Fonctions hypergeometriques en plusieurs variables et espaces des modules de varieties abeliennes

Paula Beazley Cohen et
Jürgen Wolfart

Paula Beazley Cohen
U.R.A. 747 au CNRS
Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75005 Paris

France

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

Jürgen Wolfart
Mathematisches Seminar der
Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 10
D-6000 Frankfurt a.M. 1

FRG

MPI / 92-8

FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES EN PLUSIEURS VARIABLES ET ESPACES DES MODULES DE VARIETES ABELIENNES.

Paula Beazley Cohen et Jürgen Wolfart

Summary: The monodromy groups of the Appell-Lauricella functions F_1 in several variables can be discontinuous, but this does not in general entail that they be arithmetically defined ([DM][M]). Nonetheless, we associate to them families of abelian varieties for which they play a role similar to that of modular groups. We obtain in this way natural modular embeddings of them into arithmetic groups, giving applications to automorphic functions, transcendence questions and to the classification of the algebraic functions among the functions F_1.

§0 Introduction

Les groupes de monodromie des fonctions hypergéométriques en plusieurs variables sont particulièrement intéressants pour la théorie des groupes discontinus: Parmi eux on trouve les seuls exemples actuellement connus de l'existence de groupes non-arithmétiques d'action discontinue sur des domaines complexes symétriques bornés irréductibles en dimension supérieure à 1 ([DM][M][Sa]), à savoir sur des boules complexes B. Comme objectif principal de cet ouvrage-ci nous allons montrer que ces groupes Δ sont néanmoins très proches aux groupes arithmétiques. D'une part c'est relativement simple de plonger un tel groupe Δ dans un groupe Γ modulaire, donc arithmétique, agissant sur une puissance B^m de B. Ici, B^m est le revêtement universel d'une certaine variété de Shimura, espace des modules des variétés abéliennes à multiplication complexe (CM) d'un certain type généralisé. D'autre part, il existe un plongement beaucoup moins évident, à savoir une injection analytique de B dans B^m qui commute aux actions de Δ et de Γ (Théorème 1,§2). La construction de ce plongement modulaire s'inspire d'une interprétation de B comme espace de paramètres d'une certaine sous-famille de variétés abéliennes de ce type CM généralisé.

On peut espérer que ce plongement modulaire rend ces groupes non-arithmétiques accessibles aux techniques arithmétiques de la théorie des groupes modulaires. On étudie par exemple – comme on l'a déjà fait dans le cas analogue en dimension 1 (fourni par les groupes Fuchsiens triangulaires [CoWo1]) en poursuivant un problème de transcendance posé par S. Lang [L1] – la normalisation sur le corps des nombres algébriques de la différentielle de l'application uniformisante dans un ensemble de points fixes du groupe de monodromie Δ. Ces points fixes sont reliés au moyen du plongement modulaire aux points de multiplication complexe d'un espace des modules de variétés abéliennes. En effet les constantes de normalisation sont des quotients de certaines périodes sur des variétés abéliennes de type CM (Théorèmes 2 et 3;§6), d'où résulte leur transcendance (voir les remarques après le Corollaire 4,§6). Une variante des techniques introduites ici donne une classification complète des groupes de monodromie finis et des groupes euclidéens discontinus (Théorèmes 4,§7, et 5,§8).

Presque partout dans ce travail nous nous bornerons au cas de la dimension deux pour éviter des notations trop compliquées. Pour la plupart des considérations, la généralisation aux dimensions supérieures ne pose aucun problème; on ne connait d'ailleurs qu'un seul exemple d'un groupe de monodromie Δ non-arithmétique d'action discontinue en dimension supérieure à 2 [DM]. Les résultats principaux de cet article-ci ont déjà été annoncés dans [CoWo2], et on trouvera une version étendue des deux derniers paragraphes (§§7,8) dans [CoWo3].

Au §1, on introduit les fonctions hypergéométriques en deux variables et le problème associé d'uniformisation d'un domaine complexe auxquels les résultats de cet article s'appliquent. On rappelle l'identification d'un critère, dû à Deligne-Mostow [DM], Mostow [M], Picard [P1], Terada [Te1], sur les paramètres de ces fonctions qui assure une uniformisation du domaine par la boule de dimension deux et l'action discontinue de son groupe de revêtement. Au §2, on annonce le résultat principal de cet article sur le plongement du revêtement universel et du groupe de monodromie d'un domaine hypergéométrique en dimension deux dans ceux d'une certaine variété de Shimura. Le plongement au niveau de l'espace est dit modulaire, car il est compatible à l'action de ces groupes de monodromie. Au §3, on étudie en détail la construction du plongement modulaire pour le sous-ensemble générique du revêtement universel compris des images, par l'application développante, des points du domaine hypergéométrique réguliers pour les équations différentielles hypergéométriques uniformisantes. La démonstration fait appel à la théorie de la multiplication complexe. L'extension de l'application développante aux surfaces caractéristiques du domaine est le sujet du §4, et le comportement du plongement modulaire dans les images des singularités des équations différentielles sur ces surfaces est traité au §5. Au §6, on identifie les constantes qui interviennent dans la normalisation de la tangente à l'application de revêtement aux images des singularités. En particulier il faut comprendre le comportement analytique de l'application et savoir évaluer ses derivées à ces points fixes du groupe de monodromie (dont on ne considère que les points fixes non-paraboliques). On applique ces résultats à la démonstration de l'algebraicité du corps de définition du morphisme quotient. Une variante des méthodes de cet article nous permet au §7 d'étendre la liste des fonctions hypergéométriques algébriques de H. A. Schwarz aux fonctions en plusieurs variables. Au §8, on étudie les groupes de monodromie associés aux surfaces hypergéométriques d'Appell dans le cas d'un paramètre entier.

Les auteurs remercient l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, l'Institut-Max-Planck für Mathematik, Bonn, et le Macquarie University, Sydney, de leur hospitalité; une bonne partie des recherches y ont eu lieu. Les auteurs sont particulièrement reconnaissants des nombreuses invitations mises à la disposition d'un d'entre nous par le groupe d'études "Problèmes Diophantiens" dirigé par M. Waldschmidt à l'Institut Henri Poincaré, Paris.

§1 Fonctions hypergéométriques en deux variables

Les fonctions hypergéométriques d'Appell en deux variables, étudiées dans de nombreux ouvrages (voir par exemple [AK],[P1,2],[Te1,3],[DM],[M],[Y]), sont des solutions d'un système d'équations différentielles partielles d'ordre deux à singularités régulières provenant de l'uniformisation ramifiée d'un certain domaine complexe. Dans ce numéro, on rappelle quelques aspects de la théorie de ces fonctions dont on aura besoin dans la suite. Soient $0<\mu_0,\dots,\mu_4<1$ cinq nombres rationnels de plus petit dénominateur commun N satisfaisants à la condition $\sum_{j=0}^{4}\mu_j=2$. On introduit le système $F_1(\mu)$ d'équations différentielles partielles que voici,

$$x(1-x)(\partial^2u/\partial x^2)+y(1-x)(\partial^2u/\partial x\partial y)$$
$$+(c-(a+b+1)\,x)(\partial u/\partial x)-(by)(\partial u/\partial y)-abu=0$$
$$y(1-y)(\partial^2u/\partial y^2)+x(1-y)(\partial^2u)/(\partial y\partial x)$$
$$+\ (c-(a+b'+1)y)(\partial u/\partial y)-(b'x)(\partial u/\partial x)-ab'u=0$$
$$(x-y)(\partial^2u/\partial x\partial y)-b'(\partial u/\partial x)+b(\partial u/\partial y)=0.$$

où $a=1-\mu_4, b=\mu_2, b'=\mu_3, c=2-(\mu_1+\mu_4)$. La troisième équation est une conséquence des deux premières équations. (Le système $F_1(\mu)$ est également bien défini pour des valeurs complexes des paramètres a,b,b',c avec $c\neq 0,-1,-2,\ldots$). Hors de ses singularités (régulières, voir par exemple [Te1],[Y]), qui se trouvent le long des surfaces caractéristiques $x=y$ et $x,y=0,1,\infty$, une base de solutions de ce système est décrite par des intégrales linéairement indépendantes $\int_{C_0}\omega, \int_{C_1}\omega, \int_{C_2}\omega$ de l'expression

$$\omega=\omega(x,y)=u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}\,du,$$

sur des cycles de Pochhammer C_0, C_1 et C_2 pris autour de certains $g,h\in\{0,1,x,y,\infty\}$, en évitant les points de ramification. Pour fixer les idées, choisissons respectivement C_0,C_1,C_2 autour de $1,\infty$; $0,x$; et $0,y$. La forme différentielle ω est de première espèce sur une courbe projective non-singulière $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(x,y)$ dont un modèle affine s'écrit

$$w^N=u^{N\mu_0}(u-1)^{N\mu_1}(u-x)^{N\mu_2}(u-y)^{N\mu_3}.$$

Une solution locale du système $F_1(\mu)$ est fournie sur l'ouvert $|x|<1$, $|y|<1$ par l'expression classique $F_1(x,y)=F_1(a,b,b',c;x,y)$ qui s'écrit, autour de $(x,y)=(0,0)$ où elle prend la valeur 1, comme la série de Taylor

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\{(a,m+n)(b,m)(b',n)/(c,m+n)m!n!\}x^my^n$$

où $(w,n)=\Gamma(w+n)/\Gamma(w)$ pour tout nombre complexe w et tout entier n. En forme d'intégrale de type Euler, on a (voir par exemple [Y], p70)

$$F_1(a,b,b',c;x,y) = B(1-\mu_1,1-\mu_4)^{-1}\int_1^{\infty}\omega,$$

où $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ pour p,q nombres complexes. On peut calculer explicitement l'action du groupe de monodromie de $F_1(\mu)$ par rapport à la base de solutions déjà introduite en contrôlant les prolongements analytiques correspondants de ses éléments suivant la méthode, valable pour toutes les dimensions, dans [Te1] (voir aussi [Y,p150] - il faut faire attention de veiller sur les différences de notation par rapport aux nôtres, et de corriger son choix de base). Le prolongement analytique en x suivant les cycles dans $\mathbb{C}-\{0,1,y\}$, qui va déformer les chemins d'intégration et changer les branches choisies pour définir ω, définit un homomorphisme du groupe $\pi_1(\mathbb{C}-\{0,1,y\})$ dans le groupe linéaire de l'espace des solutions. Un autre homomorphisme se définit en échangeant x et y. Ces deux images engendrent le groupe de monodromie affine Δ_0 dans $GL(3,\mathbb{C})$ d'image projectif Δ dans $PGL(3,\mathbb{C})$. On obtient de cette façon une représentation du groupe fondamental de l'espace des points réguliers (non singuliers). On a le résultat suivant dont une version faible a déjà été formulée par Picard [P] (voir aussi Terada [Te1]).

<u>Théorème:</u> ([DM][M]) Soient $0<\mu_j<1, j=0,\dots,4$ cinq nombres rationnels de plus petit dénominateur commun N satisfaisant à la condition $\sum_{j=0}^{4}\mu_j=2$. Il existe des éléments non-nuls θ_1,θ_2 de $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/N})$ tels que sur l'ensemble des points réguliers $Q=\{(x,y)\in\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1 \mid x\neq y,\ x,y\neq 0,1,\infty\}$, l'application développante

$$\psi:(x,y)\mapsto(\theta_1\int_{C_1}\omega(x,y),\theta_2\int_{C_2}\omega(x,y),\int_{C_0}\omega(x,y))$$

est localement biholomorphe, $PGL(3,\mathbb{C})$-multivalente et non-dégénérée. L'image est un sous-ensemble dense de la boule $B_2=\{(z_1,z_2,z_0)\in\mathbb{P}_2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<|z_0|^2\}$. Le groupe de monodromie Δ opère sur B_2, et cette action est discontinue si pour tout $i\neq j\in\{0,1,2,3,4\}$ on a

$$(1-\mu_i-\mu_j)^{-1}\in\begin{Bmatrix}(1/2)\mathbb{Z}\cup\{\infty\} & \text{si } \mu_i=\mu_j\\ \mathbb{Z} & \text{sinon}\end{Bmatrix}.$$

A permutation des μ_j près, on obtient de cette façon 49 groupes discontinus Δ de Picard-Terada-Deligne-Mostow (P.T.D.M.). Parmi ces 49 groupes, il y en a 15 qui ne sont pas arithmétiquement définis. Nos méthodes s'appliquent aussi bien à des exemples récemment trouvés par Sauter [Sa] dont 4 sont non-arithmétiques. L'application développante ψ s'étend à l'espace plus grand des points stables Q_{st} [DM] qui est le quotient de l'espace suivant par l'action diagonale de $PSL(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_1^5$:

$$\{x=(x_0,\dots,x_4)\in\mathbb{P}_1^5\}-\mathcal{S}$$

où

$$\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{P}_1^5: \exists\, x_i=x_j, i\neq j, \mu_i+\mu_j\geq 1\}\cup\{x\in\mathbb{P}_1^5: \exists\, x_i=x_j=x_k, \#\{i,j,k\}=3, \mu_i+\mu_j+\mu_k\geq 1\}$$
$$\cup\{x\in\mathbb{P}_1^5: \exists\, x_i=x_j=x_k=x_l, \#\{i,j,k,l\}=4\}.$$

Dans la suite, lorsque l'on parlera de l'image dans B_2 d'un point de l'espace Q_{st}, on entendra toujours son image par l'application développante. L'espace Q_{st} porte une structure complexe naturelle, et après l'adjonction d'un nombre fini de points semi-stables correspondants aux pointes de Δ, même la structure d'une variété algébrique projective (plus précisement, d'un $\mathbb{P}_2$ éclaté en au plus quatre points en position générale). Localement, on peut normaliser Q_{st} par l'action de $PSL(2,\mathbb{C})$ de telle façon que trois des x_j prennent des valeurs respectives $0,1,\infty$. Si l'on désigne les deux autres par x et y, on retrouve les définitions données au début. Globalement, on a dix surfaces caractéristiques $S(ij)$ données par les droites $x_i=x_j$. Si $(\mu_i+\mu_j)<1$, nous désignons par $S_{st}(ij)$ la partie stable $S(ij)\cap Q_{st}$, tandis que $S_{st}(ijk)$ désigne le point $x_i=x_j=x_k$ de Q_{st} si $(\mu_i+\mu_j+\mu_k)<1$. On traitera de l'extension de ψ aux surfaces caractéristiques au §4. L'espace Q_{st} est homéomorphe à un revêtement fini du quotient B_2/Δ. Si, pour tout $i\neq j$, la condition que $(1-\mu_i-\mu_j)^{-1}$ soit un entier est satisfaite, alors hors des points fixes de Δ l'application développante ψ se prolonge, dans son domaine de définition, en l'inverse de la projection canonique $\pi: B_2 \to B_2/\Delta$. Lorsque les paramètres satisfont aux critères moins restrictifs pour une action discontinue donnés dans le Théorème, l'application développante n'est plus l'inverse de la projection canonique. Sous ces conditions de demi-intégralité ou dans les exemples de Sauter [Sa], x et y ne sont que des fonctions algébriques des composantes de cette projection qui sont elles des fonctions Δ-automorphes sur la boule.

Une démonstration du Théorème à partir d'une condition plus restrictive sur les paramètres et qui utilise des travaux de Hirzebruch et Höfer sur les revêtements des surfaces algébriques est donnée dans [Y], où la motivation est principalement l'étude de certains orbifolds hypergéométriques.

§2 Annonce du résultat principal sur le plongement modulaire

Avec les notations du §1, on annonce le résultat suivant sur le plongement modulaire.

Théorème 1: Soit Δ un groupe de P.T.D.M.. Il existe un entier positif m, un groupe arithmétique Γ agissant sur la puissance B_2^m de la boule à deux dimensions, et un plongement, dit modulaire, qui consiste en une injection analytique $F:B_2 \to B_2^m$ compatible à une inclusion de groupes $h:\Delta \to \Gamma$ de sorte que $F(T(\tau))=h(T)F(\tau)$ pour tout $T\in\Delta$ et tout $\tau\in B_2$. L'application F induit un morphisme $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnel de $\overline{B_2/\Delta}$ à $\overline{B_2^m/\Gamma}$, où ces espaces quotients compactifiés sont munis de leurs structures naturelles de variétés projectives définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La variété $\overline{B_2^m/\Gamma}$ est la compactification d'une variété de Shimura paramétrisant des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes à multiplication complexe, de type généralisé, par un corps cyclotomique.

Dans l'écriture projective, les composantes de l'application développante ψ composent une base de solutions du système $F_1(\mu)$, d'où une représentation matricielle du groupe de monodromie de ce système à coefficients dans $K=\mathbb{Q}(\zeta),\zeta=\zeta_N=e^{2i\pi/N},N=\text{p.p.d.c.}(\mu_0,\dots,\mu_4)$. Comme on le verra au §3, le plongement modulaire au niveau des groupes s'écrit en termes de certains plongements galoisiens appliqués à ces coefficients. Le plongement modulaire au niveau des espaces est obtenu à partir de l'image de la continuation analytique de l'application développante ψ, en prenant non seulement ω dans l'écriture du Théorème au §1 mais aussi $m-1$ autres formes différentielles de première espèce sur une certaine sous-variété de la variété Jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathfrak{X})$. Chacune de ces formes est propre pour l'action induite par l'automorphisme $(u,w)\to(u,\zeta^{-1}w)$. La variété $\overline{B_2^m/\Gamma}$ est la compactification d'une variété de Shimura paramétrisant des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes à multiplication complexe des types généralisés trouvés implicitement déjà dans [CW],[Sie],[ST]. Pour tout entier $d\geq5$, un résultat analogue reste valable pour les fonctions hypergéométriques en $d-3$ variables avec un groupe de monodromie Δ agissant sur la boule en dimension $d-3$. On associe aux fonctions hypergéométriques des familles de variétés abéliennes au moyen de leur écriture en tant qu'intégrales de type Euler (voir [Te1]) et on étudie le plongement modulaire hors des singularités de leurs équations différentielles (ou bien hors des points fixes de Δ).

§3 Démonstration du résultat principal aux images des points réguliers

Cette section traite essentiellement d'une généralisation au cas de deux variables de la troisième construction dans [CoWo1,§3] du plongement modulaire pour le cas d'une variable (voir aussi [Wo]). Commençons par rappeler pour la suite quelques définitions de la théorie des variétés abéliennes à multiplication complexe. Un type de multiplication complexe du corps cyclotomique $K=\mathbb{Q}(\zeta),\zeta=\zeta_N=e^{2i\pi/N}$,$N$ un entier positif, est un système de représentants des plongements de K dans $\bar{\mathbb{Q}}$ modulo la conjugaison complexe sur K. Pour $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, soit σ_n l'automorphisme de K qui envoie ζ sur ζ^n. Un type de multiplication complexe généralisé est une classe Φ de représentations rationnelles de K, déterminée par une somme formelle $\sum_{i=1}^{D}(r_{n_i}\sigma_{n_i}+r_{-n_i}\sigma_{-n_i})$ sur des représentants $n_1,\dots,n_D,D=\varphi(N)/2$ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\{\pm1\}$ où chaque nombre $(r_{n_i}+r_{-n_i})$ équivaut le même entier positif*. Une polarisation d'une variété abélienne A est un choix de forme de Riemann sur A. Elle détermine une involution de l'algèbre $\mathrm{End}_0(A)=\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ des endomorphismes de A. Une variété abélienne polarisée (A,C) est de type de multiplication complexe généralisé (K,Φ) (au sens de Shimura) s'il existe un plongement ι de K dans $\mathrm{End}_0(A)$ tel que la représentation rationelle induite de K sur les 1-formes holomorphes de A soit équivalente à Φ et si l'involution induite par la polarisation C échange $\iota(a)$ et $\iota(\bar{a})$. A tout ensemble de cinq nombres rationnels $\{\mu_j\}_{j=0,\dots,4}$ satisfaisant à $0<\mu_j<1,j=0,\dots,4,\sum_{j=0}^{4}\mu_j=2$, on peut associer une famille de courbes algébriques et un type de multiplication complexe généralisé (d'après [Sie],[Shi1],[CW]) de la façon suivante. Soit $N\geq3$ le plus petit dénominateur commun des μ_j et $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(x,y),x\neq y,x,y\neq0,1,\infty$, la courbe non-singulière projective, introduite déja au §1, dont un modèle affine s'écrit $w^N=u^{N\mu_0}(u-1)^{N\mu_1}(u-x)^{N\mu_2}(u-y)^{N\mu_3}$. On note sa Jacobienne par $\mathrm{Jac}(\mathfrak{X})$. Pour chaque diviseur propre f de N, l'application $(u,w)\mapsto(u,w^{N/f})=:(u,w')$ envoie ce modèle affine sur celui, donné par $(w')^f=u^{N\mu_0}(u-1)^{N\mu_1}(u-x)^{N\mu_2}(u-y)^{N\mu_3}$, d'une courbe non-singulière projective à corps de fonctions strictement contenu dans le corps de fonctions de $\mathfrak{X}$ et induit un morphisme m_f de $\mathrm{Jac}(\mathfrak{X})$ sur sa Jacobienne. On note par $T=T(x,y)$ le tore donné par la composante connexe à l'origine de l'intersection $\bigcap_{f|N}(\mathrm{Ker}\, m_f)$ qui est le noyau commun de ces homomorphismes. Le tore T est une variété abélienne principalement polarisée. L'automorphisme $\chi:(u,w)\mapsto(u,\zeta^{-1}w)$ du modèle affine de $\mathfrak{X}$

* (et φ désigne la fonction d'Euler)

induit une action de K sur T qui situe ce corps dans l'algèbre $\mathrm{End}_0(T)=\mathrm{End}(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ et un automorphisme χ^* de l'espace des formes différentielles de première espèce $H^0(T,\Omega)$ sur T. Pour $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, soit V_n le sous-espace des éléments de $H^0(T,\Omega)$ qui sont K-propres pour l'automorphisme χ^* et dont la valeur propre vaut ζ^n, donc sur lesquelles K agit comme multiplication par $\sigma_n K$. La dimension de V_n est égale (voir par exemple [CW]) à $r_n=-1+\sum_{j=0}^{4}\langle n\mu_j\rangle$, où $0\leq\langle a\rangle<1$, pour un nombre réel positif a, désigne sa partie fractionnaire. Pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on a $r_n+r_{-n}=3$. L'espace $H^0(T,\Omega)$ s'identifie à la somme directe des V_n et donc la dimension complexe de T est égale à $3\varphi(N)/2$. La variété abélienne T est donc à multiplication complexe généralisé par K de type $\Phi=\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} r_n\sigma_n$ décrivant l'action induite de K sur $H^0(T,\Omega)$. Or les variétés abéliennes principalement polarisées à multiplication complexe généralisée par K de type Φ composent une famille paramétrisée par l'espace symétrique B_2^m de dimension $2m=\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*/\{\pm1\}} r_n\cdot r_{-n}$. On vérifie bien que l'entier m n'est rien d'autre que le nombre de sous-espaces propres de $H^0(T,\Omega)$ de dimension 1. Soit M l'ensemble des représentants n_j des classes dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ avec $r_{n_j}=1, j=1,\dots,m$. Pour $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on introduit l'expression,

$$\omega^{(n)}=(u^{[n\mu_0]}(u-1)^{[n\mu_1]}(u-x)^{[n\mu_2]}(u-y)^{[n\mu_3]}\,du)/w^n$$
$$=u^{-\langle n\mu_0\rangle}(u-1)^{-\langle n\mu_1\rangle}(u-x)^{-\langle n\mu_2\rangle}(u-y)^{-\langle n\mu_3\rangle}du.$$

Pour $j=1,\dots,m$, la forme différentielle $\omega^{(n_j)}$ est de première espèce, propre pour l'action de χ^* à valeur propre ζ^{n_j} et engendre donc l'espace V_{n_j}. On peut supposer que $n_1=1$, et donc que $\omega^{(n_1)}=\omega=du/w$. Soient C_0,C_1,C_2 trois éléments, indépendants sur $\mathbb{Z}[\zeta]$, du groupe des cycles $H_1(T,\mathbb{Z})$. A des $PGL(3,K)$-transformations près, pour chaque $j=1,\dots,m$ les trois périodes $\int_{C_0}\omega^{(n_j)},\int_{C_1}\omega^{(n_j)},\int_{C_2}\omega^{(n_j)}$ servent de coordonnées projectives dans la boule B_2. Comme on l'a déjà remarqué, on peut représenter les cycles générateurs $C_i, i=0,1,2$, par des cycles de Pochhammer indépendants [K1] sur $\mathcal{X}$ autour de trois paires de points de ramification $u=0,1,x,y,\infty$ du revêtement naturel $\mathcal{X}\to\mathbb{P}_1$, donné sur le modèle affine par $(u,w)\mapsto u$. On a choisi pour simplifier des cycles autour de $1,\infty;0,x;0,y$. Comme dans le cas classique des fonctions hypergéométriques de Gauss [K1], on peut remplacer ces trois périodes par les intégrales $\int_1^\infty\omega^{(n_j)},\int_0^x\omega^{(n_j)},\int_0^y\omega^{(n_j)}$ à des constantes cyclotomiques près. Il existe donc éléments $\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}, j=1,\dots,m$, de K tels qu'à l'image d'un point $\psi(x,y)$, (x,y) non-singulier, on a une application entre espaces symétriques,

$$F:B_2\to B_2^m$$
$$(\theta_1^{(1)}\int_{C_1}\omega,\theta_1^{(2)}\int_{C_2}\omega,\int_{C_0}\omega)\mapsto(\theta_j^{(1)}\int_{C_1}\omega^{(n_j)},\theta_j^{(2)}\int_{C_2}\omega^{(n_j)},\int_{C_0}\omega^{(n_j)})_{j=1,\dots,m}.$$

Pour chaque $j=1,\dots,m$, l'application $PGl(3,\mathbb{C})$-multivalente ψ_j de l'espace Q des points réguliers dans B_2, définie en termes des trois périodes $\int_{C_i}\omega^{(n_j)}, i=0,1,2$ est localement bi-holomorphe. On peut écrire l'application F dans les points réguliers comme $\psi(x,y)\mapsto(\psi_j.\psi^{-1}(\psi(x,y)))_{j=1,\dots,m}$. Dans les cas considérés dans [DM] où $(1-\mu_i-\mu_j)^{-1}\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ pour tout $i\neq j$, il est clair que F est bien défini puisque ψ^{-1} est la projection canonique $B_2\to B_2/\Delta$ (ou d'abord sa restriction aux images des points réguliers, pour l'extension voir §4 et §5). L'application F est bien définie aussi pour les groupes considérés dans [M] et [Sa], mais ce fait est moins évident. Là un sous-ensemble dense Q', qui consiste en l'ensemble Q privé de quelques sous-ensembles analytiques de codimension au moins 1, est un revêtement fini d'un sous-ensemble dense de B_2/Δ. Si l'on désigne la projection canonique $Q'\to B_2/\Delta$ par κ, alors $\kappa.\psi^{-1}$ est uniquement déterminé et par conséquent $\psi_j.\psi^{-1}=\psi_j.\kappa^{-1}.\kappa.\psi^{-1}$ l'est aussi. La holomorphie de F hors des surfaces caractéristiques résulte de la biholomorphie locale de ψ. Son injectivité est évidente. Le groupe modulaire Γ du Théorème 1 agissant sur B_2^m est celui associé à la famille de variétés abéliennes avec type de multiplication complexe généralisé $\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}r_n\sigma_n$. Deux points de B_2^m correspondent à des variétés abéliennes isomorphes si et seulement s'ils se trouvent dans la même orbite de Γ. L'action de Δ sur B_2 se fait, en termes des coordonnées $\int_{C_i}\omega, i=0,1,2,$ par prolongement analytique des représentations intégrales qui changent les branches choisies pour ω et remplacent les C_0,C_1,C_2 par d'autres cycles générateurs du $\mathbb{Z}[\zeta]$-module $H_1(T,\mathbb{Z})$ (pour une description dans le cas classique en dimension 1 voir [Kl] et pour un traitement plus récent voir [Te 1],[Te 3] ou [Y]). Autrement dit, le groupe Δ agit sur B_2 via son action sur $H_1(T,\mathbb{Z})$ qui induit une action simultanée sur chaque $(\theta_j^{(1)}\int_{C_1}\omega^{(n_j)},\theta_j^{(2)}\int_{C_2}\omega^{(n_j)},\int_{C_0}\omega^{(n_j)})\in B_2, n_j\in M$, et donc sur B_2^m. Au moyen des différentes valeurs propres de l'action de χ^* sur les $\omega^{(n_j)}\in V_{n_j}, n_j\in M$, on vérifie bien que le groupe Δ opère (après transport de structure) sur les différentes composantes de B_2^m par des matrices dans $PGL(3,K)$, conjuguées par $\sigma_{n_j}, j=1,\dots,m$. Le plongement h est donné par l'application aux coefficients de ces matrices des plongements successifs $\sigma_{n_1},\dots,\sigma_{n_m}$. Le groupe Γ est arithmétiquement défini (voir par exemple [Shi2],[Sie]): c'est-à-dire dans ce contexte, commensurable à un sous-groupe de congruence du groupe des matrices laissant invariant le produit scalaire définissant la polarisation (un tel groupe peut être plongé dans un sous groupe de congruence d'un groupe symplectique à coefficients entiers rationnels, voir par exemple [Shi2,§§4,5]). Puisque Δ et Γ sont des groupes de co-volume fini dans B_2 et B_2^m respectivement, on a $m=1$ si et seulement si Δ est d'indice fini dans Γ, donc arithmétiquement défini lui-même.. Dans ce cas on a $F=id_{B_2}$,$h=id_{\Delta}$.

Exemples:

1) Le cas $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}=(1/3,1/3,1/3,1/3,2/3)$, traité en détail déjà par Picard et profondément par Holzapfel [Ho] correspond à la fonction d'Appell $F_1(1/3,1/3,1/3,1\ ;\ x,y)$ dont le groupe de monodromie Δ est arithmétiquement défini car $N=3$, $r_1=1$, $r_{-1}=2$.

2) Le cas $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}=(3/10,\ 3/10,\ 3/10,\ 11/30,\ 22/30)$ (c'est le numéro 11 de la liste de Mostow [M], p102) correspond à la fonction $F_1(4/15,\ 3/10,\ 11/30,\ 29/30\ ;\ x,y)$ et satisfait aux conditions de demi-intégralité. Son type de multiplication complexe par $K=\mathbb{Q}(\zeta_{30})$ est déterminé par les multiplicités $r_1=1, r_{-1}=2, r_7=0, r_{-7}=3, r_{11}=0, r_{-11}=3$, $r_{13}=3, r_{-13}=0$ donc Δ est arithmétique dans ce cas aussi (contrairement à l'information donnée dans [M], de même pour le cas $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}=(7/18,7/18,7/18,\ 5/18,\ 10/18)$ dans [M], p104).

3) Le cas $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}=(3/12,\ 7/12,\ 3/12,\ 5/12,\ 6/12)$ correspond à la fonction (c'est le numéro 18 de la liste dans [DM]) $F_1(1/2,\ 1/4,\ 5/12,11/12\ ;\ x,y)$ et donne un groupe de monodromie Δ non-arithmétique et un plongement modulaire non-trivial avec $N=12$, $r_1=1$, $r_{-1}=2$, $r_5=1$, $r_{-5}=2$. Les différentielles $\omega^{(n_j)}$, $n_j \in M$, qui interviennent dans la définition de l'application F sont

$$\omega^{(1)}=\omega=u^{-3/12}(u-1)^{-7/12}(u-x)^{-3/12}(u-y)^{-5/12}\,du,$$

et
$$\omega^{(5)}=\omega=u^{-3/12}(u-1)^{-11/12}(u-x)^{-3/12}(u-y)^{-1/12}\,du.$$

4) Le cas $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}=(7/18,\ 7/18,\ 7/18,\ 7/18,\ 8/18)$ ([M],p104) correspond à la fonction $F_1(5/9,\ 7/18,\ 7/18,\ 7/6\ ;\ x,y)$ et satisfait aux conditions de demi-intégralité. Le corps de multiplication complexe qui intervient est $K=\mathbb{Q}(\zeta_{18})$ et le type de multiplication complexe donne les multiplicités $r_1=1, r_{-1}=2, r_7=2, r_{-7}=1, r_5=3, r_{-5}=0$. Le groupe Δ est donc non-arithmétique car $m=2$, et les différentielles qui interviennent dans la définition de l'application F sont

$$\omega^{(1)}=\omega=u^{-7/18}(u-1)^{-7/18}(u-x)^{-7/18}(u-y)^{-7/18}\,du,$$

et
$$\omega^{(-7)}=[u(u-1)(u-x)(u-y)]^{-5/18}\,du.$$

On trouve dans [Te 3] une liste d'exemples d'autres groupes arithmétiques et les générateurs des espaces V_n correspondants pour chaque dimension.

§4 L'application développante au voisinage des surfaces caractéristiques

L'application développante ψ se prolonge de façon naturelle dans certaines des surfaces caractéristiques. Une homographie $T\in PSL(2,\mathbb{C})$ qui transforme $0,1,x,y,\infty$ en cinq nombres complexes x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 permet par exemple de remplacer $\int_1^\infty \omega$ par $\int_{x_1}^{x_4}\omega'$, où $\omega'=\prod_{j=0}^4(u-x_j)^{-\mu_j}du$ à multiplication par des puissances rationelles des (x_k-x_j), $j,k=0,\dots,4, j\neq k$, près sans changer l'écriture projective de l'application développante. Ceci suggère de commencer plutôt par considérer les intégrales $\int_{x_i}^{x_j}\omega'$ comme des fonctions des points $(x_0,\dots,x_4)\in\mathbb{P}_1^5$ avec un triple $\{x_i,x_k,x_l\}$ composé d'éléments distincts modulo l'action diagonale de $PSL(2,\mathbb{C})$. Ce sont donc des solutions d'un système d'équations différentielles partielles linéaires, singulières dans les dix surfaces caractéristiques $S(ij)$ données par $x_i=x_j$. Désignons par $S^\circ(ij)$ cette partie de $S(ij)$ hors des autres surfaces caractéristiques. Dans un voisinage suffisament petit d'un point sur $S^\circ(ij)$, on peut choisir pour les trois éléments d'une base de solutions de $F_1(\mu)$ autour de $x_i=x_j$, deux fonctions holomorphes et soit, si $(\mu_i+\mu_j)$ n'est pas un entier, une fonction holomorphe non triviale multipliée par un facteur $(x_i-x_j)^{1-\mu_i-\mu_j}$ soit, si $(\mu_i+\mu_j)$ est un entier non négatif, une fonction à singularité logarithmique en (x_i-x_j). Par continuité ψ s'étend facilement à $S^\circ(ij)$. Si $(\mu_i+\mu_j)>1$, en enlevant les pôles dans l'écriture projective, l'image de $S^\circ(ij)$ par ψ devient un point de la boule. D'autre part, on peut ajouter à notre espace des intersections $S(ijk)=S(ij)\cap S(jk)$ où $x_i=x_j=x_k$, $\#\{i,j,k\}=3$, et $(\mu_i+\mu_j+\mu_k)<1$. L'espace naturel de définition pour ψ est donc l'espace des points stables Q_{st} déjà introduit au §1. Dans chaque point stable on peut renormaliser, par une homographie convenable, trois de ses coordonnées distinctes en $0,1,\infty$, même s'il s'agit d'une singularité. Si par exemple $(\mu_i+\mu_j)<1$, on peut prendre $i=0, j=2$, la droite $S(ij)=S(02)$ étant donnée par $x=0$. Si l'on désigne par $S_{st}(ij)$ la partie stable de $S(ij)$, alors $\psi(S_{st}(02))$ est la Δ-orbite d'une copie du disque unité plongée dans la boule. Vue comme fonction d'une variable, chaque branche de $\psi|_{S_{st}(02)}$ s'exprime en termes de l'application triangulaire composée, dans son écriture projective, de deux fonctions hypergéométriques de Gauss aux paramètres $\mu_0+\mu_2, \mu_1, \mu_3, \mu_4$, dont le groupe de monodromie est celui de l'équation différentielle associée à la fonction $F_1(a,b,b',c;0,y)=F(a,b',c;y)$. Ce groupe a pour domaine fondamental deux copies d'un triangle dont les angles sont:

$$(1-c)\pi=(1-\mu_0-\mu_2-\mu_3)\pi,$$
$$(b'-a)\pi=(1-\mu_0-\mu_2-\mu_1)\pi,$$
$$(a+b'-c)\pi=(1-\mu_0-\mu_2-\mu_4)\pi.$$

Soit $\{i,j,k,l,p\}=\{0,1,2,3,4\}$. Alors, par la condition $\sum_{j=0}^{4}\mu_j=2$, on a $(\mu_i+\mu_j)=1$ si et seulement si $(\mu_k+\mu_l+\mu_p)=1$, et on peut prolonger ψ par continuité de telle façon que $S^\circ(ij)$ et $S(klp)$ soient appliqués sur le même Δ-orbite d'un point au bord de la boule. En rajoutant à l'espace Q_{st} un point semi-stable non stable pour une telle partition, on obtient un espace Q_{sst} qui porte une structure naturelle de variété algébrique compacte (voir [DM] et [M]) et est isomorphe, dans la topologie induite par un plongement projectif, à la compactification $\overline{B_2/\Delta}$ de Satake de l'espace quotient B_2/Δ. Evidemment, il y a des choix de paramètres tels que cette condition ne soit satisfaite pour aucune partition. Dans ce cas, les espaces Q_{sst} et Q_{st} coincident et Δ est cocompact dans B_2. (Si par exemple $(\mu_i+\mu_j)<1$ pour toute paire $i\neq j, 0\leq i,j\leq 4$, il existe un isomorphisme entre Q_{st} et l'espace $\mathbb{P}_2$ éclaté dans quatre points en position générale, voir par exemple [Y,p141].) Dans les points non semi-stables où $(\mu_i+\mu_j)>1$ et $(\mu_k+\mu_l+\mu_p)<1$, l'orbite sous l'action de Δ de l'image du point semi-stable $S(klp)$ par un prolongement continu de ψ coincide avec l'orbite de l'image de $S^\circ(ij)$. Si par contre, $(\mu_i+\mu_j)<1$, $(\mu_k+\mu_l+\mu_p)>1$, des limites de ψ dans $S(klp)$ définissent un éclatement de ce point dont l'image est $\psi(S_{st}(ij))$.

§5 Comportement du plongement modulaire dans les singularités

Dans ce numéro on étudie la question de l'extension de F aux images sous l'application développante des points stables des surfaces caractéristiques. Les composantes (affines) de F sont holomorphes et bornées hors d'un sous-ensemble de B_2 de codimension au moins

1. Donc F s'étend sur B_2 comme application holomorphe d'après un théorème de Riemann, et on va appeler F cette extension aussi. Il est quand même très fructueux de déterminer explicitement l'extension de la famille $T(x,y)$ de variétés abéliennes introduite déjà au §3 aux surfaces caractéristiques. Cette extension n'est pas tout à fait évidente. Sur $S^\circ(02)$ par exemple, donc pour $x=0$, la courbe $\mathfrak{X}(x,y)$ dégénère en un modèle nonsingulier projectif $\mathfrak{X}(y)$ de la courbe $w^N = u^{N(\mu_0+\mu_2)}(u-1)^{N\mu_1}(u-y)^{N\mu_3}$. Supposons que $\mu_0 + \mu_2 \notin \mathbb{Z}$ et donc que $S^\circ(02)$ porte des singularités algébriques de ψ. On peut suivre le même procédé que celui du §3 pour associer à $\mathfrak{X}(y)$ une variété abélienne $T(y)$ à type de multiplication complexe généralisé par $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ de la forme,

$$\Phi^{(1)}=\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\bullet} r_n^{(1)}\sigma_n,$$

$$r_n^{(1)}=:-1+\langle n(\mu_0+\mu_2)\rangle+\langle n\mu_1\rangle+\langle n\mu_3\rangle+\langle n\mu_4\rangle.$$

Par la relation $r_n^{(1)}+r_{-n}^{(1)}=2$, la dimension de $T(y)$ vaut $\varphi(N)$. Si $(\mu_0+\mu_2)<1$, c'est-à-dire si $S^\circ(02)$ est contenu dans l'espace Q_{st}, alors une analyse directe montre que $F.\psi$ se prolonge de façon continue dans tout $S_{st}(02)=S(02)\cap Q_{st}$ et que l'image de $S(02)$ par cette application prolongée est le Δ-orbite d'un sous-espace linéaire de B_2^m dont les points correspondent à des variétés abéliennes $T(y)\oplus A_{02}$, où A_{02} est une variété abélienne à multiplication complexe par K au sens strict de Shimura-Taniyama [ST], donc en particulier de dimension $\varphi(N)/2$. A isogénie près, la variété abélienne A_{02} est caractérisée par son type

$$\Phi^{(0)}=\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\bullet}(\langle n\mu_0\rangle+\langle n\mu_2\rangle-\langle n(\mu_0+\mu_2)\rangle)\sigma_n.$$

Un calcul algébrique facile montre que le type de multiplication complexe générique pour la famille $T(x,y)$ est la somme des représentants des types $\Phi^{(0)},\Phi^{(1)}$. On va se servir des formules explicites pour les différentielles sur A_{02} propres sous l'action de K et définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Par exemple, $B(\mu_0,\mu_2)$ est une période de première espèce et $B(1-\mu_0,1-\mu_2)$ est une période de deuxième espèce car $(\mu_0+\mu_2)<1$. D'autre part on sait (voir par exemple [WW]) que le type de A_{02} est uniquement déterminé par ces périodes. (De la même manière, sur toute surface caractéristique stable $S^\circ(ij),(\mu_i+\mu_j)<1$, de chaque membre de la famille $T(x,y)$ on peut séparer un facteur à multiplication complexe A_{ij}). Si d'autre part $(\mu_0+\mu_2)>1$, alors l'image $S(134)$ de la droite déclatée $S(02)$ est dans l'espace Q_{st}.

Dans ce cas, la holomorphie de $F.\psi$ dans le point $S(134)$ implique qu'aucune des composantes de

$$F.\psi:(x,y)\mapsto(\theta_j^{(1)}\int_{C_1}\omega^{(n_j)},\theta_j^{(2)}\int_{C_2}\omega^{(n_j)},\int_{C_0}\omega^{(n_j)})_{j=1,\dots,m},$$

n'éclate le point $S(134)$. Au niveau des variétés abéliennes ceci résulte du fait que pour tout $j=1,\dots,m$,

$$<n_j\mu_1>+<n_j\mu_3>+<n_j\mu_4><1.$$

Cette inégalité est une conséquence du résultat suivant. On introduit la notation $\sim$ pour l'égalité mod*$\overline{\mathbb{Q}}^*$, c'est-à-dire l'égalité dans $\mathbb{C}^*/\overline{\mathbb{Q}}^*$.

<u>Lemme 1:</u> Pour les groupes de P.T.D.M. l'inégalité $(\mu_0+\mu_2)>1$ implique la condition $<n\mu_0>+<n\mu_2> >1$ pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ avec $r_n=1$.

Ce lemme découle du lemme suivant.

<u>Lemme 2:</u> Soit Δ un groupe de P.T.D.M. aux paramètres $(\mu_j)_{j=0,\dots,4}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $(\mu_0+\mu_2)>1$,

(ii) ψ envoie $S°(02)$ sur le point $\psi(S(134))$ de la boule,

(iii) la forme différentielle ω dégénère sur $S°(02)$ en une différentielle de deuxième espèce sur $\mathfrak{X}(y)$,

(iv) on a les relations suivantes entre périodes de première espèce:

$$B(1-\mu_0,1-\mu_2)\sim B(1-\mu_0,1-\mu_1-\mu_3-\mu_4)\sim B(1-\mu_2,1-\mu_1-\mu_3-\mu_4).$$

(v) on a la relation

$$F_1(1-\mu_4,\mu_2,\mu_3,2-\mu_4-\mu_1;0,y)=F(1-\mu_4,\mu_3,2-\mu_4-\mu_1;y)$$

entre fonctions hypergéométriques (de Gauss) algébriques en y.

(vi) pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$,

$$r_n^{(1)}=:-1+<n(\mu_0+\mu_2)>+<n\mu_1>+<n\mu_3>+<n\mu_4>$$

ne prend que les valeurs 0 et 2.

Démonstration du Lemme 2. L'équivalence de (i) et (ii) découle des remarques de la fin du §4. Celle de (i) et (iii) se déduit du fait que le facteur $u^{-\mu_0-\mu_2}$ donne lieu, à $u=0$, à un pôle sans résidu de la différentielle. L'équivalence de (i) et (iv) se démontre sans difficulté en utilisant avec $\nu_0=1-\mu_0, \nu_1=1-\mu_2, \nu_2=1-\mu_1-\mu_3-\mu_4$ le fait classique que pour $\nu_0,\nu_1,\nu_2\in\mathbb{Q}\cap(0,1), \nu_0+\nu_1+\nu_2=1$ et $x_0,x_1,x_2\in\overline{\mathbb{Q}}$ deux à deux distincts, on obtient des périodes de première espèce

$$\int_C (u-x_0)^{-\nu_0}(u-x_1)^{-\nu_1}(u-x_2)^{-\nu_2}\,du \sim B(\nu_0,\nu_1)\sim B(\nu_0,\nu_2)\sim B(\nu_1,\nu_2)$$

où C est un cycle de Pochhammer autour de $x_i,x_j, i\neq j, i,j=0,1,2$. Pour voir que (i) implique (v), remarquons d'abord que les paramètres $(\mu_0+\mu_2),\mu_1,\mu_3,\mu_4$, sont ceux d'un groupe triangulaire discontinu Δ_{02}, car les conditions nécessaires d'integralité et de semi-integralité restent valables. Mais les angles du triangle fondamental sont les multiples suivants de π: $(\mu_0+\mu_2+\mu_1-1), (\mu_0+\mu_2+\mu_3-1), (\mu_0+\mu_2+\mu_4-1)$, et on a

$$\begin{aligned}(\mu_0+\mu_2+\mu_1-1)+(\mu_0+\mu_2+\mu_3-1)+(\mu_0+\mu_2+\mu_4-1)\\ =3(\mu_0+\mu_2)-3+(\mu_1+\mu_3+\mu_4)\\ =2(\mu_0+\mu_2)-1>1.\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un triangle sphérique, le groupe de monodromie Δ_{02} de la fonction $F(1-\mu_4,\mu_3,2-\mu_4-\mu_1;y)$ étant fini, et d'après le resultat classique de H.A.Schwarz, on obtient (v). On peut inverser ce raisonnement pour montrer que (v) implique (i), sauf qu'il faut démontrer en plus que pour $k=1,3,4$, on a $(\mu_0+\mu_2+\mu_k)>1$. C'est facile de voir qu'aucune autre possibilité n'est compatible avec la condition que la somme des angles du triangle en question soit plus grande que π. L'équivalence de (v) et (vi) est demontré dans [Wo,§7]. Il est bon de rappeler ici que $r_n^{(1)}+r_{-n}^{(1)}=2$ et que la finitude de Δ_{02} est équivalente à la condition $\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} r_n^{(1)}r_{-n}^{(1)}=0$.

Démonstration du Lemme 1 en utilisant le Lemme 2. Du Lemme 2(vi), pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on n'a $r_n=r_n^{(1)}+\langle n\mu_0\rangle+\langle n\mu_2\rangle-\langle n(\mu_0+\mu_2)\rangle=1$ que dans le cas $\langle n\mu_0\rangle+\langle n\mu_2\rangle>1$.

On va déduire du Lemme 2 une autre conséquence utile.

Lemme 3: Les conditions du Lemme 2 entrainent les propriétés équivalentes suivantes:

(vii) $B(\mu_1,\mu_3)\sim B(\mu_1,\mu_4)\sim B(\mu_3,\mu_4)$,

(viii) $S°(13)$,$S°(14)$ et $S°(34)$ sont contenues dans l'espace Q_{st}, et sur ces surfaces caractéristiques chaque membre de la famille $T(x,y)$ contient respectivement des facteurs à multiplication complexe A_{13},A_{14} et A_{34} du même type,

(ix) au point $F.\psi(S(134))\in B_2^m$ correspond une variété abélienne qui se casse en trois facteurs $A'_{02}\oplus A_{13}\oplus A_{34}$. Les deux derniers sont du même type,

$\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}(<n\mu_1>+<n\mu_3>-<n(\mu_1+\mu_3)>)\sigma_n$,

et le premier est du type $\Phi^{(0)}$ conjugué à

$\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}(<n(1-\mu_0)>+<n(1-\mu_2)>-<n(2-\mu_0-\mu_2)>)\sigma_n$.

Démonstration du Lemme 3. Il suffit de démontrer (vii),(viii) et (ix). Ils sont équivalentes car des variétés abéliennes à multiplication complexe par K sont isogènes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si leur type est le même à conjugaison près [ST], c'est-à-dire si et seulement si les périodes de leurs différentielles K-propres de première espèce et définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ coincident à des facteurs algébriques près [WW]. Pour A_{13}, où de la même façon que dans les remarques au début du §5 $T(x,y)=T(x)\oplus A_{13}$ le long de $S°(13)$, ces périodes sont des $\overline{\mathbb{Q}}$-multiples de $B(\mu_1,\mu_3)$ car le conjugué du type de multiplication complexe de A_{13} est la somme des σ_n donnés par la condition $<n\mu_1>+<n\mu_3><1$. Or, pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$,

$2r_n^{(1)}=-2+2<n(\mu_0+\mu_2)>+<n\mu_1>+<n\mu_3>+<n\mu_1>+<n\mu_4>+<n\mu_3>+<n\mu_4>$

ne prend que les valeurs 0 et 4, donc

$2<n(\mu_0+\mu_2)>+<n\mu_1>+<n\mu_3>+<n\mu_1>+<n\mu_4>+<n\mu_3>+<n\mu_4>$

ne prend que les valeurs 2 et 6. Par un calcul facile on en déduit que les trois sommes $<n\mu_1>+<n\mu_3>$, $<n\mu_1>+<n\mu_4>$, $<n\mu_3>+<n\mu_4>$ sont toutes inférieures ou toutes supérieures à 1, d'où les resultats (vii) et (viii). La propriété (ix) se déduit de la décomposition $r_n=r_n^{(1)}+<n\mu_0>+<n\mu_2>-<n(\mu_0+\mu_2)>$. La condition $(\mu_0+\mu_2)>1$ implique que le conjugué du type $\Phi^{(0)}$ de A'_{02} est celui du lemme et correspond aux périodes de (iv), Lemme 2. Au point $S(134)$, $T(x)$ est isogène à une somme deux variétés abéliennes de type CM donc (ix) découle de (vi), Lemme 2 car $r_n^{(1)}=2(<n\mu_1>+<n\mu_3>-<n(\mu_1+\mu_3)>)$.

§6 Normalisation autour des points fixes non paraboliques

Dans la construction du plongement modulaire, on a identifié certains membres d'une famille de variétés abéliennes de type $(K,\Phi), K=\mathbb{Q}(\zeta)$ et de polarisation principale. Cette famille est paramétrisée par B_2^m. Un point de Q_{st} est dit un point de multiplication complexe si la variété abélienne à laquelle il correspond (au moyen de l'application développante et le plongement modulaire) est isogène (sur $\bar{\mathbb{Q}}$) à un produit direct de variétés abéliennes à multiplication complexe par K au sens strict de Shimura-Taniyama. Le résultat suivant découle des discussions du Lemme 3(ix) et des remarques qui précèdent le Lemme 1 au §5 (voir aussi [CoWo1,§5] et [WW,§2]). Soit toujours $\{i,j,k,l,p\}=\{0,1,2,3,4\}$.

<u>Théorème 2:</u> La variété abélienne A d'un point de multiplication complexe P le long de la surface caractéristique stable $S_{st}(ij),(\mu_i+\mu_j)<1$, est isogène à un produit de trois variétés abéliennes à multiplication complexe par K. La classe d'isogénie de chacun des trois facteurs B est déterminée par la donnée de la classe mod$^*\bar{\mathbb{Q}}^*$ d'un certain élément $\omega(B)$ du réseau de ses périodes. Il y a deux possibilités:

1) Si $(\mu_i+\mu_j+\mu_k)<1$, au point $P=S(ijk)$ correspond la variété abélienne $A=A'_{lp}\times A_{ij}^2$, et on a $\omega(A'_{lp})\sim B(1-\mu_l,1-\mu_p), \omega(A_{ij})\sim B(\mu_i,\mu_j)\sim B(\mu_i,\mu_k)\sim B(\mu_j,\mu_k)$.

2) Si $(\mu_k+\mu_l)<1$, au point $P=S_{st}(ij)\cap S_{st}(kl)$ correspond la variété abélienne $A=A'\times A_{ij}\times A_{kl}$, et on a $\omega(A')\sim B(1-\mu_i-\mu_j,1-\mu_k-\mu_l)$, $\omega(A_{ij})\sim B(\mu_i,\mu_j)$, $\omega(A_{kl})\sim B(\mu_k,\mu_l)$.

Si le groupe Δ de P.T.D.M. est arithmétique, il est évident que les points de multiplication complexe composent un sous-ensemble dense de B_2, mais même pour les Δ non-arithmétiques il y en a souvent une infinité. Dans l'exemple 3) à la fin du §3, un élément de la famille des variétés abéliennes s'écrit $T(y)\oplus A_{12}$ le long de $S_{st}(12)$, où A_{12} est une variété abélienne à multiplication complexe par $K=\mathbb{Q}(\zeta_{12})$ et $T(y)$ est un élément d'une famille de variétés abéliennes à multiplication complexe généralisée par $K=\mathbb{Q}(\zeta_{12})$ de type $\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} r_n^{(1)}\sigma_n$ où $r_n^{(1)}=-1+\langle n(\mu_1+\mu_2)\rangle+\langle n\mu_0\rangle+\langle n\mu_3\rangle+\langle n\mu_4\rangle$. Or les relations $(\mu_1+\mu_2)=10/12$, $\mu_0=3/12$, $\mu_3=5/12$, $\mu_4=6/12$, entrainent $r_{\pm1}^{(1)}=1$, $r_5^{(1)}=0$, $r_{-5}^{(1)}=2$. Les $T(y)$ paramétrisent donc le disque unité et le groupe triangulaire associé Δ_{12}, de signature $(3,4,12)$, est arithmétiquement défini et joue le rôle du groupe modulaire. Pour $(x,y)=(1,y)$ dans un sous-ensemble dense de $S_{st}(12)$, la variété abélienne $T(y)$ est isogène à une somme de deux variétés abéliennes à multiplication complexe au sens strict de Shimura-Taniyama. Donc même pour les Δ de P.T.D.M. non-arithmétiques, quelques uns des sous-groupes triangulaires Δ_{ij}, obtenus par restriction du groupe de monodromie de $F_1(\mu)$ à $S_{st}(ij)$, peuvent etre arithmétiquement définis et par conséquent il y aura une infinité de points de multiplication complexe. Les points de multiplication complexe du Théorème 2 sont des singularités du système d'équations différentielles partielles hypergéométriques. Utilisant ce théorème et les expressions dans [AK, Ch III, §XIV] de guide, on peut choisir un système fondamental de solutions en forme de fonctions dans la clôture algébrique des séries de Laurent à coefficients algébriques, une fois que l'on divise par des facteurs bêta provenant des périodes sur les variétés abéliennes à multiplication complexe associées à ce point. Plus précisement, en choisissant sans perte de généralité des valeurs specifiques de i,j,k pour faciliter la discussion, on a

<u>Théorème 3:</u> a) Pour $(\mu_0+\mu_2+\mu_3)<1$, autour du point stable de multiplication complexe $S(023)$ $(x=y=0)$ on a trois solutions <u>fondamentales</u> de $F_1(\mu)$ données par des intégrales de type Euler à développements dans $c\overline{\mathbb{Q}}[[x,y]]$. Pour deux de ces solutions on a $c=B(1-\mu_0,1-\mu_2)$ et pour l'autre $c=B(1-\mu_1,1-\mu_4)$.
b) Pour $(\mu_0+\mu_3)<1,(\mu_1+\mu_2)<1$, autour du point stable de multiplication complexe $S_{st}(03)\cap S_{st}(12)$ $(x=1,y=0)$ on a trois solutions <u>fondamentales</u> de $F_1(\mu)$ données par des intégrales de type Euler à développements dans $c\overline{\mathbb{Q}}[[x-1,y]]$. Pour ces solutions on a $c=B(1-\mu_0,1-\mu_3),B(1-\mu_1,1-\mu_2),B(1-\mu_0-\mu_3,1-\mu_1-\mu_2)$, respectivement.
Dans les deux cas a) et b), la solution qui porte le facteur bêta de première espèce est holomorphe et non-zero au point choisi, alors que les autres sont non holomorphes et s'annulent à ce point.

<u>Démonstration:</u> Soit $\varepsilon(\beta,\beta')=e^{-\pi i(\beta+\beta')}\int^{(1+,0+,1-,0-)}t^{\beta-1}(1-t)^{\beta'-1}dt$, où le chemin d'intégration est un cycle de Pochhammer autour de 0 et 1. La fonction donnée par cette intégrale s'étend à toutes les valeurs de β et β'. On a (voir par exemple [WhWa,Ch.XII,§43]) l'expression suivante valable pour toutes les valeurs de β et β',

$$\varepsilon(\beta,\beta')=(-4\pi^2)/(\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta+\beta')).$$

En particulier, pour β,β' deux rationnels qui ne sont ni nuls ni des entiers négatifs on a,

$$\varepsilon(\beta,\beta')=(-4\sin(\beta\pi)\sin(\beta'\pi))(\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')/\Gamma(\beta+\beta'))\sim(\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')/\Gamma(\beta+\beta'))=B(\beta,\beta').$$

(a) Autour du point $(x,y)=(0,0)$, la solution holomorphe

$$\varphi_1=\int_1^\infty u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}\,du=B(1-\mu_1,1-\mu_4)z_1$$

(en utilisant les notations de [AK]) se traite plus directement que les deux autres. On a le développement en série dans la région $|x|<1,|y|<1$,

$$\varphi_1=B(1-\mu_1,1-\mu_4)F_1(1-\mu_4,\mu_2,\mu_3,2-\mu_1-\mu_4;x,y),$$

d'où la remarque du Théorème 3(a) sur cette solution. Pour les deux autres solutions du système, on choisit

$$\varphi_2=\int_0^x u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}du=B(1-\mu_0,1-\mu_2)z_4,$$

$$\varphi_3=\int_0^y u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}du=B(1-\mu_0,1-\mu_3)z_5.$$

Contrairement au cas holomorphe, pour φ_2,φ_3 aucune des développements en série hypergéométrique cités dans [AK] ne converge au point $(x,y)=(0,0)$. Il faut alors utiliser un argument plus subtil. Prenons par exemple la solution φ_2; à partir d'une substitution dans l'intégrale on calcule facilement (voir aussi [AK], solution z_4) que

$$z_4=x^{1-\mu_0-\mu_2}(1-x)^{-\mu_1}(y-x)^{-\mu_3}F_1(1-\mu_2,\mu_1,\mu_3,2-\mu_0-\mu_2;x/(x-1),x/(x-y)),\quad |x|<1,|x|<|x-y|.$$

Dans la région $|x|<1,|x|<|x-y|,|x|<|y|$, qui contient un ouvert non-vide de points arbitrairement proches à $x=y=0$, la fonction z_4 s'écrit donc au facteur $x^{1-\mu_0-\mu_2}y^{-\mu_3}$ près comme série convergente dans $\overline{\mathbb{Q}}[[x,x/y]]$. Ceci est aussi vrai pour toutes les branches de z_4. D'autre part, dans un petit voisinage du point $x=y=0$ on n'obtient par prolongement analytique de z_4 qu'un nombre fini de branches $z^{(1)},\dots,z^{(n)}$, car le groupe de monodromie local est fini. En effet, c'est le sous-groupe de Δ qui laisse invariante la contraction au point $\psi(S(023))$ de la surface caractéristique $S(14)$. Ce sous-groupe est isomorphe au groupe unitaire maximal de symétries dont la projectivisation est le groupe triangulaire sphérique Δ_{14} obtenu de Δ en remplaçant μ_1,μ_4 par le seul paramètre $\mu_1+\mu_4$, voir le Lemme 2 du §5 et [Y,Ch.11,179]. Les fonctions symétriques des branches $z^{(\nu)}$ sont donc des fonctions uniques dans ce voisinage, et à des puissances finies des fonctions x,y et $x-y$ près elles sont mêmes holomorphes.

Alors les $z^{(\nu)}$ sont à la fois dans $\mathbb{C}[[x,y]]$ et dans $\overline{\mathbb{Q}}[[x,x/y]]$. Comme ces deux écritures représentent les mêmes fonctions holomorphes dans un ouvert non vide, les séries se trouvent dans $\overline{\mathbb{Q}}[[x,y]]$.

(b) Dans la liste de [AK] figurent les deux solutions indépendantes non holomorphes z_5 et z_6 autour de $(1,0)$, données explicitement par

$$\varphi_2' = \int_0^y \omega = B(1-\mu_0, 1-\mu_3) z_5 ,$$

où pour $|y|<|y-x|, |y|<|y-1|$,

$$z_5 = y^{1-\mu_0-\mu_3}(1-y)^{-\mu_1}(x-y)^{-\mu_2} F_1(1-\mu_3, \mu_2, \mu_1, 2-\mu_0-\mu_3; y/(y-x), y/(y-1)),$$

et

$$\varphi_3' = \int_1^x \omega = B(1-\mu_1, 1-\mu_2) z_6$$

où pour $|x-1|<|x|$, $|x-1|<|x-y|$,

$$z_6 = x^{-\mu_0}(1-x)^{1-\mu_1-\mu_2}(y-x)^{-\mu_3} F_1(1-\mu_2, \mu_0, \mu_3, 2-\mu_1-\mu_2; (x-1)/x, (x-1)/(x-y)).$$

Au voisinage $|x-1|<1, |y|<1, |y-(x-1)|<1$ de $(x,y)=(1,0)$ on a les développements suivants dans $\mathbb{Q}[[x-1,y]]$: $y/(y-x) = -y\sum_{\nu=0}^{\infty}(y-(x-1))^{\nu}$, $y/(y-1) = -y\sum_{\nu=0}^{\infty} y^{\nu}$, $(x-1)/x = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}(x-1)^{\nu}$, $(x-1)/(x-y) = (x-1)\sum_{\nu=0}^{\infty}(y-(x-1))^{\nu}$. Les intégrales $\int_0^y\omega$ et $\int_1^x\omega$ fournissent donc les deux solutions non holomorphes possédant les propriétés du Théorème 3(b). Par les conditions imposées sur les paramètres, l'intégrale $\varphi_1' = \int_0^1\omega$ est une solution holomorphe autour de $(x,y)=(1,0)$. Prenons un point (x',y') à l'intérieur d'un voisinage de $(x,y)=(1,0)$ où φ_1' est holomorphe de telle façon que $|1-x'|<|1-u|$, $|y'|<|u|$, pour $u\in C$ où C est un cycle de Pochhammer autour de 0 et 1. A ce point on peut, sans perte de généralité, remplacer la valeur de φ_1' par l'intégrale $I_1 = I_1(x',y') = \int_C\omega$. De plus, on peut réécrire,

$I_1 = (-1)^{\mu_1+\mu_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}((\mu_2,m)(\mu_3,n)/(1,m)(1,n))(\int_C u^{-(\mu_0+\mu_3)-n}(1-u)^{-(\mu_1+\mu_2)-m}du)(1-x')^m y'^n$.

Pour $\beta = 1-(\mu_0+\mu_3)$, $\beta' = 1-(\mu_1+\mu_2)$, on déduit par un calcul simple l'expression,

$$\int_C u^{-(\mu_0+\mu_3)-n}(1-u)^{-(\mu_1+\mu_2)-m}du = e^{i\pi(\beta+\beta'-m-n)}\varepsilon(\beta-n,\beta'-m)$$

$$=(1-e^{2i\pi\beta})(1-e^{2i\pi\beta'})(1-(\beta+\beta'),m+n)/(1-\beta,n)(1-\beta',m)\Gamma(\beta+\beta')/\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')$$

en utilisant les remarques faites au début de la démonstration. A multiplication près par un facteur cyclotomique non-nul qui ne dépend ni de m ni de n, le nombre $B(1-(\mu_0+\mu_3), 1-(\mu_1+\mu_2))^{-1}\, I_1$ s'écrit donc selon la formule,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}((1-\mu_4,m+n)(\mu_2,m)(\mu_3,n)/(\mu_0+\mu_3,n)(\mu_1+\mu_2,m)(1,m)(1,n))(1-x')^m y'^n.$$

On reconnait ici la valeur au point (x',y') de la fonction $F_2(a,b,b',a+1+b-c,c-b;1-x,y)$, où $a=1-\mu_4, b=\mu_2, b'=\mu_3, c=2-\mu_1-\mu_4$, (voir [Y, p58]) qui est holomorphe dans la région $|1-x|+|y|<1$ et qui fournit une solution du système $F_1(\mu)$. Or, de tels points (x',y') composent un voisinage non-vide de $(1,0)$, d'où le résultat du théorème.

Remarquons que dans le Théorème 3(b), le choix du système de solutions fondamentales et donc de l'application développante ψ et son plongement modulaire associé F n'est pas exactement le même que celui de (a) et de la discussion qui le précède, bien que tout son contenu s'y applique. Ce choix dépend du point de multiplication complexe en question, mais les applications modifiées seront toujours désignées par ψ et F.

<u>Corollaire 4:</u> Pour chacun des cas du Théorème 3, les trois solutions fondamentales peuvent servir de composantes d'une application développante qui applique le point de multiplication complexe de Q_{st} (qui est en général un revêtement fini de B_2/Δ) dans le point $(w_1,w_2)=(0,0)$ de B_2 (dans l'écriture affine). Les dérivées d'une composante $f=f(w_1,w_2)$ de l'application de revêtement $\psi^{-1}: B_2 \to B_2/\Delta$ sont alors données

a) à un point $S(ijk)$, $(\mu_i+\mu_j+\mu_k)<1$, par

$$(\partial^{n+m}f/\partial^n w_1 \partial^m w_2)|_{(w_1,w_2)=(0,0)} \sim (B(1-\mu_i,1-\mu_p)/B(1-\mu_i,1-\mu_j))^{n+m},$$

b) à un point $S_{st}(ij) \cap S_{st}(kl)$, $(\mu_i+\mu_j)<1$, $(\mu_k+\mu_l)<1$, par

$$(\partial^{n+m}f/\partial^n w_1 \partial^m w_2)|_{(w_1,w_2)=(0,0)} \sim (B(1-\mu_i-\mu_j,1-\mu_k-\mu_l)^{n+m})/(B(1-\mu_i,1-\mu_j)^n B(1-\mu_k,1-\mu_l)^m).$$

Réformulons le résultat dans le cas a) de la façon suivante. On remplace la boule unité B_2 par une boule au multi-rayon,

$$(B(1-\mu_i,1-\mu_p)/B(1-\mu_i,1-\mu_j),\ B(1-\mu_i,1-\mu_p)/B(1-\mu_i,1-\mu_j)),$$

c'est-à-dire par l'ensemble B_2^* donné (dans l'écriture projective) par,

$$\{(z_0^*, z_1^*, z_2^*) \in \mathbb{P}_2 \mid |B(1-\mu_i,1-\mu_j)\, z_1^*|^2 + |B(1-\mu_i,1-\mu_j)\, z_2^*|^2 < |B(1-\mu_i,1-\mu_p)\, z_0^*|^2\}.$$

On peut modifier l'application développante en une application $\psi^*: Q_{st} \to B_2^*$ qui applique le point à multiplication complexe $S(ijk)$ au point $(1,0,0) \in B_2^*$ et dont les composantes s'écrivent localement comme des fonctions dans $\overline{\mathbb{Q}}[[x,y]]$. L'application inverse $(\psi^*)^{-1}$ a donc des composantes, automorphes par rapport au groupe de revêtement, dont les développements appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}[[z_1^*/z_0^*, z_2^*/z_0^*]]$. En particulier, l'application tangente à ce point est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Etant des quotients de périodes de première espèce par celles de deuxième espèce, les composantes du multi-rayon sont des nombres transcendants, et fournissent une généralisation du rayon de revêtement transcendant étudié dans [WW] à ces surfaces algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ce multirayon se manifeste clairement dans les travaux de Shimura pour le cas où Δ est arithmétique, donc où Q_{st} est isomorphe à une variété de Shimura. Un argument analogue se fait dans le cas b). Pour terminer la démonstration du Théorème 1, il reste à vérifier le résultat suivant.

Proposition 5. Munissons les espaces quotients $\overline{B_2/\Delta}$ et $\overline{B_2^m/\Gamma}$, compactifiés si nécessaire, de leurs structures naturelles de variétés algébriques projectives définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors il existe un plongement modulaire F qui induit un morphisme défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre ces deux variétés.

Démonstration: On compare les résultats du Corollaire 4 du Théorème 3 aux résultats de Shimura dans [Shi 2, Théorème 6.1] sur les dérivées des formes automorphes par rapport à Γ (et définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$) aux points associés aux variétés abéliennes à multiplication complexe. De tels points à multiplication complexe comprennent les images par le plongement modulaire des points de base du type image de $S(ijk)$ ou $S_{st}(ij)\cap S_{st}(kl)$ par l'application développante. En posant $T=\mathrm{diag}(\sqrt{-1},\sqrt{-1},\sqrt{-1})$, le plongement du groupe Δ de P.T.D.M. dans le groupe modulaire Γ est une projection (ou facteur) de la restriction à Δ du plongement galoisien de $G_{\mathbb{Q}}=\{\alpha\in GL(3,K) \mid \alpha T\overline{\alpha}^{t}=T\}$ dans un produit de groupes unitaires cité par exemple dans [Shi 2, p573], le point plus subtil ayant été d'expliciter le plongement correspondant F, compatible au plongement de Δ, au niveau de l'espace. Miyake [Miy] a observé qu'il existe des modèles canoniques définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\overline{B_2^m/\Gamma}$, donc on peut parler du corps $U(\overline{\mathbb{Q}})$ des fonctions sur B_2^m automorphes par rapport à Γ et définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Aux points de multiplication complexe de B_2^m donnés au Théorème 3 correspondent des produits de variétés abéliennes* à polarisation principale et multiplication complexe dont les périodes de première espèce** sont des valeurs de la fonction bêta explicitées au Théorème 2. Soit w_0 un tel point et Φ le type de multiplication complexe associé dont la décomposition en types de multiplication complexes au sens strict s'écrit $\Phi=\Phi_1\oplus\Phi_2\oplus\Phi_3$. Avec les notations du §3 adaptées au choix du point de base, par le Théorème 6.1 de [Shi 2] on voit que si $f=f(w)$, $w=(w_j^\nu)$, $j=1,2$, $\nu=1,\dots m$, est un élément de $U(\overline{\mathbb{Q}})$, on a

$$(\partial f/\partial w_t^\nu)(w_0)\sim\pi p(\sigma_\nu,\Phi_t)p(\overline{\sigma}_\nu,\Phi_3) \qquad t=1,2,$$

où $\sigma_\nu:\zeta\mapsto\zeta^{n_\nu}$ est le plongement du corps cyclotomique associé à la ν-ième composante de

* A ** $\omega(A)$

F, $\nu=1,\dots,m$. Ici, comme dans [CoWo 1], on utilise les nombres définis dans [Shi 2]; pour une variété abélienne V à multiplication complexe de type $\sum=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j$, toutes les périodes non nulles d'une forme différentielle $\omega_j\in H^0(V,\Omega)$, propre pour l'action de $\mathbb{K}$, sont égales à multiplication par un nombre algébrique près à un nombre réel positif $\pi p(\sigma_j,\sum)$. De la même façon que dans [CoWo 1], ces dérivées sont données par les quotients de valeurs de la fonction bêta de la forme

$$B(1-\langle n_\nu\mu_l\rangle,1-\langle n_\nu\mu_p\rangle)/B(1-\langle n_\nu\mu_l\rangle-\langle n_\nu\mu_j\rangle),\ \ t=1,2,\ \nu=1,\dots m,$$

au point $F.\psi(S(ijk))$, et

$$B(1-\langle n_\nu\mu_i\rangle-\langle n_\nu\mu_j\rangle,1-\langle n_\nu\mu_k\rangle-\langle n_\nu\mu_l\rangle)/B(1-\langle n_\nu\mu_i\rangle,1-\langle n_\nu\mu_j\rangle),\ \ t=1,$$

$$B(1-\langle n_\nu\mu_i\rangle-\langle n_\nu\mu_j\rangle,1-\langle n_\nu\mu_k\rangle-\langle n_\nu\mu_l\rangle)/B(1-\langle n_\nu\mu_k\rangle,1-\langle n_\nu\mu_l\rangle),\ \ t=2,\ \nu=1,\dots,m,$$

au point $F.\psi(S_{st}(ij)\cap S_{st}(kl))$. Pour $\nu=1$, ce sont les mêmes nombres que ceux obtenus pour les composantes de ψ^{-1} dans le Corollaire 4 du Théorème 3 au préimage de w_0 par F. Autrement dit, au point $F^{-1}(w_0)$ une base de formes différentielles de première espèce définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\overline{B_2/\Delta}$ est donnée par

$$\{\pi p(\sigma_1,\Phi_1)p(\overline{\sigma}_1,\Phi_3)dw_1,\pi p(\sigma_1,\Phi_2)p(\overline{\sigma}_1,\Phi_3)dw_2\}$$

et une telle base au point w_0 est celle induite par F, à savoir

$$\{\pi p(\sigma_\nu,\Phi_1)p(\overline{\sigma}_\nu,\Phi_3)dw_1^\nu,\ \pi p(\sigma_\nu,\Phi_2)p(\overline{\sigma}_\nu,\Phi_3)dw_2^\nu,\ \nu=1,\dots,m\}.$$

Les mêmes arguments s'appliquent aux dérivées supérieures au point w_0. L'application quotiente induite est donc définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, d'où le résultat de la Proposition.

Remarquons que ce morphisme est une immersion si $h(\Delta)$ est égal au sous-groupe $\{T\in\Gamma \mid T\,F(B_2)=F(B_2)\}$ de Γ. C'est le cas par exemple si Δ est un groupe maximal parmi les groupes discontinus qui agissent sur B_2

§7 Les fonctions hypergéométriques algébriques d'Appell-Lauricella

H.A. Schwarz a resolu dans [Sch] le problème classique de classifier les fonctions hypergéométriques algébriques. Excepté l'ouvrage de Sasaki [Sas], rien n'est connu sur le problème analogue pour les fonctions d'Appell-Lauricella sauf que sous certaines conditions (trop restrictives) il n'y a pas de groupes de monodromie finis pour le cas de plus de trois variables ([DM], §4). Les méthodes développées ici au §3 permettent de donner une classification complète de ces groupes.

Théorème 4 Supposons qu'aucun des paramètres de la fonction hypergéométrique d'Appell-Lauricella n'est un entier. Alors la fonction n'est pas algébrique si elle dépend de plus de trois variables. En deux ou en trois variables, à des permutations et des changements simultanés de signe près, les paramètres des fonctions algébriques ne peuvent que prendre une seule valeur mod $\mathbb{Z}$ et les groupes de monodromie correspondants sont des groupes symétriques de certains polytopes. Pour le cas de deux variables, il s'agit des paramètres $(1/3, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ et le groupe d'ordre 1296 de Hesse (étendu), tandis que pour le cas de trois variables, des paramètres $(1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ et le groupe de Witting d'ordre 155520.

L'hypothèse que les paramètres ne soient pas des entiers n'est pas forte, car dans le cas contraire on peut, à l'aide des relations de contiguité, remplacer chaque paramètre entier soit par 0 soit par 1. Mais dans ce cas il y a un sous-espace des solutions du système d'équations différentielles qui se compose de fonctions hypergéométriques en un nombre diminué de variables. Comme dans le cas classique, on peut se borner pour la démonstration au cas où les $d \geq 5$ paramètres μ_j sont rationnels, car autrement on n'aurait pas des ramifications algébriques. Si (voir aussi [Sch] et [Te1]) les μ_j ne sont pas des entiers, le groupe de monodromie Δ est irreductible. Les fonctions d'Appell sont algébriques si et seulement s'ils ont un nombre fini de branches, et il suffit donc de classifier les Δ finis. Pour cela, la discussion au §3 permet de remplacer les arguments géométriques du cas classique par l'équivalence suivante. Le groupe Δ est fini si et seulement si la dimension de l'espace symétrique qui paramétrise les variétés abéliennes du même type que $T(x,y)$ est égale à zéro. La condition $\sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} r_n.r_{-n}=0$, équivalente à $r_n=-1+\sum_{j=0}^{d-1}<n\mu_j>=0$ ou $d-2$ pour tout $n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, est satisfaite pour les μ_j donnés dans le théorème. Pour démontrer que ce sont les seules possibilités, on remarque que les restrictions des fonctions algébriques sur chaque surface caractéristique doivent donner, même après la division par un facteur singulier $(x_i-x_j)^{1-\mu_i-\mu_j}$, encore des fonctions algébriques et hypergéométriques en une variable de moins et aux paramètres obtenus en remplaçant le couple μ_i,μ_j par le seul paramètre $\mu_i+\mu_j$. Commençons par les fonctions d'Appell en deux variables, où $d=5$, et supposons que les paramètres $\mu_0,\dots,\mu_4\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ sont ceux d'un groupe fini Δ. A chaque fois que l'on remplace un couple μ_i,μ_j par $\mu_i+\mu_j$, on obtient un quadruplet de paramètres d'un groupe fini de Schwarz. C'est une restriction très forte, car exceptée la famille de groupes dihédrales, il s'agit d'une liste finie. Les paramètres des groupes dihédrales pris $\bmod\mathbb{Z}$ sont de la forme $r,r,(1/2)-r,(1/2)-r$, pour un nombre rationnel r, $0<|r|<1/2$. Alors, si $\mu_1+\mu_2\equiv r\equiv\mu_3 \bmod\mathbb{Z}, \mu_0\equiv\mu_4\equiv(1/2)-r \bmod\mathbb{Z}$, on a nécessairement un autre quadruplet de paramètres de la forme $\mu_4\equiv(1/2)-r \bmod\mathbb{Z}$, $\mu_0+\mu_3\equiv(1/2) \bmod\mathbb{Z}, \mu_1,\mu_2$. Mais dans toute la liste des groupes finis de Schwarz, le paramètre $1/2$ n'apparait qu'une seule fois, à savoir pour le groupe du tetrahèdre aux paramètres congrus mod $\mathbb{Z}$ à $1/6,1/6,1/6,1/2$ (ou en changeant les signes simultanément, $5/6,5/6,5/6,1/2 \bmod\mathbb{Z}$). On en déduit que $|r|=1/3$ et on tombe sur le quintuplet de paramètres du Théorème 4. De la même manière, on traite la liste finie des groupes de Schwarz non-dihédrales et on n'y trouve aucune autre possibilité pour les paramètres. Le même procédé s'applique aux cas $d=6$ et $d>6$. Pour la détermination explicite des Δ trouvés ainsi, remarquons d'abord que ces groupes sont engendrés par des symétries complexes et qu'ils sont irréductibles et même primitifs. On peut le voir à partir des restrictions sur les surfaces caractéristiques. Donc la liste des possibilités pour les Δ finis dans $GL(3,\mathbb{C})$ et $GL(4,\mathbb{C})$ n'est pas grande ([Y,p180],[Cox,p160]). Pour $d=5$, le groupe Δ a des symétries génératrices d'ordre 2 et d'ordre 3 parce que $1-\mu_i-\mu_j$ ne prend que les valeurs $1/2$ et $2/3$. Mais le seul groupe possible ici avec ces deux sortes de générateurs est en effet le groupe symétrique du polytôpe de Hesse étendu, ou bien $2\{4\}3\{3\}3$ dans la notation de Coxeter. Naturellement, ce groupe d'ordre 1296 est un sous-groupe de beaucoup d'exemplaires conjugués dans le groupe fini Δ pour le cas $d=6$, ayant été obtenu par restriction de la monodromie aux surfaces caractéristiques.

L'ordre de ce nouveau Δ doit donc être un multiple de 1296 et les symétries génératrices sont uniquement d'ordre 3. Le seul groupe satisfaisant à toutes ces conditions est le groupe symétrique du polytope de Witting $3\{3\}3\{3\}3\{3\}3$ [Cox].
Une version étendue de la discussion de ce §7 est développée dans [CoWo3].

§8 Le groupe de monodromie dans le cas d'un paramètre entier

Le groupe de monodromie associé aux fonctions hypergéométriques d'Appell à paramètres tous dans $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$, ne dépend que de la classe des paramètres associés mod $\mathbb{Z}$. Si, par contre, un des paramètres est un entier, il faut utiliser un argument différent. Prenons le cas où exactement un paramètre est un entier (en particulier, on a toujours $\sum_{j=0}^{4}\mu_j=2$ mais on n'a plus la condition $0<\mu_j<1, j=0,\ldots,4$). L'action du groupe symétrique S_5 permet de supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de μ_3. Considérons, avec la notation du §3, la différentielle $\omega=\omega(x,y)=u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3}\,du$ sur l'espace Q des points réguliers. C'est une différentielle de première ou de deuxième espèce si $\mu_3\leqslant 0$, et une différentielle, [illegible] si $\mu_3>0$, avec [illegible] des résidus génériquement non-nuls dans $u=y$. Dans les deux cas, on peut choisir deux solutions de base du système d'équations différentielles partielles comme $\int_{C_1}\omega, \int_{C_2}\omega$ avec des cycles de Pochhammer C_1, C_2 autour des éléments de $\{0,1,\infty,x\}$. Pour obtenir la troisième, $\int_{C_0}\omega$, il faut distinguer deux cas.

1) Si $\mu_3\leqslant 0$, on prend pour C_0 un chemin entre y et, sans perte de généralité, 0. Le choix des chemins est évident pour $\mu_0<1$. Si $\mu_0>1$, on choisit C_1, C_2 autour des éléments de $\{1,x,\infty\}$ et pour C_0 un chemin double qui entoure une fois la singularité $u=0$. Ces chemins évitent les autres singularités mais n'entourent pas le point $u=y$, ce qui voudrait annuler l'intégrale. Or, un prolongement des solutions de base en y suivant des cycles en $\mathbb{C}-\{0,1,x\}$ ne change pas $\int_{C_1}\omega, \int_{C_2}\omega$ mais remplace $\int_{C_0}\omega$ par la somme de $\rho\int_{C_0}\omega$ (ρ une racine N-ième de l'unité venant du fait que le prolongement peut changer la feuille sur laquelle se trouve C_0) et des combinaisons $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-linéaires, $N=$p.p.d.c.$(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_4)$, de $\int_{C_1}\omega$ et $\int_{C_2}\omega$. Il en est de même pour $\int_{C_0}\omega$ lorsque l'on prolonge en x les solutions de base, mais cette fois-ci on transforme $\int_{C_1}\omega$ et $\int_{C_2}\omega$ suivant le groupe de monodromie

associé à la surface hypergéométrique de Gauss de dimension 1 aux paramètres μ_0,μ_1,μ_2,μ_4 mod $\mathbb{Z}$. Les matrices du groupe de monodromie sont donc de la forme

$$\begin{bmatrix} \rho & u & v \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

où (u,v) parcourt un réseau d'indice finie dans $\mathbb{Z}[\zeta_N]\times\mathbb{Z}[\zeta_N]$, et ρ parcourt les racines N-ièmes de l'unité, étant une homothéthie introduite par un changement de feuille pour C_0. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

est dans le groupe triangulaire associé aux trois multiples $|1-\mu_0-\mu_1|,|1-\mu_0-\mu_2|,|1-\mu_0-\mu_4|$ de π. Si A est la matrice unité, on voit que le groupe de monodromie n'opère nulle part discontinûment sauf si $\mathbb{Z}[\zeta_N]=\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $N=2$, les μ_0,μ_1,μ_2,μ_4 sont tous congrus à $1/2$ modulo les entiers. Il s'agit donc d'une ramification infinie le long des surfaces caractéristiques correspondantes. Les autres valeurs de A sont prises dans le groupe triangulaire de signature (∞,∞,∞). On obtient alors un sous-groupe d'indice finie du groupe modulaire de Jacobi agissant sur $\mathbb{C}\times\mathcal{H}$, où $(\int_{C_0}\omega)/(\int_{C_2}\omega)$ joue le rôle de la coordonnée dans $\mathbb{C}$ et $(\int_{C_1}\omega)/(\int_{C_2}\omega)$ joue le rôle de celle dans $\mathcal{H}$.

2) Si $\mu_3>0$, on prend pour C_0 un cercle autour de $u=y$, tel que $\int_{C_0}\omega$ sera essentiellement le résidu de ω en y. Cette fois-ci, le prolongement analytique en y,x suivant un cycle dans $\mathbb{C}-\{0,1,x\}$, $\mathbb{C}-\{0,1,y\}$ respectivement ne change $\int_{C_0}\omega$ que par un facteur racine N-ième de l'unité, pendant que $\int_{C_1}\omega$ et $\int_{C_2}\omega$ se transforment selon les mêmes matrices de monodromie A que dans le cas 1), sauf qu'il faut ajouter des $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-multiples du résidu de ω dans $u=y$. On obtient donc des matrices de monodromie de la forme

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ u & \alpha & \beta \\ v & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

avec des $(u,v)\in\mathbb{Z}[\zeta_N]\times\mathbb{Z}[\zeta_N]$ qui opèrent sur le plan affine, homéomorphe à $\mathbb{C}^2$, où

$\int_{C_0}\omega \neq 0$. Cette opération est discontinue seulement si les (u,v) forment un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^2$ stabilisé par les matrices A. Le groupe avec $N=2$ et tous ses paramètres congrus à $1/2$ mod $\mathbb{Z}$ satisfait à cette condition et est un groupe discret (voir par exemple [DM], p88). Mais des arguments élémentaires montrent que cette opération sur $\mathbb{C}^2$ n'est pas discontinue en générale. En effet, Δ sera un groupe d'action discontinue sur $\mathbb{C}^2$ si et seulement si $N=3,4$ ou 6 et A parcourt un groupe fini dans $GL_2(\mathbb{Z}[\zeta_N])$. La liste des groupes de monodromie finie [Sch] et leurs exposants donnent la classification complète des groupes de monodromie discontinus. On peut l'étendre aux dimensions supérieures à l'aide du §7 sur la monodromie finie. On obtient

Théorème 5. Supposons qu'un des $d \geq 5$ paramètres μ_j et un seul soit un entier. Alors Δ est un groupe discontinu si et seulement si

(i) ou bien $d=5$ et μ_j est un entier non-positif, les autres μ_k étant congrus à $1/2$ modulo les entiers, cas où Δ agit de façon discontinue sur $\mathbb{C}\times\mathcal{H}$, ou bien μ_j est un entier positif et les autres μ_k sont, à un changement commun de signe près, congrus modulo les entiers à

(ii) $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$,

(iii) $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/2$, $(d=5)$,

(iv) $1/6$, $1/6$, $1/3$, $1/3$,

(v) $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/3$ $(d=6)$,

(vi) $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/6$, $1/6$, $(d=7)$,

et donc Δ agit de façon discontinue sur $\mathbb{C}^{d-3}$.

Remarques.

(1) Les cas (i) et (ii) du Théorème 6 figurent déjà dans la liste de Le Vavasseur et sont mentionés dans [DM] et [Te 3], (ii) est de plus l'objet d'une note de Picard [P2].

(2) Les autres exemples sont implicitement contenus dans les exemples de Mostow [M]. Comme les surfaces caractéristiques non semi-stables correspondent aux restrictions algébriques (§5, Lemme 2(v)), les surfaces caractéristiques non stables mais semi-stables correspondent aux singularités logarithmiques $\mu_i+\mu_k=1$, et il s'agit de la

restriction à des groupes de monodromie euclidiens discrets. Par exemple, dans le cas $d=8$, on a $(\mu_j)_{j=0}^{7} = (1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,5/6)$.

(3) En principe, on peut traiter les groupes Δ avec plusieurs paramètres entiers μ_j de la même manière. Pour $d=5$, on obtient les groupes discontinus déjà trouvés par Le Vavasseur et Terada [Te 3]

(4) Dans les cas euclidiens (ii) à (vi), le quotient de $\mathbb{C}^{d-3}$ par le sous-groupe des translations dans Δ est une variété abélienne qui se casse en courbes elliptiques avec multiplication complexe ou par $\mathbb{Z}[i]$ ou par $\mathbb{Z}[\zeta_3]$

Références

[A] V. I. Arnol'd: The cohomology ring of the colored braid group. Math. Notes Academy Sci. USSR, 5 (1969) , 138–140.

[Ar] E.Artin:Theorie der Zöpfe, Abh. Math.Sem.Hamburg, 4 (1926), 47–72.

[AK] P. Appell, M.J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite. Gauthier-Villars 1926.

[CW] Cl. Chevalley, A. Weil: Uber das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionkörpers. Abh. Hamburger Math. Sem. 10 (1934) 358–361.

[CoWo1] P. Cohen, J. Wolfart: Modular Embeddings for some Non-Arithmetic Fuchsian Groups, Acta Arithmetica LVI (1990), 93–110.

[CoWo2] P. Cohen, J. Wolfart: Monodromie des fonctions d'Appell, variétés abéliennes et plongement modulaire. M.P.I., Bonn 1989–80.

[CoWo3] P. Beazley Cohen, J. Wolfart: Algebraic Appell-Lauricella Functions. A paraître dans les comptes rendus du "Workshop Katata 1991 on Special Differential Equations".

[Cox] H.S.M. Coxeter: Regular Complex Polytopes. Cambridge University Press (1974).

[DM] P. Deligne, G.D. Mostow: Monodromy of Hypergeometric Functions and Non-Lattice Integral Monodromy. Publ. I.H.E.S. 63 (1986) 5–89.

[Ho] R.-P. Holzapfel: Geometry and Arithmetic around Euler Partial Differential Equations. Reidel (1986).

[K1] F. Klein : Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Springer Grundlehren 39, (1981).

[Kn] M. Knapp: Doubly generated Fuchsian Groups. Mich. Math. J. 15 (1968) 289–304.

[KR] N. Koblitz et D. Rohrlich : Simple factors in the Jacobian of a Fermat curve, Can. J. Math. 30 (1978) 1183–1205.

[L1] S. Lang: Introduction to Transcendental Numbers. Addison Wesley, New York 1966.

[L2] S. Lang: Complex Multiplication. Springer 1983.

[M] G.D. Mostow: Generalised Picard Lattices arising from Half-integral Conditions. Publ. I.H.E.S. 63 (1986) 91–106.

[Miy] Miyake: Models of certain automorphic function fields. Acta. Math.,126 (1971), 245–307.

[P1] E. Picard: Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. Ann. E.N.S. III 2 (1885) 357-384.

[P2] E. Picard: Sur les séries hypergéométriques de deux variables, C.R.A.S. 104 (1887) 896_897.

[Po] L. Pochhammer: Ueber hypergeometrische Functionen höherer Ordnung, J. r. und angew. Math., 71 (1870), 316-362.

[Sa] J.K. Sauter, jr.: Isomorphisms among Monodromy Groups and Applications to Lattices in PU(1,2), Pacific J. of Math. 146 (1990) 331-384.

[Sas] T. Sasaki: On the finiteness of the monodromy group of the system of hypergeometric differential equations (F_D), J. Fac. Univ. Tokyo., 24 (1977), 565-573.

[Sch] H.A. Schwarz: Uber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktionen ihres vierten Elements darstellt. J. Reine Angew. Math. 75 (1883) 292-335.

[Shi1] G. Shimura: On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. Ann. Math. 78 (1963) 149-192.

[Shi2] G. Shimura: Automorphic forms and the periods of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan 31 (1979) 561-592.

[ST] G. Shimura, Y. Taniyama: Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. Publ. Math. Soc. Japan 6, 1961.

[Sie] C.L. Siegel: Lectures on Riemann Matrices. Tata Institute, Bombay 1963.

[Te1] T.Terada: Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973) 557-578.

[Te2] T. Terada: Quelques Propriétés Géométriques du Domaine de F_1 et le Groupe de Tresses Colorées. Publ. R.I.M.S. Kyoto University 17 (1981) 95-111.

[Te3] T. Terada: Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I,II. J. Math. Soc. Japan 35-3(1983)451-475 et 37-2(1985) 173-185.

[Te4] T. Terada: Hypergeometric function F_1 and automorphic functions, III. Case with some integer parameters. M.P.I., Bonn 1987-50.

[WhWa] E.T. Whittaker, G.N. Watson: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, Fourth Edition, (1902),1988.

[Wo] J. Wolfart: Werte hypergeometrische Funktionen. Invent.math.92 (1988)181-216.

[W W] J. Wolfart, G. Wüstholz: Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen, Math. Ann. 273 (1985) 1-15.
[Y] M. Yoshida: Fuchsian Differential Equations. Aspects of Mathematics E 11, Vieweg 1987.

Paula Beazley Cohen
UA au CNRS 747
Collège de France
3, rue d'Ulm
75005, Paris
France

Jürgen Wolfart
Mathematisches Seminar der
Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 10
D-6000 Frankfurt a.M. 1
FRG