Totientenzahlen, simpliziale Komplexe und Alexanderdualität

Thomas Bier

Am Badepark 16
2903 Bad Zwischenahn

Germany

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

MPI / 91-53

Totientenzahlen, simpliziale Komplexe und Alexanderdualität

Thomas Bier

12. Juli 1992

Abstract

In dieser Note berechnen wir die Totientenzahlen einer Vektorraumzerlegung eines kartesischen Produktes einer Menge mit der induzierten rechteckigen Struktur. Insbesondere stellen wir einen Zusammenhang mit gewissen simplizialen Komplexen und dem Schnittverhalten ihrer Simplizes her. Beispiele sind rechteckige Ordnungsstrukturen, die aus dem Repräsentationssatz für distributive Verbände entstehen, etwa Assoziationsschemas eingeführt von Speed und Bailey. Wir stellen einen Zusammenhang mit der Struktur der Links des simplizialen Komplexes her. Daraus ergibt sich eine Beziehung zu einer kanonischen Form der Alexanderdualität von simplizialen Komplexen. Insbesondere erhalten wir Gleichungen zwischen den Eulercharakteristiken der Links eines Komplexes und denen seines Alexanderduals. Schließlich betrachten wir die Simplizes eines Komplexes, welche Durchschnitt von maximalen Simplizes sind. Der Unterkomplex der ersten baryzentrischen Unterteilung, der von solchen Simplizes aufgespannt wird, ist ein Retrakt des gegebenen simplizialen Komplexes.

1 Totientenzahlen von Ordnungsblockstrukturen

Sei P eine endliche Menge mit einer Teilordnung und setze $P = \{1, 2, ..., n\}$. Sei $L = \mathcal{I}(\mathcal{P})$ der distributive Verband aller Ideale von P. Seien $F_1, F_2, ..., F_n$ Mengen mit je mehr als einem Element und setze $X = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$. Wir setzen $f_i = |F_i|$ und $f = |X|$. Für ein gegebenes $I \in L$ und für $x, y \in X$ definiere eine Relation R_I auf X durch die Vorschrift

$$(x, y) \in R_I \Leftrightarrow \{i \in P \mid x_i \neq y_i\} = I$$

Dann bildet nach einem Resultat aus [SB] , Prop. 2 und Prop. 3 mit der Notation $\overline{\theta}_{P-I}$ für unser R_I die Menge der Relationen $\{R_I | I \in \mathcal{I}(\mathcal{P})\}$ ein Assoziationsschema auf der Menge X. Dieses Assoziationsschema werden wir dann *Ordnungsblockstruktur (poset block structure)* nennen. Falls P eine Antikette (d.h. eine Menge mit leerer induzierter Ordnung) ist erhalten wir das *rechteckige Assoziationsschema (rectangular association scheme)* der Arbeit [B].
In dieser Note wollen wir allerdings den allgemeinen Fall betrachten, also für irgendeine Teilmenge $S \subset P$ setzen wir $(S) = I$ das Ordnungsideal erzeugt von den Elementen von S . Für den Spezialfall einer Antikette P hatten wir bereits gewisse Teilräume des Totalraumes $R[X]$ der Menge X betrachtet. Insbesondere benötigen wir aus der Arbeit [B] die Definition der gemeinsamen Eigenräume E_T der $0-1$ Matrizen der Relationen R_S die zu dem Eigenwert

$$p_S(T) = (-1)^{|S \cap T|} \prod_{i \in S-T} (f_i - 1)$$

gehören. Es gilt nach [B] Formel (8) $dim(E_T) = \prod_{i \in T}(f_i - 1)$. Nun betrachten wir P mit der gegebenen Ordnungsstruktur und setzen

$$Eig_I = \bigoplus_{(T)=I} E_T \tag{1}$$

$$V_t = \bigoplus_{|I|=t} Eig_I \tag{2}$$

wodurch wir die Zerlegung

$$R[X] = \bigoplus_{t=0}^{n} V_t \tag{3}$$

als eine orthogonale direkte Summe von Eigenräumen mit dem kanonischen inneren Produkt auf dem Totalraum $R[X]$. Mit den Bezeichnungen (1) und (2) gilt insbesondere: $V_0 = R(1, 1, ..., 1)$ ist die vom Nur-Einsen Vektor erzeugte Gerade.
In dieser Situation erinnern wir an die Definition der Totientenzahlen aus [B]

oder [B1] in der Form $\phi(\bigoplus_{i=1}^{t} V_i)$ als die kleinsten positiven ganzen Zahlen welche auf dem Unterraum $\bigoplus_{i=0}^{t} V_i$ ganzzahlig dargestellt werden können. Es gibt also einen ganzzahligen Vektor in diesem Unterraum, dessen Koordinaten sich zu $\phi(\bigoplus_{i=1}^{t} V_i)$ aufsummieren. Mit diesen Definitionen können wir nun unseren ersten Satz formulieren.

Satz 1 : Seien $I_1, I_2, ..., I_k$ alle Ordnungsideale von P mit der Eigenschaft $|I_\alpha| = t$. Dann sind die Totientenzahlen der Ordnungsblockstruktur durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\phi(\bigoplus_{i=1}^{t} V_i) = ggT(f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdot \ldots \cdot f_{i_{n-t}} \mid P - I_\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_{n-t}\} \quad mit \ \alpha = 1, ..., k) \tag{4}$$

$$\phi(\bigoplus_{i=t+1}^{n} V_i) = kgV(f_{j_1} \cdot f_{j_2} \cdot \ldots \cdot f_{j_t} \mid I_\alpha = \{j_1, j_2, ..., j_t\} \quad mit \ \ \alpha = 1, ..., k) \tag{5}$$

Beispiele: (i) Im Fall einer Antikette (leeren Ordnung auf P) sind die Ordnungsideale gerade die sämtlichen Teilmengen S von P mit $|S| = t$. Dann reduziert sich der Satz 1 gerade auf die Formel (37) von Theorem 2 aus [B].
(ii) Im Fall einer Totalordnung gibt es nur ein einziges Ordnungsideal I mit $|I| = t$, und somit erhält man als Totientenzahlen zwei Produkte der Form

$$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_t$$

$$f_{t+1} \cdot f_{t+2} \cdot \ldots \cdot f_n$$

Dieser Fall wurde (jedenfalls mit $f_i = p$ Primzahl) in einer allgemeineren Form in [B1] untersucht.
(iii) Sei $P = \{1, 2, 3, 4\}$ mit der Teilordnung $1 < 3, 2 < 3, 2 < 4$. Dann gibt es für $t = 2$ genau 2 Ordnungsideale $I_1 = \{1, 2\}$; $I_2 = \{2, 4\}$und somit erhalten wir

$$\phi(V_1 \oplus V_2) = ggT(f_3 \cdot f_4, f_1 \cdot f_3)$$

$$\phi(V_3 \oplus V_4) = kgV(f_1 \cdot f_2, f_2 \cdot f_4)$$

2 Verallgemeinerung auf simpliziale Komplexe

Um den Beweis von Satz 1 möglichst zweckmäßig führen zu können, ist es zunächst ratsam, eine noch etwas allgemeinere Situation zu betrachten. Eine endliche Menge $P = \{1, 2, ..., n\}$ und ein System $\mathcal{K}$ von nichtleeren Teilmengen von P heißt ein *simplizialer Komplex* , falls für $T \in \mathcal{K}$ und $S \subset T$ stets gilt $S \in \mathcal{K}$. Wir fordern also nicht, daß jede einelementige Teilmenge von

P unbedingt in $\mathcal{K}$ liegen muß. Für einen solchen simplizialen Komplex auf $\{1, 2, ..., n\}$ können wir definieren

$$V(\mathcal{K}) := \bigoplus_{T \in \mathcal{K}} E_T \tag{6}$$

$$W(\mathcal{K}) := \bigoplus_{T \notin \mathcal{K}} E_T \quad (T \neq \emptyset) \tag{7}$$

Damit gilt die Zerlegung

$$R[X] = V_0 \perp V(\mathcal{K}) \perp W(\mathcal{K}) \tag{8}$$

Die im ersten Abschnitt betrachtete Situation läßt sich in dieser Sprache interpretieren; wir brauchen nur

$$\mathcal{K} = \{S \subset P : |(S)| \leq t\} \tag{9}$$

zu setzen, um einen simplizialen Komplex zu erhalten, für den dann gilt :

$$\bigoplus_{i=1}^{t} V_i = V(\mathcal{K})$$

$$\bigoplus_{i=t+1}^{n} V_i = W(\mathcal{K})$$

Um den Leser vor einem Mißverständnis zu bewahren, bemerken wir hier, daß die Gleichung (9) sicherlich nicht die geometrische Realisierung der Teilordnung P im üblichen Sinne darstellt. Mit diesen Bezeichnungen können wir dann eine Verallgemeinerung unseres Satzes formulieren.

Satz 2 : Seien $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ die (inklusionsweise) maximalen Simplizes des simplizialen Komplexes $\mathcal{K}$. Dann sind die Totientenzahlen der obigen Zerlegung (8) durch

$$\phi(V(\mathcal{K})) = ggT(f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdot \ldots \cdot f_{i_{n-t}} \mid P - \sigma_\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_{n-t}\} \;\; mit \;\; \alpha = 1, 2, ..., k) \tag{10}$$

$$\phi(W(\mathcal{K})) = kgV(f_{j_1} \cdot f_{j_2} \cdot \ldots \cdot f_{j_t} | \sigma_\alpha = \{j_1, j_2, ..., j_t\} \;\; mit \;\; \alpha = 1, 2, ..., k) \tag{11}$$

gegeben.

Man kann bei der Formulierung des Satzes übrigens auf die Forderung der Maximalität der Simplizes verzichten, wie man sehr leicht sieht. Die Zahl $t = t_\alpha$ kann mit α variieren.

Beweis: Wir zeigen, daß die linken Seiten von Formeln (10) und (11) die rechten Seiten teilen. Aus Formel (23) von [B] wird dann der Satz 2 folgen. Für die Formel (10) ist das zunächst einmal ganz einfach. In (14) und (15) von [B] haben wir nämlich die Existenz gewisser $0-1$ Vektoren $c(Face(\sigma, x_\sigma))$ in den Räumen

$$E_{I(\leq\sigma)} := \bigoplus_{T\subset\sigma} E_T$$

gezeigt mit der Eigenschaft

$$|c(Face(\sigma, x_\sigma))| = \prod_{j\notin\sigma} f_j$$

Daraus folgt sofort für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$

$$\phi(V(\mathcal{K})) \text{ teilt } \prod_{j\notin\sigma} f_j$$

und somit gilt die Teilbarkeitsbeziehung in der Formel (10) .

Die Teilbarkeitsbeziehung in der Formel (11) ist schwieriger zu zeigen. Wir werden zunächst eher indirekt ein Gleichungssystem untersuchen, dessen Lösbarkeit in ganzen Zahlen die Teilbarkeitsbedingung in der Gleichung (11) impliziert.
Dazu betrachten wir die Orthogonalprojektionen

$$P_T : R[X] \longrightarrow E_T \tag{12}$$

deren explizite Koordinatendarstellung in (9) aus [B] gegeben wurde. Sei also $0 = (0,0,...,0) \in X$ und betrachte für gewisse ganze Zahlen x_T die lineare Kombination

$$v = \sum_T x_T \cdot f \cdot P_T(0) \text{ mit } T \notin \mathcal{K}, T \neq \emptyset \tag{13}$$

Offenbar ist der Vektor v mit ganzzahligen Komponenten in dem Raum $W(\mathcal{K})$ enthalten. Diese Komponenten an der Stelle $x \in X$ hängen nur ab von der Relation R_S , die durch $(0,x) \in R_S$ definiert ist. Mit Formel (9) aus [B] können wir die Komponenten von v an der „ Stelle “ S als

$$v_S = \sum_T x_T \cdot (-1)^{|S\cap T|} \prod_{i\in T-(S\cap T)} (f_i - 1)$$

angeben. Falls wir diese Ausdrücke v_S als Funktion von $f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_d}$ verstehen, wo $T-(S\cap T) = \{i_1, i_2, ..., i_d\}$ ist, so gilt offenbar

$$v_\emptyset(f_i) = v_S(f_i) \text{ mit } f_i = 0 \text{ für } i \in S\cap T$$

und somit ist es genug, sich auf den Fall $S = \emptyset$ zu beschränken.
Wir müssen nun die x_T so wählen, daß die Zahl

$$g = ggT(f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdot ... \cdot f_{i_{n-t}} | \text{ Bedingungen wie in (10) })$$

den Ausdruck v_6 teilt. Das erreichen wir durch ausmultiplizieren der Terme $\prod(f_i - 1)$ und Nullsetzen derjenigen Vorzahlen der (quadratfreien) Monome $f_R = f_{j_1} \cdot \ldots \cdot f_{j_r}$ wo $R = \{j_1, ..., j_r\} \subset P$ der Bedingung der Teilbarkeit im Wege steht, also

$$R \not\supset \quad P - \sigma_\alpha \quad \forall\, \alpha = 1, 2, ..., k \tag{14}$$

Wir erhalten also bei Berücksichtigung der Vorzeichen ein Gleichungssystem in den Variablen $y_T = (-1)^{|T|} \cdot x_T$, das sich bei besonderer Beachtung des Falles $R = \emptyset$ wie folgt darstellt, wobei in den Gleichungen über gewisse angegebene $T, T \notin \mathcal{K}$ summiert wird:

$$\sum_T y_T = 1 \tag{15}$$

$$\sum_{R \subset T} y_T = 0 \text{ mit } R \neq \emptyset \tag{16}$$

gültig für alle R , welche die Bedingungen (14) erfüllen. Die Lösbarkeit des ganzzahligen Gleichungssystems (15) (16) in ganzen Zahlen ist dann offenbar hinreichend für den Beweis der Teilbarkeit in der Formel (11); die Komponenten des entsprechenden Vektors $v \pm (1, 1, ..., 1)$ sind nämlich nach Konstruktion alle durch g teilbar.
Das läßt sich noch ein wenig übersichtlicher gestalten, falls man bemerkt, daß die Bedingung $R \not\supset \quad P - \sigma_\alpha$ äquivalent ist zu der Bedingung $P - R \notin \mathcal{K}$. Wir können also nochmals zu den Komplementen übergehen und erhalten mit Hilfe des Mengensystems

$$\mathcal{L}' := 2^P - \mathcal{K}$$

einen weiteren simplizialen Komplex auf der Eckenmenge P, nämlich

$$\mathcal{L} := \{L | P - L \in \mathcal{L}'\} \tag{17}$$

Die Koeffizientenmatrix des Systems (15) (16) ist dann offenbar gerade indiziert durch die Terme $P - T$ und R, welche beide Simplizes in dem simplizialen Komplex $\mathcal{L}$ sind, und die Koeffizienten der zugehörigen (natürlich quadratischen) Matrix sind 1 oder 0 , je nachdem ob die Indexmengen $P - T$ und R leeren oder nichtleeren Schnitt haben.
Die Lösbarkeit des Systems in ganzen Zahlen ist jedenfalls dann gewährleistet, wenn wir zeigen können, daß die Determinante der entsprechenden Matrix den Betrag eins hat. Das wird im folgenden Abschnitt gezeigt, und somit folgt dann auch der Beweis von Satz 2 aus dem Satz 3 des folgenden Abschnitts.

3 Die Schnittmatrix eines simplizialen Komplexes

Sei also auf der Eckenmenge P ein simplizialer Komplex $\mathcal{L}$ gegeben mit L_i Simplizes der Kardinalität i. Wir wollen sagen , L sei ein *Kardinalität n Komplex*

, falls $L_n > 0$ und $L_{n+1} = 0$ ist.. Sei $L = L_0 + L_1 + .. + L_n$ die Anzahl aller Simplizes aus $\mathcal{L}$. Die $L \times L$ Matrix

$$SM(\mathcal{L}) = (s_{\lambda,\mu}) \tag{18}$$

indiziert durch alle (einschließlich des leeren) Simplizes von $\mathcal{L}$ und definiert durch

$$\begin{aligned} s_{\lambda,\mu} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda \cap \mu = \emptyset \\ s_{\lambda,\mu} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda \cap \mu \neq \emptyset \end{aligned}$$

heiße die *Schnittmatrix* des simplizialen Komplexes $\mathcal{L}$.
Nach Konstruktion ist die Schnittmatrix symmetrisch.
Der folgende Satz beendet dann den Beweis der Sätze 1 und 2 ; er ist aber vielleicht auch für sich selbst von einem gewissen Interesse. Jedenfalls ist es wohl nicht völlig offensichtlich, daß die Konstruktion der Schnittmatrix durch eine eher zahlentheoretische Frage motiviert ist.

Satz 3 : Die Determinante der Schnittmatrix eines simplizialen Komplexes $\mathcal{L}$ hat immer den Absolutbetrag eins ; in Formeln

$$|det(SM(\mathcal{L}))| = 1 \tag{19}$$

genauer gilt

$$det(SM(\mathcal{L})) = (-1)^{L_1+L_3+\ldots+L_{2i+1}+..} \tag{20}$$

Wir wollen anmerken, daß dieser Satz sich tatsächlich auf simpliziale Komplexe erstreckt, und nicht beliebig verallgemeinert werden kann. Es ist sehr leicht, beliebige Mengensysteme anzugeben, deren Schnittmatrix z.B. singulär ist.

Beweis : Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Totalanzahl der Simplizes von $\mathcal{L}$, also nach der Zahl L . Für L=1 besteht der simpliziale Komplex nur aus dem leeren Simplex, die Schnittmatrix ist (1) von der Determinante 1. Nehmen wir nun an, der Satz 3 sei schon gezeigt für alle simplizialen Komplexe mit weniger als L Simplizes. Sei $\mathcal{L}$ ein simplizialer Komplex mit L Simplizes. Wähle aus $\mathcal{L}$ irgendein (inklusionsweise) maximales Simplex μ aus und betrachte die Schnittmatrix in der Weise, daß μ die letzte Zeile und Spalte indiziert. Die Determinante der Schnittmatrix ändert sich nicht, wenn man dann zu der letzten Spalte gewisse Linearkombinationen vorheriger Spalten addiert. Falls wir die Spalten mit $M(\sigma) \in Z^L$ bezeichnen, dann gilt nach dem In-Ex-Klusionsprinzip die Gleichung (summiert über $\tau \neq \mu$)

$$\sum_{\tau \subset \mu} (-1)^{|\mu|-|\tau|} M(\tau) = (-1)^{|\mu|} \cdot e_\mu$$

e_μ Einheitsvektor mit 1 an der Stelle μ. Durch weitere Spaltenoperationen kann man dann die letzte Zeile der Schnittmatrix (außer im Diagonalelement) zu Null machen. Die neue Matrix hat eine $(-1)^{|\mu|}$ an der rechten unteren Diagonalstelle, Nullen überhalb und links von dieser Stelle; aber die verbleibende $(L-1)\times(L-1)$ Matrix ist die Schnittmatrix des simplizialen Komplexes $\mathcal{L} - \mu$. Das zeigt den Induktionsschritt.

Folgerung: Die Signatur der Schnittmatrix des Komplexes L ist gleich der Eulercharakteristik. von L : $Sign(SM(L)) = \chi(L)$.

Beweis : Nach einer bekannten Formel [L] für die Signatur hat man für die $a \times a$ Hauptminoren s_a und $s_0 = 1$ die Formel

$$Sign(SM(L)) = \sum_{a=1}^{n} s_{a-1} \cdot s_a$$

woraus sich leicht

$$Sign(SM(L)) = Sign(SM(L-\mu) + det(SM(L-\mu)) \cdot det(SM(L))$$

und somit folgt aus dem Satz 3

$$Sign(SM(L)) = Sign(SM(L-\mu)) + (-1)^{|\mu|}$$

was wiederum den Induktionsschritt für die Folgerung liefert.

Man sieht auch leicht eine weitere Eigenschaft der Schnittmatrix ein. Seien nämlich L und M zwei simpliziale Komplexe und ist $L \bullet M$ ihr Join, so gilt für die Schnittmatrizen die Formel

$$SM(L \bullet M) = SM(L) \otimes SM(M)$$

Wir wollen noch einmal das obige Beispiel (iii) betrachten. Der zugehörige simpliziale Komplex besteht aus den Simplizes $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,4\}$. Wir benötigen zur Konstruktion des obigen Vektors v nur die drei Mengen $T = \{3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}$ was man algebraisch durch die Identität für den Ausdruck

$$(f_1-1)(f_3-1)(f_4-1) + (f_1-1)(f_4-1) - (f_3-1) = f_1 f_3 f_4 - f_1 f_3 - f_3 f_4 + 1$$

direkt verifizieren kann. Bis auf die Konstante teilt ja die Zahl $g = ggT(f_3 f_4, f_1 f_3)$ jeden Term jenes Ausdrucks.

4 Eulercharakteristiken und die Inverse der Schnittmatrix

Sei $\mathcal{K}$ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge P und sei $\mathcal{L}$ sein Dual im obigen Sinne, d.h. λ ist Simplex in $\mathcal{L}$ falls

$$\lambda \in \mathcal{L} \iff P - \lambda \notin \mathcal{K}$$

L soll dann das *kanonische Alexanderdual* von K heißen. Wir erinnern an die Definition des *Links* eines Simplexes σ in einem simplizialen Komplex K :

$$Lk_K(\sigma) = \{\tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset \quad \tau \cup \sigma \in K\} \quad .$$

Insbesondere ist im Folgenden auch der Spezialfall wichtig, daß für $\sigma \notin K$ der Komplex $Lk_K(\sigma)$ aus gar keinen Simplizes besteht, daß er also der leere Komplex ist, und insbesondere nicht einmal das Element $\emptyset$ enthält.
Es stellt sich nun heraus , daß die Lösung des Gleichungssystems (15), (16) durch die Eulercharakteristiken der Links aller Simplizes von K gegeben ist. Dazu wollen wir zunächst die Eulercharakteristik eines simplizialen Komplexes K mit dem leeren Simplex,also $k_0 = 1$ und mit k_i Simplizes der Kardinalität $i \geq 1$ durch

$$\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot k_i$$

festlegen. Dabei soll insbesondere die Eulercharakteristik eines leeren Komplexes gleich 0 und die Eulercharakteristik des Komplexes $\{\emptyset\}$ gleich 1 sein.
Es ist leicht zu sehen, daß für die Eulercharakteristiken von kanonisch alexanderdualen Komplexen gilt :

$$\chi(K) = (-1)^{|P|+1}\chi(L) \tag{21}$$

Für eine Teilmenge η der Punktmenge P von K definieren wir die ***Einschränkung*** $K|\eta$ von K auf η als die Menge aller Simplizes von K , deren Eckpunkte ganz in η liegen. Dann ist das kanonische Alexanderdual (innerhalb der Menge η genommen) des Komplexes $K|\eta$ isomorph zu dem Komplex $Lk_L(P - \eta)$. Insbesondere gilt für die Eulercharakteristiken

$$\chi(K|\eta) = (-1)^{|\eta|+1}\chi(Lk_L(P - \eta)) \tag{22}$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich dann

Satz 4 : Sei $\lambda = P - \eta$.

$$(i) \quad \sum_{\sigma \in K} \chi(Lk_K(\sigma)) \; = 1$$

$$(ii) \forall \eta \neq \emptyset \sum_{\sigma \cap \eta = \emptyset} \chi(Lk_K(\sigma)) \; = \; (-1)^{|\eta|+1} \cdot \chi(Lk_L(\lambda)) \tag{23}$$

Insbesondere gilt für $\eta \in K - \{\emptyset\}$

$$(iii) \sum_{\sigma \cap \eta = \emptyset} \chi(Lk_K(\sigma)) = 0$$

Hierbei wird stets über die angegebenen σ summiert. Die Summation in der Formel (ii) geht über alle σ mit $\sigma \subseteq \lambda$.

Beweis: (i) Jedes nichtleere Simplex τ liefert einen Beitrag in allen Termen $\chi(Lk_K(\sigma))$ die der Bedingung $\sigma \subsetneq \tau$ genügen ; und zwar ist dieser Beitrag gerade $(-1)^{|\tau|-|\sigma|}$. Daraus folgt sofort, daß nichtleere τ insgesamt einen Beitrag 0 liefern. Nur das Simplex $\emptyset$ liefert den Beitrag 1.
(ii) In dem Ausdruck $\sum \chi(Lk_K(\sigma))$ summiert über alle σ mit $\sigma \cap \eta = \emptyset$ geben wegen der alternierenden Vorzeichen wiederum alle τ mit $\tau \not\subseteq \eta$ einen Nullbeitrag. Nur diejenigen $\tau \in K$ mit $\tau \subseteq \eta$ ergeben den Beitrag

$$\sum_{\sigma \cap \eta = \emptyset} \chi(Lk_K(\sigma)) = \sum_{\tau \subseteq \eta} (-1)^{|\tau|} = \chi(K|\eta)$$

wobei die letztere Summe sich nur über $\tau \in K$ erstreckt. Aus der Gleichung (22) folgt dann die Behauptung.
(iii) folgt aus (ii) weil die betrachteten Links leere Komplexe sind.

Aus Satz 4 (i) und (iii) entnehmen wir insbesondere, daß der Vektor $(\chi(Lk_K(\sigma)))_{\sigma \in K}$ eine Lösung eines Gleichungssystems der Form (15) (16) ist.
Die Gleichung (ii) hat in diesem Zusammenhang aber noch eine ganz besondere Bedeutung. Sie gibt nämlich die Berechnung des Ausdrucks v aus (13) zum Einen als Koeffizienten der $\prod_{i \in T}(f_i - 1)$ und zum Anderen als Koeffizienten der $\prod_{j \in S} f_j$. Es ist übrigens klar, daß der Übergang von einem solchen Ausdruck zum Anderen gerade das (mit geeigneten Vorzeichen versehene) Prinzip von Inklusion und Exklusion ist.

Wir können die Lösung des obigen Gleichungssystems auch auffassen als die erste Spalte/Zeile der Inversen der Schnittmatrix des Komplexes K . Der allgemeine Ausdruck der Inversen dieser Matrix wird durch den nächsten Satz gegeben.

Satz 5 : Seien $\xi, \eta \in K$. Dann gilt

$$\sum_{\sigma \cap \eta = \emptyset} (-1)^{|\xi \cap \sigma|} \chi(Lk_{Lk_K(\xi)}(\sigma - (\xi \cap \sigma))) \quad = \quad \delta_{\xi\eta}$$

das Kroneckerdelta von ξ und η, wobei sich die Sume über die angegebenen σ erstreckt.

Zum Beweis sieht man wie bei Satz 4 zunächst, daß ein Simplex τ nur dann einen nichttrivialen Beitrag leisten kann, falls $\tau \supset \xi$ und gleichzeitig $\tau \subset \eta$ ist. Wegen der alternierenden Vorzeichen heben sich aber auch alle solchen Beiträge gegenseitig weg mit Ausnahme des Falles $\xi = \tau = \eta$, in dem nur ein Beitrag von 1 stehenbleibt.

5 Die maximalen Simplizes

Wir wollen nun noch erklären, daß die maximalen Simplizes des simplizialen Komplexes K eine besondere Rolle spielen. Einerseits ist das völlig offensichtlich,wenn man die Formel aus Satz 5 betrachtet. Falls dort nämlich σ ein maximales Simplex ist, so muß $Lk_K(\sigma)$ der nur aus dem leeren Simplex bestehende Komplex sein, und der Eingang in der Inversen Matrix ist ± 1 oder 0 je nachdem ob das Simplex τ in σ enthalten ist oder nicht. Der Teil der Inversen, dessen Zeilen oder Spalten durch die maximalen Simplizes indiziert ist, ist also (jedenfalls bis auf gewisse Vorzeichen) nichts Anderes als die gewöhnliche Inzidenzmatrix des simplizialen Komplexes.
Andererseits läßt sich aber bei der Berechnung der Inversen der Schnittmatrix feststellen, daß viele der vorkommenden Eulercharakteristiken $= 0$ sind. Setze dazu

$$max(K) = \{\mu_i \mid \mu_i \;\; maximal \;\; in \;\; K\}$$

$$prim(K) = \{\mu_i \cap \mu_j \cap \ldots \cap \mu_k \mid \mu_s \in max(K)\}$$

Für ein Simplex $\sigma \in K$ wollen wir das kleinste Element $\tau \in prim(K)$ welches σ enthält, den Abschluß von σ in K nennen. Dann ist der folgende Sachverhalt leicht zu sehen:

Satz 6 : Falls $\sigma \notin prim(K)$ und τ der Abschluß von σ in K ist, so gilt

$$Lk_K(\sigma) = Lk_K(\tau) \bullet (\tau - \sigma)$$

wobei auf der rechten Seite der simpliziale Join steht. Insbesondere ist also $Lk_K(\sigma)$ stets kontraktibel, falls $\sigma \notin prim(K)$ ist. Infolgedessen ist in diesem Fall auch die Eulercharakteristik $\chi(Lk_K(\sigma)) = 0$.

Der Beweis ist klar, wenn man bedenkt, daß die maximalen Simplizes des Komplexes $Lk_K(\sigma)$ gerade von der Form $\mu - \sigma$ mit $\mu \in max(K)$ sind.

Die Behauptung über die Eulercharakteristik ergibt sich übrigens auch aus einem Satz von Rota über die Möbiusfunktion einer Teilordnung mit Abschluß operator, siehe [A], Kap IV, Satz 4.27, Seite 167.

Tatsächlich bestehen zwischen dem simplizialen Komplex und der Teilordnung der abgeschlossenen Mengen wichtige Beziehungen, die wir hier noch diskutieren wollen. Der simpliziale Komplex aller Ketten von Elementen aus $prim(K)$ ist offenbar ein Unterkomplex der ersten baryzentrischen Unterteilung von K, in offensichtlicher Notation also $K^{prim} \subset K^{bar}$. Offenbar ist der Unterkomplex K^{prim} ein voller Unterkomplex von K^{bar}. Es gilt

Satz 7: Der Unterkomplex K^{prim} ist ein Deformationsretrakt des Komplexes K^{bar}

Beweis: Sei

$$\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots \subset \sigma_n$$

ein Simplex in K^{bar}. Bezeichne mit $\tau = \overline{\sigma_i}$ das kleinste Simplex aus K^{prim} welches σ_i enthält. Setze

$$I_j = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \overline{\sigma_i} = \tau_j\}$$

und erhalte eine Partition des ganzzahligen Intervalls $[1, n]$. Dann ist die stetige Abbildung

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \sigma_i \mapsto \sum_{j=1}^{s} (\sum_{i \in I_j} t_i) \sigma_j$$

die behauptete Deformationsretraktion, wie man leicht nachprüft.

Insbesondere können wir das nun auf Eulersche Räume anwenden. Wir erinnern daran, daß (jedenfalls mit unserer Konvention bezüglich der Eulercharakteristik) ein Kardinalität n simplizialer Komplex K ein *Eulerraum* heißt , falls für jedes nichtleere simplex σ mit $|\sigma| = k$ die Gleichung $\chi(Lk_K(\sigma)) = (-1)^{n-k}$ gilt. Ein Kard n simplizialer Komplex K heißt ein *mod 2 Eulerraum* , falls die Eulercharakteristik $\chi(Lk_K(\sigma))$ für jedes nichtleere Simplex immer ungerade ist. Wir wollen dann noch einen simplizialen Komplex einen *allgemeinen Eulerraum* nennen, falls für jedes nichtleere Simplex σ die Eulercharakteristik $\chi(Lk_K(\sigma))$ immer von Null verschieden ist. Dann erhalten wir aus Satz 7 die

Folgerung: In einem allgemeinen Eulerraum K ist jedes Simplex der Durchschnitt von maximalen Simplizes, formal gilt $prim(K) = K$. Insbesondere gilt dies auch für einen mod 2 Eulerraum, also für einen Eulerraum, also für jede Mannigfaltigkeit.

Ein instruktives Beispiel, in dem das Dual besonders gut zu sehen ist, wird durch (den Rand des) n-dimensionalen Kreuzpolytops $K = Oct(n)$ gegeben. Offenbar ist $Oct(n) \subset \Delta(2n)$. Das kanonische Alexanderdual L hat dann nur wenige abgeschlossene Mengen ; in der Tat ist $L \cong Rand\Delta(n)$ in natürlicher Weise.

Ich danke Frau Professor R.A.Bailey für einen Brief, in dem sie die Arbeit [SB] als Verallgemeinerung des rechteckigen A-schemas zu meiner Beachtung empfahl.

[A] M. Aigner Combinatorial Theory, Springer Grundlehren 234

[B] T. Bier Totient-Numbers of the rectangular Association Scheme , Graphs and Combinatorics 6 (1990) S.5-15

[B1] T. Bier Totient Numbers for cyclic Group Rings , Topology and its Applications 25 (1987) S. 175-178

[L] F.Lorenz Lineare Algebra II, B.I. Taschenbuch

[SB] T.P. Speed und R.A. Bailey On a class of Association Schemes Derived from Latices of Equivalence Relations, Algebraic Structures and Applications, P.Schultz,C.E.Praeger und R.P.Sullivan Hersgeb., Marcel Dekker New York (1982) S. 55-74