ZUR KLASSIFIKATIONSTHEORIE DREI (UND HÖHER) DIMENSIONALER PROJEKTIVER MANNIGFALTIGKEITEN

Eckart Viehweg *

83 23

Max - Planck - Institut für
Mathematik
Gottfried - Claren - Str. 26
D - 5300 Bonn 3
Fed. Rep. of Germany

* Heisenberg - Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft;
Paris VII & Max - Planck - Institut für Mathematik

MPI/SFB 83-23

Dieser Artikel versucht den heutigen Stand unserer Kenntnisse über die birationale Geometrie drei-dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten zu skizzieren, die Ansatzpunkte für den höherdimensionalen Fall zu nennen und die wichtigsten offenen Probleme zu diskutieren.

Ein Teil des vorliegenden Materials diente als Grundlage eines Übersichtsvortrages auf der DMV - Tagung 1983 in Köln. Ich danke der DMV und den Organisatoren der Tagung für die Möglichkeit, diesen Vortrag zu halten und durch diesen Übersichtsartikel zu ergänzen.

Wir betrachten projektive Varietäten über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, das heißt die Nullstellenmengen endlich vieler homogener Polynome in einem projektiven Raum $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$, und wir nennen eine solche eine projektive Mannigfaltigkeit (oder kurz Mannigfaltigkeit), wenn sie irreduzibel und nicht singulär ist.

Mannigfaltigkeiten der Dimension eins, mit anderen Worten projektive Kurven oder Riemannsche Flächen (im Folgenden mit C bezeichnet), kann man "vollständig" klassifizieren: Man definiert das Geschlecht $g(C)$ als maximale Anzahl linear unabhängiger, globaler, holomorpher Differentialformen

(oder auch als die Anzahl der Henkel bei der Darstellung von C als topologische Mannigfaltigkeit). Das Geschlecht teilt die Menge der Kurven in Klassen ein, und jede natürliche Zahl kommt als Geschlecht einer Kurve vor. David Mumford konstruiert in [5] quasiprojektive Varietäten M_g ,deren Punkte in natürlicher Weise alle Kurven vom Geschlecht g parametrisieren.

Eine ähnlich schöne Beschreibung aller projektiver Flächen kann nicht existieren. Durch Aufblasen von Punkten (siehe [2] , Seite 28) kann man aus einer vorgegebenen Fläche S beliebig viele andere Flächen konstruieren. Dies legt es nahe, beim Versuch zwei oder höher dimensionale Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren, zwei Mannigfaltigkeiten V und V' als "gleich" zu betrachten, wenn sie birational sind ($V \sim V'$), das heißt, wenn die Funktionenkörper $\mathbb{C}(V)$ und $\mathbb{C}(V')$ isomorph sind (siehe [2] , Seite 25).

<u>0.1.</u> Das Geschlecht einer Kurve können wir für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit V ersetzen durch

$$g_i(V) = \dim_{\mathbb{C}}(H^0(V,\Omega^i_V)) \quad , \quad 0 \leq i \leq n .$$

Dabei bezeichnet Ω^1_V die Garbe der holomorphen 1-Differentiale und $\Omega^i_V = \bigwedge^i \Omega^1_V$. Wie üblich schreiben wir ω_V statt Ω^n_V und nennen diese invertierbare Garbe die <u>kanonische Garbe</u>.

Es ist $g_0(V) = 1$. Oft wird in der Literatur $g_1(V)$ als <u>Irregularität</u> bezeichnet und mit $q(V)$ abgekürzt. Die Symmetrie der Hodge-Zahlen (siehe [1] , Seite 117) gibt insbesondere, daß $g_i(V) = \dim_{\mathbb{C}}(H^i(V,\mathcal{O}_V))$ ist, und dementsprechend wird die Euler-Poincaré-Charakteristik der Strukturgarbe gegeben durch $\chi(\mathcal{O}_V) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot g_i(V)$.

<u>0.2.</u> Die globalen Schnitte der Tensorpotenzen der kanonischen Garbe geben die $\mathbb{C}$ - Algebra

$$R(V) = \bigoplus_{\nu\geq 0} H^0(V, \omega_V^{\nu}) ,$$

bezeichnet als <u>kanonischer Ring</u> von V . Die Kodaira Dimension ist

$$\kappa(V) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } R(V) = \mathbb{C} \\ \operatorname{trz\,grd}_{\mathbb{C}}(R(V)) - 1 & \text{falls } R(V) \neq \mathbb{C} \end{cases} .$$

Falls für genügend großes ν $\dim_{\mathbb{C}}(H^0(V, \omega_V^{\nu}))$ durch ein Polynom beschrieben wird (leider wissen wir dies nicht - siehe 2.1), ist $\kappa(V)$ der Grad dieses Polynoms, wobei wir $-\infty$ als den Grad des Null-Polynoms betrachten.

Die Kodaira Dimension kann die Werte $-\infty, 0, \ldots, n$ annehmen. Für Kurven ist sie durch das Geschlecht festgelegt:

$\kappa(C)$	$g(C) = g_1(C)$	Bemerkungen
1	≥ 2	
0	1	elliptische Kurve
$-\infty$	0	$\mathbb{P}^1$

Sowohl die Kodaira Dimension als auch die g_i sind invariant unter birationaler Äquivalenz (siehe [22] , Seite 67 & 114).

Als "Leit - Problem" für den Teil der Klassifikationstheorie, über den wir berichten wollen, kann man die folgenden

I) Welche Werte können die <u>Invarianten</u> $\kappa(V)$, $g_1(V),\ldots,g_n(V)$ annehmen?

II) Für welche Werte der Invarianten ist V birational zu einer wohlbekannten Mannigfaltigkeit (zum Beispiel birational zum $\mathbb{P}^n$ oder zu einer abelschen Mannigfaltigkeit oder zum Totalraum einer Familie solcher Mannigkeiten) ?

III) Wie findet man zu einer Mannigfaltigkeit V ein besonders "gutes" Modell V', birational zu V (mit einer Konstruktion, die abhängig sein darf vom Wert der Invarianten) ?

Selbst wenn man diese Fragen nach dem diskreten Teil der Klassifikation beantworten könnte, bliebe das Hauptproblem, der stetige Teil der Klassifikation:

IV) Kann man alle birationalen Äquivalenzklassen von Mannigfaltigkeiten mit vorgegebenen Invarianten durch die Punkte einer quasiprojektiven Varietät in natürlicher Weise parametrisieren, eventuell nach Hinzunahme weiterer Invarianten ?

Für $\dim(V) \geqslant 3$ ist wenig über diese letzte Frage bekannt (siehe die Anhänge in [5]). Eine Antwort auf IV) ist kaum vorstellbar ohne die Kenntnis eines "guten" Modelles in III). Andererseits spielt die Parametrisierung von r - dimensionalen Mannigfaltigkeiten für $r < n$ eine Rolle im diskreten Teil der Klassifikation (siehe § 5).

In den Paragraphen 2, 3, 4, 7 und 8 werden wir versuchen, mit absteigendem Wert von $\kappa(V)$, die Fragen I , II und III zu präzisieren und die bekannten Ergebnisse anzugeben

In § 1 diskutieren wir die Versuche, ein singuläres kanonisches Modell zu konstruieren, in § 5 fassen wir die Ergebnisse über die Kodaira Dimension von Faserräumen zusammen und in § 6 wiederholen wir, in welcher Weise die Ergebnisse aus § 5 Anwendung finden.

Antworten auf die gestellten Fragen I , II und III für projektive Flächen waren bereits der italienischen Schule der Geometrie zu Beginn dieses Jahrhunderts bekannt. Zu Beginn der ersten vier Paragraphen gehen wir kurz auf die Theorie der Flächen ein, jedoch nur in dem Umfang, der als Motivation für die Fragestellungen im höherdimensionalen Fall sinnvoll ist. Für umfassende Darstellungen der Theorie der Flächen verweisen wir auf [3] und [4] . Auch auf die Klassifikation nicht algebraischer Mannigfaltigkeiten gehen wir nicht ein in diesem Artikel. Einen Überblick erhält der Leser in den Artikeln von Akira Fujiki und Kenji Ueno in [35] .

Der vorliegende Bericht baut auf auf der Arbeit vieler Mathematiker. Ihnen allen sei gedankt für das Zusenden ihrer Manuskripte und für zahllose Diskussionen. Die meisten der angeführten offenen Probleme sind "wohlbekannt" und wir haben darauf verzichtet, in allen Fällen den Urheber aufzuspüren und anzugeben. Viele Anregungen entnahmen wir der "Liste der offenen Probleme", die in [36] erscheinen wird.

Wir benutzen die üblichen Begriffe und Notationen der algebraischen Geometrie, wie sie zu Beispiel in [2] zu finden sind. C wird immer eine Kurve und S eine Fläche bezeichnen.

§ 1 Gute Modelle

Definition 1.1. Eine invertierbare Garbe L auf einer Varietät X heißt numerisch positiv , wenn für jede Kurve C in X gilt $\mathrm{grd}(L|_C) \geq 0$.

1.2. Zu jeder Fläche S mit $\kappa(S) \geq 0$ existiert eine ausgezeichnete Fläche S' , birational zu S , das minimale Modell (siehe [2], Seite 418). Mit Hilfe der Klassifikation der Flächen (für $0 \leq \kappa(S) \leq 1$) und mit Hilfe des Hodge - Index - Theorems (für $\kappa(S) = 2$; siehe Mumfords Anhang zu [14]) kann man zeigen, daß $\omega_{S'}$ numerisch positiv ist. S. Mori gab einen Beweis dieser Tatsache in [7], der unabhängig von der Klassifikationstheorie ist.

Für Mannigfaltigkeiten der Dimension größer oder gleich drei existiert jedoch weder ein minimales Modell, noch ein Modell V' mit numerisch positivem $\omega_{V'}$ (siehe [23]). Mori deutet in seinem bahnbrechenden Artikel [7] (siehe auch [8]) einen möglichen Ausweg aus diesem Dilemma an:

Problem 1.3. Sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) \geq 0$ (oder schwächer: V keine Uni - Regelmannigfaltigkeit ; siehe 7.2). Existiert dann eine normale projektive Varietät X , birational zu V , so daß für ein $r > 0$ gilt:

1) Die reflexive Hülle $\omega_X^{[r]} = (\omega_X^r)^{\vee\vee}$ ist invertierbar.

2) Für jede Desingularisierung $\rho : V' \longrightarrow X$ ist $\rho^*\omega_X^{[r]}$ enthalten in $\omega_{V'}^r$.

3) $\omega_X^{[r]}$ ist numerisch positiv.

Man sagt, daß X nur <u>kanonische Singularitäten</u> hat, falls die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind für ein $r > 0$. Hat Problem 1.3 eine positive Antwort, so nennt man die Varietät X , die alle drei Bedingungen erfüllt ein <u>kanonisches Modell</u> von V .

Ausgehend von einer Mannigfaltigkeit V der Dimension drei, gab Mori den ersten Schritt zur Konstruktion eines kanonischen Modelles an:

A) Ist ω_V nicht numerisch positiv, so existiert eine "extreme" Familie rationaler Kurven C_t mit $\mathrm{grd}(\omega_V \big|_{C_t}) < 0$. Alle diese Kurven C_t liegen auf einem irreduziblen Divisor E und spannen diesen auf.

B) Der Divisor E kann zusammengeblasen werden, das bedeutet: Es existiert eine singuläre Varietät X_1 , mit explizit angebbaren kanonischen Singularitäten , und ein birationaler Morphismus $\eta : V \longrightarrow X_1$, so daß $\mathrm{codim}(\eta(E)) \geqslant 2$ ist und $\eta \big|_{V-E}$ ein Isomorphismus.

Leider funktioniert Moris Methode nur, wenn man von einer Mannigfaltigkeit ausgeht, er kann also nicht wiederholt werden, um "Schritt für Schritt" alle schlechten Kurven zu beseitigen. M. Reid hat in [9] dieses Programm präzisiert. Er vermutet, daß man in 1.3 sogar fordern kann, daß X spezielle kanonische Singularitäten hat, die terminalen, $\mathbb{Q}$-faktoriellen Singularitäten. Versucht man Schritt A) für eine solche Varietät durchzuführen, tritt das Phänomen auf, daß die Menge der extremen rationalen Kurven endlich sein kann. Dies bedeutet, daß man nicht mit "Zusammenblasen" in B) auskommen kann.

Y. Kawamata hat kürzlich in [6] Moris Methoden vereinfacht und verallgemeinert. Er zeigt, das man den Schritt B) in der Klasse der drei dimensionalen Varietäten mit terminalen, $\mathbb{Q}$ - faktoriellen Singularitäten durchführen kann, falls die extremen rationalen Kurven einen Divisor E aufspannen. Damit ist in gewissem Sinne die Hälfte des Mori-Reid Programmes zur Konstruktion kanonischer Modelle durchgeführt und die Hoffnung unterstützt, daß 1.3 eine positive Antwort hat.

Problem 1.3 steht in engem Zusammenhang mit der Frage nach der <u>Zariski Zerlegung</u> des kanonischen Divisors. In [14] zeigt O. Zariski, daß jeder effektive Divisor D auf einer Fläche S in eindeutiger Weise zerlegt werden kann in einen numerisch positiven und einen negativen Anteil. Es existieren also effektive Divisoren P und N und eine natürliche Zahl r , so daß

1) $r \cdot D = P + N$

2) $\sigma_S(P)$ ist numerisch positiv.

3) Die Schnittform auf S , eingeschränkt auf die Primdivisoren von N , ist negativ definit.

4) $\operatorname{grd}(\sigma_S(P)|_E) = 0$ für jeden Primdivisor E von N .

Für Divisoren auf höher dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist eine entsprechende Zerlegung unbekannt (siehe [10] , [11], Fujitas Artikel in [36]). Trotzdem hofft man eine solche Zerlegung wenigstens für die kanonische Garbe zu finden:

<u>**Problem 1.4.** Es sei</u> V <u>eine</u> n <u>dimensionale Mannigfaltigkeit,</u> $\kappa(V) \geq 0$ <u>(oder schwächer:</u> V <u>keine Uni - Regelmannigfaltigkeit)</u> <u>Existiert eine Mannigfaltigkeit</u> V' , <u>birational zu</u> V ,

so daß $\omega_{V'}$ eine Zariski Zerlegung besitzt? Präziser fragt man nach der Existenz einer natürlichen Zahl r und einer numerisch positiven invertierbaren Untergarbe P von $\omega_{V'}^{r}$, so daß gilt:

1) Für alle $m > 0$ ist $H^0(V', P^m) = H^0(V', \omega_{V'}^{r \cdot m})$.

2) Für $N = \omega_{V'}^{r} \otimes P^{-1}$ und für jede invertierbare Garbe L existiert eine Konstante c, so daß $\dim(H^0(V', L \otimes N^m)) \leq c$ ist für alle $m > 0$.

Die Eigenschaften 1) und 2) sollen - in einer etwas plumpen Art und Weise - ausdrücken, daß N ein "negativer" Anteil ist.

Bekannterweise liegt jede invertierbare Garbe L in einer hohen Potenz einer amplen Garbe und jede ample Garbe in einer hohen Potenz einer vorgegebenen Garbe L' mit $\kappa(L') = \dim(V')$ (siehe z. B. [30], 6.3). Daher reicht es, die Eigenschaft 2) in 1.4 für alle Potenzen einer festen invertierbaren Garbe L' mit $\kappa(L') = \dim(V')$ nachzuprüfen.

Bemerkung 1.5. Eine positive Antwort auf 1.3 impliziert eine positive Antwort auf 1.4: Tatsächlich wählen wir X und r wie in 1.3 und $\rho : V' \longrightarrow X$ als Desingularisierung. Setzt man $P = \rho^* \omega_X^{[r]}$, $N = \omega_{V'}^{r} \otimes P^{-1}$ und $L = \rho^* H$ für eine ample Garbe H auf X, so ist $\rho_* N^m = \mathcal{O}_X$ und 1.4, 1) und 2) folgen direkt aus der Projektionsformel ([2], Seite 124).

§ 2 $\kappa(V) = \dim(V)$ und der kanonische Ring

In Zusammenhang mit Nagatas Gegenbeispiel zu Hilberts 14 - tem Problem zeigte Zariski in [14], daß bereits für invertierbare Garben L auf einer Fläche S der Ring

$$\bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(S, L^\nu)$$

im allgemeinen nicht endlich erzeugt ist. Als Grund kann gesehen werden, daß, selbst wenn L numerisch positiv ist, nicht notwendigerweise eine Potenz von L von globalen Schnitten erzeugt wird (In [11] und [18] findet man eine Diskussion des Zusammenhanges zwischen der Existenz eines Basisortes und der endlichen Erzeugbarkeit des angegebenen Ringes auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension).
Ist die Fläche S ein minimales Modell und $\kappa(S) > 0$, so ist jedoch eine Potenz der kanonischen Garbe ω_S von globalen Schnitten erzeugt (siehe Mumfords Anhang zu [14]) und die folgende Frage für $n = 2$ bejaht.

Problem 2.1. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist der kanonische Ring R(V) endlich erzeugt?

Ist V nicht algebraisch oder erlaubt man V Gorenstein-Singularitäten zu haben, so lautet die Antwort auf 2.1 "nein" (siehe [18]).

Besonders wichtig wäre eine Antwort auf 2.1 für Mannigfaltigkeiten von allgemeinem Typ , das heißt falls $\kappa(V) = \dim(V)$ ist. Wäre R(V) endlich erzeugt, so könnte man Proj(R(V)) als singuläres "gutes" Modell in der birationalen Äquivalenzklasse von V wählen. Ohne ein solches eindeutig bestimmtes Modell scheinen kaum Möglichkeiten zur genaueren Untersuchung der Mannigfaltigkeiten vom allgemeinen Typ zu bestehen - geschweige denn eine Antwort auf den stetigen Teil der Klassifikation (Frage VI in der Einleitung).

Satz 2.2. (Benveniste - Kawamata und Reid)

Ist V eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit und $\kappa(V) = 3$, so sind die Probleme 1.3 , 1.4 und 2.1 äquivalent.

Zum Beweis: M. Reid zeigt in [17], daß - falls $R(V)$ endlich erzeugt ist - $X = \mathrm{Proj}(R(V))$ nur kanonische Singularitäten hat. Per Konstruktion ist eine Potenz von $\omega_X^{[r]}$ von globalen Schnitten erzeugt und daher $\omega_X^{[r]}$ numerisch positiv. Also ist X das in 1.3 gesuchte kanonische Modell. Nach 1.5 finden wir eine Mannigfaltigkeit V' und die Zariski Zerlegung von $\omega_{V'}$. X. Benveniste und Y. Kawamata beweisen in [15] und [16], daß die Existenz einer Zariski Zerlegung $P \oplus N = \omega_{V'}^r$ impliziert, daß P^μ von globalen Schnitten erzeugt wird für ein $\mu > 0$, und damit, daß $R(V)$ endlich erzeugt ist.
Der Beweis von Benveniste und Kawamata beruht auf einer sehr geschickten Anwendung des Verschwindungssatzes für ganze Anteile von $\mathbb{Q}$-Divisoren ([12] und [13]):

Satz 2.3. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit und $D = \sum \nu_j \cdot E_j$ ein effektiver Divisor mit nicht singulären Primkomponenten E_j, die sich transversal schneiden.
Es sei L eine invertierbare Garbe und $N > 0$, so daß $L^N \otimes \mathcal{O}_V(-D)$ numerisch positiv ist.
Dann ist für festes $i > 0$ und $p > 0$

$$H^p(V, L^i \otimes \mathcal{O}_V(-\sum \left[\frac{\nu_j \cdot i}{N}\right] \cdot E_j) \otimes \omega_V) = 0 \quad ,$$

<u>falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:</u>

a) <u>Die Selbstschnittzahl</u> $c_1(L^N \otimes \mathcal{O}_V(-D))^n > 0$.

b) <u>Die</u> L - <u>Dimension</u> $\kappa(V, L^N \otimes \mathcal{O}_V(-D)) = n$.

c) <u>Die</u> L - <u>Dimension</u> $\kappa(V, L^i \otimes \mathcal{O}_V(-\sum \left[\frac{\nu_j \cdot i}{N}\right] \cdot E_j)) = n$.

Dabei bedeutet $[b]$ der ganze Anteil der reellen Zahl b .

Ein möglicher Beweis von 2.3 beruht auf der Konstruktion einer Überlagerung $\tau : T \longrightarrow V$ durch Wurzelziehen aus der rationalen Funktion, die dem allgemeinen Schnitt von $L^N \otimes \mathcal{O}_V(-D)$ entspricht, und dem Vergleich der Theorie der Differentialformen von T und von V . Ist $L = \omega_V$ so finden wir hier zum ersten Mal eine Konstruktion, die trotz ihrer Einfachheit in der Klassifikationstheorie zu einem sehr wesentlichen Hilfsmittel geworden ist: Das Wurzelziehen aus multi-kanonischen Divisoren.

§ 3 $0 < \kappa(V) < n$ und der Satz von Iitaka

Jede Fläche S mit $\kappa(S) = 1$ kann dargestellt werden als elliptische Fläche, das heißt als Familie elliptischer Kurven über einer Kurve. S. Iitaka (siehe [20] oder [22]) konnte dieses Ergebnis in der folgenden Weise verallgemeinern.

Definition 3.1. Wir nennen einen Morphismus $f : V \longrightarrow W$ von Mannigfaltigkeiten einen Faserraum , wenn f surjektiv ist und die allgemeine Faser $V_w = V \times_W \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{C}(W)})$ zusammenhängend ist.

Satz 3.2. (Iitaka) Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) \geq 0$. Dann existiert eine Mannigfaltigkeit V' , birational zu V , und ein Faserraum $f : V' \longrightarrow W$, so daß

1) $\dim(W) = \kappa(V)$.

2) $\kappa(V'_w) = 0$.

3) Für beliebig große m ist $f : V' \longrightarrow W$ birational zur m - kanonischen Abbildung, das heißt zu der Abbildung, die durch eine Basis von $H^0(V, \omega_V^m)$ gegeben wird.

Natürlich ist die Aussage des obigen Satzes nur dann nicht - trivial, wenn $0 < \kappa(V) < n$ ist.

Bemerkung 3.3. Es ist nicht bekannt, ob die Aussage 2) in 3.2 impliziert, daß $\kappa(f^{-1}(x)) = 0$ ist für alle Punkte x aus einer Zariski - offenen Teilmenge von W , zumindest falls die Dimension der Faser echt größer als zwei ist.
Die Invarianz der Kodaira Dimension unter glatten Deformationen wird vermutet, konnte jedoch bisher nur für Deformationen von Kurven oder Flächen bewiesen werden (siehe [28] für

die weitreichensten Ergebnisse in dieser Richtung).

Angewandt auf den Fall n = 3 erhalten wir:

Korollar 3.4.

a) Jede drei dimensionale Mannigfaltigkeit V mit $\kappa(V) = 2$ ist birational zum Totalraum eines Faserraumes elliptisch- Kurven über einer Fläche.

b) Jede drei dimensionale Mannigfaltigkeit V mit $\kappa(V) = 1$ ist birational zum Totalraum eines Faserraumes von Flächen der Kodaira Dimension null über einer Kurve.

Die in 3.4 angegebene Faserraum - Struktur kann nun benutzt werden, um diese drei dimensionalen Mannigfaltigkeiten genauer zu studieren. So besteht die Hoffnung, daß man die Frage nach dem guten Modell (1.3) oder die nach dem kanonischen Ring (2.1) beantworten kann, indem man in a) die Theorie der elliptischen Kurven und in b) die guten Kenntnisse über Flächen der Kodaira Dimension null (siehe § 4) und ihrer Degeneration ausnutzt. Tatsächlich hat Fujita in seinem Artikel in [36] Ergebnisse in dieser Richtung angekündigt.

§ 4 $\kappa(V) \leq 0$ und die Albanese Abbildung

4.1. Nach Wahl eines Basispunktes p_0 erhält man eine Abbildung

$$\alpha : V \longrightarrow A(V) = H^0(V, \Omega_V^1)^* / H_1(V, Z)$$

indem man $\alpha(p)$ auf eine Differentialform φ wirken läßt als $\int_{p_0}^{p} \varphi$. α heißt die Albanese Abbildung und $A(V)$ die Albanese Mannigfaltigkeit . $A(V)$ ist eine abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension $g_1(V)$ (siehe [22]).

Definition 4.2. Ein Faserraum $f : V \longrightarrow W$ heißt étales Faserbündel (mit Faser F) , falls eine étale Überlagerung $W' \longrightarrow W$ existiert, so daß $pr_2 : V \times_W W' \longrightarrow W'$ isomorph zu $pr_2' : F \times W' \longrightarrow W'$ ist.

Die Flächen mit $\kappa(S) \leq 0$ waren den italienischen Geometern zu Beginn des Jahrhunderts wohlbekannt:

4.3. a) Es sei S eine Fläche, $\kappa(S) = 0$ und S ein minimales Modell. Dann gilt

i) $g_1(S) \leq 2$.

ii) Es ist $g_1(S) = 2$ genau dann, wenn S eine abelsche Mannigfaltigkeit ist.

iii) Ist $g_1(S) = 1$, so ist die Albanese Abbildung ein étales Faserbündel elliptischer Kurven.

iv) Die Flächen mit $\kappa(S) = g_1(S) = 0$ sind wohlbekannt (K 3 Flächen und Enriques Flächen)

b) Es sei S eine Fläche, $\kappa(S) = -\infty$. Dann gilt

i) Ist $g_1(S) \geqslant 1$, so ist S birational zu $\mathbb{P}^1 \times C$ für eine Kurve C vom Geschlecht $g_1(S)$.

ii) Ist $g_1(S) = 0$, so ist S birational zum $\mathbb{P}^2$.

Die Aussagen a) i), ii) und iii) und die Aussage b), i) können wir auch so formulieren:

Satz 4.4.

A) Jede Fläche S mit $\kappa(S) = 0$ ist birational zu einer Fläche S', so daß $\alpha : S' \longrightarrow A(S')$ ein étales Faserbündel ist mit Faser F, $\kappa(F) = 0$.

B) Es sei S eine Fläche mit $\kappa(S) = -\infty$ und $f : S' \longrightarrow W$ ein Faserraum, birational zur Steinfaktorisierung der Albanese Abbildung $\alpha : S \longrightarrow \alpha(S)$.
Dann ist $\kappa(S'_w) = -\infty$ für die allgemeine Faser S'_w von f und $\kappa(W) > 0$ und $g_1(W) = g_1(S)$.

Aufbauend auf Ergebnissen und Teilresultaten von K. Ueno konnte der Autor in [29] den entsprechenden Satz für drei dimensionale Varietäten beweisen (ersetze in 4.4 die"Fläche S" durch die "drei dimensionale Varietät V "). Y. Kawamata erhielt in [25] und [26] eine teilweise Verallgemeinerung auf den n dimensionalen Fall:

Satz 4.5. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) = 0$. Dann ist die Albanese Abbildung $\alpha : V \longrightarrow A(V)$ ein Faserraum.
Ist $g_1(V) = 1$, so hat die allgemeine Faser V_a von α die Kodaira Dimension null.

Neuere Ergebnisse Kawamatas und des Autors über die Kodaira Dimension von Faserräumen ergeben als Folgerung (siehe [30]):

Satz 4.6.

A) Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) = 0$ und $g_1(V) \geq \dim(V) - 2$. Dann ist V birational zu einer Mannigfaltigkeit V', so daß $\alpha : V' \longrightarrow A(V')$ ein étales Faserbündel ist mit Faser F, $\kappa(F) = 0$.

B) Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $n \leq 4$ und $\kappa(V) = -\infty$. Es sei $f : V' \longrightarrow W$ ein Faserraum, birational zur Steinfaktorisierung der Albanese Abbildung $\alpha : V \longrightarrow \alpha(V)$. Dann ist $\kappa(V'_w) = -\infty$ für die allgemeine Faser V'_w von f, $\kappa(W) \geq 0$ und $g_1(W) = g_1(V)$.

Daß man in Teil A) von 4.6 die Bedingung $g_1(V) \geq \dim(V)-2$ benötigt, das heißt nach 4.5 die Bedingung, daß die Faser von α eine Fläche oder Kurve ist, ist nicht so sehr verblüffend. Wie wir gerade in § 7 und § 8 sehen werden, ist unsere Kenntnis bereits über eine einzelne Mannigfaltigkeit der Dimension drei oder mehr recht gering. Wie könnten wir da vollständige Ergebnisse über Familien solcher Mannigfaltigkeiten erwarten?

Bevor wir in § 7 auf einige Folgerungen aus den Sätzen 4.5 und 4.6 eingehen, wollen wir in den beiden folgenden Paragraphen auf einige der zum Beweis nötigen Schritte eingehen. In [19] findet man eine ausführlichere Darstellung der in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse und eine voll-

§ 5 Iitakas Vermutung $C_{n,m}$

Beim Versuch Aussagen, wie 4.5 oder 4.6 zu beweisen, erweist es sich als wesentlichste Schwierigkeit, das Verhalten der Kodaira Dimension unter Morphismen abzuschätzen.

Im Verlauf dieses Paragraphen bezeichnet $f : V \longrightarrow W$ einen Faserraum, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und V_w die allgemeine Faser von f. Leicht zu beweisen ist ([20] oder [22]):

5.1. Es ist $\kappa(V) \leq \dim(W) + \kappa(V_w)$.

Als Abschätzung in der anderen Richtung hofft man, daß gilt:

5.2. Vermutung $C_{n,m}$: Gilt $\kappa(V) \geq \kappa(W) + \kappa(V_w)$?

Faßt man Ergebnisse Kawamatas und des Autors zusammen ([25], [26], [27], [29], [30], [31]), so erhält man:

Satz 5.3. Die Vermutung $C_{n,m}$ ist richtig in jedem der folgenden Fälle

I) $m = 1$ (d.h. W eine Kurve)

II) $m = n-1$ (d.h. V_w eine Kurve)

III) $m = n-2$ (d.h. V_w eine Fläche)

IV) $\kappa(W) = \dim(W)$

V) $\kappa(V_w) = 0$ und für ein V_w', birational zu V_w, und ein $\mu > 0$ ist $\omega^{\mu}_{V_w'} = \mathcal{O}_{V_w'}$.

VI) $\kappa(V_w) = \dim(V_w)$ und für ein V_w', birational zu V_w, und ein $\mu > 0$ ist $\omega^{\mu}_{V_w'}$ erzeugt von globalen Schnitten.

In den Beweisen einiger der Fälle von 5.3 benutzt man den in der Einleitung angeführten stetigen Teil der Klassifikationstheorie für die Fasern von f . Es zeigt sich dabei, daß $\kappa(V)$ größer sein kann als in 5.2 gefordert, falls die Fasern von f stark variieren.

<u>Definition 5.4.</u> Die <u>Variation</u> von f , $\mathrm{Var}(f)$, ist die kleinste Zahl k für die ein Körper L existiert, $\mathbb{C} \subseteq L \subseteq \overline{\mathbb{C}(W)}$, mit $\operatorname{trz} \operatorname{grd}_{\mathbb{C}}(L) = k$, und eine Varietät F über L , so daß $F \times_{\mathrm{Spec}(L)} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{C}(W)})$ birational zu V_w ist.

<u>5.5. Vermutung $C^+_{n,m}$:</u> <u>Für jeden Faserraum mit</u> $\kappa(W) \geq 0$ <u>gilt (hoffentlich)</u> $\kappa(V) \geq \mathrm{Max}\{\kappa(W), \mathrm{Var}(f)\} + \kappa(V_w)$.

<u>Satz 5.6.</u> <u>Die Vermutung</u> $C^+_{n,m}$ <u>ist richtig, falls</u> $m = 1$ <u>und</u> $n \leq 3$ <u>ist und in den in 5.3 angegebenen Fällen</u> II) , V) <u>und</u> VI). <u>Insbesondere gilt</u> $C^+_{n,m}$ <u>falls</u> V_w <u>eine Fläche ist mit</u> $\kappa(V_w) \neq 1$.

Die in 5.3 und 5.6 zusammengefaßten Ergebnisse wurden im Verlauf der letzten acht Jahre wirklich Schritt für Schritt bewiesen. Für eine präzisere Darstellung der Entwicklung (z. B. für die Rolle der Arbeiten Fujitas und Uenos) verweisen wir auf [19] und auf Kawamatas Übersichtsartikel in [35] . Wir wollen im folgenden nur auf den Teil der Theorie der Faserräume eingehen, der ohne jede Voraussetzung über die allgemeine Faser bewiesen werden konnte. Wir schreiben $\omega_{V/W} = \omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1}$ und bezeichnen mit $S^{\beta}(F)$ und $\det(F)$ die reflexive Hülle des symmetrischen Produktes (bzw. der Determinantengarbe) einer torsionsfreien kohärenten Garbe F .

<u>Definition 5.7.</u> Eine torsionsfreie kohärente Garbe F auf W heißt <u>schwach positiv</u>, wenn zu jeder amplen invertierbaren Garbe H auf W und zu jedem $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$ existiert, so daß die Abbildung

$$\mathcal{O}_W \otimes_{\mathbb{C}} H^0(W, S^{\alpha\cdot\beta}(F) \otimes H^{\beta}) \longrightarrow S^{\alpha\cdot\beta}(F) \otimes H^{\beta}$$

surjektiv ist über einer nicht leeren offenen Menge.

<u>Satz 5.8.</u> <u>Für jedes</u> $\mu > 0$ <u>ist die Garbe</u> $f_* \omega^{\mu}_{V/W}$ <u>schwach positiv.</u>

Für $\mu = 1$ ist dieser Satz eine direkte Folge der Ergebnisse, die Fujita ([24]) und Kawamata ([25]) mit Hilfe der Theorie der Variation der Hodge Struktur (P. Griffiths und W. Schmid) herleiten. Der Fall $\mu > 1$ kann mit Hilfe von Überlagerungskonstruktionen (siehe § 2) auf den Fall $\mu = 1$ zurückgeführt werden (siehe [30] für den Beweis). Hat die Variation des betrachteten Faserraums den maximalen Wert, erhofft man sich mehr.

<u>Problem 5.9.</u> <u>Es sei</u> $f' : V' \longrightarrow W'$ <u>ein Faserraum mit</u> $\mathrm{Var}(f') = \dim(W')$. <u>Gibt es ein</u> $\eta > 0$, <u>so daß gilt:</u> <u>Für jede invertierbare ample Garbe</u> H <u>auf</u> W' <u>existiert eine Zahl</u> $\gamma > 0$ <u>und eine Inklusion</u>

$$\bigoplus H \longrightarrow S^{\gamma}(f'_* \omega^{\eta}_{V'/W'})$$

<u>surjektiv über einer nicht leeren offenen Menge.</u>

<u>Problem 5.10.</u> <u>Es sei</u> $f' : V' \longrightarrow W'$ <u>wie in</u> 5.9. <u>Ist dann für ein</u> $\eta > 0$

$$\kappa(W, \det(f'_*\omega^{\eta}_{V'/W'})) = \dim(W') \quad ?$$

Man kann sich leicht überlegen, daß eine positive Antwort auf 5.9 eine positive Antwort auf 5.10 impliziert. Verblüffenderweise kann man unter Ausnutzung von 5.8 mit Hilfe weiterer Überlagerungskonstruktionen beweisen (siehe [30] und [31]):

<u>Satz 5.11.</u> <u>Die Probleme</u> 5.9 <u>und</u> 5.10 <u>sind äquivalent.</u>

Es scheint, daß 5.9 oder 5.10 die richtige geometrische Interpretation der Iitaka - Vermutung $C_{n,m}$ ist. Man kann zeigen ([30], [31]) :

<u>Satz 5.12.</u> <u>Hat 5.9 (oder 5.10) eine positive Antwort für jeden Faserraum</u> $f' : V' \longrightarrow W'$ <u>mit</u> $\mathrm{Var}(f') = \dim(W')$, $\mathbb{C}(W') \subseteq \overline{\mathbb{C}(W)}$ <u>und</u> $V_w = V'_w \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{C}(W')})} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{C}(W)})$, <u>so gilt</u> $C^+_{n,m}$ <u>für den Faserraum</u> $f : V \longrightarrow W$.

Obgleich $C^+_{n,m}$ schwächer ist als die in 5.9 angeführte Frage, zeigt es sich bei der Betrachtung der Beweise von $C^+_{n,m}$, in allen Fällen, in denen man diese führen kann, daß man in Wirklichkeit 5.10 beweist und in irgendeiner Form die Äquivalenz von 5.10 und 5.9 benutzt.

Die Frage 5.10 nach der L - Dimension von $\det(f_*\omega^{\eta}_{V/W})$ hängt zusammen mit dem stetigen Teil der Klassifikation für n-m dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Ist $n \leqslant m+2$ so kann man die Moduli-Theorie für Kurven bzw. Flächen benutzen (siehe [30]), die auf Mumford und Gieseker zurückgeht ([5]) . In den in 5.3 angegebenen Fällen V und VI liefern lokale Torelli Sätze für endliche Überlagerungen von V_w , das heißt die lokale Parametrisierung , die benötigte Information (siehe [27] und [31]). Die zur Beantwortung von 5.10 entwickelten Methoden erlauben zu sagen:

<u>Kennt man</u> $n-m$ <u>dimensionale Mannigfaltigkeiten gut genug (z. B. die Antworten auf die Probleme 1.3 und 1.4), so bestehen sehr gute Chancen 5.10 und</u> $C^+_{n,m}$ <u>zu beantworten.</u>

§ 6 Zum Beweis von 4.5 und 4.6

Nach dem etwas technischen Ausflug in die Theorie der Kodaira Dimension von Faserräumen wollen wir in diesem Abschnitt wiederholen, wie $C_{n,m}$ und $C^+_{n,m}$ mit der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten der Kodaira Dimension null oder $-\infty$ zusammenhängen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $C_{n,m}$ und $C^+_{n,m}$ beide richtig sind und überlassen es dem Leser nachzuprüfen, daß die in 5.3 und 5.6 angegebenen Fälle tatsächlich ausreichen, um 4.5 und 4.6 zu beweisen (Um den ersten Teil von 4.5 mit Hilfe von 5.3,IV) zu beweisen, muß man etwas geschickter argumentieren als wir es hier andeuten ; siehe [25] oder [19]).

Wir faktorisieren die Albanese Abbildung von V in der folgenden Weise:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\tau} \alpha(V) \hookrightarrow A(V) ,$$

wobei wir (nach Aufblasen von V) annehmen, daß τ generisch endlich und f ein Faserraum projektiver Mannigfaltigkeiten ist.

Ueno hat in [22] Untervarietäten abelscher Mannigfaltigkeiten untersucht und gezeigt:

6.1. Es ist $\kappa(W) \geq 0$ und $\kappa(W) = 0$ impliziert, daß $\alpha(V) = A(V)$ ist.

Kawamata und der Autor studierten Überlagerungen abelscher Mannigfaltigkeiten in [21] und zeigten:

6.2. Es ist $\kappa(W) = 0$ genau dann, wenn W birational zu $A(V)$ ist, das heißt, genau dann, wenn α selbst ein Faserraum ist.

6.1 und $C_{n,m}$ geben die Ungleichungen

$$\kappa(V) \geq \kappa(W) + \kappa(V_w) \geq \kappa(V_w) .$$

Ist $\kappa(V) = -\infty$, so muß $\kappa(V_w)$ ebenfalls $-\infty$ sein und man erhält 4.6,B). Ist $\kappa(V) = 0$, so folgt aus (5.1), daß $\kappa(V_w) \geq 0$ ist. Die obige Ungleichung ist also nur möglich, falls $\kappa(W) = \kappa(V_w) = 0$ ist.

Nach 6.2 ist α selbst ein Faserraum und wir können annehmen, daß wir $W = A(V)$ gewählt haben. Aus $C^+_{n,m}$ folgt, daß die Variation $Var(\alpha) = 0$ ist. Die in 4.6,A) angegebene Aussage folgt nun, wenn immer das folgende Problem eine positive Antwort hat.

Problem 6.3. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) = 0$, und A eine abelsche Mannigfaltigkeit.
Es sei $f : V \longrightarrow A$ ein Faserraum mit $Var(f) = 0$.
Existiert dann eine Mannigfaltigkeit V', birational zu V, so daß die induzierte Abbildung $f' : V' \longrightarrow A$ ein étales Faserbündel ist ?

In [30] geben wir eine positive Antwort auf diese Frage, falls die allgemeine Faser V_a von f eine Kurve oder Fläche ist. Diese Bedingung wird nur benutzt, um die folgende Aussage zu beweisen:
Die Menge der birationalen Abbildungen $Bir(V_a)$ von V_a auf sich selbst kann keine Untermenge enthalten, die von einer

rationalen Kurve parametrisiert wird.

Es ist ein offenes Problem - zumindest für den Autor - ob eine solche Aussage auch für höher-dimensionale Mannigfaltigkeiten der Kodaira Dimension größer gleich null gilt.

§ 7 Einige Folgerungen aus 4.5 und 4.6

Beginnen wir auch diesen Abschnitt mit der Vorstellung einiger offener Fragen, die für $n = 2$ aus der Klassifikationstheorie der Flächen Antworten finden.

Problem 7.1. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit und L eine invertierbare Garbe auf V. Existiert eine Konstante a, so daß für $\nu \gg 0$ gilt:

$$\dim(H^0(V , L \otimes \omega_V^{\nu})) \leq a \cdot \nu^{\kappa(V)} \quad ?$$

Dabei soll $\nu^{-\infty} = 0$ sein.

Für $\kappa(V) = -\infty$ ist 7.1 nicht anderes als das klassische offene Problem " Does adjunction terminate ". In diesem Falle würde 7.1 eine direkte Folgerung sein aus einer positiven Antwort auf:

Problem 7.2. Ist jede n dimensionale Mannigfaltigkeit V mit $\kappa(V) = -\infty$ eine Uni-Regelmannigfaltigkeit? Dies bedeutet, daß eine $n-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit W existiert und eine generisch endliche Abbildung von $W \times \mathbb{P}^1$ auf V.

Selbst wenn man annimmt, daß das Problem 1.3 bejaht werden kann, also daß jede Mannigfaltigkeit, die keine Uni-Regelmannigfaltigkeit ist, ein kanonisches Modell besitzt, kennt man die Antwort auf 7.2 nicht. So kann man bisher nicht entscheiden, ob eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira Dimension $-\infty$ existiert, deren kanonische Garbe numerisch positiv ist.

Benutzt man die Theorie der Flächen (4.3,b)) so erhält man aus 4.6,B)

Folgerung 7.3. Ist V eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) = -\infty$ und $g_1(V) \geqslant 1$, so haben 7.1 und 7.2 eine positive Antwort.

Eine entprechende Folgerung für vier dimensionale Mannigfaltigkeiten können wir nicht hinschreiben, da wir die Antwort auf 7.2 nicht für alle drei dimensionalen Mannigfaltigkeiten kennen.

Für den Fall der Kodaira Dimension null erhalten wir aus 4.6,A)

Folgerung 7.4. Ist V eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit, $\kappa(V) = 0$ und $g_1(V) \geqslant \dim(V) - 2$, so existiert eine Mannigfaltigkeit V', birational zu V, und ein $\mu > 0$, so daß $\omega_{V'}^{\mu} = \mathcal{O}_{V'}$ ist.

Damit ist das in 1.3 gesuchte kanonische Modell in diesem Spezialfall gefunden - sogar in der Menge der Mannigfaltigkeiten. Auch 7.1 ist in diesem Fall trivialerweise richtig. Bemerken wir noch, daß eine positive Antwort auf 7.1 für Mannigfaltigkeiten der Kodaira Dimension null gerade sagt, daß eine Zariski Zerlegung der kanonischen Garbe (1.4) existiert, deren positiver Teil $P = \mathcal{O}_V$ ist.

Wir beenden diesen Paragraphen mit Kawamatas Charakterisierung abelscher Mannigfaltigkeiten, die direkt aus 4.5 folgt.

Folgerung 7.5. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira Dimension null. Dann ist $g_1(V) \leq n$ und $g_1(V) = n$ genau dann, wenn V birational zu einer abelschen Mannigfaltigkeit ist.

§ 8 Höhere Differentialformen

In den bisherigen Abschnitten haben wir über die Kodaira Dimension und die Irregularität geredet, das heißt, über multi - n - Formen und eins - Formen. Beide sind mit Abbildungen verbunden, mit Iitakas Faserung (3.2) und mit der Albanese Abbildung (4.1) . Wie kann man die höheren Differentialformen betrachten, zum Beispiel zwei - Formen auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Kodaira Dimension null? Beginnen wir mit dem folgenden Lemma, welches man aus der Serre - Dualität und dem Verhalten der Euler Poincaré Charakteristik unter étalen Morphismen erhält.

Lemma 8.1. Es sei V eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit (oder eine Varietät mit nur rationalen Gorenstein - Singularitäten), so daß $\omega_V^\mu = \mathcal{O}_V$ ist für ein $\mu > 0$. Dann ist $\chi(\mathcal{O}_V) = 0$.

Bemerkt man, daß ein Faserbündel elliptischer Kurven über einer abelschen Fläche trivial ist, falls seine kanonische Garbe einen Schnitt hat, so erhält man die folgende Tabelle der möglichen Werte der g_i aus 7.4 und 8.1 (siehe [23]).

Proposition 8.2. Jede drei dimensionale Mannigfaltigkeit V mit $\kappa(V) = 0$ und $g_1(V) > 0$ ist birational zu einer der folgenden:

g_1	g_2	g_3	Struktur
3	3	1	abelsche Mannigfaltigkeit
2	1	0	étales Faserbündel elliptischer Kurven über einer abelschen Fläche
1	1	1	étales Faserbündel abelscher Flächen oder von K 3 Flächen über einer [illegible]

1	0	0	étales Faserbündel über einer elliptisch- Kurve mit Faser F , $\kappa(F) = 0$

P. Wilson hat vor kurzem in [33] folgende Verallgemeinerung von 8.1 erhalten .

Satz 8.3. Es sei V eine drei dimensionale Mannigfaltigkeit (oder eine Varietät mit nur Terminalen Gorenstein - Singularitäten), $\kappa(V) = 0$ und ω_V sei numerisch positiv. Dann ist $\chi(\mathcal{O}_V) = 0$. Insbesondere folgt aus $g_1(V) = 0$, daß $g_2(V) = 0$ und $g_3(V) = 1$ ist.

Diese Ergebnisse, ebenso wie der erste Teil von 7.5 , beantworten in Spezialfällen eine Vermutung Uenos ([23]).

Problem 8.4. Es sei V eine n dimensionale Mannigfaltigkeit der Kodaira Dimension null und $E \subseteq \Omega^i_V$ eine Untergarbe vom Rang r . Ist dann $\dim(H^0(V , E)) \leq r$?

Tatsächlich hat Ueno nur den Fall $E = \Omega^i_V$ betrachtet, aber die Versuche, 8.4 für drei dimensionale Mannigfaltigkeiten zu behandeln, legen obige Präzisierung nahe. T. Mabuchi hat in [32] 8.4 im positiven Sinne beantwortet für $n = 3$, $i = 2$ und $r = 1$. Damit bleibt (für drei dimensionale Mannigfaltigkeiten) das Problem, Rang zwei Untergarben von Ω^2_V zu behandeln. Man kann sich überlegen, daß eine positive Antwort auf das Adjunktionsproblem 7.1 auch in diesem Fall eine Antwort auf 8.4 geben würde.

Literatur

Grundlagen der Geometrie

[1] Griffiths, P.; Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley - Interscience 1978

[2] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. New York - Heidelberg - Berlin: Springer 1977

Zur Klassifikationstheorie der Flächen

[3] Beauville, A.: Surfaces Algébriques Complexes. astérisque 54. Société Mathématique de France 1978

[4] Bombieri, E.; Husemoller, D.: Classification and Embeddings of Surfaces. in: Algebraic Geometry, Arcata 1974. Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 29 (1975) 329 - 420

Zum stetigen Teil der Klassifikation

[5] Mumford, D.; Fogarty, J.: Geometric Invariant Theory - - Second Enlarged Edition. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1982 = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34

Zur Konstruktion des kanonischen Modelles

[6] Kawamata, Y.: Elementary contractions of algebraic 3-Folds. Manuskript 1983

[7] Mori, S.: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Ann. of Math. 116 (1982) 133 - 176

[8] Mori, S.: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. in [34] 155 - 190

[9] Reid, M.: Minimal models of canonical 3-Folds. in [35] 131 - 180

Numerisch positive Garben und die Zariski Zerlegung

[10] Benveniste, X.: Sur la décomposition de Zariski en dimension 3 . Notes aux C.R.A.S. 295 (Sept. 1982) 107 - 110

[11] Fujita, T.: Semipositive line bundles. Manuskript 1982

[12] Kawamata, Y.: A generalization of Kodaira - Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann. 261 (1982) 43 - 46

[13] Viehweg, E.: Vanishing theorems. J. reine u. angew. Math. 335 (1982) 1 - 8

[14] Zariski, O.: The theorem of Riemann - Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. Ann. of Math. 76 (1962) 560 - 615

Zur Struktur des kanonischen Ringes

[15] Benveniste, X.: Sur la finitude de l'anneau canonique de certaines variétés de type general. Manuskript 1982. erscheint in inventiones math.

[16] Kawamata, Y.: On the finiteness of generators of a pluri - canonical ring for a 3 - fold of general type. Manuskript 1982.

[17] Reid, M.: Canonical 3 - folds. in: Géométrie Algébrique. Angers 1979.Sijthoff & Noordhoff Int. Publishers. 273 - 310

[18] Wilson, P.: On the canonical ring of algebraic varieties. Compositio Math. 43 (1981) 365 - 385

Grundlagen der Klassifikationstheorie und die Struktur der Albanese Abbildung (siehe auch die Literaturangaben in [19])

[19] Esnault, H.: Classification des variétés de dimension 3 et plus. Séminaire Bourbaki (Fév. 1981) n° 568.

in: Lecture Notes in Math. 901. Berlin - Heidelberg - - New York: Springer 1981. 111 - 131

[20] Iitaka, S.: On D-dimension of algebraic varieties. J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 356 - 373

[21] Kawamata, Y.; Viehweg, E.: On a characterization of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties. Compositio Math. 41 (1980) 355 - 359

[22] Ueno, K.: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Lecture Notes in Math. 439. Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1975

[23] Ueno, K.: Birational geometry of algebraic threefolds. in : Géométrie Algébrique. Angers 1979. Sijthoff & Noordhoff Int. Publishers . 311 - 323

Zur Kodaira Dimension von Faserräumen (siehe auch die Literaturangaben in [19])

[24] Fujita, T.: On Kähler fiber spaces over curves. J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 779 - 794

[25] Kawamata, Y.: Characterization of abelian varieties. Compositio Math. 43 (1981) 253 - 276

[26] Kawamata, Y.: Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves. inventiones math. 66 (1982) 57 - 71

[27] Kawamata, Y.: Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces. Manuskript 1981. erscheint in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo

[28] Levine, M.: Pluri-canonical divisors on Kähler manifolds. Manuskript 1983. erscheint in inventiones math.

[29] Viehweg, E.: Klassificationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei. Compositio Math. 41 (1980) 361 - 400

[30] Viehweg, E.: Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces. in [35] 329 - 353

[31] Viehweg, E.: Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension,II : The local Torelli map. Manuskript 1982. erscheint in [36]

<u>Differentialformen auf drei dimensionalen Mannigfaltigkeiten</u>

[32] Mabuchi, T.: Invariant β and uniruled threefolds. J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982) 503 - 554

[33] Wilson, P.: On regular threefolds with $\kappa = 0$. Manuskript 1983

<u>Tagungsberichte, die sich mit der Klassifikationstheorie befassen</u>

[34] Algebraic Threefolds, Proceedings, Varenna 1981. Lecture Notes in Math. 947. Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1982

[35] Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Proceedings, Tokyo 1981. Advanced Studies in Pure Math. 1 . Kinokuniya Comp. & North - Holland Pub. Comp. 1983

[36] Taniguchi Symposium on Classification Theory, Katata 1982. erscheint in der Serie: Progress in Math. Boston - Basel - Stuttgart : Birkhäuser