unipotent est la limite projective de ses quotients de type fini sur k. En particulier, la catégorie des schémas en groupes affines unipotents est donc équivalente à la catégorie des pro-objets dans la catégorie des schéma en groupes affines unipotents et de type fini sur k.

Lemme 1.14 *Soit G un schéma en groupes affine simplicial, et notons $F = h_G$ le préfaisceau simplicial qu'il représente. Les deux assertions suivantes sont vraies.*

1. *Le faisceau en groupes $\pi_0(F)$ est représentable par le schéma en groupes affine $\pi_0(G)$, co-équalisateur des morphismes $d_0, d_1 : G_1 \longrightarrow G_0$.*

2. *Pour tout entier $i > 0$, le faisceau en groupes $\pi_i(F,e)$ est représentable par un schéma en groupes affine.*

Les schéma en groupes affines $\pi_0(F)$ et $\pi_i(F,e)$ sont de plus unipotent dès que G_n est unipotent pour tout n.

Preuve: C'est une conséquence immédiate du fait que le foncteur $G \mapsto h_G$ est exact et des propriétés des schémas en groupes affines unipotents rappelées ci-dessus. $\Box$

Notons que tout schéma en groupes affine G possède un quotient unipotent maximal $G \longrightarrow G^{uni}$. Par définition, G^{uni} est la limite projective de tous les quotients de G qui sont des schémas en groupes affines unipotents et de type fini sur k. On vérifie alors que le morphisme $G \longrightarrow G^{uni}$ est universel pour les morphismes vers des schémas en groupes affines et unipotents. Le foncteur induit sur les catégories de représentations $Rep_k(G^{uni}) \longrightarrow Rep_k(G)$ est exact et pleinement fidèle, et identifie $Rep_k(G^{uni})$ à la sous-catégorie pleine de $Rep_k(G)$ formée des repésentations unipotentes (i.e. extensions succéssives de représentations triviales).

Définition 1.15 *Soit G un U-groupe, considéré comme un préfaisceau constant sur $(Aff/k)_{fpqc}$. Une complétion affine (resp. unipotente) de G est un schéma en groupes affine $\mathcal{A}(G)$ (resp. un schéma en groupes affine et unipotent $\mathcal{U}(G)$), muni d'un morphisme de faisceaux en groupes $G \longrightarrow \mathcal{A}(G)$ (resp. $G \longrightarrow \mathcal{U}(G)$) dans $Gp(k)$, qui est universel pour les morphismes vers les schémas en groupes affines (resp. les schémas en groupes affines unipotents).*

Le lemme suivant est un fait très bien connu (voir [Hos-Mos]).

Lemme 1.16 *Tout U-groupe G possède une complétion affine (resp. une complétion unipotente).*

Preuve: Traitons le cas des complétions affines, celui des complétions unipotentes et en tout point similaire. Pour les besoins de la démonstration, rappelons que pour tout objet $X \in C$ dans une V-catégorie et tout sous-catégorie pleine V-petite $D \subset C$, on peut former la catégorie V-petite X/D, des objets de D sous X. Ses objets sont les paires (Y,u), où Y est un objet de D

et $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans C. Un morphisme dans X/D de (Y,u) vers (Z,v) est la donnée d'un morphisme $f : Y \longrightarrow Z$ dans D tel que $f \circ u = v$.

Notons $GpAlg$ la sous-catégorie pleine de $Gp(k)$ formé des schémas en groupes affines et de type fini sur k. Posons

$$G \longrightarrow \mathcal{A}(G) := Lim_{H \in G/GpAlg} H$$

où la limite est prise dans la catégorie des faisceaux en V-groupes $Gp(k)$. Comme la catégorie $GpAlg$ consiste en des schémas de types finis sur k, elle possède une sous-catégorie pleine U-petite qui lui est équivalente. Ainsi, G étant un élément de U, la catégorie $G/GpAlg$ est en réalité équivalente à une catégorie U-petite. Ceci implique que $\mathcal{A}(G)$ est isomorphe à une U-limite projective de schémas en groupes affines et est donc lui-même un schéma un groupes affine. De plus, il est clair par construction que tous les morphismes vers un schéma en groupes affine de type fini $G \longrightarrow H$ se factorise par le morphisme naturel $G \longrightarrow \mathcal{A}(G)$. Mais comme tout schéma en groupes affine est une U-limite projective de schéma en groupes affines et de type fini, on voit que $G \longrightarrow \mathcal{A}(G)$ possède la propriété universelle requise. $\square$

Remarquons que d'après les propriétés universelles, pour tout U-groupe Γ on a un isomorphisme $\mathcal{U}(\Gamma) \simeq \mathcal{A}(\Gamma)^{uni}$.

2 Champs affines et types d'homotopie schématiques

Nous présentons dans ce chapitre les deux notions centrales de cet article. La première est celle de champ affine, qui est une généralisation de nature homotopique de la notion de schéma affine et qui est définie directement à partir d'une structure de catégorie de modèles simpliciale sur la catégorie des k-algèbres co-simpliciales. La notion de type d'homotopie schématique pointé est alors définie par analogie avec la notion de champ classifiant des schémas en groupes affines et plats, où les schémas affines sont remplacés par des champs affines. Ce sont donc des champs pointés dont le champ des lacets est un champ affine. Par analogie avec la notion de gerbe affine utilisée dans le formalisme Tannakien [Sa, D1], on définit enfin la notion générale de type d'homotopie schématique comme étant un champ qui localement est équivalent à un type d'homotopie schématique pointé. Par la suite nous nous restreindrons essentiellement à l'étude des types d'homotopie schématiques pointés sur un corps. Nous nous concentrerons en particulier sur leurs relations avec les champs affines et les champs très présentables de [S2, S3], ce qui nous permettra de donner de nombreux exemples.

Pour tout ce chapitre k sera un anneau commutatif unitaire, et nous noterons $(Aff/k)_{fpqc}$ le site des U-schémas affines sur $Spec\, k$ muni de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (voir [SGA3, VI.6.3]). Nous noterons alors $SPr(k)$ la catégorie des préfaisceaux en V-ensembles simpliciaux sur $(Aff/k)_{fpqc}$, munie de sa structure de catégorie de modèles décrite dans le chapitre précédent, et $Ho(SPr(k))$ sa catégorie homotopique.

La catégorie des k-algèbres commutatives et unitaires de V sera notée $k-Alg$. A tout objet $A \in k-Alg$ nous associerons le préfaisceau d'ensembles sur Aff/k, qui à un schéma affine $S = Spec\, B$ fait correspondre l'ensemble $Hom_{k-Alg}(A,B)$. Ce préfaisceau sera noté $Spec\, A \in SPr(k)$. Remarquer que lorsque A est un élément de U, alors $Spec\, A$ est représentable par le schéma affine $Spec\, A \in Aff/k$.

Par convention, nous réserverons l'expression "schéma affine" pour désigner les objets de Aff/k, ou encore les préfaisceaux qu'ils représentent. Ces seront donc toujours des U-schémas.

2.1 Rappel sur les algèbres co-simpliciales

Rappelons tout d'abord que la catégorie $k - Alg$ des V-algèbres commutatives et unitaires sur k possède tout type de limites et de colimites paramétrées par des ensembles de V. Les limites se calculent dans la catégorie des k-modules et les sommes et coproduits finis sont donnés par les produits tensoriels. Comme il est expliqué dans [G-J, II Ex. 2.8], la catégorie $k - Alg^{\Delta}$, des objets co-simpliciaux dans $k - Alg$, est alors munie d'une structure de catégorie simpliciale. Rappelons que pour X un V-ensemble simplicial et $A \in k - Alg^{\Delta}$ l'objet A^X est défini par

$$\begin{array}{cccc} A^X : & \Delta & \longrightarrow & k - Alg \\ & [n] & \mapsto & \prod_{X_n} A_n. \end{array}$$

On définit alors l'ensemble simplicial des morphismes entre deux objets $A, B \in k - Alg^{\Delta}$ par la formule usuelle

$$\begin{array}{cccc} \underline{Hom}_{k-alg}(A,B) : & \Delta^o & \longrightarrow & V - SEns \\ & [n] & \mapsto & Hom_{k-Alg^{\Delta}}(A, B^{\Delta^n}). \end{array}$$

Enfin, pour $X \in V - SEns$ et $A \in k - Alg^{\Delta}$ nous noterons $X \otimes A$ le produit externe de A par X. On dispose des eternels isomorphismes d'adjonctions

$$\underline{Hom}(X, \underline{Hom}_{k-alg}(A,B)) \simeq \underline{Hom}_{k-alg}(X \otimes A, B) \simeq \underline{Hom}_{k-alg}(A, B^X),$$

pour $X \in V - SEns$ et $A, B \in k - Alg^{\Delta}$.

Nous identifierons la catégorie $k - Alg$ à la sous-catégorie pleine des objets constants dans $k - Alg^{\Delta}$. Remarquons que pour tout V-ensemble simplicial X, k^X est la k-algèbre co-simpliciale de cohomologie de k. Explicitement on a

$$\begin{array}{cccc} k^X : & \Delta & \longrightarrow & k - Alg \\ & [n] & \mapsto & Hom(X_n, k). \end{array}$$

Remarquer aussi que le foncteur $k^{(-)} : V - SEns \longrightarrow (k - Alg^{\Delta})^o$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\underline{Hom}_{k-alg}(-, k) : k - Alg^{\Delta} \longrightarrow V - SEns$.

Notons $C_+(k)$ la catégorie des complexes de co-chaines concentrés en degrés positifs et appartenant à V , et $k - Mod^{\Delta}$ la catégorie des k-modules co-simpliciaux de V. Il existe alors deux foncteurs inverses l'un de l'autres (c'est la correspondance duale de Dold-Puppe, voir [K, 1.4])

$$N : k - Mod^{\Delta} \longrightarrow C_+ \qquad \Gamma : C_+ \longrightarrow k - Mod^{\Delta},$$

où pour $M \in k - Mod^{\Delta}$, $N(M)$ est le complexe des co-chaines normalisées de M. Par définition, les k-modules de cohomologie d'un objet $M \in k - Mod^{\Delta}$ seront définis par

$$H^i(M) := H^i(N(M)).$$

Le produit tensoriel de k-modules s'étend de façon naturelle en un produit tensoriel sur $k - Mod^{\Delta}$. De plus, la catégorie $k - Mod^{\Delta}$ est aussi munie d'une structure simpliciale, qui fait de $k - Mod^{\Delta}$ une catégorie en algèbre fermée sur la catégorie monoidale fermée $V - SEns$ (voir [Ho, Def.4.1.9, Def. 4.1.13]). Pour deux objets M et N dans $k - Mod^{\Delta}$, on dispose de deux morphismes naturels, qui sont des quasi-isomorphismes inverses l'uns de l'autres

$$N(M \otimes N) \longrightarrow N(M) \otimes N(N) \longrightarrow N(M \otimes N),$$

et qui sont de plus associatifs et unitaires (c'est l'énoncé dual du théorème d'Eilenberg-Zilber, voir [G-J, §IV Thm. 2.4]). Ceci permet en particulier de montrer que les foncteurs N et Γ préservent les homotopies. Ainsi, deux morphismes dans $k - Mod^{\Delta}$ sont homotopes si et seulement si leur image dans C_+ le sont (c'est lénoncé dual de [Do, Thm. 2.6]).

L'oublie de la loi d'algèbre définit un foncteur $k-Alg^{\Delta} \longrightarrow k-Mod^{\Delta}$, qui a une k-algèbre co-simpliciale fait correspondre son k-module co-simplicial sous-jacent. Par soucis de légèreté nous noterons encore A le k-module co-simplicial sous-jacent à une k-algèbre co-simpliciale A. En particulier nous utiliserons les notations $N(A)$, $H^*(A)$ ... pour $A \in k-Alg^{\Delta}$. Notons au passage que $H^*(A)$ est toujours muni d'une structure de k-algèbre commutative graduée et unitaire induite par la structure de k-algèbre sur A.

Définition 2.1 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de k-algèbres co-simpliciales.*

- *Nous dirons que f est une équivalence si pour tout entier i le morphisme induit*

$$H^i(f) : H^i(A) \longrightarrow H^i(B)$$

  est un isomorphisme de k-modules.

- *Nous dirons que f est une fibration si pour tout entier n le morphisme induit*

$$f_n : A_n \longrightarrow B_n$$

  est un morphisme surjectif.

- *Nous dirons que f est une cofibration s'il possède la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations triviales (voir [Ho, Def. 1.1.2]).*

Théorème 2.2 *Avec les définitions précédentes, la catégorie $k-Alg^{\Delta}$ est une catégorie de modèles fermée simplciale.*

Esquisse de preuve: C'est un fait standard qui se démontre à l'aide de l'argument du petit objet. La preuve que nous allons esquissée ici est une adaptation immédiate de la preuve du théorème [Bo-Gu, Thm. 4.3]. Nous aurons besoin pour cela d'introduire les cofibrations et cofibrations triviales élémentaires suivantes.

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $k[n]$ le complexe de co-chaine de k-modules égal à k en degré n et 0 partout ailleurs. Nous noterons aussi $k < n-1, n >$ le complexe de co-chaine égal à k en degrés $n-1$ et n, 0 partout ailleurs et avec comme différentielle $d^{n-1} = id : k \rightarrow k$. Par convention $k < -1, 0 >= 0$. Il existe des morphismes naturels de complexes $k[n] \longrightarrow k < n-1, n >$. Nous noterons pour tout n

$$S^n_k := \Gamma(k[n]) \qquad D^n_k := \Gamma(k < n-1, n >).$$

Ce sont des k-modules co-simpliciaux munis de morphismes $S^n_k \longrightarrow D^n_k$. Les k-algèbres commutatives unitaires co-simpliciales libres engendrées par ces k-modules co-simpliciaux seront notés

$$S(n) := S^*(S^n_k) \in k-Alg^{\Delta} \qquad D(n) := S^*(D^n_k) \in k-Alg^{\Delta}.$$

Remarquer que $S(0) \simeq k[T]$, et $D(0) \simeq k$.

Nous définissons I comme étant l'ensemble des morphismes naturels $S(n) \longrightarrow D(n)$ pour $n \geq 0$, et des morphismes (correspondant à l'unité) $k \longrightarrow S(n)$ pour $n \geq 0$. De même, l'ensemble J est l'ensemble des morphismes $k \longrightarrow D(n)$ pour $n \geq 0$.

On peut vérifier que pour tout $A \in k-Alg^{\Delta}$, la donnée d'un morphisme $x : S(n) \longrightarrow A$ est équivalente à la donnée d'un cocycle dans le complexe normalisé associé $x \in Z^n(N(A))$. De même, la donnée d'un morphisme $y : D(n) \longrightarrow A$ est équivalent à la donnée d'un élément $y \in N(A)_{n-1}$. Ainsi, comme un morphisme de $k-Alg^{\Delta}$ est surjectif si et seulement si le morphisme correspondant sur les complexes normalisés est surjectif, on vérifie à l'aide des propriétés universelles précédentes que les morphismes de I sont des cofibrations, et que ceux de J sont des cofibrations triviales.

Pour démontrer que $k-Alg^{\Delta}$ est une catégorie de modèles fermée on utilise l'argument du petit objet relativement aux ensembles I et J (voir [Ho, 2.1.17]). Il est alors bien connu qu'il suffit de montrer les trois assertions suivantes.

1. Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $k-Alg^{\Delta}$ est une fibration (resp. une fibration triviale) si et seulement s'il possède la propriété de relèvement par rapport à tous les morphismes de J (resp. de I).

2. Une colimite filtrante d'équivalences dans $k-Alg^{\Delta}$ est une équivalence.

3. Pour tout morphisme $\tau_n : k \longrightarrow D(n)$ dans J, et tout objet $A \in k-Alg^{\Delta}$, le morphisme naturel $A \longrightarrow A \otimes D(n)$ est une équivalence.

La propriété (1) se déduit immédiatement des propriétés universelles des objets $S(n)$ et $D(n)$ est des définitions des fibrations et des équivalences. La propriété (2) est vrai car les foncteurs $H^i : k-Alg^{\Delta} \longrightarrow k-Mod$ commutent avec les colimites filtrantes.

Pour démontrer (3) on commence par remarquer que les morphismes $0 \longrightarrow k < n-1, n >$ sont des équivalences d'homotopie. Comme le foncteur Γ préserve les homotopies on trouve que $0 \longrightarrow D_k^n$ est aussi une équivalence par homotopie dans $k-Mod^{\Delta}$. De plus, le foncteur qui à $M \in k-Mod^{\Delta}$ associe $S^*(M) \in k-Alg^{\Delta}$ est obtenu par prolongation du foncteur $S^* : k-Mod \longrightarrow k-Alg$, et d'après l'énoncé dual de [Do, Thm. 5.6] il préserve donc les homotopies. Ainsi, on trouve que les morphismes $k \longrightarrow D(n)$ sont des équivalences d'homotopie. Soit $h : D(n) \longrightarrow D(n)^{\Delta^1}$ une contraction de $D(n)$ sur k. En tensorisant par A on trouve un nouveau morphisme

$$h : A \otimes D(n) \longrightarrow A \otimes (D(n)^{\Delta^1}) \simeq (A \otimes D(n))^{\Delta^1},$$

qui est un contraction de $A \otimes D(n)$ sur A. Ainsi, le morphisme $A \longrightarrow A \otimes D(n)$ est une équivalence d'homotopie et donc une équivalence.

Il nous reste à démontrer l'axiome **SM7** de [G-J, §II Def. 3.1]. Pour cela, il faut montrer que pour toute cofibration d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$, et toute cofibration $v : A \longrightarrow B$ dans $k-Alg$, le morphisme naturel

$$A^X \longrightarrow B^X \prod_{B^Y} A^Y$$

est une fibration, qui est une équivalence dès que u ou v en est une. Le fait que c'est une fibration est clair. De plus, il est immédiat de voir que le morphisme $B^X \longrightarrow B^Y$ est une fibration, et donc que le morphisme de complexes $N(B^X) \longrightarrow N(B^Y)$ est surjectif. Comme N commute avec les produits fibrés, on dispose ainsi d'une suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(B^X \textstyle\prod_{B^Y} A^Y) \longrightarrow H^0(B^X) \prod H^0(A^Y) \longrightarrow H^0(B^Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^i(B^X \textstyle\prod_{B^Y} A^Y) \longrightarrow H^i(B^X) \prod H^i(A^Y) \longrightarrow H^i(B^Y) \longrightarrow H^{i+1}(B^X \prod_{B^Y} A^Y) \longrightarrow \cdots.$$

On voit donc qu'il suffit de montrer que le morphisme $A^X \longrightarrow B^X$ (resp. $A^X \longrightarrow A^Y$) est une équivalence lorsque u (resp. v) en est une. Mais ceci se ramène à l'énoncé connu que le foncteur qui à un bi-complexe positif associe son complexe total préserve les quasi-isomorphismes. $\square$

Remarque: Remarquer que tous les objets de $k-Alg^{\Delta}$ sont fibrants. De plus, si A est une k-algèbre co-simpliciale constante, alors A est un objet cofibrant dans $k-Alg^{\Delta}$. En effet, la donnée d'un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $k-Alg^{\Delta}$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de k-algèbres $A \longrightarrow H^0(B)$. Le morphisme unité $k \longrightarrow A$ possède donc la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations triviales.

Comme la catégorie de modèles $k - Alg^{\Delta}$ est simpliciale, on peut définir des Hom simpliciaux en un sens dérivés (voir [Ho, Thm. 4.3.2]). Ils seront notés $\mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}$. Ainsi, pour A et B deux objets de $k-Alg^{\Delta}$, $\mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}(A,B)$ est un objet bien défini dans $Ho(V-SEns)$ et fonctoriel en A et B. Cela munit la catégorie homotopique $Ho(k - Alg^{\Delta})$ d'une structure de catégorie enrichie dans $Ho(V - SEns)$.

Nous noterons aussi comme il en est l'usage $[-,-]_{k-alg}$ les ensembles de morphismes dans la catégorie homotopique $Ho(k - Alg^{\Delta})$. Remarquons au passage qu'il existe des isomorphismes naturels pour tout $A, B \in k - Alg^{\Delta}$

$$[A,B]_{k-alg} \simeq \pi_0 \mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}(A,B).$$

La structure simpliciale sur la catégorie de modèles $k - Alg^{\Delta}$ nous permettra par la suite de parler de limites et colimites homotopiques, qui sont définies de façon standard (voir [Hi, §19]). Nous utiliserons souvent que toute k-algèbre co-simpliciale A est équivalente à la limite homotopique $Holim_{[n]\in\Delta}A_n$, où chaque A_n est vu comme une k-algèbre co-simpliciale constante (ce qui se vérifie immédiatement en utilisant que tout ensemble simplicial X est équivalent à la colimite homotopique $Hocolim_{[n]\in\Delta^o}X_n$).

Pour clore ce paragraphe signalons que nous aurons a utiliser la sous-catégorie pleine de $k-Alg^{\Delta}$ formée des k-algèbres co-simpliciales appartenant à U. Cette sous-catégorie possède de très nombreuses propriétés de stabilité. Nous utiliserons en particulier que pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de k-algèbres co-simpliciales de U, les factorisations fonctorielles définies à l'aide des ensembles générateurs I et J des cofibrations et des cofibrations triviales, appartiennent encore à U. En particulier, toute k-algèbre co-simpliciale de U possède un modèle cofibrant qui appartient encore à U.

2.2 Champs affines

Pour $A \in k - Alg^{\Delta}$ une k-algèbre co-simpliciale, on peut considérer le préfaisceau simplicial $Spec\, A \in SPr(k)$ défini par

$$\begin{array}{cccc} Spec\, A : & (Aff/k)^o & \longrightarrow & V - SEns \\ & Spec\, B & \mapsto & \underline{Hom}_{k-alg}(A,B). \end{array}$$

Le préfaisceau des n-simplexes de $Spec\, A$ est donc isomorphe au préfaisceau $Spec\, A_n$. Ceci définit évidemment un foncteur

$$Spec : (k - Alg^{\Delta})^o \longrightarrow SPr(k).$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$\mathcal{O} : SPr(k) \longrightarrow (k - Alg^{\Delta})^o$$

qui est définit de la façon suivante. Pour tout préfaisceau simplicial $F \in SPr(k)$, on définit une k-algèbre co-simpliciale par

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{O}(F) : & \Delta & \longrightarrow & k - Alg \\ & [n] & \mapsto & Hom(F_n, \mathcal{O}). \end{array}$$

Dans cette définition $\mathcal{O}$ désigne aussi le préfaisceau en k-algèbres tautologique sur Aff/k, qui au schéma affine $Spec\, A$ associe A. Le loi de k-algèbre sur $Hom(F_n, \mathcal{O})$ est alors induite naturellement par la loi de k-algèbre sur le préfaisceau $\mathcal{O}$. Remarquer que $\mathcal{O}(F)$ n'est généralement pas un élément de U.

A l'aide de ces définitions on vérifie qu'il existe des isomorphismes naturels, décrivant le comportement des foncteurs *Spec* et $\mathcal{O}$ relativement à la structure simpliciale,

$$Spec\,(X \otimes A) \simeq Spec\,(A)^X \qquad \mathcal{O}(X \otimes F) \simeq \mathcal{O}(F)^X,$$

pout tout $X \in V - SEns$, $A \in k - Alg^{\Delta}$ et $F \in SPr(k)$. En particulier, l'adjonction entre *Spec* et $\mathcal{O}$ s'étend en une adjonction simpliciale

$$\underline{Hom}_{k-alg}(A, \mathcal{O}(F)) \simeq \underline{Hom}(F, Spec\,A).$$

Le lemme suivant est une remarque clé que nous utiliserons implicitement par la suite.

Lemme 2.3 *Si $A \in k - Alg^{\Delta}$ appartient à U alors le morphisme d'adjonction $A \longrightarrow \mathcal{O}Spec\,A$ est un isomorphisme.*

Preuve: Le préfaisceau $\mathcal{O}$ étant représenté par le schéma affine $Spec\,k[T]$, c'est une application du lemme de Yoneda. $\Box$

Pour la proposition suivante, nous rappelons que $SPr(k)$ est munie da la structure de catégorie de modèles décrite dans le chapitre précédent, et que ses équivalences sont définies relativement à la topologie fidèlement plate et quasi-compacte. De même, $Ho(SPr(k))$ désignera la catégorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux sur le site $(Aff/k)_{fpqc}$.

Proposition 2.4 *Le foncteur $Spec : (k - Alg^{\Delta})^o \longrightarrow SPr(k)$ est de Quillen à droite.*

Preuve: L'axiome **SM7** des catégories de modèles simpliciales implique que le foncteur *Spec* est de Quillen à droite lorsque $SPr(k)$ est munie de sa structure forte. Par le propriété universelle des localisations de Bousfied à gauche il faut donc montrer que pour tout objet cofibrant $A \in k-Alg^{\Delta}$, le préfaisceau simplicial $Spec\,A$ est fibrant. Pour cela nous allons utiliser le critère 1.2.

Soit $A \in k - Alg^{\Delta}$ un objet cofibrant, et $Spec\,B \longrightarrow Spec\,C$ un morphisme dans Aff/k tel que le morphisme de k-algèbres correspondant $C \longrightarrow B$ soit fidèlement plat. Notons $CN(C/B)$ le co-nerf du morphisme u dans la catégorie des k-algèbres de U. C'est la k-algèbre co-simpliciale dual du nerf du morphisme $Spec\,B \longrightarrow Spec\,C$ dans Aff/k. On a donc

$$\begin{array}{rccc} CN(C/B): & \Delta & \longrightarrow & k - Alg \\ & [n] & \mapsto & \underbrace{B \otimes_C B \otimes_C \cdots \otimes_C B}_{n\ fois}, \end{array}$$

les morphismes de co-faces et de co-dégénéréscences étant induits par les co-projections et les co-diagonales. Il s'agit alors de montrer que le morphisme naturel

$$\underline{Hom}_{k-alg}(A, C) \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta}\underline{Hom}_{k-alg}(A, CN(C/B)_n)$$

est une équivalence. Or, comme tous les objets de $k - Alg^{\Delta}$ sont fibrants et que A est cofibrant, le morphisme ci-dessus est isomorphe dans la catégorie homotopique $Ho(V - SEns)$ au morphisme

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}(A, C) \longrightarrow Holim_{[n]\in\Delta}\mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}(A, CN(C/B)_n) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_{k-alg}(A, CN(C/B)).$$

En effet, en tant qu'objet de $k - Alg^{\Delta}$, $Holim_{[n]\in\Delta}CN(C/B)_n$ est naturellement équivalent à $CN(C/B)$. Il suffit ainsi de montrer que le morphisme naturel

$$C \longrightarrow CN(C/B)$$

est une équivalence dans $k - Alg^{\Delta}$. Mais en passant au complexes normalisés associés on voit facilement que cette dernière assertion n'est qu'une retranscription d'un fait bien connu (voir par exemple [Mi, §I Prop. 2.18]). $\Box$

Corollaire 2.5 *Pour toute k-algèbre co-simpliciale A de U, le morphisme d'adjonction*

$$A \longrightarrow \mathbb{L}\mathcal{O}\mathbb{R}Spec\, A$$

est un isomorphisme dans $Ho(k - Alg^{\Delta})$.

En particulier, le foncteur dérivé

$$\mathbb{R}Spec : Ho(k - Alg^{\Delta}) \longrightarrow Ho(SPr(k))$$

restreint aux k-algèbres co-simpliciales isomorphes dans $Ho(k - Alg^{\Delta})$ à des objets de U, est un foncteur pleinement fidèle.

Preuve: Il suffit de montrer que pour tout k-algèbre co-simpliciale A de U, qui est un objet cofibrant dans $k - Alg^{\Delta}$, le morphisme naturel $A \longrightarrow \mathbb{L}\mathcal{O}Spec\, A$ est un isomorphisme. Considèrons l'isomorphisme naturel dans $Ho(SPr(k))$

$$Spec\, A \simeq Hocolim_{[n]\in\Delta^{\circ}} Spec\, A_n.$$

Remarquons que comme toute les k-algèbres A_n sont des éléments de U, le préfaisceau simplicial représenté par $Spec\, A_n$ est un objet cofibrant dans $SPr(k)$. Ainsi, comme $\mathcal{O}$ est de Quillen à gauche et que A_n est un objet cofibrant dans $k - Alg^{\Delta}$, le lemme 2.3 implique que l'on a $A_n \simeq \mathbb{L}\mathcal{O}(\mathbb{R}Spec\, A_n)$. Le morphisme d'adjonction s'écrit donc

$$A \simeq Holim_{[n]\in\Delta} A_n \simeq Holim_{[n]\in\Delta} \mathbb{L}\mathcal{O}(\mathbb{R}Spec\, A_n) \simeq \mathbb{L}\mathcal{O}(Hocolim_{[n]\in\Delta} \mathbb{R}Spec\, A_n) \simeq \mathbb{L}\mathcal{O}(Spec\, A).$$

Il s'agit donc bien d'un isomorphisme. $\Box$

Définition 2.6 *Un champ affine (sur k) est un champ $F \in SPr(k)$, qui vu comme un objet de $Ho(SPr(k))$ est isomorphe à $\mathbb{R}Spec\, A$, pour A une k-algèbre co-simpliciale appartenant à U.*

Par abus de language, nous dirons qu'un préfaisceau simplicial F est un champ affine, si un modèle fibrant de F est un champ affine.

Remarque:

- Il est important de noter que $\mathbb{R}Spec\, A$ est par définition le préfaisceau simplicial $Spec\, QA$, où $QA \longrightarrow A$ est un remplacement cofibrant de A dans $k - Alg^{\Delta}$. Ainsi, un préfaisceau de la forme $Spec\, B$, où B est une k-algèbre co-simpliciale de U quelconque n'est à prioris pas un champ affine. Comme le montre le théorème 2.10 et le contre-exemple qui suit le corollaire 2.12 la notion de champ affine est en réalité beaucoup plus forte que celle d'être équivalent à un schéma simplicial affine de U.
- Noter qu'un préfaisceau simplicial de la forme $Spec\, A$, où A est une k-algèbre co-simpliciale de V qui n'est pas équivalente dans $k - Alg^{\Delta}$ à un élément de U, n'est pas considéré comme un champ affine. En contre partie tous les préfaisceaux représentables par des objets de Aff/k le sont. En effet, pour toute k-algèbre A de U, la k-algèbre co-simplciale constante de valeurs A appartient à U et est un objet cofibrant. Ainsi, $\mathbb{R}Spec\, A$ est isomorphe dans $Ho(SPr(k))$ au préfaisceau représenté par le schéma affine $SpecA$.

Les premiers exemples de champs affines sont les champs classifiants $K(\mathbb{G}_a, i)$, où $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif. Ce sont en réalité les pièces élémentaires de la théorie, et l'on verra que tout champ affine est une certaine limite homotopique construite à partir de tels champs.

Lemme 2.7 *Notons $\mathbb{G}_a$ le préfaisceau en groupes additifs sous-jacent au préfaisceaux en k-algèbres $\mathcal{O}$, et $S(i)$ la k-algèbre co-simpliciale définie lors de la preuve du théorème 2.2. Alors, pour tout entier i, le préfaisceau simplicial $K(\mathbb{G}_a, i) \in SPr(k)$ est un champ affine, équivalent pour la structure forte à $Spec\, S(i)$.*

Preuve: A l'aide de la propriété universelle satisfaite par $S(i)$ on voit facilement que pour tout $Spec\, B \in Aff/k$, $\pi_m^{pr}(Spec\,(S(i))(B)) = 0$ pour $m \neq i$, et $\pi_i^{pr}(Spec\,(S(i))(B)) \simeq B$. De plus, le préfaisceau des 0-simplexes de $Spec\, S(i)$ est isomorphe au préfaisceau constant $*$. C'est alors un fait standard que tout préfaisceau simplicial F, tel que $F_0 = *$, et $\pi_m^{pr}(F,*) = 0$ pour $m \neq i$ est équivalent pour la structure forte sur $SPr(k)$ au préfaisceau $K(\pi_i^{pr}(F,*),i)$. On a donc une équivalence forte $Spec\, S(i) \simeq K(\mathbb{G}_a, i)$. $\Box$

Corollaire 2.8 *Pour tout préfaisceau simplicial $F \in SPr(k)$ on a des isomorphismes fonctoriels*

$$H^i(F, \mathbb{G}_a) \simeq H^i(\mathbb{L}\mathcal{O}(F)).$$

En particulier, pour tout k-algèbre co-simpliciale A de U, il existe des isomorphismes fonctoriels

$$H^i(A) \simeq H^i(\mathbb{R}Spec\, A, \mathbb{G}_a).$$

Preuve: Le membre de droite est par définition isomorphe à $[F, K(\mathbb{G}_a, i)]_{SPr(k)}$. Ainsi, en utilisant l'adjonction de Quillen $(\mathcal{O}, Spec)$ et la propriété universelle satifaite par $S(i)$, on trouve des isomorphismes naturels

$$H^i(F, \mathbb{G}_a) \simeq [F, K(\mathbb{G}_a, i)]_{SPr(k)} \simeq [S(i), \mathbb{L}\mathcal{O}(F)]_{k-alg} \simeq H^i(\mathbb{L}\mathcal{O}(F)).$$

La seconde assertion se déduit de la première, de 2.5. $\Box$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une caractérisation des champs affine, permettant de construire de nombreux exemples. Pour cela nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 2.9
- *Un préfaisceau simplicial $F \in SPr(k)$ est sous-affine s'il existe un objet simplicial X de Aff/k, tel que F soit isomorphe dans $Ho(SPr(k))$ à h_X, le préfaisceau simplicial représenté par X.*
- *Un morphisme $f : G \longrightarrow H$ dans $SPr(k)$ est une $\mathcal{O}$-équivalence si pour tout $i \geq 0$ le morphisme induit*
$$f^* : H^i(H, \mathbb{G}_a) \longrightarrow H^i(G, \mathbb{G}_a)$$
est un isomorphisme.
- *Un préfaisceau simplicial $F \in SPr(k)$ est $\mathcal{O}$-local si pour toute $\mathcal{O}$-équivalence $f : G \longrightarrow H$, le morphisme induit*
$$f^* : \mathbb{R}\underline{Hom}(H, F) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}(G, F)$$
est un isomorphisme dans $Ho(V - SEns)$.

Par la suite, nous utiliserons très souvent le fait élémentaire qu'une V-limite homotopique d'objets $\mathcal{O}$-locaux est encore un objet $\mathcal{O}$-local.

Théorème 2.10 *Un champ F est affine si et seulement s'il est sous-affine et $\mathcal{O}$-local.*

Preuve: Commençons par la necéssité. Si F est un champ affine on peut trouver une k-algèbre co-simpliciale A dans U, qui est de plus cofibrante dans $k - Alg^{\Delta}$, et tel que F soit équivalent à $Spec\, A$. Or, comme chaque A_n est une k-algèbre de U, $Spec\, A$ est clairement isomorphe au préfaisceau simplicial représenté par le schéma affine simpliciale $[n] \mapsto Spec\, A_n$. Ceci montre que F est sous-affine.

Montrons que F est $\mathcal{O}$-local. Quitte à remplacer A par un objet équivalent, on peut l'écrire comme une composition

$$A^{(n)} \longrightarrow A^{(n+1)} \longrightarrow \ldots Colim_n A^{(n)} = A,$$

où pour chaque entier n il existe un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A^{(n)} & \longrightarrow & A^{(n+1)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X = \coprod_{i \in I} X_i & \longrightarrow & Y = \coprod_{i \in I} Y_i, \end{array}$$

tel que chaque $X_i \longrightarrow Y_i$ soit l'une des cofibrations élémentaires décrite dans la preuve du théorème 2.2 (voir [Ho, 2.1.14]). Ainsi, comme $Spec\, A$ est alors équivalent à la limite homotopique des $Spec\, A^{(n)}$ on se ramène au cas où $A = A^{(n)}$. De plus, comme $Spec\, A^{(n)}$ est équivalent au produit fibré homotopique de $Spec\, A^{(n-1)}$ et $Spec\, Y$ au-dessus de $Spec\, X$ on peut supposer par récurrence que $A = X$ ou $A = Y$. Enfin, comme $Spec\, X$ (resp. $Spec\, Y$) est le produit homotopique des $Spec\, X_i$ (resp. des $Spec\, Y_i$), on peut supposer que A est l'un des domaines ou l'un des codomaines des cofibrations élémentaires. Il nous suffit donc d'examiner le cas $A = S(p)$ et le cas $A = D(p)$, pour p un entier positif.

Nous savons d'après le lemme 2.7 que $Spec\, S(p)$ est équivalent à $K(\mathbb{G}_a, p)$, qui est évidemment $\mathcal{O}$-local par définition. De même, on montre facilement à l'aide de la propriété universelle satisfaite par $D(p)$ que $\pi_m^{pr}(Spec\, D(p)) = *$ pour tout entier m, et donc que $Spec\, D(p)$ est équivalent au préfaisceau simplicial $*$, qui est bien entendu $\mathcal{O}$-local.

Pour démontrer la suffisance, soit F un préfaisceau simplicial $\mathcal{O}$-local, et considérons le morphisme d'adjonction dans $Ho(SPr(k))$

$$u : F \longrightarrow \mathbb{R}Spec\, \mathbb{L}\mathcal{O}(F).$$

Comme F est sous-affine, l'objet $\mathbb{L}\mathcal{O}(F) \in Ho(k - Alg^{\Delta})$ est en réalité isomorphe à un objet de U. En effet, si X est un schéma affine simplicial représentant F, la k-algèbre co-simpliciale $\mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ est équivalente à la k-algèbre co-simpliciale $[n] \mapsto \mathcal{O}(X_n)$. Ainsi, une application du corollaire 2.8 montre que le morphisme d'adjonction induit des isomorphismes pour tout i

$$u^* : H^i(\mathbb{R}Spec\, \mathbb{L}\mathcal{O}(F), \mathbb{G}_a) \simeq H^i(\mathbb{L}\mathcal{O}(F)) \simeq H^i(F, \mathbb{G}_a).$$

Ceci montre que u est une $\mathcal{O}$-équivalence. Mais par hypothèse F est $\mathcal{O}$-local. De même, nous avons déjà démontré que $\mathbb{R}Spec\, \mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ était $\mathcal{O}$-local. Or, il est facile de vérifier à l'aide du lemme de Yoneda qu'une $\mathcal{O}$-équivalence entre deux objets $\mathcal{O}$-locaux est une équivalence. Ainsi, u est une équivalence, et donc F est un champ affine. $\Box$

Remarque: Le théorème 2.10 montre en particulier que la notion de champ affine est intrinsèque à la théorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux. En particulier il s'agit d'une notion qui est indépendante de la catégorie de modèles $k - Alg^{\Delta}$ (qui n'a comme rôle que de donner un modèle algébrique des champs affines). On pourrait tout aussi bien utiliser d'autres catégorie d'algèbres (comme par exemple la catégorie des E_∞-algèbres, ou encore celle des algèbres différentielles graduées commutatives lorsque k est de caractéristique nulle), la théorie des champs affines en resterait inchangée.

Le corollaire suivant est une extension du corollaire 2.5. Il montre en particulier que tout préfaisceau simplicial de taille raisonable possède une $\mathcal{O}$-localisation (i.e. un morphisme vers un objet $\mathcal{O}$-local qui est une $\mathcal{O}$-équivalence).

Corollaire 2.11 *Soit F un préfaisceau simplicial tel que $\mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ soit isomorphe dans $Ho(k-Alg^{\Delta})$ à un objet de U. Alors, le morphisme naturel $F \longrightarrow \mathbb{R}Spec\, \mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ est universel dans la catégorie homotopique $Ho(SPr(k))$ pour les morphismes de F vers des objets $\mathcal{O}$-locaux (et en particulier vers des champs affines).*

En particulier, si F est un champ affine alors le morphisme d'adjonction $F \longrightarrow \mathbb{R}Spec\, \mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ est un isomorphisme dans $Ho(SPr(k))$.

Preuve: Le théorème 2.10 montre que $\mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ est $\mathcal{O}$-local, et une application de 2.8 montre que le morphisme naturel $F \longrightarrow \mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(F)$ est une $\mathcal{O}$-équivalence. La propriété universelle des objets $\mathcal{O}$-locaux implique alors le résultat. $\Box$

Contre-exemple: Voici le contre-exemple typique d'un champ sous-affine F qui n'est pas affine. Soit D un U-schéma en groupes diagonalisable sur k (voir [SGA3, *Ex.I* 4.4]), et $F = K(D,1)$, qui est clairement sous-affine. Alors, d'après 1.12 et [SGA3, *Ex.I* 5.3.3] on voit que

$$H^i(F, \mathbb{G}_a) \simeq H^i_{gp}(D, \mathbb{G}_a) = 0 \; pour \; i > 0.$$

En pariculier, on a $\mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(F) \simeq *$, et donc d'après 2.11 F n'est certainement pas un champ affine.

Cet exemple est assez représentatif de ce qu'il peut se passer, et en général il est bon de retenir que les faisceaux d'homotopie d'un champ affine auront tendence à être des schémas en groupes affines et unipotents (voir 2.18).

Corollaire 2.12 *Un préfaisceau simplicial sous-affine F, qui est une V-limite homotopique de champs affines, est un champ affine.*

Preuve: On invoque le théorème 2.10 est le fait qu'une V-limite homotopique de préfaisceaux simpliciaux $\mathcal{O}$-locaux est encore $\mathcal{O}$-local. $\Box$

2.3 Types d'homotopie schématiques

Dans ce paragraphe nous donnerons la définition de type d'homotopie schématique. Nous n'étudierons essentiellement aucunes de leurs propriétés, et nous nous contenterons de donner une méthode permettant de construire des exemples à partir de schémas en groupes affines simpliciaux. Celle-ci sera utilisée dans le chapitre suivant pour construire le foncteur de schématisation.

Rappelons que pour un préfaisceau simplicial $* \longrightarrow F$, on peut définir sont préfaisceau simplicial des lacets $\Omega_* F$. Le foncteur Ω_* étant alors un foncteur de Quillen à droite de la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés dans elle même, nous noterons $\mathbb{R}\Omega_*$ son foncteur dérivé à droite.

Définition 2.13

- *Un champ affine F est plat sur k s'il existe une k-algèbre co-simpliciale A dans U et un isomorphisme dans $Ho(SPr(k))$, $F \simeq \mathbb{R}Spec\,A$, tels que pour tout entier n, A_n soit une k-algèbre plate.*
- *Un préfaisceau simplicial pointé $s : * \longrightarrow F$ est un type d'homotopie schématique pointé sur k s'il vérifie les deux conditions suivantes.*
  - *Le préfaisceau simplicial F est connexe (i.e. $\pi_0(F) \simeq *$).*
  - *Le préfaisceau simplicial $\mathbb{R}\Omega_* F$ est un champ affine plat sur k.*
- *Un préfaisceau simplicial F est un type d'homotopie schématique, s'il existe un morphisme fidèlement plat de k-algèbres $k \longrightarrow k'$, et un morphisme dans la catégorie homotopique $Ho(SPr(k'))$, $s : Spec\,k' \longrightarrow F$, tel que $(F \times Spec\,k', s)$ soit un type d'homotopie schématique pointé sur k'*

Par définition un type d'homotopie schématique pointé est un préfaisceau simplicial pointé et sera donc toujours considéré comme un objet dans $SPr(k)_*$. Ainsi, un morphisme entre deux tels objets sera toujours un morphisme d'objets pointés.

Remarque: Soit F une gerbe sur $Spec\,k$, liée par un schéma en groupes affine et plat G (voir [Sa, D2]). Alors, vu comme préfaisceau simplicial F est un type d'homotopie schématique (voir [J2] pour le passage des champs en groupoides aux préfaisceaux simpliciaux). Ainsi, tout comme la notion de champ affine est une généralisation de celle de schéma affine, la notion de type d'homotopie schématique généralise celle de gerbe affine. Il faut donc penser à la théorie des gerbes affines comme à la théorie homotopique schématique 1-tronquée (et connexe).

Bien que nous avons donné la définition générale des types d'homotopie schématiques, nous nous intéresserons pas la suite exclusivement au cas pointé.

Il est important de noter le fait élémentaire suivant.

Lemme 2.14 *Tout type d'homotopie schématique est un champ sous-affine.*

Preuve: Considérons un remplacement cofibrant dans $Pr - \Delta^o - SPr(k)$, $H \longrightarrow \mathbb{R}\Omega_* F$, ainsi que l'objet co-simplicial de $k - Alg^{\Delta}$

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{O}(H_\bullet): & \Delta^o & \longrightarrow & k - Alg^{\Delta} \\ & [n] & \mapsto & \mathcal{O}(H_n). \end{array}$$

Soit $A^{(\bullet)} \longrightarrow \mathcal{O}(H_\bullet)$ un remplacement cofibrant de ce diagramme, avec $A^{(0)} = H_0 = k$. Alors, comme chaque H_n est un champ affine (car équivalent à $\mathbb{R}\Omega_*(F)^n$), le morphisme d'adjonction

$$\mathbb{R}\Omega_* F \longrightarrow Spec\, A^{(\bullet)}$$

est un isomorphisme dans $Ho(Pr - \Delta^o - SPr(k))$. En passant aux classifiants, on trouve un isomorphisme dans $Ho(SPr(k)_*)$

$$F \simeq B\mathbb{R}\Omega_* F \simeq BSpec\, A^{(\bullet)}.$$

Comme le préfaisceau simplicial $BSpec\, A^{(\bullet)}$ est représenté par le schéma affine simplicial $[n] \mapsto Spec\, A_n^{(n)}$, F est bien un champ sous-affine. $\Box$

Nous terminerons ce chapitre par un procédé général de construction de types d'homotopie schématiques. Il permet de donner de très nombreux exemples, mais nous ne savons pas s'ils sont tous obtenus de cette façon. Il permettra cependant de construire le foncteur de schématisation.

Considérons un schéma en groupes affine simplicial G, et notons $h_G \in GpSPr(k)$ le préfaisceau en groupes simplicial qu'il représente. La loi de groupe $\mu : h_G \times h_G \longrightarrow h_G$ induit par fonctorialité une co-multiplication

$$\mu^* : \mathcal{O}(h_G) \longrightarrow \mathcal{O}(h_G \times h_G) \simeq \mathcal{O}(h_G) \otimes \mathcal{O}(h_G),$$

qui fait de $\mathcal{O}(h_G)$ une k-algèbre de Hopf commutative co-simpliciale.

Supposons de plus que pour tout n le schéma affine G_n soit plat sur k. On peut alors montrer que $\mathcal{O}(h_G) \otimes \mathcal{O}(h_G)$ est isomorphe dans $Ho(k - Alg^{\Delta})$ au produit tensoriel dérivé $\mathcal{O}(h_G) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}(h_G)$. En particulier, ceci montre que le morphisme naturel

$$\mathbb{R}Spec\, \mathcal{O}(h_G \times h_G) \longrightarrow \mathbb{R}Spec\, \mathcal{O}(h_G) \times \mathbb{R}Spec\, \mathcal{O}(h_G)$$

est une équivalence. Plus généralement, ceci implique que $\mathcal{O}(h_G)$, vu comme objet dans la catégorie homotopique $Ho(k - Alg^{\Delta})$ est un objet en co-groupes (i.e. un objet en groupes dans la catégorie opposée). Le diagramme simplicial

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}Spec\, \mathcal{O}(h_G): & \Delta^o & \longrightarrow & SPr(k) \\ & [n] & \mapsto & \mathbb{R}Spec\, \mathcal{O}(h_G^n), \end{array}$$

est donc un H_∞-champ au sens de 1.10, que nous noterons symboliquement $\mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(h_G)$. De façon duale, on peut aussi affirmer que le diagramme co-simplicial

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{L}\mathcal{O}(h_G): & \Delta^o & \longrightarrow & k-Alg^\Delta \\ & [n] & \mapsto & \mathbb{L}\mathcal{O}(h_G^n), \end{array}$$

est un co-H_∞-objet dans la catégorie $k-Alg^\Delta$, ou encore une H_∞-algèbre de Hopf.

Le théorème 1.11 implique alors que $F = B\mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(h_G)$ est un type d'homotopie schématique pointé, avec $\mathbb{R}\Omega_*(F) \simeq \mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_G)$. Remarquer de plus qu'il existe un morphisme naturel dans $Ho(SPr(k)_*)$ induit par l'adjonction entre les foncteurs $\mathcal{O}$ et $Spec$

$$Bh_G \longrightarrow F.$$

L'intérêt de cette construction est qu'elle donne un objet de nature universel.

Lemme 2.15 *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme naturel dans $Ho(SPr(k)_*)$*

$$Bh_G \longrightarrow F = B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_G)$$

est universel pour les morphismes de Bh_G vers des types d'homotopie schématiques pointés.

Preuve: Par définition des types d'homotopie schématiques pointés il suffit de montrer que le morphisme d'adjonction $h_G \longrightarrow \mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_G)$, vu comme un morphisme dans $Ho(Pr-\Delta^o-SPr(k))$, est universel vers les H_∞-champs dont le champ sous-jacent est affine. Mais, ceci n'est qu'une version en famille de 2.5. $\square$

Remarque: La question de savoir si tous les types d'homotopie schématiques sont obtenus par cette construction est en fait équivalente à un problème de strictification des H_∞-algèbres de Hopf.

2.4 Champs affines et types d'homotopie schématiques sur un corps

Etant donnée leurs définitions il est assez difficile de produire des exemples explicites de types d'homotopie schématiques. Cela provient principalement du fait que l'on connait assez mal leurs faisceaux d'homotopie en général. Cependant, lorsque l'on se restreint au cas où k est un corps on peut donner toute une famille d'exemples provenant de la notion de champs très présentables introduite par C. Simpson dans [S2, S3] (tout du moins lorsque k est de caractéristique nulle). Il semble très probable que ces exemples soient les seuls, et que la théorie des types d'homotopie schématiques pointés et celle des champs très présentables soient en réalité plus ou moins équivalentes (voir 2.26). Dans l'état actuel d'avancement de la théorie nous ne connaissons pas de démonstration de ce fait, que nous avons donc établi comme une conjecture. Il est cependant très probable qu'une interprétation Tannakienne raisonable de la théorie en fournirait une démonstration.

Pour tout ce paragraphe k sera un corps de caractéristique quelconque.

Commençons par deux lemmes très utiles pour construire des exemples de types d'homotopie schématiques.

Lemme 2.16 *Tout champ affine pointé et connexe est un type d'homotopie schématique pointé.*

Preuve: Soit A une k-algèbre co-simpliciale de U telle que F soit équivalent à $\mathbb{R}Spec\,A$, et $A \longrightarrow k$ l'augmentation correspondant au point de F. Il est alors facile de voir qu'il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique $Ho(SPr(k))$

$$\mathbb{R}\Omega_*F \simeq \mathbb{R}Spec\,(k \otimes^{\mathbb{L}}_A k).$$

Comme k est corps ceci montre bien que $\mathbb{R}\Omega_*F$ est un champ affine et plat. $\square$

Lemme 2.17 *Soit F un préfaisceau simplicial pointé et connexe, et supposons que $\mathbb{R}\Omega_* F$ soit sous-affine et que F soit une V-limite homotopique (dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés) de types d'homotopie schématiques pointés. Alors F est un type d'homotopie schématique pointé.*

Preuve: Comme k est un corps tout les champs affines sont plats sur k. De plus, le foncteur $\mathbb{R}\Omega_*$ étant de Quillen à droite il préserve les limites homotopiques. Le lemme est donc une conséquence du corollaire 2.12. $\Box$

Le premier résultat de reconnaissance des champs affines est le suivant. Pour la notion de schémas en groupes unipotents on renvoit le lecteur à [De-Ga, IV, §2], ou encore au bref résumé se trouvant au paragraphe 1.5.

Théorème 2.18 *Soit $* \longrightarrow F$ un préfaisceau simplicial pointé et connexe tel que pour tout entier $i > 0$ le faisceau en groupes $\pi_i(F,*)$ soit représentable par un schéma en groupes affine et unipotent. Alors F est un champ affine.*

Preuve: Nous allons appliquer 2.10.

Commençons par montrer que l'on est sous les hypothèses de la proposition 1.5. Pour cela nous allons montrer que l'on peut prendre $N = 1$. En d'autre termes nous allons montrer que pour tout entier i, et tout schéma affine X, on a $H^p(X, \pi_i(F,*)) = 0$ pour $p > 1$ (il s'agit ici de cohomologie pour la topologie $fpqc$).

Comme $\pi_i(F,*)$ est un schéma en groupes affine et unipotent, c'est la U-limite projective de ses quotients de type fini, $\pi_i(F,*) \simeq Lim_j M_j$. Il existe alors une suite exacte de Milnor

$$0 \longrightarrow Lim^1_j H^{p-1}(X, M_j) \longrightarrow H^p(X, \pi_i(F,*)) \longrightarrow Lim_j H^p(X, M_j) \longrightarrow 0,$$

qui montre qu'il suffit de démontrer le résultat lorsque $\pi_i(F,*)$ est de type fini sur k. En effet, si l'on montre que chacuns des groupes $H^p(X, M_j)$ est nul pour $p > 1$, les morphismes de transitions du système projectif $H^{p-1}(X, M_j)$ seront tous surjectifs. Il en découlera donc que le terme $Lim^1_j H^{p-1}(X, M_j)$ sera nul pour tout $p > 1$, et donc que $H^p(X, \pi_i(F,*)) = 0$ pour $p > 1$.

Le schéma en groupes $\pi_i(F,*)$ étant unipotent et de type fini sur k, on peut trouver une suite de sous-groupes fermés

$$0 = M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 = \pi_i(F,*),$$

où chaque M_j/M_{j+1} est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_a$. Par récurrence sur j, on peut ainsi supposer que $\pi_i(F,*)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_a$. Mais dans ce cas, ou bien $\pi_i(F,*) = \mathbb{G}_a$, ou bien il existe une suite exacte de faisceaux en groupes

$$0 \longrightarrow \pi_i(F,*) \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow 0.$$

Dans les deux cas, comme X est affine et $\mathbb{G}_a$ est sous-jacent à un faisceau coherent on a $H^p(X, \pi_i(F,*)) \simeq 0$ pour $p > 1$ (voir par exemple la preuve de [Mi, §III Prop. 3.7] qui fonctionne aussi pour la topologie $fpqc$).

On vient de voir que les hypothèses de 1.5 étaient satisfaites, et donc que F est équivalent à la limite homotopique de sa tour de Postnikov. Ainsi, F est équivalent à la limite projective d'un diagramme $\{F_n\}_n$, avec $F_0 = *$, $F_1 = K(\pi_1(F,*), 1)$, et où il existe des diagrammes cartésiens dans $SPr(k)$

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1} \arrow[d] \\ E(\pi_1(F,*), \pi_n(F,*), n+1) \arrow[r] & K(\pi_1(F,*), \pi_n(F,*), n+1). \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $E(\pi_1(F,*),\pi_n(F,*),n+1)$ est par définition le préfaisceau simplicial $K(\pi_1(F,*)\times_\rho E(\pi_n(F,*),n))$, où $E(\pi_n(F,*),n)$ est la fibration universelle sur $K(\pi_n(F,*),n)$ défini dans le paragraphe 1.3.

Comme tous les préfaisceaux simpliciaux de la forme $K(\pi_1(F,*),\pi_n(F,*),n+1)$ et $E(\pi_1(F,*),\pi_n(F,*),n+1)$ sont représentés par des schémas affines simpliciaux, on voit donc qu'il en est de même de chaque F_n. De plus, la sous-catégorie pleine de $SPr(k)$ formée des objets représentés par des schémas affines simpliciaux est stable par U-limite projective. Ceci montre donc que $Lim_n F_n$, qui est équivalent à F, est représenté par un schéma affine simplicial. Le préfaisceau simplicial F est donc sous-affine.

Montrons maintenant que F est $\mathcal{O}$-local, et rappelons pour cela qu'une V-limite homotopique d'objets $\mathcal{O}$-locaux est $\mathcal{O}$-local. Par un nouvel argument de décomposition de Postnikov on montre que l'on peut supposer que $F = K(G,M,n)$, pour H un schéma en groupes affine unipotent opérant sur un schéma en groupes affine unipotent abélien M. De plus, par un passage à la limite projective on peut supposer que M est de type fini sur k (voir [De-Ga, $V, \S 2, Thm.2.3$]). On utilise alors le lemme suivant, qui permet de dévisser l'action de G sur M.

Lemme 2.19 *Soit M un schéma en groupes affine abélien, unipotent et de type fini sur k, et G un schéma en groupes affine et unipotent opérant sur M. Alors il existe une suite de sous-schémas en groupes fermés et globalement invariants par G*

$$0 = M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 = M,$$

tel que pour tout i l'action induite de G sur M_i/M_{i+1} soit triviale. On peut de plus choisir la suite M_i de sorte à ce que chaque quotient M_i/M_{i+1} soit un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_a$.

Preuve: Le schéma en groupes G opère par fonctorialité sur le faisceau des morphismes de groupes de M dans $\mathbb{G}_a$, $\underline{Hom}_{gp}(M,\mathbb{G}_a)$. Ce faisceau est de plus naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module quasi-cohérent qui en fait une représentation linéaire de G. Les schémas en groupes G et M étant unipotents on en déduit qu'il existe un morphisme de schémas en groupes non-nul et invariant par G, $u : M \longrightarrow \mathbb{G}_a$. On pose alors $M_1 = Ker\, u$ et on procède à l'aide d'une récurrence noethérienne. $\Box$

Ce lemme montre que chaque $K(M_i,n)$ est la fibre homotopique du morphisme $K(G,M_{i-1},n) \longrightarrow K(G,M_{i-1}/M_i,n)$. Il existe donc un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd}
K(G,M_{i-1},n) \arrow[r] \arrow[d] & K(G,M_{i-1}/M_i,n) \arrow[d] \\
K(G,1) \arrow[r] & K(G,M_i,n+1).
\end{tikzcd}$$

On se ramène ainsi par une récurrence au cas où M est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_a$, et où G opère trivialement sur M. Dans ce cas, on a $F = K(G,1)\times K(M,n)$ et il suffit de montrer que chacun des facteurs est $\mathcal{O}$-local.

Pour le facteur $K(M,n)$, la suite exacte courte utilisée précédemment montrer que ou bien $K(M,n)\simeq K(\mathbb{G}_a,n)$, ou bien il est équivalent à la fibre homotopique d'un morphisme $K(\mathbb{G}_a,n) \longrightarrow K(\mathbb{G}_a,n)$. Dans ces deux cas $K(M,n)$ est $\mathcal{O}$-local. Enfin, pour le facteur $K(G,1)$ on écrit G comme la limite projective de ses quotients de types finis sur k, ce qui permet de supposer que G est de type fini. On utilise alors que G possède une suite de composition centrale dont les quotients succesifs sont de sous-groupes fermés de $\mathbb{G}_a$ (voir [De-Ga, $IV, \S 2, Prop.2.5$]), et on termine comme pour le cas $K(M,n)$. $\Box$

Comme les champs affines connexes sont aussi des types d'homotopie schématiques pointés (voir 2.16) on déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

Corollaire 2.20 *Soit $* \longrightarrow F$ un préfaisceau simplicial pointé et connexe tel que pour tout entier $i > 0$ le faisceau en groupes $\pi_i(F,*)$ soit représentable par un schéma en groupes affine unipotent. Alors F est un type d'homotopie schématique pointé.*

La définition suivante est une adapation de la définition de champs très présentables de [S2, S3]. Elle diffère un peu de la définition originale dans le sens où l'on ne considère que des préfaisceaux simpliciaux pointés et connexes.

Définition 2.21 *Un champ très présentable (pointé et connexe) est un préfaisceau simplicial pointé et connexe $* \longrightarrow F$, satisfaisant les trois conditions suivantes.*

- *Il existe un entier n tel que le préfaisceau simplicial F soit n-tronqué (i.e. F est équivalent à $\tau_{\leq n}F$).*
- *Le faisceau en groupes $\pi_1(F,*)$ est représenté par un schéma en groupe affine et de type fini sur k.*
- *Pour tout entier $i > 0$ le faisceau en groupes $\pi_i(F,*)$ est représenté par un schéma en groupes affine unipotent et de type fini sur k.*

Par définition un champ très présentable est un objet pointé et sera donc toujours considéré comme un objet dans $SPr(k)_*$.

Définition 2.22

- *Un morphisme entre préfaisceaux simpliciaux pointés et connexes $f : G \longrightarrow H$ est une P-équivalence, si pour tout champ très présentable F, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}\underline{Hom}_*(H,F) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_*(G,F)$$

  est un isomorphisme dans $Ho(V-SEns)$.

- *Un préfaisceau simplicial pointé et connexe F est dit P-local si pour toute P-équivalence $f : G \longrightarrow H$, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}\underline{Hom}_*(H,F) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_*(G,F)$$

  est un isomorphisme dans $Ho(V-SEns)$.

Signalons la proposition suivante, qui donne un critère simple pour reconnaitre les P-équivalences. Il permettra de se ramener systèmatiquement à des calculs de cohomologie à coefficients dans des représentations linéaires, qui sont beaucoup plus simples que ceux à coefficients dans des schémas en groupes affines et unipotents.

Proposition 2.23 *Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointé et connexes. On suppose que pour tout schéma en groupes affine de type fini K, toute représentation linéaire de dimension finie V de K, et tout entier $n > 0$, le morphisme induit*

$$f^* : \mathbb{R}\underline{Hom}_*(H,K(K,V,n)) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_*(G,K(K,V,n))$$

soit un isomorphisme dans $Ho(V-SEns)$. Alors f est une P-équivalence.

Preuve: Soit F un champ très présentable, et montrons que le morphisme

$$f^* : \mathbb{R}\underline{Hom}_*(H,F) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_*(G,F)$$

est un isomorphisme dans $Ho(V-SEns)$. L'eternel argument de décomposition de Postnikov permet de supposer que $F = K(K,M,n)$, avec K un schéma en groupes affine de type fini et M un schéma en groupes affine et unipotent de type fini sur lequel K opère. La remarque clè est alors le lemme suivant, qui est une généralisation de 2.19.

Lemme 2.24 *Soit M un schéma en groupes affine unipotent et de type fini sur k, et K un schéma en groupes affine opérant sur M. Il existe une suite de sous-groupes fermés et globalement stable par l'action de K*

$$0 = M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 = M,$$

telle que pour tout i, il existe un monomorphisme de schémas en groupes affines $M_i/M_{i+1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a^p$.

Preuve: Considérons le $\mathcal{O}$-modules quasi-cohérent $\underline{Hom}_{gp}(M, \mathbb{G}_a)$, muni de l'action induite par celle de K. Comme M est unipotent, on sait qu'il existe un sous-$\mathcal{O}$-modules cohérent de $\underline{Hom}_{gp}(M, \mathbb{G}_a)$ qui est non nul est stable par l'action de K (voir [De-Ga, $II, \S 2, Lem.3.1$]). En d'autres termes, il existe une action linéaire de K sur $\mathbb{G}_a^p$ et un morphisme K-équivariant et non nul $u : M \longrightarrow \mathbb{G}_a^p$. Si on pose $M_1 = Ker\, u$, on a donc une immersion fermée $M/M_1 \hookrightarrow \mathbb{G}_a^p$. On termine alors par une récurence noethérienne. $\Box$

Revenons à la preuve de la proposition. En utilisant le lemme précédent on voit que chaque $K(M_i, n)$ est la fibre homotopique du morphisme $K(H, M_{i-1}, n) \longrightarrow K(H, M_{i-1}/M_i, n)$. Il existe donc un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd} K(K, M_{i-1}, n) \arrow[r] \arrow[d] & K(K, M_{i-1}/M_i, n) \arrow[d] \\ K(K,1) \arrow[r] & K(K, M_i, n+1). \end{tikzcd}$$

Ainsi, par récurrence on montre qu'il suffit de traiter le cas où $F = K(K, M, n)$, avec M un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_a^p$.

Pour tout schéma en groupes affine M muni d'une action de H, on dispose de la représentation linéaire de H sur le faisceau quasi-cohérent $\underline{Hom}_{gp}(M, \mathbb{G}_a)$, dont nous noterons $V(M)$ le faisceau de $\mathcal{O}$-modules dual. Le groupe H opère donc linéairement sur le faisceau de $\mathcal{O}$-modules $V(M)$. De plus, si M est un sous-schéma en groupes fermé d'un schéma en groupe de la forme $\mathbb{G}_a^I$ (avec I un U-ensemble éventuellement infini), alors le morphisme naturel de bidualité $M \longrightarrow V(M)$ est un monomorphisme. De plus, le faisceau $\underline{Hom}_{gp}(M, \mathbb{G}_a)$ étant quasi-cohérent, on voit que $V(M)$ est représenté par un schéma en groupes affine qui est un produit de $\mathbb{G}_a$. Ainsi, la construction du monomorphisme $M \hookrightarrow V(M)$ peut s'itérer, et donne lieu à une résolution co-simpliciale standard $M \longrightarrow V_*(M)$, dans la catégorie des schémas en groupes affines munis d'une action de H (voir [I, §1.5]). On a donc une équivalence de préfaisceaux simpliciaux

$$K(H, M, n) \simeq Holim_{[m]\in\Delta} K(K, V_m(M), n),$$

qui permet de se ramener au cas où M est le $\mathcal{O}$-module dual d'une représentation linéaire de H. Or, comme une telle représentation est la limite inductive de ses sous-représentations de dimension finie, M est la limite projective de ses quotients qui sont des représentations linéaires de dimension finie. On se ramène ainsi au cas où M est le schéma en groupes affine sous-jacent à une telle représentation linéaire, pour lequel ce que l'on cherche à démontrer est vrai par hypothèse. $\Box$

Remarque: Nous avons choisit l'expression P-équivalence par référence aux complexes parfaits. En effet, on peut montrer à l'aide de 2.23 qu'un morphisme est une P-équivalence si et seulement si c'est une équivalence pour la théorie cohomologique non-abélienne déterminée par le 1-champ de Segal des complexes parfaits (voir [H-S, §21]).

Le théorème suivant est un analogue du théorème 2.18 et une généralisation du corollaire 2.20. Il donne en particulier beaucoup d'exemple de types d'homotopie schématiques.

Théorème 2.25 *Soit $* \longrightarrow F$ un préfaisceau simplicial pointé et connexe. Supposons que les deux assertions suivantes soient satisfaites.*

- *Le faisceau en groupes $\pi_1(F,*)$ est représenté par un schéma en groupe affine.*
- *Pour tout entier $i>0$ le faisceau en groupes $\pi_i(F,*)$ est représenté par un schéma en groupes affine et unipotent.*

Alors F est un type d'homotopie schématique pointé qui est de plus P-local.
En particulier, tout champ très présentable est un type d'homotopie schématique pointé.

Preuve: Remarquons tout d'abord que si F vérifie les hypothèses du théorème alors $\mathbb{R}\Omega_* F$ est sous-affine. En effet, ceci peut se voir à l'aide d'une décomposition de Postnikov, et du fait évident que $\Omega_* K(G,M,n)$ est sous-affine lorsque G et M sont représentables par des schémas affines.

Le même argument que celui utilisé dans la preuve du théorème 2.18 montre que F satisfait aux hypothèses de la proposition 1.5. Un argument de décomposition de Postnikov et une utilisation du lemme 2.17 montre alors qu'il suffit de traiter le cas élémentaire où $F=K(G,M,n)$, avec G un schéma en groupes affine, et M un schéma en groupe affine et unipotent. Mais dans ce cas on a une équivalence de préfaisceaux simpliciaux (mais pas de H_∞-champs) $\mathbb{R}\Omega_* K(G,M,n) \simeq G\times K(M,n-1)$. Comme le faisceau G est représenté par un schéma affine c'est un champ affine. De plus, M étant un schéma en groupe affine et unipotent on sait d'après le théorème 2.18 que $K(M,n)$ est un champ affine. Le champ F est ainsi un produit de champs affines, et est donc affine lui-même.

Enfin, pour voir que F est P-local, on utilise que les champs P-locaux sont stables par les V-limite homotopique. Ceci permet, en utilisant le même argument que précédemment, de supposer que F est de la forme $K(G,M,n)$, avec G et M de type fini sur k. Mais, comme $K(G,M,n)$ est alors très présentable, il est tautologiquement P-local. $\Box$

Nous terminerons ce chapitre par l'énoncé d'une conjecture. Elle relie la théorie des champs très présentables avec celle des types d'homotopie schématiques. C'est aussi un analogue de la caractérisation des champs affines à l'aide des objets $\mathcal{O}$-locaux.

Conjecture 2.26 *Les types d'homotopie schématiques pointés sur un corps sont exactement les préfaisceaux simpliciaux pointés, connexes, sous-affines et P-locaux.*

3 Schématisation des types d'homotopie

Dans ce chapitre nous démontrerons le théorème principal de cet article, à savoir l'existence d'un foncteur de schématisation raisonable. Pour cela nous commencerons par définir la notion de schématisation d'un type d'homotopie. Modulo la conjecture 2.26, c'est la définition universelle à laquelle on s'attend (i.e. un morphisme universel vers les types d'homotopie schématiques). Cependant, comme cette conjecture n'est pour le moment pas démontrée, nous avons adaptée la définition pour que l'on puisse affirmer que la schématisation est un objet universel en un certain sens (voir 3.3).

La démonstration de l'existence du foncteur de schématisation se fait alors en deux grandes étapes. La première est d'utiliser le foncteur dérivé du foncteur de complétion affine afin de construire un champ dont les faisceaux d'homotopie sont des schémas en groupes affines, et qui est P-équivalent au type d'homotopie de départ. Cependant cette construction n'est pas suffisante car ce champ n'est généralement pas un type d'homotopie schématique. On applique alors un procédé d'affination à son champ des lacets, comme il est expliqué dans le paragraphe 2.3 pour en faire de façon universelle un type d'homotopie schématique. On montre alors que le résultat obtenu est bien une schématisation. L'intérêt de cette construction est qu'elle montre de plus que les faisceaux d'homotopie de la schématisation sont des schémas en groupes affines, ce qui n'est pas du tout évident à prioris.

Dans le second et troisième paragraphe nous appliquerons la propriété universelle de la schématisation pour démontrer des analogues des théorèmes standards de l'homotopie rationnelle et p-adique, ainsi que pour donner quelques exemples.

Tout au long de ce chapitre k sera un corps de caractéristique quelconque.

3.1 Schématisation des types d'homotopie

Pour tout U-ensemble simplicial pointé X, nous noterons encore $X \in SPr(k)_*$ le préfaisceau simplicial pointé constant qu'il définit. Nous supposerons toujours que de tels ensembles simpliciaux sont pointés connexes. Il s'en suit que les préfaisceaux simpliciaux X seront donc pointés et connexes. Nous identifierons alors la catégorie des U-ensembles simpliciaux pointés comme la sous-catégorie pleine de $SPr(k)_*$ formé des préfaisceaux constants. Ceci nous permet d'appliquer les définitions de $\mathcal{O}$-équivalences et de P-équivalences aux morphismes d'ensembles simpliciaux pointés.

Lemme 3.1 *1. Un morphisme entre deux U-ensembles simpliciaux pointés $f : X \longrightarrow Y$ est une $\mathcal{O}$-équivalence si et seulement si pour tout entier $i \geq 0$ le morphisme induit*

$$f^* : H^i(Y,k) \longrightarrow H^i(X,k)$$

est un isomorphisme.

2. Un morphisme entre deux U-ensembles simpliciaux pointés $f : X \longrightarrow Y$ est une P-équivalence si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

(a) Le morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X,*) \longrightarrow \pi_1(Y,*)$ induit un isomorphisme sur les complétés affines

$$f_* : \mathcal{A}(\pi_1(X,*)) \simeq \mathcal{A}(\pi_1(Y,*)).$$

(b) Pour tout système local de k-espaces vectoriels de dimension finie L sur Y, et tout entier $i \geq 0$, le morphisme induit

$$f^* : H^i(Y,L) \longrightarrow H^i(X,f^*L)$$

est un isomorphisme.

Preuve: (1) Il nous suffit de montrer que pour tout ensemble simplicial X, il existe des isomorphismes naturels $H^i(X,\mathcal{O}) \simeq H^i(X,k)$. Pour cela, on considère l'adjonction de Quillen suivante

$$Cst : U - SEns_* \longrightarrow SPr(k)_* \qquad U - SEns_* \longleftarrow SPr(k)_* : \Gamma,$$

où Cst est le foncteur "préfaisceau constant". On sait que les préfaisceaux simpliciaux de la forme $K(\mathbb{G}_a, i)$ sont des champs (ils sont équivalent pour la topologie triviale aux champs $Spec\, S(i)$, voir 2.7), et donc des objets fibrants dans $SPr(k)_*$. L'adjonction de Quillen dérivée donne donc les isomorphismes cherchés

$$H^i(X,\mathcal{O}) \simeq [X, K(\mathbb{G}_a, i)]_{SPr(k)_*} \simeq [X, K(k,i)]_{U-SEns_*} \simeq H^i(X,k).$$

(2) En appliquant le critère 2.23 il est facile de voir qu'il suffit de démontrer que pour tout schéma en groupes affine et de type fini G, V une de ses représentations linéaires de dimension finie, et tout U-ensemble simplicial pointé et connexe X, il existe des isomorphismes naturels

$$[X, K(G,V,n)]_{SPr(k)_*} \simeq [X, K(G(k), V(k), n)]_{U-SEns_*}.$$

D'après le théorème 1.11 on a

$$[X, K(G,V,n)]_{SPr(k)_*} \simeq [\mathbb{R}\Omega_* X, G \times_\rho K(V, n-1)]_{Pr-\Delta^\circ-SPr(k)},$$

où $G\times_\rho K(V,n-1)$ est le préfaisceau en groupes simpliciaux produit semi-direct de G par $K(V,n-1)$. L'adjonction de Quillen

$$Cst : Pr-\Delta^o-SEns \longrightarrow Pr-\Delta^o-SPr(k)_* \qquad Pr-\Delta^o-SEns \longrightarrow Pr-\Delta^o-SPr(k)_* : \Gamma$$

donne

$$[\mathbb{R}\Omega_* X, G\times_\rho K(V,n-1)]_{Pr-\Delta^o-SPr(k)} \simeq [\mathbb{R}\Omega_* X, \mathbb{R}\Gamma(G\times_\rho K(V,n-1))]_{Pr-\Delta^o-SEns}.$$

Cependant, le préfaisceau simplicial sous-jacent à $G\times_\rho K(V,n-1)$ est $G\times K(V,n-1)$. De plus, V étant un faisceau en groupes sous-jacent à un faisceau quasi-cohérent il est acyclique sur $(Aff/k)_{fpqc}$. Ainsi, $G\times K(V,n-1)$ est un champ, et donc $G\times_\rho K(V,n-1)$ est un objet fibrant dans $Pr-\Delta^o-SPr(k)$. Ceci implique que

$$\mathbb{R}\Gamma(G\times_\rho K(V,n-1)) \simeq G(k)\times_\rho K(V(k),n-1).$$

On en déduit donc

$$[X,K(G,V,n)]_{SPr(k)_*} \simeq [\mathbb{R}\Omega_* X, G(k)\times_\rho K(V(k),n-1)]_{Pr-\Delta^o-SEns} \simeq [X,K(G(k),V(k),n)]_{U-SEns_*},$$

ce qu'il fallait démontrer. $\Box$

Corollaire 3.2 *Soit X un U-ensemble simplicial pointé et connexe, G un schéma en groupe affine et V une représentation linéaire de G. Alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_*(X,K(G,V,n)) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_*(X,K(G(k),V(k),n)).$$

Preuve: C'est en réalité un corollaire de la preuve du lemme 3.1. $\Box$

Définition 3.3 *Soit X un ensemble simplicial pointé et connexe de U.*

- *Une schématisation de X sur k est la donnée d'un type d'homotopie schématique pointé P-local $X\otimes k$, et d'un morphisme dans la catégorie homotopique $Ho(SPr(k)_*)$, $u : X \longrightarrow X\otimes k$, qui est une P-équivalence.*
- *Une affination de X sur k est la donnée d'un champ affine pointé $(X\otimes k)^{uni}$, et d'un morphisme dans la catégorie homotopique $Ho(SPr(k)_*)$, $u : X \longrightarrow (X\otimes k)^{uni}$, qui est une $\mathcal{O}$-équivalence.*

Au vu de la conjecture 2.26 on espère en réalité que la condition que $X\otimes k$ soit P-local est superflue. De plus, on ne sait pas à prioris que dans la définition précédente le morphisme u est universel pour les morphismes vers les types d'homotopie schématiques. Cependant, il est clair que u est un morphisme universel pour les morphismes vers des objets P-locaux. En particulier, ceci implique que si une schématisation existe alors elle est unique à isomorphisme unique près dans la catégorie homotopique. De même, tout morphisme $X \longrightarrow Y$ induira automatiquement un morphisme sur les schématisations (s'il elle existent) $X\otimes k \longrightarrow Y\otimes k$. Ces propriétés seront très pratiques par la suite car elles permettent de négliger les aspects fonctoriels des constructions.

Théorème 3.4 *Tout U-ensemble simplicial pointé et connexe possède une schématisation.*

Preuve: La preuve va nous occuper un certain temps. Nous commencerons par donner une construction explicite de $X\otimes k$, que nous montrerons être un type d'homotopie schématique P-local, puis nous démontrerons que le morphisme $X \longrightarrow X\otimes k$ est une P-équivalence.

Construction du champ $X \otimes k$: Considérons le foncteur classifiant $B : U - SGp \longrightarrow U - SEns_*$, qui à un U-groupe simplicial G associe son ensemble simplicial pointé classifiant BG. On sait que ce foncteur induit un foncteur au niveau des catégories homotopiques $B : Ho(U - SGp) \longrightarrow Ho(U - SEns_*)$, qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle est formée des ensembles simpliciaux connexes (voir [To1, Prop. 1.5] pour une preuve de ce fait bien connu). Il existe donc un U-groupe simplicial G tel que BG soit équivalent à X. De plus, quitte à prendre une résolution libre de G on pourra supposer que chaque groupe G_n est un groupe libre de U.

Considérons alors $\mathcal{A}(G)$ le schéma en groupes affine simplicial déduit de G en appliquant la construction de complétion affine (voir 1.15). On définit le champ $X \otimes k$ comme étant $B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_{\mathcal{A}(G)}) \in Ho(SPr(k)_*)$, dont la construction est expliquée dans le paragraphe 2.3. Nous savons donc déjà que $X \otimes k$ est un type d'homotopie schématique pointé, et que le morphisme naturel $B\mathcal{A}(G) \longrightarrow X \otimes k$ est de plus universel pour les morphismes vers des types d'homotopie schématiques (voir 2.15).

Le champ $X \otimes k$ est P-local: Considérons le morphisme de projection $h_{\mathcal{A}(G)} \longrightarrow \pi_0(h_{\mathcal{A}(G)})$. D'après le lemme 1.14 le faisceau $\pi_0(h_{\mathcal{A}(G)})$ est représenté par le schéma affine $\pi_0(\mathcal{A}(G))$, co-équaliseur des morphismes $d_0, d_1 : \mathcal{A}(G_1) \longrightarrow \mathcal{A}(G_0)$. Remarquons au passage, que comme le foncteur $\mathcal{A}$ est un adjoint à gauche, il commute avec les colimites, et il existe donc des isomorphismes

$$\pi_0(\mathcal{A}(G)) \simeq \mathcal{A}(\pi_0(G)) \simeq \mathcal{A}(\pi_1(X, *)).$$

Soit K le noyau de la projection $\mathcal{A}(G) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{A}(G))$, de sorte qu'il existe une suite exacte de schémas en groupes affines simpliciaux

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}(G) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{A}(G)) \longrightarrow 1,$$

dont on déduit un diagramme co-cartésien dans $k - Alg^{\Delta}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(K) & \mathcal{O}(\mathcal{A}(G)) \arrow[l] \\
k \arrow[u] & \mathcal{O}(\pi_0(\mathcal{A}(G))). \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De plus, comme chacun des morphismes $\mathcal{A}(G_n) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{A}(G)))$ est un morphisme plat (car est un épimorphisme de schémas en groupes affines), le diagramme précédent est aussi homotopiquement co-cartésien dans $k - Alg^{\Delta}$. On en déduit donc un diagramme homotopiquement cartésien de H_∞-espaces

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(\mathcal{A}(G)) \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \pi_0(\mathcal{A}(G)).
\end{tikzcd}$$

En passant aux classifiants et en utilisant le théorème 1.11 on trouve un diagramme homotopiquement cartésien dans $SPr(k)_*$

$$\begin{tikzcd}
B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes k \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & K(\pi_0(\mathcal{A}(G)), 1).
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.5 *Pour tout entier n, et toute représentation linéaire de dimension finie V de $\mathcal{A}(G)_n$, on a*

$$H^i(B\mathcal{A}(G)_n, V) \simeq H^i(BG_n, V)$$

pour tout entier $i \geq 0$.

Preuve: Commençons par monter que $H^i(B\mathcal{A}(G)_n, V) \simeq H^i(BG_n, V) \simeq 0$ pour $i > 1$. Pour ce qui est de l'annulation de $H^i(BG_n, V)$ cela provient immédiatement du fait que G_n soit libre et du corollaire 3.2. Ainsi, d'après 1.12 il nous suffit de montrer que pour toute représentation linéaire W (éventuellement de dimensions infinie) on a $H^2(B\mathcal{A}(G_n), W) = 0$. Comme une telle représentation est limite inductive de ses sous-représentations de dimension finie on peut à l'aide du corollair 1.13 se restreindre au cas où W est de dimension finie.

Il est facile de voir que pour montrer que $H^2(B\mathcal{A}(G_n), W) = 0$ il suffit de montrer que toute extension de faisceaux en groupes

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow E \xrightarrow{p} \mathcal{A}(G_n) \longrightarrow 1$$

possède une section. Cependant, comme E est un W-torseur sur $\mathcal{A}(G_n)$ qui est un schéma affine, le morphisme p possède une section dans la catégorie des schémas $s : \mathcal{A}(G_n) \longrightarrow E$. Ainsi, comme G_n est un groupe libre, le morphisme de préfaisceaux

$$G_n \longrightarrow \mathcal{A}(G_n) \xrightarrow{s} E$$

se relève en un morphisme de groupes $G_n \longrightarrow E$. Ce morphisme induit alors un morphisme de schémas en groupes $\mathcal{A}(G_n) \longrightarrow E$, qui est la section cherchée.

Il nous reste donc à vérifier que $H^i(B\mathcal{A}(G_n), V) \simeq H^i(BG_n, V)$ pour $i < 2$. Mais ceci est vrai pour tout groupe G_n, libre ou pas, et ce déduit aisément de la propriété universelle des complétions affines (voir par exemple [L-M, §4]). $\Box$

Lemme 3.6 *Pour tout entier n, et toute représentation linéaire V de K_n on a*

$$H^i(BK_n, V) \simeq 0$$

dès que $i > 1$.

Preuve: Le schéma en groupes affine K_n est un sous-groupe fermé et normal de $\mathcal{A}(G_n)$. Le morphisme $BK_n \longrightarrow B\mathcal{A}(G_n)$ est alors $\mathcal{A}(G_n)/K_n$-torseur, et en particulier un morphisme affine. Il est donc acyclique pour les faisceaux quasi-cohérents. Ceci implique que

$$H^i(BK_n, V) \simeq H^i(B\mathcal{A}(G_n), V \otimes \mathcal{O}(\mathcal{A}(G_n/K_n))),$$

qui d'après le lemme 3.5 est nul pour $i > 1$. $\Box$

Lemme 3.7 *Pour tout entier n, et toute représentation linéaire de K_n^{uni} on a*

$$H^i(BK_n^{uni}, V) \simeq H^i(BK_n, V),$$

pour tout $i \geq 0$.

Preuve: Considérons le foncteur d'inclusion

$$j : Rep_k(K_n^{uni}) \longrightarrow Rep_k(K_n).$$

Nous savons déjà que ce foncteur est exact, et nous allons montrer qu'il est acyclique. Pour cela il nous suffit de montrer que pour tout objet injectif $V \in Rep_k(K_n^{uni})$ on a $H^i(BK_n, j(V)) = 0$ pour $i > 0$. Or, d'après 3.6 on sait déjà que ce groupe est nul pour $i > 1$. Il nous suffit donc de montrer que pour toute représentation $V \in Rep_k(K_n^{uni})$, injective ou pas, le morphisme $H^1(BK_n^{uni}, V) \longrightarrow$

$H^1(BK_n, j(V))$ est un isomorphisme. Pour montrer cela on peut applique le corollaire 1.13 et supposer de plus que V est de dimension finie.

Notons E le produit semi-direct de K_n^{uni} par V. C'est un schéma en groupes affine unipotent, et il est facile de voir que tout élément dans $H^1(BK_n^{uni}, V)$ peut se représenter à l'aide d'un morphisme de schémas en groupes $K_n^{uni} \longrightarrow E$ qui relève l'identité de K_n^{uni}. De même, tout élément dans $H^1(BK_n, V)$ peut se représenter à l'aide d'un morphisme de schémas en groupes $K_n \longrightarrow E$ qui relèvent la projection naturelle $K_n \longrightarrow K_n^{uni}$. Le propriété universelle de ce morphisme de projection montre alors que le morphisme naturel $H^1(BK_n^{uni}, V) \longrightarrow H^1(BK_n, V)$ est surjectif.

Enfin, un morphisme $u : K_n \longrightarrow E$ (resp. $u : K_n^{uni} \longrightarrow E$) représente l'élément trivial dans $H^1(BK_n, V)$ (resp. de $H^1(BK_n^{uni}, V)$) si et seulement s'il existe $v \in V(k)$ tel que la composante de u dans V soit de la forme $h \mapsto v - h.v$. Ceci montre clairement que le morphisme naturel $H^1(BK_n^{uni}, V) \longrightarrow H^1(BK_n, V)$ est aussi injectif. $\Box$

Corollaire 3.8 *Pour tout $i > 0$, le faisceau en groupes $\pi_i(B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K), *)$ est représentable par un schéma en groupes affine et unipotent. De plus, on a $\pi_1(B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K), *) \simeq 0$.*

Preuve: Considérons le quotient maximal unipotent $K \longrightarrow K^{uni}$, et le morphisme induit $BK \longrightarrow BK^{uni}$. Le théorème 2.18 et le lemme 1.14 impliquent que BK^{uni} est un champ affine. De plus, comme on a $BK \simeq Hocolim_{[n]\in\Delta^\circ} BK_n$, et de même $BK^{uni} \simeq Hocolim_{[n]\in\Delta^\circ} BK_n^{uni}$ le lemme 3.7 montre que le morphisme $BK \longrightarrow BK^{uni}$ est une $\mathcal{O}$-équivalence. D'après le corollaire 2.11 on a donc

$$B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K) \simeq BK^{uni}.$$

Cependant, on sait que $\pi_i(BK^{uni}, *)$ est un schéma en groupes affine et unipotent pour $i > 0$. De plus, comme K est le noyau du morphisme de projection $\mathcal{A}(G) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{A}(G))$ on a bien $\pi_1(B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K), *) \simeq \pi_0(K^{uni}) \simeq \pi_0(K)^{uni} \simeq 0$. $\Box$

Le corollaire 3.8 et le carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(K) & \longrightarrow & X \otimes k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & K(\pi_0(\mathcal{A}(G)), 1), \end{array}$$

impliquent que $X \otimes k$ satisfait aux hypothèses de 2.25. C'est donc un champ P-local.

Le morphisme $X \longrightarrow X \otimes k$ est une P-équivalence: Nous avons définit $X \otimes k$ comme étant $B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_{\mathcal{A}(G)})$. On dispose donc de morphismes naturels

$$X \simeq BG \xrightarrow{a} B\mathcal{A}(G) \xrightarrow{b} B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(h_{\mathcal{A}(G)}) =: X \otimes k.$$

Lemme 3.9 *Le morphisme $a : BG \longrightarrow B\mathcal{A}(G)$ est une P-équivalence.*

Preuve: Tout d'abord en utilisant que $BG \simeq Hocolim_{[n]\in\Delta^\circ} BG_n$ et $B\mathcal{A}(G) \simeq Hocolim_{[n]\in\Delta^\circ} B\mathcal{A}(G_n)$ on voir qu'il suffit de montrer que pour tout n le morphisme $BG_n \longrightarrow B\mathcal{A}(G_n)$ est une P-équivalence. On utilise alors le critère 2.23.

Soit H un schéma en groupes affine et de type fini sur k, $V \in Rep_k(H)$ une représentation linéaire de dimension finie et $F = K(H, V, n)$. D'après 3.2 il faut montrer que

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_*(BG_n, F(k)) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_*(B\mathcal{A}(G_n), F).$$

Or, il existe une diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\underline{Hom}_*(BG_n, F(k)) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & \mathbb{R}\underline{Hom}_*(B\mathcal{A}(G_n), F) \arrow[d, "w"] \\ \mathbb{R}\underline{Hom}_*(BG_n, K(G(k),1)) \arrow[r, "x"'] & \mathbb{R}\underline{Hom}_*(B\mathcal{A}(G_n), K(G,1)). \end{tikzcd}$$

De plus, la propriété universelle du morphisme $G_n \longrightarrow \mathcal{A}(G_n)$ implique clairement que x est un isomorphisme. Il nous suffit donc de montrer que u induit des isomorphismes sur toutes les fibres homotopiques des morphismes v et w. Or, si $\rho : G_n \longrightarrow G(k)$ est un point dans $\pi_0(\mathbb{R}\underline{Hom}_*(BG_n, K(G(k),1)))$, et si on note $v^{-1}(\rho)$ et $w^{-1}(\rho)$ ces fibres homotopiques, on a

$$\pi_i(v^{-1}(\rho)) \simeq H^{n-i}(BG_n, V(k)) \qquad \pi_i(w^{-1}(\rho)) \simeq H^{n-i}(B\mathcal{A}(G_n), V).$$

Le lemme 3.5 permet donc de conclure. $\square$

Lemme 3.10 *Le morphisme $b : B\mathcal{A}(G) \longrightarrow B\mathbb{R}Spec\,\mathcal{O}(\mathcal{A}(G))$ est une P-équivalence.*

Preuve: C'est immédiat d'après sa propriété universelle (voir 2.15). $\square$

Le morphisme $X \longrightarrow X \otimes k$ est la composition de deux P-équivalence, c'est donc une P-équivalence. Ceci achève la preuve du théorème 3.4. $\square$

Corollaire 3.11 *Pour tout ensemble U-simplicial pointé et connexe X les trois assertions suivantes sont vraies.*

- $\pi_0(X \otimes k) \simeq *$.
- *Le morphisme de groupe $\pi_1(X,*) \longrightarrow \pi_1(X \otimes k, *)$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{A}(\pi_1(X,*)) \simeq \pi_1(X \otimes k, *).$$

- *Pour tout entier $i > 1$, le faisceau en groupes $\pi_i(X \otimes k, *)$ est représenté par un schéma en groupes affine et unipotent.*

Preuve: C'est un corollaire de la preuve du théorème 3.4. $\square$

Corollaire 3.12 *Tout U-ensemble simplicial pointé et connexe possède une affination. De plus, pour X un tel ensemble simplicial les trois assertions suivantes sont vraies.*

- $\pi_0(X \otimes k) \simeq *$.
- *Pour tout entier $i > 0$, le faisceau en groupes $\pi_i((X \otimes k)^{uni}, *)$ est représenté par un schéma en groupes affine et unipotent.*
- *Le morphisme de groupe $\pi_1(X,*) \longrightarrow \pi_1((X \otimes k)^{uni}, *)$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{U}(\pi_1(X,*)) \simeq \pi_1((X \otimes k)^{uni}, *).$$

Preuve: Considérons le morphisme de schématisation $X \longrightarrow X \otimes k$. On sait d'après 2.14 que $X \otimes k$ est sous-affine. Ainsi, en posant $(X \otimes k)^{uni} := \mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(X \otimes k)$ et en utilisant 2.11 on trouve un morphisme $X \longrightarrow (X \otimes k)^{uni}$ avec $(X \otimes k)^{uni}$ un champ affine, et qui est la composition d'une P-équivalence avec une $\mathcal{O}$-équivalence. C'est donc une $\mathcal{O}$-équivalence.

Pour démontrer les trois assertions sur les faisceaux d'homotopie on utilise un analogue de 3.5 et on montre que si $X \simeq BG$ (où G_n est libre pour tout n), alors $(X \otimes k)^{uni} \simeq B\mathcal{U}(G)$. On conclut alors à l'aide de 1.14. $\Box$

Notons $Ho(U - SEns_0)$ la catégorie homotopique des U-ensembles simpliciaux pointé et connexes, et $Ho(P - Loc/k)$ (resp. $Ho(CA_*/k)$) la sous-catégorie pleine de $Ho(SPr(k)_*)$ formée des préfaisceaux simpliciaux pointés et P-locaux (resp. des champs affines pointés).

Corollaire 3.13 *Les foncteurs dérivés des foncteurs de sections globales*

$$\mathbb{R}\Gamma : Ho(P - Loc/k) \longrightarrow Ho(U - SEns_0) \qquad \mathbb{R}\Gamma : Ho(CA_*/k) \longrightarrow Ho(U - SEns_0)$$

possèdent des adjoints à gauche

$$- \otimes k : Ho(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(P - Loc/k) \qquad (- \otimes k)^{uni} : Ho(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(CA_*/k).$$

Preuve: C'est une autre façon d'énoncer 3.4 et 3.12. $\Box$

Corollaire 3.14 *Soit X un U-ensemble simplicial pointé et connexe. Si le champ $X \otimes k$ est simplement connexe (i.e. $\pi_1(X \otimes k) \simeq 0$), alors le morphisme*

$$X \otimes k \longrightarrow (X \otimes k)^{uni}$$

est un isomorphisme.

Preuve: D'après le corollaire 3.11 il est clair que $X \longrightarrow (X \otimes k)^{uni}$ est en fait une P-équivalence. Le corollaire est donc une conséquence du théorème 2.25 et de l'unicité de la schématisation. $\Box$

3.2 Comparaison avec l'homotopie rationnelle et p-adique

Les résultats de comparaison que nous présentons ici sont le théorème 3.17 et ses corollaires 3.18 et 3.19. A vrai dire, il ne s'agit pas à proprement parler de comparer rigoureusement nos conctructions à celles pré-existantes, mais plutôt de démontrer des analogues des résultats standards. La question plus fine de la réelle comparaison avec les théories présentées dans [Q, Bo-Gu, Su, Dw-Ho, K, G, Ma] ne sera pas traitée dans ce travail.

Proposition 3.15 *Soit X un U-ensemble simplicial pointé et connexe, et $C^*(X,k) := k^X \in k - Alg^{\Delta}$ sa k-algèbre co-simpliciale de cohomologie. Alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$(X \otimes k)^{uni} \longrightarrow \mathbb{R}Spec\,C^*(X,k).$$

Preuve: Comme on sait que $X \longrightarrow (X \otimes k)^{uni}$ est un morphisme universel vers les champs affines et pointés, on a d'après le corollaire 2.5

$$(X \otimes k)^{uni} \simeq \mathbb{R}Spec\,\mathbb{L}\mathcal{O}(X).$$

Or, comme X est un préfaisceau simplicial cofibrant, on a $\mathbb{L}\mathcal{O}(X) \simeq \mathcal{O}(X) \simeq C^*(X,k)$. $\Box$

Corollaire 3.16 *Soit k'/k une extension de corps. Alors, pour tout U-ensemble simplicial pointé et connexe X, on a un isomorphisme dans $Ho(SPr(k')_*)$*

$$(X \otimes k)^{uni} \times_{Spec\,k} Spec\,k' \simeq (X \otimes k')^{uni}.$$

Preuve: En effet, on a d'après la proposition 3.15

$$(X \otimes k')^{uni} \simeq \mathbb{R}Spec\,C^*(X, k') \simeq \mathbb{R}Spec\,(C^*(X, k) \otimes^{\mathbb{L}}_k k') \simeq (X \otimes k)^{uni} \times_{Spec\,k} Spec\,k'. \square$$

Le théorème suivant est l'analogue des principaux résultats en homotopie rationelle et p-adique (voir [Q, Su, Bo-Gu, G, Ma]). Nous nous restreindrons aux ensembles simpliciaux nilpotents et de type fini (sur $\mathbb{Z}$). Pour nous, il s'agira des U-ensembles simpliciaux pointés X, possédant une décomposition de Postnikov $\{\tau_{\leq n}X\}_n$, telle que pour tout n il existe un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leq n-1}X \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & K(M_n, n),
\end{tikzcd}$$

avec M_n un groupe abélien de type fini si $n > 2$, et $M_2 \simeq \pi_1(X, *)$ un groupe nilpotent. Le lecteur pourra s'il le désire adapter lui-même la preuve du théorème suivant pour traiter le cas plus général des espaces nilpotents et de k-type finis.

Pour les besoins de lénoncé rappelons qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : X \longrightarrow Y$ est une k-équivalence, si les morphismes induits $f^* : H^i(Y, k) \longrightarrow H^i(X, k)$ sont des isomorphismes pour tout $i/geq0$.

Théorème 3.17

- *Si $k = \mathbb{Q}$, alors pour tout U-ensemble simplicial pointé, connexe, nilpotent et de type fini X, le morphisme d'adjonction*

$$X \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma((X \otimes k)^{uni})$$

est une $\mathbb{Q}$-équivalence.

- *Si k est algébriquement clos et de caractéristique $p > 0$, alors pour tout U-ensemble simplicial pointé, connexe, nilpotent et de type fini X, le morphisme d'adjonction*

$$X \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma((X \otimes k)^{uni})$$

est une k-équivalence.

Preuve: Connaisant la proposition 3.15, un argument standard de décomposition de Postnikov et une utilisation du théorème d'Eilenberg-Moore permettent de se ramener aux cas élémentaires $X = K(\mathbb{Z}, n)$, et $K(\mathbb{Z}/q, n)$ avec q un nombre premier (voir par exemple [Bo-Gu, Ma]). De plus, lorsque $X = K(M, n)$ pour $n > 1$, le diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd}
K(M, n-1) \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & K(M, n),
\end{tikzcd}$$

et une nouvelle application du théorème d'Eilenberg-Moore montre que $\mathbb{R}\Omega_*(K(M, n) \otimes k)^{uni}) \simeq (K(M, n-1) \otimes k)^{uni}$. Or, on sait que $(K(M, n) \otimes k)^{uni})$ est connexe, et donc d'après 1.11 on a

$$(K(M, n) \otimes k)^{uni}) \simeq B\mathbb{R}\Omega_*(K(M, n) \otimes k)^{uni}) \simeq B(K(M, n-1) \otimes k)^{uni}.$$

Ceci permet donc de se ramener au cas où $n = 1$.

(1) Comme $H^*(K(\mathbb{Z}/q, 1), \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, il est clair que $(X \otimes \mathbb{Q})^{uni} \simeq *$, et le morphisme d'adjonction

$$K(\mathbb{Z}/q, 1) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(*) \simeq *$$

est clairement une $\mathbb{Q}$-équivalence.

Lorsque $X = K(\mathbb{Z}, 1)$, un analogue du lemme 3.5 montre que le morphisme naturel $K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\mathcal{U}(\mathbb{Z}), 1) \simeq K(\mathbb{G}_a, 1)$ est une $\mathcal{O}$-équivalence. Ainsi, comme $K(\mathbb{G}_a, 1)$ est un champ affine, on a $(K(\mathbb{Z}, 1) \otimes \mathbb{Q})^{uni} \simeq K(\mathbb{G}_a, 1)$. De plus, le préfaisceau simplicial $K(\mathbb{G}_a, 1)$ étant un objet fibrant dans $SPr(\mathbb{Q})$, on a $\mathbb{R}\Gamma(K(\mathbb{G}_a, 1)) \simeq K(\mathbb{Q}, 1)$. Il est alors bien connu que le morphisme d'adjonction

$$K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Q}, 1)$$

est une $\mathbb{Q}$-équivalence.

(2) Tout comme pour le point (1), si q est premier à la caractéristique de k le morphisme d'adjonction est une k-équivalence.

Supposons que $X = K(\mathbb{Z}/p, 1)$. Alors, X étant déjà un champ affine (d'après 2.18), on a $(X \otimes k)^{uni} \simeq X$. De plus, k étant algébriquement clos on a $H^1(Spec\, k, \mathbb{Z}/p) \simeq 0$. Ainsi, on a $\mathbb{R}\Gamma(X) \simeq K(\mathbb{Z}/p, 1)$. Le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X) \simeq X$$

est alors clairement un isomorphisme, et donc une k-équivalence.

Enfin, comme dans le point (1), on montre que $(K(\mathbb{Z}, 1) \otimes k)^{uni} \simeq K(\mathcal{U}(\mathbb{Z}), 1) \simeq K(\mathbb{Z}_p, 1)$, est une $\mathcal{O}$-équivalence (où $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entier p-adique). On en déduit d'après 2.18 que $(K(\mathbb{Z}, 1) \otimes k)^{uni} \simeq K(\mathbb{Z}_p, 1)$. Comme ci-dessus, le fait que k soit algébriquement clos entraine que $K(\mathbb{Z}_p, 1)$ est un champ, et donc $\mathbb{R}\Gamma(K(\mathbb{Z}_p, 1)) \simeq K(\mathbb{Z}_p, 1)$. Il est alors encore bien connu que le morphisme d'adjonction

$$K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, 1)$$

est une k-équivalence. $\Box$

Remarque: Le lecteur pourra par exemple comparer la preuve du point (2) du théorème précédent avec la preuve du théorème principal de [Ma], où le point crucial est de montrer que $K(\mathbb{Z}/p, n)$ est k-résolvable (voir [Ma, 4]). Le fait que $K(\mathbb{Z}/p, n)$ soit k-résolvable est en réalité tout à fait analogue à la condition que $K(\mathbb{Z}/p, n)$ soit un champ affine, qui dans notre cas est une conséquence directe de la théorie des champs affines. Il est par ailleurs intéressant de constater que la construction du modèle explicite pour la E_∞-algèbre $C^*(K(\mathbb{Z}/p, n), k)$ qui est présentée dans [Ma, 4], est exactement la contre-partie algébrique de la construction qui exibe le champ $K(\mathbb{Z}/p, n)$ comme la fibre homotopique du morphisme $1 - F : K(\mathbb{G}_a, n) \longrightarrow K(\mathbb{G}_a, n)$, où F est l'endomorphisme de $\mathbb{G}_a$ donné par le frobenius.

Les foncteurs $- \otimes k$ et $(- \otimes k)^{uni}$ envoient clairement les P-équivalences et les k-équivalences sur des isomorphismes dans $Ho(SPr(k)_*)$. Ils se factorisent donc en des foncteurs

$$- \otimes k : Ho_P(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(SPr(k)_*) \qquad (- \otimes k)^{uni} : Ho_k(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(SPr(k)_*),$$

où $Ho_P(U - SEns_0)$ (resp. $Ho_k(U - SEns_0)$) est la catégorie localisée de $Ho(U - SEns_0)$ le long des P-équivalences (resp. le long des k-équivalences).

Corollaire 3.18 *Lorsque k est ou bien le corps des rationels $\mathbb{Q}$, ou bien algébriquement clos et de caractéristique $p > 0$, le foncteur*

$$(- \otimes k)^{uni} : Ho_k(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(SPr(k)_*)$$

retreint à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux nilpotents et de type fini, est pleinement fidèle.

En particulier,

$$-\otimes k : Ho_P(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(SPr(k)_*)$$

restreint à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux 1-connexes et de type fini, est pleinement fidèle.

Preuve: C'est immédiat d'après le corollaire 3.14 et le théorème 3.17. □

C'est le corollaire précédent qui permet d'affirmer que le champ $(X \otimes k)^{uni}$ est un modèle pour l'homotopie rationel ou bien p-adique, suivant que $k = \mathbb{Q}$ ou bien $k = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Corollaire 3.19 *Soit X et Y deux U-ensembles simpliciaux pointés, connexes, nilpotents et de type fini, et supposons que k soit de caractéristique $p > 0$. Si $(X \otimes k)^{uni}$ et $(Y \otimes k)^{uni}$ sont isomorphes dans $Ho(SPr(k)_*)$, alors X et Y sont isomorphes dans $Ho_k(U - SEns_0)$.*

Preuve: En effet, si $\overline{k}$ est une clotûre algébrique de k, alors d'après 3.16 $(X \otimes \overline{k})^{uni} \simeq (Y \otimes \overline{k})^{uni}$. Cet isomorphisme induit d'après le théorème 3.17 un isomorphisme entre X et Y dans $Ho_{\overline{k}}(U - SEns_0)$. Or, il est facile de vérifier qu'un morphisme est une $\overline{k}$-équivalence si et seulement si c'est une k-équivalences. Ainsi, il existe une équivalence de catégories $Ho_{\overline{k}}(U - SEns_0) \simeq Ho_k(U - SEns_0)$. Les ensembles simpliciaux X et Y sont donc isomorphes dans $Ho_k(U - SEns_0)$. □

3.3 Exemples et contre-exemples

Pour terminer ce travail nous donnons une liste d'exemples et de contre-exemples du comportement du foncteur de schématisation. Nous ne donnerons pas de preuves étant donné que les arguments se déduisent ou bien de la propriété universelle, ou bien des résultats des deux paragraphes précédents.

- Lors de la preuve du théorème 3.17 nous avons en réalité calculé l'affination des types d'homotopie d'Eilenberg-MacLane $K(M, n)$, où M est un groupe abélien de type fini. Nous avons obtenu
$$(K(M,n) \otimes k)^{uni} \simeq K(\mathcal{U}(M), n).$$
Notons que si k est de caractéristique nulle on a $\mathcal{U}(M) \simeq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_a$, et si k est de caractéristique $p > 0$ on a $\mathcal{U}(M) \simeq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. En clair,
$$\begin{aligned} (K(M,n) \otimes k)^{uni} &\simeq K(\mathbb{G}_a^r, n) && \textit{si car } k = 0 \\ &\simeq K(\mathbb{Z}_p^r \times M_{p-tors}, n) && \textit{si car } k = p > 0 \end{aligned}$$
où r est le rang de M et M_{p-tors} le sous-groupe de p-torsion de M.
A vrai dire, nous avons plus généralement démontré que pour tout U-ensemble simplicial pointé, connexe, nipotent et de type fini X, les faisceaux d'homotopie de son affination sont donnés par les formules suivantes
$$\begin{aligned} \pi_i((X \otimes k)^{uni}, *) &\simeq \mathcal{U}(\pi_i(X, *)) && \simeq \pi_i(X, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_a && \textit{si car } k = 0 \\ & && \simeq \pi_i(X, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p && \textit{si car } k = p > 0. \end{aligned}$$

- Il est bien connu qu'il est généralement impossible de donner une formule pour les faisceaux d'homotopie du champ $(X \otimes k)^{uni}$ lorsque X n'est pas nilpotent. Il est donc aussi impossible de donner une formule générale pour les faisceaux d'homotopie du champ $X \otimes k$. Cela peut en réalité déjà se remarquer sur le cas 1-tronqué.

Si Γ est un U-groupe, alors on sait que $\pi_1(K(\Gamma,1)\otimes k,*)$ est le complété affine de Γ sur k. Par contre, il n'est pas vrai en général que $K(\Gamma,1)\otimes k \simeq K(\mathcal{A}(\Gamma),1)$. La raison en est que le groupe Γ peut très bien ne pas avoir la même cohomologie que $\mathcal{A}(\Gamma)$. Le phénomène qui se produit ici est de nature tout à fait équivalente à ce qu'il se produit lors des complétions pro-finies (voir [A-M]). On peut donc introduire un analogue algébrique de la notion de groupe "bon".

Définition 3.20 *Le groupe Γ est bon sur k si le morphisme naturel*

$$K(\Gamma,1)\otimes k \longrightarrow K(\mathcal{A}(\Gamma),1)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SPr(k)_*)$.

Il est par exemple facile de voir que les groupes libres sont bons sur n'importe quel corps k (ceci provient de 3.5). De même, les groupes abéliens de types finis sont bons. Par contre un groupe abélien qui n'est pas de type fini n'est généralement pas bon si k est de caractéristique non-nulle. En particulier, on a

$$K(\mathbb{Z},1)\otimes k \simeq K(\mathcal{A}(\mathbb{Z}),1).$$

On peut de plus calculer explicitement le schéma groupe affine $\mathcal{A}(\mathbb{Z})$. Pour cela, considérons $\overline{k}^*$, le groupe discret multiplicatif de la clotûre algébrique du corps k. Il est muni d'une action naturelle du groupe de galois $Gal(\overline{k}/k)$. Formons alors le schéma en groupes de type multiplicatif $D(\overline{k}^*)$, tel que son faisceau des caractéres soit isomorphe à $\overline{k}^*$, muni de son action galoisienne. On peut alors montrer qu'il existe un isomorphisme (voir par exemple [Sau, App. A])

$$\mathcal{A}(\mathbb{Z}) \simeq D(\overline{k}^*) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}),$$

et donc que la schématisation de $K(\mathbb{Z},1)$ est donnée par

$$K(\mathbb{Z},1)\otimes k \simeq K(D(\overline{k}^*),1) \times K(\mathcal{U}(\mathbb{Z}),1).$$

Ceci implique que le morphisme naturel

$$K(\mathbb{Z},1)\otimes k \longrightarrow (K(\mathbb{Z},1)\otimes k)^{uni}$$

possède une fibre homotopique équivalente à $K(D(\overline{k}^*),1)$, qui est un champ énorme. On voit ainsi, que même dans les cas les plus simples, lorsque X n'est pas simplement connexe le champ $X\otimes k$ est généralement beaucoup plus gros que le champ $(X\otimes k)^{uni}$. Déjà au niveau du groupe fondamental, le morphisme $\pi_1(X\otimes k,*) \longrightarrow \pi_1((X\otimes k)^{uni},*)$ possède un très gros noyau. Il s'en suit qu'à fortioris la fibre homotopique de $X\otimes k \longrightarrow (X\otimes k)^{uni}$ est aussi énorme.

Une autre conséquence remarquable du fait que $\pi_1(X\otimes k,*) \simeq \mathcal{A}(\pi_1(X,*))$ est que la formation de la schématisation $X\otimes k$ ne commute pas avec les changements de bases en général. Par exemple, il n'est pas vrai que $D(\overline{\mathbb{Q}}^*) \times_{Spec\,\overline{\mathbb{Q}}} Spec\,\mathbb{C} \simeq D(\mathbb{C}^*)$. Ceci est une différence importante avec ce qu'il se passe pour les affinations (voir 3.16).

- L'avantage de travailler avec le champ $X\otimes k$ plutôt que $(X\otimes k)^{uni}$ peut directement se voir sur des exemples très simple. Prenons par exemple $X = K(\mathbb{Z}/m,\mathbb{Z}^r,n)$, où $\mathbb{Z}/m$ opère non trivialement sur le groupe abélien $\mathbb{Z}^r$. Cette action s'étend en une action de $\mathbb{Z}/m$ sur le schéma en groupes affine $\mathbb{G}_a^r$, et donne une décomposition $\mathbb{G}_a^r \simeq \mathbb{G}_a^i \times \mathbb{G}_a^{r-i}$, où le premier facteur est le sous-groupes des points fixes. On peut alors vérifier que

$$\pi_1((X\otimes\mathbb{Q})^{uni},*) \simeq 0 \qquad \pi_n(X\otimes\mathbb{Q},*) \simeq \mathbb{G}_a^i,$$

alors que
$$\pi_1(X \otimes \mathbb{Q}, *) \simeq \mathbb{Z}/m \qquad \pi_n(X \otimes \mathbb{Q}, *) \simeq \mathbb{G}_a^r.$$
Ainsi, l'action de $\mathbb{Z}/m$, bien que présente dans le champ $X \otimes k$, disparait dans $(X \otimes k)^{uni}$.

De façons beaucoup plus générale, toute l'information concernant les représentations non-nilpotentes des groupes fondamentaux dans les groupes d'homotopie supérieurs sera innaccessible à l'aide du champ $(X \otimes k)^{uni}$.

- Lorsque k est de caractéristique nulle, la schématisation $X \otimes k$ possède une décomposition naturelle en une partie réductive et une partie unipotente, analogue à la décomposition d'un schéma en groupes affine (voir [Hos-Mos, 4]).

  Considérons la projection naturelle $X \otimes k \longrightarrow K(\pi_1(X \otimes k, *), 1)$, ainsi que la quotient maximal réductif $\pi_1(X \otimes k, *) \longrightarrow \pi_1(X \otimes k, *)^{red}$. Par définition, $\pi_1(X \otimes k, *)^{red}$ est la limite projective des quotients réductifs et de type finis de $pi_1(X \otimes k, *)$, et se trouve être isomorphe à l'enveloppe réductive de $\pi_1(X, *)$ (i.e. le schéma en groupes affine et réductif universel pour $\pi_1(X, *)$). Comme k est de caractéristique nulle on sait que le noyau de la projection $\pi_1(X \otimes k, *) \longrightarrow \pi_1(X \otimes k, *)^{red}$ est un schéma en groupe affine et unipotent. Ainsi, la fibre homotopique du morphisme
$$X \otimes k \longrightarrow K(\pi_1(X \otimes k, *)^{red}, 1)$$
  est un champ connexes dont tous les faisceaux d'homotopie sont représentables par des schémas en groupes unipotents. D'après 2.18, c'est donc un champ affine. Il existe donc une k-algèbre co-simpliciale A dans U, une action de $\pi_1(X \otimes k, *)^{red}$ sur le champ affine $(X \otimes k)^o := \mathbb{R}Spec\, A$, tel que $X \otimes k$ soit le quotient homotopique de $(X \otimes k)^o$ par l'action de $\pi_1(X \otimes k, *)$. De plus, le schéma en groupes $\pi_1(X \otimes k, *)^{red}$ étant réductif, sa cohomologie à valeurs dans des représentations linéaires est nulle, et on a donc pour toute représentation linéaire $\rho : \pi_1(X \otimes k, *) \longrightarrow Gl(V)$
$$H^i(X \otimes k, V) \simeq H^i((X \otimes k)^o, V)^{\pi_1(X \otimes k, *)^{red}}.$$
  La k-algèbre A, munie de l'action de $\pi_1(X \otimes k, *)^{red}$ sur $\mathbb{R}Spec\, A$, répond ainsi à une question posée par A. Beilinson, T. Pantev et L. Katzarkov, et qui avait étée reśolue par des méthodes différentes lorsque X était l'espace topologique sous-jacent à une variété algébrique lisse sur $\mathbb{C}$ (voir [Ka-Pa]).

- Le lecteur aura sans doute remarquer que tout U-ensemble simplicial X possède une affination sur n'importe quel anneau k. En effet, il est facile de vérifier que $(X \otimes k)^{uni} := \mathbb{R}Spec\, C^*(X, k)$ est une affination de X (voir la proposition 3.15). Cependant, les faisceaux d'homotopie de $(X \otimes k)^{uni}$ sont beaucoup plus compliqués que de simples schémas en groupes unipotents, et ne sont généralement pas représentable par des schémas affines.

  Il est de plus facile de voir que pour morphisme d'anneaux $k \longrightarrow k'$, on a la formule de changement de bases suivante
$$(X \otimes k)^{uni} \times_{Spec\, k} Spec\, k' \simeq (X \otimes k')^{uni}.$$
  Ainsi, lorsque $k = \mathbb{Z}$, le champ $(X \otimes \mathbb{Z})^{uni}$ est une famille continu au-dessus de $Spec\, \mathbb{Z}$, dont la fibre générique est le type d'homotopie rationnel de X, et la fibre en point fermé p son type d'homotopie p-adique. A titre d'exemple, on peut montrer que le faisceau $\pi_2((K(\mathbb{Z}, 2) \otimes \mathbb{Z})^{uni})$ est un schéma en groupes affines plat sur $\mathbb{Z}$, dont la fibre générique est isomorphe à $\mathbb{G}_a$, et la fibre en un point fermé p est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Il s'agit donc du complété pro-unipotent de $\mathbb{Z}$ sur $Spec\, \mathbb{Z}$, décrit très joliement dans [Sau, App. A]. Nous reviendrons sur la schématisation sur des bases générales lorsque nous aurons accès une l'interprétation Tannakienne de la théorie.

- Nous terminerons cet article par un exemple qui montre que bien que les champs $X \otimes k$ contiennent beaucoup d'information homotopique sur X ils ne suffisent pas à reconstruire X. Pour cela nous allons construire un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre deux U-ensembles simpliciaux pointés, qui induit des équivalences $X \otimes k \longrightarrow Y \otimes k$ pour tout corps k, mais qui n'est pas une équivalence faible. Cet exemple m'a été communiqué par C. Simpson.

  D'après [Bu-Mo] il existe un groupe Γ qui est de présentation fini, infini et simple. Posons alors $X = K(\Gamma, 1)$ et prenons pour Y la construction $+$ de Quillen $Y := X^+$, muni du morphisme naturel $f : X \longrightarrow Y$. L'ensemble simplicial Y est donc simplement connexe et le morphisme f est une équivalence de cohomologie (à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et donc dans tout corps k). Remarquer dès à présent que f n'est pas une équivalence. D'après le corollaire 3.11, on a pour tout corps k

  $$\pi_1(X \otimes k) \simeq \mathcal{A}(\pi_1(X, x)) \simeq \mathcal{A}(\Gamma).$$

  Or, le groupe Γ étant simple, infini et de présentation fini il ne possède aucune représentation linéaire sur k qui soit non triviale (car tout sous-groupe de présentation fini de $Gl_n(k)$ possède des sous-groupes d'indices finis non triviaux). Le champ $X \otimes k$ est donc simplement connexe, et on a donc par 3.14 $X \otimes k \simeq (X \otimes k)^{uni}$. Or, comme f est une équivalence de cohomologie le morphisme induit

  $$X \otimes k \simeq (X \otimes k)^{uni} \longrightarrow Y \otimes k \simeq (Y \otimes k)^{uni}$$

  est une équivalence.

  Cet exemple montre par exemple qu'il n'y a aucun espoir pour que le foncteur de schématisation

  $$- \otimes \mathbb{Z} : Ho(U - SEns_0) \longrightarrow Ho(SPr(\mathbb{Z})_*)$$

  soit pleinement fidèle (car il n'est même pas conservatif).

Références

[A-M] M. Artin, B. Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Math. **100**, Springer 1969.

[Bo] A.K. Bousfield, *The localisation of spaces with respect to homology*, Topology **14** (1975), $133 - 150$.

[Bo-Gu] A.K. Bousfield, V.K.A.M. Gugenheim, *On PL DeRham theory and rational homotopy type*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **179**, (1976).

[Bo-Ka] A.K. Bousfield, D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localisations*, Lecture Notes in Math. **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[B-E] L. Breen, T. Ekedahl, *Construction et propriétés de la sphère schématique*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **300** (1985), No. 19, 665-668.

[B] L. Breen, *On the classification of* 2*-gerbs dans* 2*-stacks*, Astérisque **225**, Soc. Math. de France (1994).

[Br-Sz] E.H. Brown, R.H. Szczarba, *Rational and real homotopy theory with arbitrary fundamental groups*, Duke Math. J. **71** (1993), $299 - 316$.

[Bu-Mo] M. Burger, S. Mozes, *Finitely presented simple groups and products of trees*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), $747 - 752$.

[D1] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, dans *Galois groups over* $\overline{\mathbb{Q}}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, Springer 1989.

[D2] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, in *Grothendieck Festschrift Vol. II*, progress in math. **87**, Birkhauser Boston 1990.

[De-Ga] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques, Tome I*, Masson& Cie. Paris, North-Holland publishing company, 1970.

[Do] A. Dold, *The homology of symmetric products and other functors of complexes*, Ann. of Math. **68** (1958), $54-80$.

[Dw-Ho] W.G. Dwyer, M.J. Hopkins, *Travaux non-publiés*, 1992.

[G-J] P. Goerss, J.F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, Vol. **174**, Birkhauser Verlag 1999.

[G] P. Goerss, *Simplicial chains over a field and p-local homotopy theory*, Math. Z. **220** (1995), $523-544$.

[Go-Ha-Ta] S. Gomez-Tato, S. Halperin, D. Tanré, *Rational homotopy theory for non-simply connected spaces*, Trans. of the A.M.S. **352**, No. 4 (1999), $1493-1525$.

[Gr] A. Grothendieck, *Pursuing stacks*, munuscript non publié.

[Hi] P. Hirschorn, *Localisation of model categories*, livre en préparation disponible à http://www-math.mit.edu/ psh

[H-S] A. Hirschowitz, C. Simpson, *Descente pour les n-champs*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/9807049.

[Hos-Mos] G. Hoshschild, G.D. Mostov, *Representations and representative functions of Lie groups*, Ann. Math, **66** (1957), $495-542$.

[Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[I] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Math. **239**, Springer 1971.

[J1] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure and Appl. Algebra **47** (1987), $35-87$.

[J2] J. F. Jardine, *Stacks and the homotopy theory of simplicial sheaves*, preprint du serveur de K-theorie 450, disponible à http://www.math.uiuc.edu/K-theory/.

[Ka-Pa] L. Katzarkov, T. Pantev, *Communications privées.*

[Ka-To] L. Katzarkov, B. Toen, *Schematic homotopy types and non-abelian Hodge theory*, en préparation.

[K] I. Kriz, *p-adic homotopy theory*, Topology and its applications **52** (1993), $279-308$.

[L-M] A. Lubotzky, A. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **336**, (1985).

[Ma] M. Mandell, *E_∞-algebra and p-adic homotopy theory*, preprint.

[Mi] J.S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1980.

[Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. **90** (1969), $205-295$.

[Sa] N. Saavedra, *Categories Tannakiennes*, Lecture Notes in Math. **265**, Springer 1972.

[Sau] J. Sauloy, *Théorie de Galois des équations aux q-différences fuschiennes*, Thèse de l'université Paul Sabatier, Toulouse 1999.

[Se1] G. Segal, *Homotopy everything H-space*, preprint.

[Se2] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology Vol. 13 (1974), 293 − 312.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture notes in Math. **224**, Springer, Berlin 1971.

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes I: Propriétés générales des schémas en groupes*, Lecture notes in Math. **151**, Springer-Verlag 1990.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas I*, Lecture notes in Math. **269**, Springer, Berlin 1972 − 1973.

[S1] C. Simpson, *Higgs bundle and local systems*, Publ. Math. I.H.E.S. **75** (1992), 5 − 95.

[S2] C. Simpson, *Homotopy over the complex numbers and generalized cohomology theory*, dans *Moduli of vector bundles (Taniguchi symposium December* 1994, M. Maruyam ed., Dekker (1996), 229 − 263.

[S3] C. Simpson, *On a relative notion of algebraic Lie group and applications to n-stacks*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/alg-geom/9607002.

[S4] C. Simpson, *Algebraic n-stacks*, preprint disponible à http://front. math.ucdavis.edu/alg-goem/9609014.

[S5] C. Simpson, *Algebraic aspects of higher nonabelian Hodge theory*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/9902067.

[Su] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. I.H.E.S. **47** (1978), 269 − 331.

[Tam] Z. Tamsamani, *Sur des notions de n-catégories et n-groupoides non-stricts via des ensembles multi-simpliciaux*, K-theory **16**, No. 1, (1999), 51 − 99.

[To1] B. Toen, *Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l'homotopie*, preprint disponible à http://front.math.ucdavis.edu/math.AT/0007157.

[To2] B. Toen, *Dualité de Tannaka supérieure I: Structures monoidales*, preprint de l'institut Max Planck, $MPI - 2000 - 57$, disponible à http://www.mpim-bonn.mpg.de.

[To-Ve] B. Toen, G. Vezzosi, *Algebraic geometry in model categories*, en préparation.