Caractérisation de la sphère par le premières valeurs propres de l'opérateur de Dirac en dimensions 3, 4, 7 et 8

by

HIJAZI Oussama

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

MPI 86-10

Caractérisation de la sphère par le premières valeurs propres de l'opérateur de Dirac en dimensions 3, 4, 7 et 8

Résumé.

Le cas limite de l'inégalité $\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \mu_1$ (paragraphe 1) établie en [6] est étudié. En utilisant la représentation spinorielle réelle de spin_n et le théorème d'Obata-Lichnerowicz, on démontre que, pour $n = 3, 4, 7$ ou 8, seule la sphère standard réalise les deux premières valeurs propres $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1} \mu_1}$ de l'opérateur de Dirac.

Summary.

The limiting-case of the inequality $\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \mu_1$ (paragraph 1) established in [6] is studied. Using the real spinor representation of spin_n and the Obata-Lichnerowicz theorem, we prove that, for $n = 3, 4, 7$ or 8, only the round sphere realizes the two first eigenvalues $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1} \mu_1}$ of the Dirac operator.

1. Soit (M^n,g) une variété Riemannienne spinorielle compacte connexe, à courbure scalaire s, de dimension $n \geq 3$. Toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac D agissant sur les sections du fibré spinoriel ΣM vérifie [6]

$$(1) \qquad \lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \mu_1$$

où μ_1 est la première valeur propre du Laplacien scalaire conforme

$$L = 4\frac{n-1}{n-2}\Delta + s \quad .$$

De plus, si λ_1 est valeur propre avec $\lambda_1^2 = \frac{n}{4(n-1)} \mu_1 > 0$, alors la variété (M^n,g) est d'Einstein (en particulier s est constante égale à μ_1). Dans cette note nous démontrons le résultat suivant:

2. Théorème.

Soit (M^n,g) *une variété Riemannienne spinorielle compacte connexe de dimension* $n = 3, 4, 7$ *ou* 8 . *Si* λ_1 *et* $-\lambda_1$ *sont valeurs propres de l'opérateur de Dirac avec* $\lambda_1^2 = \frac{n}{4(n-1)} \mu_1 > 0$, *alors* (M^n,g) *est isométrique à la sphère standard* S^n .

Remarque 1.

Pour $n = 4k$, le spectre de l'opérateur de Dirac, agissant sur l'espace des champs de spineurs réels, est symétrique par rapport à 0 . En effet, pour $n = 4k$, tout champ de spineurs ψ se décompose en la somme d'un champ de spineurs positif ψ^{+} et d'un champ de spineurs négatif ψ^{-} . Si $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$, alors $\mathcal{D}\phi = -\lambda\phi$ pour $\phi = \psi^{-} - \psi^{-}$.

Remarque 2.

Ce résultat s'appuie sur un raisonnement donné dans [6] pour $n = 4$ sauf qu'ici les spineurs réels seront considérés au lieu des spineurs complexes. Singnalons que pour $n = 3$ T. Friedrich [4] a démontré que sur S^3/Γ la borne inférieure est valeur propre si et seulement si S^3/Γ est homogène. Pour $n = 5$, S. Sulanke [7] a démontré qu'il existe des variétés non homogènes S^5/Γ réalisant les deux premières valeurs propres. En dimension 6, les variétés $F(1,2)$ et $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ munies de métriques d'Einstein non-Kählériennes (en dimension paire si l'égalité dans (1) est atteinte, alors la métrique est forcément d'Einstein non-Kählérienne [6]) réalisent les deux premières valeurs propres [5]. Le cas $n = 7$ est démontré dans [3] en utilisant les particularités, dans cette dimension, des matrices de Dirac et de l'opérateur de Lichnerowicz opérant sur les 1-formes à divergence nulle.

Preuve.

Il suffit de montrer que les conditions du théorème d'Obata-Lichnerowicz [2] sont réalisées, i.e., il existe une constante $c > 0$ et une fonction $f \not\equiv 0$ sur M pour lesquels

$$\mathrm{Ric} \geq c\,\mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{n}{n-1} c f \quad .$$

Soient ψ et ϕ deux champs de spineurs tels que $\mathcal{D}\psi = \lambda_1 \psi$ et $\mathcal{D}\phi = -\lambda_1 \phi$.

D'après [4] ou [6], pour tout champ de vecteurs X , nous avons

$$(2) \qquad \nabla_X \psi + \frac{\lambda_1}{n} X \cdot \psi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_X \psi - \frac{\lambda_1}{n} X \cdot \phi = 0 \quad .$$

En particulier, la variété est d'Einstein, i.e., le tenseur de Ricci est donné par $\mathrm{Ric} = \frac{s}{n}\,\mathrm{Id}$.

Appelons f le produit scalaire de ψ par ϕ . Il est facile de vérifier en utilisant (2) que

$$\Delta f = \frac{s}{n-1} f \quad .$$

En prenant $c = \frac{s}{n}$, il suffit donc de montrer que $f \not\equiv 0$.

Pour cela, nous allons montrer qu'il existe au moins un vecteur tangent X pour lequel

$$X(f) = -2 \frac{\lambda_1}{n}(X \cdot \psi, \phi) \neq 0 \quad .$$

La classification des algèbres de Clifford réelles est donnée par le tableau suivant [1]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$C\ell_n$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{R}(16)$
d_n	2	4	4	8	8	8	8	16

avec $C\ell_{n+8} = C\ell_n \otimes \mathbf{R}(16)$ et $d_{n+8} = 16\, d_n$, où d_n est la dimension de la représentation spinorielle réelle de l'algèbre de Clifford $C\ell_n$.

Pour $n = 3$ ou 7 et pour ψ fixé, nous considérons l'application

$$\Psi : TM \longrightarrow \Sigma M$$

$$X \longrightarrow X \cdot \psi \quad .$$

C'est une application linéaire injective, donc un isomorphisme sur l'image $\Psi(TM)$ qui, pour $n = 3$ ou 7, est de codimension 1. En utilisant (2), on montre que ψ est orthogonal à $\Psi(TM)$. Donc, ϕ est nécessairement dans $\Psi(TM)$.

Pour $n = 4$ ou 8, l'espace des spineurs réels ΣM se décompose en la somme des spineurs positifs $\Sigma^{+}M$ et les spineurs négatifs $\Sigma^{-}M$, d'où $\psi = \psi^{+} + \psi^{-}$, et l'application

$$\begin{aligned} \Psi^{+} : TM &\longrightarrow \Sigma^{-}M \\ X &\longrightarrow X \cdot \psi^{+} \end{aligned}$$

est un isomorphisme puisque $\dim_{\mathbf{R}} TM = \dim_{\mathbf{R}} \Sigma^{-}M$. Ceci achève la preuve du théorème car

$$X(f) = -4 \frac{\lambda_1}{n} (X \cdot \psi^{+}, \psi^{-}) \neq 0 \quad .$$

∎

3. Proposition:

<u>Sous les mêmes conditions du théorème et pour</u> $n = 6$ <u>(resp. 5), si la dimension de l'espace propre associé à</u> $\pm\lambda_1$ <u>est au moins 2 (resp. 3), alors la variété est isométrique à la sphère</u> S^6 <u>(resp.</u> S^5<u>)</u> .

Preuve.

Il suffit d'utiliser le tableau ci-dessus donnant $d_6 = d_5 = 8$ et puis de raisonner comme dans la preuve du théorème.

Remarque 3.

Cette proposition permet de majorer la dimension de l'espace propre associé à $\pm\lambda_1$ dans les exemples donnés dans [5] et [7].

Je remercie Robert BRYANT pour une fructueuse discussion.

RÉFÉRENCES

[1] *M. ATTIYAH, R. BOTT et A.A. SHAPIRO,* Clifford modules, Topology 3 (Supp. 1) 1964, p. 3-38.

[2] *M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET,* Le spectre d'une variété Riemannienne, Lecture Notes in Math., No. 194, 1970.

[3] *M.J. DUFF, B.E.W. NILSSON et C.N. POPE,* The criterion for vacuum stability in Kaluza-Klein supergravity, Physics Letters, Vol. 139 B, No.3, 1984, p. 154-158.

[4] *T. FRIEDRICH,* Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht-negativer Skalarkrümmung, Math. Nach. 97, 1980, p. 117-146.

[5] *T. FRIEDRICH et R. GRUNEWALD,* On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6-dimensional manifolds, Annals of Global Anaysis and Geometry.

[6] *O. HIJAZI,* A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and killing spinors, Commun. in Math. Physics, 1986.

[7] *S. SULANKE,* Der erste Eigenwert des Dirac-Operators auf S^5/Γ, Math. Nachr. 99, 1980, p. 259-271.