Torellisätze für zyklische Überlagerungen

Kęstutis Ivinskis

Dissertation

Bonn 1990

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Universität-GH-Essen
Fachbereich 6 Mathematik
Universitätsstr. 3
D-4300 Essen 1

MPI/90-24

Einleitung

Hodgetheorie kann man als eine Linearisierung von Problemen der komplexen algebraischen Geometrie auffassen. Das Problem der Klassifikation von Varietäten bis auf Isomorphie (Moduliproblem) wird durch diese Linearisierung im wesentlichen zu der Frage, ob es möglich ist, komplexe Strukturen einer Varietät auf dem Niveau der Kohomologie zu unterscheiden (Torelliproblem). Daß dies im Fall der Kurven möglich ist, ist eines der Hauptresultate der klassischen Hodgetheorie : das Torellitheorem für Kurven besagt, daß eine glatte Kurve durch ihre Jacobi-Varietät mit der durch den Thetadivisor gegebenen Polarisierung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist (siehe z.B. [ACGJ, VI, §3]).

Im allgemeinen wird der Zusammenhang zwischen der Theorie der Moduli und der Hodgetheorie durch die von Griffiths in [Gri1] und [Gri2] eingeführten Periodenabbildungen gegeben. Anders als im Fall der Kurven sind diese Abbildungen für viele Klassen höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten nicht injektiv. Bei der Untersuchung der Periodenabbildungen für polarisierte komplexe glatte Varietäten spielen zwei Fragestellungen eine wichtige Rolle : zum einen die Endlichkeit der Periodenabbildung (Infinitesimales Torelliproblem) und zum anderen die generische Injektivität der Periodenabbildung (Generisches Torelliproblem).

Das Infinitesimale Torelliproblem läßt sich nach [Gri2] auf ein multiplikatives Problem in der Kohomologie zurückführen. Bei der Behandlung dieses Problems hat einerseits die Betrachtung der Kohomologie gewisser Koszulkomplexe in [LPW] und [Gre2] und andererseits eine in [Gre1] und [Fl] benutzte Spektralsequenz-Methode, die im wesentlichen eine Verallgemeinerung der Griffiths'schen Rationalen Differentialformen in [Gri4] (vgl. [De3, 9.2]) ist, zu Resultaten geführt. Wir bezeichnen eine in den Totalraum eines Geradenbündels einbettbare glatte projektive Varietät als eine einfache Überlagerung (siehe Definition 8.1). Die einfachen Überlagerungen sind eine Klasse von Varietäten, die die zyklischen Überlagerungen umfassen. In Theorem 8.4 lösen wir das infinitesimale Torelliproblem für eine einfache Überlagerung von genügend hohem Grad bezüglich einer amplen Garbe (d.h. für eine mit genügend hohem Grad in den Totalraum eines amplen Geradenbündels einbettbare Varietät) unter Verwendung der Spektralsequenzmethode von Green und Flenner.

Im Spezialfall, daß die ample Garbe die kanonische Garbe ist, wurden in [Vie4] ähnliche Aussagen benutzt, um Positivitätssätze für direkte Bilder von Potenzen dualisierender Garben herzuleiten. Der Umstand, daß der Positivitätssatz für Potenzen dualisierender Garben besser ist als für die dualisierende Garbe selbst, legt es nahe zu erwarten, daß die Hodgestruktur zyklischer Überlagerungen viel mehr Information enthält als die Hodgestruktur der Varietät.

Die Hauptschwierigkeit, um zu globalen Aussagen über Periodenabbildungen zu gelangen, liegt in der Tatsache, daß es keine natürliche geometrische Interpretation für Hodgestrukturen vom Gewicht größer oder gleich zwei gibt (siehe [CGGH, 0.(a)]). Aus diesem Grunde betrachten Carlson und Griffiths [CG] nicht nur die Hodgestruktur einer Varietät, sondern zugleich das Differential der Periodenabbildung. Sie formalisieren ihre Methode im Begriff der Infinitesimalen Variation von Hodgestrukturen (in abgekürzter Notation IVHS). Diese zusätzliche infinitesimale Information erlaubt es ihnen, eine positive Antwort für das Generische Torelliproblem bei kubischen Hyperflächen im $\mathbb{P}^{3m+1}$ zu finden. Dieser Ansatz wurde von Donagi [Do1] verfeinert und brachte vor allem durch Donagi's Symmetrizertechnik die Lösung des Generischen Torelliproblems für fast alle Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$. Die Methode der IVHS zusammen mit der Symmetrizertechnik wurde in [Gre1], [DT], [Sa1] und [Sa2] verwendet um bei weiteren Klassen von Varietäten Resultate beim Generischen Torelliproblem zu erzielen.

Im allgemeinen reicht jedoch auch die Infinitesimale Variation der Hodgestruktur nicht aus um die Varietäten zu beschreiben. Unser Ergebnis (Hauptresultat 1 und 2 in Kapitel 1) besagt jedoch auch hier, daß die gewünschten Torellisätze für zyklische Überlagerungen von genügend hohem Grad gelten. Wieder basiert der Beweis auf der Beobachtung, daß zyklische Überlagerungen in bezug auf die zugehörigen Basisvarietäten einer Hodgetheorie mit vertwisteten Koeffizienten entsprechen und daß durch das Rechnen mit vertwisteten Koeffizienten mehr Information über die geometrische Struktur zurückgewonnen werden kann als mit den üblichen Methoden.

Grundlegend für unsere Arbeit war die Green'sche Verallgemeinerung [Gre1] der Methoden von Carlson, Griffiths und Donagi und der in [DG] gefundene Zugang zur Symmetrizertechnik mit Hilfe der Koszulkohomologie. Durch Verwendung dieser Methoden in Zusammenhang mit unserem $I_{(1,1)}$-Kriterium in Proposition 6.1 erzielen wir als technisches Hauptresultat in 9.1 ein variationales Torelli-Theorem für glatte, zyklische Überlagerungen von genügend hohem Grad verzweigt entlang eines amplen glatten Divisors. Dies liefert eine Aussage über die Periodenabbildung solcher zyklischer Überlagerungen : die Lösung des Generischen Torelliproblems für die Untervarietät des zugehörigen Modulraumes, deren Punkte von entsprechenden zyklischen Überlagerungen herrühren (siehe Kapitel 1).

Als eine weitere Anwendung dieser Methoden und des $I_{(1,1)}$-Kriteriums beweisen wir im letzten Kapitel ein variationales gemischtes Torelli-Theorem. Die Aussage in Theorem 10.1 ist im wesentlichen, daß auf einer glatten projektiven Varietät der Dimension n mit sehr ampler kanonischer Garbe eine offene Untervarietät, die Komplement eines genügend positiven Divisors ist, durch ihre gemischte IVHS bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, falls eine gewisse technische Voraussetzung gilt. Diese technische Voraussetzung ist erfüllt, wenn z.B. für die zugrundeliegende Varietät die Irregularität verschwindet und der Infinitesimale Torelli für die n-Formen gilt.

Diese Arbeit enstand unter der Leitung von Herrn Prof. F. Hirzebruch und Herrn Prof. E. Viehweg. Zu Beginn arbeitete ich am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn, später als Assistent an der Universität-GH Essen. Das Jahr der Algebraischen Geometrie 1987/88 am MPI für Mathematik gab mir die Möglichkeit zur Einarbeitung in die Hodgetheorie und zu Gesprächen mit den anwesenden Mathematikern. Für ihre Anregungen möchte ich Prof. R. Donagi, Dr. M.H. Saito, Dr. K. Timmerscheidt und Prof. S. Usui danken. Herrn Prof. F. Hirzebruch, der mich schon als Diplomand betreut hat, danke ich für sein Interesse, seine Unterstützung und dafür, daß ich die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten am Max-Planck-Institut in Anspruch nehmen konnte.

Ganz besonders aber will ich Prof. E. Viehweg danken, der mir nicht nur das interessante und ergiebige Thema dieser Arbeit gestellt und sie betreut hat, sondern auch durch zahllose Gespräche, Hinweise und Ermutigungen das Gelingen der Arbeit erst möglich gemacht hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Notation und Diskussion der Hauptresultate

Alle Varietäten und Schemata werden bei uns immer als über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert vorausgesetzt. Die von uns benutzte Notation ist die übliche und stimmt weitgehend mit der von [Ha] überein.

Definition 1.1 Ein Paar $(Y, \mathcal{L})$ heißt polarisierte Varietät, wenn Y eine glatte, projektive Varietät und $\mathcal{L}$ eine ample, invertierbare Garbe auf Y ist. Wir bezeichnen zwei polarisierte Varietäten $(Y, \mathcal{L})$ und $(Y', \mathcal{L}')$ als isomorph, falls es einen Isomorphismus $\tau : Y \to Y'$ gibt, sodaß die Klasse $[\mathcal{L}]$ von $\mathcal{L}$ in der Neronseverigruppe $NS(Y) = DIV(Y)/(\text{numerische Äquivalenz})$ mit der Klasse $[\tau^*\mathcal{L}']$ übereinstimmt.

Definition 1.2 Wir bezeichnen einen Morphismus

$$g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$$

als eine glatte Familie von polarisierten Varietäten der Dimension n bezüglich einer relativ amplen Garbe $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ auf $\mathcal{Y}$, falls folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind :

1. $\mathcal{Y}$ und S sind zusammenhängende Varietäten.
2. Der Morphismus g ist glatt, eigentlich und besitzt zusammenhängende Fasern $\mathcal{Y}_s = g^{-1}(s)$ der Dimension n.

Wir fassen die Fasern $\mathcal{Y}_s$, $s \in S$, als durch die relativ ample Garbe $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ auf $\mathcal{Y}$ polarisierte Varietäten auf.

Sei $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ eine glatte Familie von polarisierten Varietäten der Dimension n über einem glatten Schema S. Die n-te primitive Kohomologie der Fasern dieser Familie gibt Anlaß zu einer Polarisierten Variation von Hodgestrukturen $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}, \mathcal{F}^\bullet, Q)$ vom Gewicht n über S mit zugrundeliegender lokalkonstanter Garbe $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}} = (R^n g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{Y}})_0$ und somit zu einer holomorphen Periodenabbildung

$$\varphi_\Gamma : S \longrightarrow \Gamma \setminus D\ ,$$

wobei $\Gamma \setminus D$ der zugehörige Periodenbereich ist (siehe hierzu Beispiel 2.5 und Definition 2.6).

Wir bezeichnen mit $\approx$ die auf S durch Isomorphie von polarisierten Varietäten gegebene Äquivalenzrelation. Ideal wäre es nun aus der Gleichheit zweier Periodenpunkte $p_1 = \varphi_\Gamma(s_1)$ und $p_2 = \varphi_\Gamma(s_2)$ folgern zu können, daß die Fasern $\mathcal{Y}_{s_1}$ und $\mathcal{Y}_{s_2}$ von g über s_1 und s_2 als polarisierte Varietäten isomorph sind. Man strebt also die Injektivität der auf dem mengentheoretischen Quotienten $S_0/\!\approx$ durch φ_Γ induzierten Abbildung

$$\tilde{\varphi}_\Gamma : S_0/\!\approx\ \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

an. Dies ist die gewünschte globale Torelliaussage für die Familie $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$. Unter Zuhilfenahme des Differentials der Periodenabbildung läßt sich dieses Problem mit der von Carlson und Griffiths [CG] vorgeschlagenen Vorgehensweise in Angriff nehmen. Hierbei muß man aber in Kauf nehmen, daß sich nur ein schwächeres Ergebnis folgern läßt: man erhält die angestrebte globale Torelliaussage nur für ein offenes dichtes Unterschema von S. Der Grund für das Gelingen dieses Ansatzes von Carlson und Griffiths liegt darin, daß die IVHS einer Faser $\mathcal{Y}_s$ über einem Punkt $s \in S$ (dies ist im wesentlichen das Differential von φ_Γ in dem Punkt s) viel mehr geometrische Information über die polariserte Varietät $\mathcal{Y}_s$ enthält als nur die polarisierte Hodgestruktur von $\mathcal{Y}_s$ alleine.

Infinitesimales Torelliproblem

Das Infinitesimale Torelliproblem ist die Frage nach der Injektivität des Differentials einer Periodenabbildung bis auf die Äquivalenzrelation $\approx$ (neben der in der Einleitung zitierten Literatur siehe auch [Ca], [Pe1], [Pe2], [Us1], [Us2], [Kn], [Re], [We]). Sei $(Y, \mathcal{L})$ eine polarisierte Varietät. Nach [Gri2] läßt sich das Infinitesimale Torelliproblem für $(Y, \mathcal{L})$ als eine kohomologische Bedingung formulieren.

Definition 1.3 (Infinitesimale Torelli-Eigenschaft für Gewicht n) Die polarisierte Varietät $(Y, \mathcal{L})$ erfüllt die *Infinitesimale Torelli-Eigenschaft*, falls die natürliche durch Cupprodukt und Kontraktion von Garben gegebene Abbildung

$$H_0^1(Y, T_Y) \xrightarrow{\delta=\bigoplus_{p=1}^n \delta_p} \bigoplus_{p=1}^{n} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H_0^{n-p}(Y, \Omega_Y^p), H_0^{n-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1})\right) \tag{1.3.1}$$

injektiv ist.

Hierbei ist $H_0^1(Y, T_Y) \subset H^1(Y, T_Y)$ die Menge der infinitesimalen Deformationen von Y, die die durch $\mathcal{L}$ gegebene Polarisierung auf Y respektieren. Weiterhin bezeichnen wir für $p = 0, \dots, n$ mit $H_0^{n-p}(Y, \Omega_Y^p)$ den primitiven Anteil der Kohomologiegruppe $H^{n-p}(Y, \Omega_Y^p)$ (siehe Definition 2.7 und Theorem 2.9). Diese kohomologische Bedingung in Definition 1.3 läßt sich folgendermaßen geometrisch interpretieren. Falls Y die Faser von g über einem Punkt $s \in S$, die Garbe $\mathcal{L}$ die Einschränkung der relativ amplen Garbe $\mathcal{L}_\mathcal{Y}$ auf Y ist und die Kodaira-Spencer Abbildung $\rho_s : T_s(S) \longrightarrow H^1(Y, T_Y)$ injektiv ist, so gilt die folgende Implikation

Inf. Torelli-Eigenschaft für $(Y, \mathcal{L})$ erfüllt.	$\Longrightarrow$	Das Differential der Periodenabbildung $d\varphi_\Gamma$ ist im Punkt $s \in S$ injektiv.

Falls S ein lokaler Modulraum für die Varietät Y ist, so gilt die Injektivität der Kodaira-Spencer Abbildung : wenn $g : (\mathcal{Y}, Y) \longrightarrow (S, s)$ eine Kuranishi-Familie (siehe z.B. [Se, §2] oder [PS, (7.6)]) für die Varietät Y ist, so ist ρ_s bijektiv. Dies ist im Endeffekt der Fall, für den man sich bei der lokalen Untersuchung von Periodenabbildungen interessiert.

Um die Injektivität von δ zu folgern, genügt es zu zeigen, daß die Abbildung

$$H^1_0(Y,T_Y) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^0_0(Y,\Omega^n_Y), H^1_0(Y,\Omega^{n-1}_Y)\right)$$

injektiv ist (Infinitesimaler Torelli für n-Formen). Falls die kanonische Garbe ω_Y von Y genügend viele Schnitte besitzt, so ist die Injektivität des Anteil δ_n der Abbildung δ gut zu kontrollieren. Unser Resultat in Theorem 8.4 zum Infinitesimalen Torelliproblem für einfache Überlagerungen (siehe Definition 8.1) ist die folgende Aussage:

> **Infinitesimaler Torelli für einfache Überlagerungen**
> Für eine einfache Überlagerung von genügend hohem Grad bezüglich einer amplen invertierbaren Garbe ist die Abbildung δ_n injektiv.

Hierbei ist zu bemerken, daß diese Aussage wohl im wesentlichen als bekannt anzusehen ist. In [Gre1, Thm. 0.1] wird für genügend ample glatte Divisoren die Infinitesimale Torelli-Eigenschaft bewiesen. Ähnliche Fragestellungen werden in [Fl] und [We] behandelt. Man kann zwar das Green'sche Resultat nicht unmittelbar auf eine einfache Überlagerung anwenden, indem man die einfache Überlagerung als Divisor in dem zugehörigen projektiven Bündel auffasst (siehe Definition Lemma 8.2), da dieser Divisor nicht ample ist, aber derselbe Beweisansatz (Spektralsequenzmethode) führt schließlich zum Ziel. Wir formulieren den Beweis von Theorem 8.4 mit Hilfe der Terminologie der Hyperkohomologie von Komplexen. Da jede zyklische Überlagerung eine einfache Überlagerung ist, erhält man aus obigem Resultat für die einfachen Überlagerungen als Korollar ein Ergebnis von Griffiths in [Gri5], welches besagt, daß für zyklische Überlagerungen von genügend hohem Grad verzweigt entlang eines amplen glatten Divisors die Infinitesimale Torelli-Eigenschaft erfüllt ist. Dies ist der Ausgangspunkt für die Untersuchung des Generischen Torelliproblems für zyklische Überlagerungen.

Generisches Torelliproblem

Beim Generischen Torelliproblem stellt man sich die Frage, ob die Periodenabbildung φ_Γ modulo der durch Isomorphie von polarisierten Varietäten auf S gegebenen Äquivalenzrelation $\approx$ generisch injektiv ist. Wir betrachten hierzu die auf der Quotientenmenge $S_0/\approx$ durch φ_Γ induzierte Abbildung. Das Generische Torelliproblem formulieren wir nun folgendermaßen.

Definition 1.4 Die Familie $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ erfüllt für die Gruppe Γ die *Generische Torelli-Eigenschaft*, falls für eine Zariski-offene Menge $S_0 \in S$ die auf dem mengentheoretischen Quotienten $S_0/\approx$ durch φ_Γ induzierte Abbildung

$$\tilde{\varphi}_\Gamma : S_0/\approx \ \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

injektiv ist.

Bemerkung 1.5 Wir bezeichnen mit π_0 die natürliche Quotientenabbildung

$$\pi_0 : S_0 \longrightarrow S_0/\!\approx \ .$$

Da nach [Gro1, IV-VI] die Relation $\approx$ eine konstruierbare Äquivalenzrelation auf S ist, kann man $S_0 \subset S$ so wählen, daß S_0 und $S_0/\!\approx$ glatte Varietäten sind, die Abbildung π_0 ein glatter Morphismus ist und $\tilde{\varphi}_\Gamma$ die Struktur einer holomorphen Abbildung erbt ([CDT, Thm.in §2 und §3]).

Nach einem Resultat von Cox, Donagi und Tu [CDT] genügt es die sogenannte Variationale Torelli-Eigenschaft zu überprüfen um die Generische Torelli-Eigenschaft für die Familie $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ zu folgern. Danach kann man die bei früheren Arbeiten (z.B. [CG], [CGGH], [Do1], [PS], [Sa1]) notwendigen Hilfsvoraussetzungen, wie zum Beispiel die Darstellbarkeit von $S_0/\!\approx$ durch ein grobes Modulschema, die Existenz eines regulären Wertes der Periodenabbildung und sogar die Überprüfung der Infinitesimalen Torelli-Eigenschaft über S_0 vernachlässigen.

Definition 1.6 Die Familie $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ erfüllt die *Variationale Torelli-Eigenschaft* bezüglich der Äquivalenzrelation $\approx$, falls die folgende Eigenschaft gilt :

> Für alle $s \in S_0$ bestimmt der algebraische Anteil der durch g über s induzierten IVHS die Isomorphieklasse der polarisierten Varietät $\mathcal{Y}_s$ eindeutig (siehe Definition 2.11 und 2.14).

Nach [CDT, Thm. in §3] gilt die Implikation

$$\text{Variationale Torelli-Eigenschaft} \Longrightarrow \text{Generische Torelli-Eigenschaft} \ .$$

Hierzu sind zwei Dinge zu bemerken. Zum einen bleibt diese Implikation auch dann richtig, wenn die Variationale Torelli-Eigenschaft nur generisch auf S erfüllt ist und zum anderen folgt aus der Variationalen Torelli-Eigenschaft die Generische Torelli-Eigenschaft sogar für jede diskrete Untergruppe Γ von $G_{\mathbf{R}}$, die die Monodromiegruppe enthält. Die Umkehrung der obigen Implikation ist falsch : in [CD] liefern reguläre elliptische Flächen mit einem Schnitt ein Gegenbeispiel. In Theorem 9.1 formulieren wir unser Variationales Torelli-Resultat :

> **Hauptresultat 1**
> Sei $(Y, \mathcal{L})$ eine polarisierte Varietät. Falls N eine genügend große positive ganze Zahl ist, so gilt für eine zyklische Überlagerung $f : Z \longrightarrow Y$ bezüglich $\mathcal{L}^N = \mathcal{O}_Y(X)$, wobei X ein glatter, reduzierter Divisor auf Y ist, daß die polarisierte Varietät $(Z, f^*\mathcal{L})$ eindeutig durch den algebraischen Anteil ihrer IVHS bestimmt ist.

Abgesehen von der technischen Voraussetzung, daß wir den Grad der Überlagerung genügend groß wählen müssen, ist die entscheidende Voraussetzung, daß wir Infinitesimale Variationen von Hodgestrukturen zusammen mit einer festen Operation der Galoisgruppe betrachten und alle Isomorphismen diese Operation respektieren (siehe

Definition 5.4). Da der Modulfunktor zyklischer Überlagerungen M_h^N beschränkt ist, liefert Korollar 9.2 nun, daß für Familien solcher zyklischer Überlagerungen die Variationale Torelli-Eigenschaft erfüllt ist (siehe Definition 3.5 und Lemma 3.8).

Variationale Torelli-Eigenschaft für zyklische Überlagerungen
Sei h ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n. Falls N eine genügend große Zahl ist, so gilt für jedes glatte Schema S und für jede Familie

$$(g_Z : \mathcal{Z} \longrightarrow S, \mathcal{M}_Z) \in M_h^N(S)$$

die Variationale Torelli-Eigenschaft.

Somit gilt also insbesondere auch die Generische Torelli-Eigenschaft für solche Familien. Für das zugehörige Hilbertschema läßt sich der schwache globale Torelli jetzt so ausdrücken (siehe Definition 3.10 und Bemerkung 3.13).

Hauptresultat 2
Sei h ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n und N eine genügend große positive Zahl. Sei $(g_N : \mathcal{X} \longrightarrow H_N, \mathcal{H})$ ein Hilbertschema zu dem Modulfunktor M_h^N mit dem Isomorphismus $\mathbb{P}(g_{N*}\mathcal{H}) \simeq \mathbb{P}^{r-1} \times H$ und H_N^{gl} die offene Menge der glatten Punkte des reduzierten Schemas $(H_N)_{red}$. Dann existiert eine Zariski-offene Menge $H_N^0 \subset H_N^{gl}$, sodaß die Fasern einer durch g_N induzierten Periodenabbildung

$$\varphi_\Gamma : H_N^0 \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

genau die Einschränkung auf H_N^0 der Orbiten der natürlichen PGL$(r, \mathbb{C})$-Operation auf H_N^{gl} sind.

Sei $M_h^N = H_N/R$ der separierte algebraische Raum, der den Modulfunktor M_h^N grob darstellt und $(M_h^N)^0$ das Bild von H_N^0 in M_h^N. Somit gilt das folgende Resultat (siehe Theorem 3.12 und Bemerkung 3.13).

Generischer Torelli für zyklische Überlagerungen
Die durch die Abbildung $\varphi_\Gamma : H_N^0 \longrightarrow \Gamma \setminus D$ induzierte Abbildung

$$(M_h^N)^0 \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

ist injektiv.

Gemischtes Torelliproblem

In [Us4] und [Us5] (vgl. [SSU]) wird die die Theorie der Variation von Hodgestrukturen auf den Fall der gemischten Hogdestrukturen, denen logarithmische Deformationen von Varietäten zugrundeliegen, verallgemeinert.

Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. Weiterhin sei für eine natürliche Zahl N ein Schnitt $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$ mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$ gegeben. Man interesssiert sich für die Deformationen der offenen Varietät $U = Y - X$. Nach [Us4, Corollary (4.5)] spielt für Gewicht n in diesem Fall die Abbildung

$$H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle) \xrightarrow{\delta^{log}} \bigoplus_{p=1}^{n} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^{n-p}(Y, \Omega_Y^p\langle X\rangle), H^{n-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle)\right)$$

die Rolle der Abbildung δ in Definition 1.3 (vgl. Theorem 2.9). Hierbei ist

$$\delta^{log} = \bigoplus_{p=1}^{n} \delta_p^{log}$$

die Summe der natürlichen durch Cupprodukt und Kontraktion gegebenen Abbildungen

$$H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle) \xrightarrow{\delta_p^{log}} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^{n-p}(Y, \Omega_Y^p\langle X\rangle), H^{n-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle)\right) . \qquad (1.6.1)$$

Nach einem Resultat von Griffiths (siehe [Us5, (0.1)]) ist für genügend großes N die Abbildung δ_n^{log} injektiv. Dieses Resultat ist als Gemischter Infinitesimaler Torelli für n-Formen zu interpretieren. Ein Beweis für dieses Resultat ergibt sich mit einem analogen Ansatz wie im Beweis von Theorem 8.4. In Theorem 10.1 erzielen wir das folgende Ergebnis.

Gemischter Variationaler Torelli
Falls die kanonische Garbe ω_Y von Y sehr ample, die natürliche Cupproduktabbildung

$$H^0(Y, \omega_Y) \otimes H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee) \longrightarrow H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \omega_Y) \qquad (1.6.2)$$

surjektiv und N eine genügend große positive ganze Zahl ist, so läßt sich aus der Abbildung δ^{log} die offene Varietät $U = Y - X$ bis auf Isomorphie rekonstruieren.

Die Bedingung, daß die kanonische Garbe ω_Y sehr ample ist, ist für den Beweis von Theorem 10.1 unabdingbar, jedoch sollte es möglich sein auf die Surjektivitäts-Bedingung in (1.6.2) zu verzichten.

2 Infinitesimale Variation von Hodgestrukturen

Dieses Kapitel ist ein Übersichtskapitel, in dem zahlreiche Definitionen und Resultate aus der Theorie der Infinitesimalen Variation von Hodgestrukturen zusammengetragen werden. In den folgenden Kapiteln werden wir in der Regel die hier aufgeführten Definitionen und Sätze ohne ausdrückliche Verweise heranziehen. Als Standardreferenz für die Theorie der Infinitesimalen Variation von Hodgestrukturen dienen [CGGH] und [PS].

Polarisierte Hodgestrukturen

Eine Hodgestruktur $(H_{\mathbb{Z}}, F^{\bullet})$ vom Gewicht k besteht aus einem Gitter $H_{\mathbb{Z}}$ von endlichem Rang und einer absteigenden Filtrierung der Komplexifikation $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ von $H_{\mathbb{Z}}$

$$H = F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^k \supset F^{k+1} = \{0\},$$

mit der Eigenschaft, daß für $p = 0, \ldots, k$ der Vektorraum $F^p \oplus \overline{F}^{k-p+1}$ isomorph zu H ist. Eine äquivalente Definition läßt sich mit Hilfe der Hodgezerlegung von H in die Hodgekomponenten $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$ geben, da $F^p = \oplus_{r \geq p} H^{r,k-r}$ für $p = 0, \ldots, k$ ist. Wir bezeichnen mit f^p bzw. $h^{p,q}$ die Dimension des komplexen Vektorraumes F^p bzw. $H^{p,q}$.

Beispiel 2.1 Das Standardbeispiel für eine Hodgestruktur vom Gewicht k liefert die k-te Bettikohomologie $H^k(Y, \mathbb{Z})$ einer glatten, projektiven Varietät Y, indem man

$$H_{\mathbb{Z}} = \frac{H^k(Y, \mathbb{Z})}{\text{Torsion}}$$

setzt. Die Hodgekomponenten sind in diesen Fall durch $H^{p,q} = H^q(Y, \Omega_Y^p)$ gegeben, wobei Ω_Y^p das p-te Dachprodukt der Garbe Ω_Y^1 der regulären 1-Formen auf Y bezeichnet.

Eine polarisierte Hodgestruktur $(H_{\mathbb{Z}}, F^{\bullet}, Q)$ vom Gewicht k besteht aus einer Hodgestruktur $(H_{\mathbb{Z}}, F^{\bullet})$ vom Gewicht k und einer Bilinearform

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z},$$

die $(-1)^k$-symmetrisch ist und die folgenden Eigenschaften, die sogenannten *Hodge-Riemann Bilinearrelationen*, erfüllt :

1. $Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0 \qquad (2.1.1)$
2. $Q(C\psi, \overline{\psi}) > 0$ für jedes $\psi \in H$ mit $\psi \neq 0$. $\qquad (2.1.2)$

Hierbei ist der Weiloperator $C : H \to H$ auf $H^{p,q}$ durch Multiplikation mit $(\sqrt{-1})^{p-q}$ definiert.

Beispiel 2.2 Das klassische Beispiel für eine polarisierte Hodgestruktur $(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q)$ vom Gewicht k wird durch die k-te primitive Kohomologie

$$H_0^k(Y,\mathbb{C}) = \ker \left\{ H^k(Y,\mathbb{C}) \xrightarrow{\cdot \cup c_1(\mathcal{L})^{n-k+1}} H^{2n+2-k}(Y,\mathbb{C}) \right\}$$

einer glatten, projektiven Varietät Y der Dimension n bezüglich einer amplen, invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ gegeben. Hierbei ist $c_1(\mathcal{L}) \in H^1(Y, \Omega_Y^1)$ die 1. Chernklasse der Garbe $\mathcal{L}$ (vgl. p.23). Indem man

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{Z}} &= H^k(Y,\mathbb{Z}) \cap H_0^k(Y,\mathbb{C}) \\ H^{p,q} &= H^q(Y,\Omega_Y^p) \cap H_0^k(Y,\mathbb{C}) \text{ und} \\ Q(\varphi,\psi) &= (-1)^{n(n-1)/2} \int_Y \varphi \cup \psi \cup c_1(\mathcal{L})^{n-k} \end{aligned}$$

setzt, erhält man eine polarisierte Hodgestruktur vom Gewicht k. Wir bemerken, daß nach dem Harten Lefschetzsatz (vgl. [GH, p. 122]) die Abbildung

$$H^k(Y,\mathbb{C}) \xrightarrow{\cdot \cup c_1(\mathcal{L})^{n-k}} H^{2n-k}(Y,\mathbb{C})$$

für $0 \leq k \leq n$ ein Isomorphismus ist. Hieraus folgt für $0 \leq k \leq n$ die *Lefschetzzerlegung* von $H^k(Y,\mathbb{C})$

$$H^k(Y,\mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geq 0} c_1(\mathcal{L})^r \cup H_0^{k-2r}(Y,\mathbb{C}).$$

Da $c_1(\mathcal{L})$ in $H^1(Y,\Omega_Y^1)$ liegt, ist die Lefschetzzerlegung von $H^k(Y,\mathbb{C})$ mit der Hodgezerlegung $\oplus_{p+q=k} H^{p,q}$ von $H^k(Y,\mathbb{C})$ verträglich. Mit Hilfe des primitiven De-Rham Komplexes geben wir in Proposition 4.16 eine andere Interpretation der primitiven Kohomologie.

Klassifizierende Räume

Man wählt zur Definition der klassifizierenden Räume für polarisierte Hodgestrukturen eine feste polarisierte Hodgestruktur

$$(H_{\mathbb{Z},\mathrm{ref}}\,, F^\bullet_{\mathrm{ref}}\,, Q_{\mathrm{ref}})$$

vom Gewicht k als Referenzstruktur. Der klassifizierende Raum D ist die Menge aller polarisierten Hodgestrukturen $(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q)$ vom Gewicht k mit

$$H_{\mathbb{Z}} = H_{\mathbb{Z},\mathrm{ref}}\,, f^p = f^p_{\mathrm{ref}} \text{ und } Q = Q_{\mathrm{ref}}\,.$$

Im Zusammenhang mit polarisierten Hodgestrukturen spielen insbesondere drei Gruppen eine wichtige Rolle :

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Z}} &= \mathrm{Aut}\,(H_{\mathbb{Z},\mathrm{ref}}\,, Q_{\mathrm{ref}})\ , \\ G_{\mathbb{R}} &= \mathrm{Aut}\,(H_{\mathbb{Z},\mathrm{ref}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}\,, Q_{\mathrm{ref}}) \text{ und} \\ G_{\mathbb{C}} &= \mathrm{Aut}\,(H_{\mathrm{ref}}\,, Q_{\mathrm{ref}})\ . \end{aligned}$$

Hierbei ist $G_{\mathbf{Z}}$ die Gruppe der Automorphismen $g : H_{\mathbf{Z},\mathrm{ref}} \longrightarrow H_{\mathbf{Z},\mathrm{ref}}$, sodaß für alle $v, w \in H_{\mathbf{Z},\mathrm{ref}}$ die Eigenschaft $Q(g(v), g(w)) = Q(v, w)$ gilt. Entsprechend sind die Liegruppen $G_{\mathbf{R}}$ und $G_{\mathbf{C}}$ definiert. Nach [Gri3, Proposition 8.12] ist der klassifizierende Raum D bezüglich der reellen Liegruppe $G_{\mathbf{R}}$ homogen und somit eine komplexe Mannigfaltigkeit. Der duale klassifizierende Raum $\check{D}$ ist die Menge aller Filtrierungen $\{F^\bullet\}$ von H_{ref} mit $f^p = f^p_{\mathrm{ref}}$, sodaß für die Filtrierung $\{F^\bullet\}$ die erste Hodge-Riemann Bilinearrelation (2.1.1) erfüllt ist. Sei

$$G_{f^p} = G_{f^p_{\mathrm{ref}}}(H_{\mathrm{ref}})$$

die Grassmannvarietät der f^p_{ref}-dimensionalen Ebenen in H_{ref} . Da $\check{D}$ homogen bezüglich $G_{\mathbf{C}}$ ist (vgl. [Gri3, Proposition 8.2]) und es eine natürliche Einbettung

$$\check{D} \longrightarrow \prod_{p=1}^{k} G_{f^p} \tag{2.2.3}$$

gibt, ist $\check{D}$ eine glatte algebraische Untervarietät eines Produktes von Grassmannvarietäten und die komplexe Mannigfaltigkeit D eine offene Untermenge der algebraischen Varietät $\check{D}$. Die Abbildung (2.2.3) induziert eine natürliche Einbettung

$$D \longrightarrow \prod_{p=1}^{k} G_{f^p} \ . \tag{2.2.4}$$

Sei $\{F^\bullet\} \in D$ eine Filtrierung. Da der Tangentialraum der Grassmannvarietät G_{f^p} im Punkt $\{F^\bullet\}$ kanonisch isomorph zu

$$\mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}\,(F^p \ , H_{\mathrm{ref}}/F^p)$$

ist, induziert die Einbettung (2.2.4) eine injektive lineare Abbildung

$$T_{\{F^\bullet\}}(D) \xrightarrow{\mu_{\{F^\bullet\}}} \bigoplus_{p=1}^{k} \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}\,(F^p \ , H_{\mathrm{ref}}/F^p) \ . \tag{2.2.5}$$

Hierbei ist $T_{\{F^\bullet\}}(D)$ der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit D im Punkt $\{F^\bullet\}$. Die lineare Abbildung $\mu_{\{F^\bullet\}}$ identifizieren wir mit dem Differential der Abbildung (2.2.4) an der Stelle $\{F^\bullet\}$.

Polarisierte Variationen von Hodgestrukturen

Definition 2.3 (Variation von Hodgestrukturen) Sei S eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht k über S besteht aus einem Tupel $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z}} \ , \mathcal{F}^\bullet)$, für das die folgenden Eigenschaften gelten :

1. $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}$ ist eine lokalkonstante Garbe von endlich erzeugten abelschen Gruppen über S.

2. $\mathcal{F}^\bullet$ ist eine absteigende Filtrierung durch holomorphe Unterbündel von

$$\mathcal{V} = \mathbf{V}_\mathbf{Z} \otimes_\mathbf{Z} \mathcal{O}_S \quad .$$

3. In jedem Punkt $s \in S$ induziert die Filtrierung $\mathcal{F}^\bullet$ eine Hodgefiltrierung $F_s^\bullet$ einer Hodgestruktur vom Gewicht k auf der Faser V_s von $\mathcal{V}$ mit der Eigenschaft

$$V_s = F_s^p \oplus \overline{F}_s^{k-p+1} \quad .$$

4. Für den natürlichen flachen Zusammenhang $\nabla : \mathcal{V} \longrightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{V}$ gilt für alle p mit $0 \leq p \leq k$

$$\nabla \mathcal{F}^p \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1} \quad .$$

Die Eigenschaft 4. wird als Griffiths-Transversalität bezeichnet.

Definition 2.4 (Polarisierte Variationen von Hodgestrukturen) Sei S eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Polarisierte Variation von Hodgestrukturen $(\mathbf{V}_\mathbf{Z}\ , \mathcal{F}^\bullet\ , Q)$ vom Gewicht k über S besteht aus einer Variation von Hodgestrukturen $(\mathbf{V}_\mathbf{Z}\ , \mathcal{F}^\bullet)$ vom Gewicht k über S und einer nichtdegenerierten, flachen bilinearen Paarung

$$Q : \mathbf{V}_\mathbf{Z} \times \mathbf{V}_\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \quad ,$$

die in jeder Faser $\mathbf{V}_{\mathbf{Z},s}$ von $\mathbf{V}_\mathbf{Z}$ eine polarisierte Hodgestruktur $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z},s}\ , \mathcal{F}_s^\bullet\ , Q_s)$ vom Gewicht k induziert.

Beispiel 2.5 Sei $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ eine glatte Familie von polarisierten Varietäten der Dimension n bezüglich der relativ amplen Garbe $\mathcal{L}_\mathcal{Y}$ auf $\mathcal{Y}$ über einem glatten Schema S. Die Garbe $\mathcal{L}_\mathcal{Y}$ induziert einen lokalkonstanten Schnitt $u \in H^0(S, R^2 g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y})$ und das Cupprodukt mit u definiert einen Garbenhomomorphismus

$$R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y} \longrightarrow R^{k+2} g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y}$$

für $k \geq 0$. Man definiert die primitive Kohomologiegarbe

$$\left(R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y}\right)_0 = \ker \left\{ R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y} \xrightarrow{\cdot \cup u^{n-k+1}} R^{2n+2-k} g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y} \right\}$$

als den Kern des Garbenhomomorphismus

$$R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y} \xrightarrow{\cdot \cup u^{n-k+1}} R^{2n+2-k} g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y} \quad .$$

Da g ein C^∞-Faserbündel ist, ist $(R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y})_0$ eine lokalkonstante Garbe von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln auf S. Somit ist $\mathbf{V}_\mathbf{Z} = (R^k g_* \mathbb{Z}_\mathcal{Y})_0$ die einer Polarisierten Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht k über S zugrundeliegende lokalkonstante Garbe über S (vgl. [Gri3, 2.]).

Periodenabbildungen

Sei $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}, \mathcal{F}^{\bullet}, Q)$ eine Polarisierte Variation von Hodgestrukturen vom Gewicht k über einer zusammenhängenden, komplexen Mannigfaltigkeit S. Wir bezeichnen mit $\widetilde{S}$ die universelle Überlagerung von S und mit π den natürlichen Morphismus $\widetilde{S} \longrightarrow S$. Da das Pullback von $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}$ unter π auf die universelle Überlagerung $\widetilde{S}$ eine konstante Garbe ist, erhält man nach der Wahl eines Basispunktes s_0 in S und somit nach der Wahl einer Referenz-Hodgestruktur nach [Gri1] (vgl. [Gri3, Proposition 9.3]) eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \widetilde{S} \longrightarrow D \quad ,$$

wobei D der klassifizierende Raum zu der Referenz-Hodgestruktur ist. Sei $\mathbf{V}_{\mathbf{Z},s_0}$ die Faser von $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}$ über s_0. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, s_0)$ operiert durch Isometrien auf $\mathbf{V}_{\mathbf{Z},s_0}$. Deshalb induziert die lokalkonstante Garbe $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}$ die Monodromiedarstellung ρ der Fundamentalgruppe $\pi_1(S, s_0)$

$$\pi_1(S, s_0) \xrightarrow{\rho} G_{\mathbf{Z}} \; .$$

Hierbei gilt

$$\tilde{\varphi}(\gamma\tilde{s}) = \rho(\gamma)\tilde{\varphi}(\tilde{s})$$

für $\gamma \in \pi_1(S, s_0)$ und $\tilde{s} \in \widetilde{S}$. Man bezeichnet die Gruppe im ρ als die Monodromiegruppe der Polarisierten Variation von Hodgestrukturen. Falls Γ eine diskrete Untergruppe von $G_{\mathbf{Z}}$ ist, die die Monodromiegruppe enthält, so induziert $\tilde{\varphi}$ eine holomorphe Abbildung

$$\varphi_{\Gamma} : S \longrightarrow \Gamma \setminus D \; .$$

Definition 2.6 *Wir bezeichnen eine Abbildung φ_{Γ} als eine Periodenabbildung der Polarisierten Variation von Hodgestrukturen $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}, \mathcal{F}^{\bullet}, Q)$ mit dem Periodenbereich $\Gamma \setminus D$.*

Eine Periodenabbildung $\varphi_{\Gamma} : S \longrightarrow \Gamma \setminus D$ erfüllt nach [Gri3, Proposition 9.3] die Eigenschaft, daß jeder Punkt $s \in S$ eine offene Umgebung U besitzt, sodaß eine Liftung

$$\tilde{\varphi}_{\Gamma,U} : U \longrightarrow D$$

der Abbildung $\tilde{\varphi}_{\Gamma|U} : U \longrightarrow \Gamma \setminus D$ existiert und das natürliche Diagramm

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d] \\ U \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_{\Gamma,U}"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{\Gamma|U}"'] & \Gamma \setminus D \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als die lokale Liftbarkeit von Periodenabbildungen.

Das Differential einer Periodenabbildung

Sei $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ eine glatte Familie von polarisierten Varietäten der Dimension n bezüglich einer relativ amplen Garbe $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ auf $\mathcal{Y}$ über einem glatten Schema S. Nach Beispiel 2.5 wird durch die k-te primitive Kohomologie der Fasern dieser Familie von polarisierten Varietäten eine Polarisierte Variation von Hodgestrukturen $(\mathbf{V}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^{\bullet}, Q)$ mit

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Z}} = \left(R^k g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{Y}}\right)_0$$

induziert. Sei $\varphi_\Gamma : S \longrightarrow \Gamma \setminus D$ eine zugehörige Periodenabbildung. Wir betrachten nun das Differential von φ_Γ in einem Punkt $s \in S$ mit Hilfe einer lokalen Liftung. Sei U eine offene Umgebung von s, sodaß eine lokale Liftung $\tilde{\varphi}_{\Gamma,U} : U \longrightarrow D$ existiert. Mit Y bezeichnen wir die Faser $\mathcal{Y}_s$ von g über dem Punkt s und mit $\mathcal{L}$ die ample invertierbare Garbe auf Y, die wir durch Einschränkung von $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ auf Y erhalten.

Definition 2.7 *Wir definieren $H_0^1(Y, T_Y)$ als die Menge der $v \in H^1(Y, T_Y)$ mit der Eigenschaft $v \cup c_1(\mathcal{L}) = 0$ in $H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$.*

Nach Lemma 4.3 gilt

$$H_0^1(Y, T_Y) = \mathrm{im}\left\{ H^1(Y, \Sigma_Y) \xrightarrow{(*)} H^1(Y, T_Y) \right\}\ , \tag{2.7.1}$$

wobei die Abbildung $(*)$ durch die 1. Fundamentalsequenz zu der Garbe $\mathcal{L}$ induziert ist. Indem wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow g^*\Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{Y}}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{Y}/S}^1 \longrightarrow 0$$

der 1-Formen dualisieren und auf Y einschränken erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_{\mathcal{Y}|Y} \longrightarrow T_s(S) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0\ . \tag{2.7.2}$$

Hierbei ist $T_s(S)$ der Tangentialraum von S im Punkte $s \in S$.

Definition 2.8 Den verbindenden Homomorphismus

$$T_s(S) \xrightarrow{\rho_s} H^1(Y, T_Y)$$

in der langen exakten Kohomologiesequenz zu (2.7.2) bezeichnet man als die Kodaira-Spencer Abbildung der Familie $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ im Punkte $s \in S$.

Wir definieren für $p = 1, \ldots, k$ die Abbildung

$$H_0^1(Y, T_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H_0^{k-p}(Y, \Omega_Y^p) \xrightarrow{\overline{\delta}_p} H_0^{k-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1})$$

durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_0^1(Y, T_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H_0^{k-p}(Y, \Omega_Y^p) \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[dr, "\overline{\delta}_p"'] & H_0^{k-p+1}(Y, T_Y \otimes \Omega_Y^p) \arrow[d, "\beta_p"] \\
& H_0^{k-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1})\ ,
\end{tikzcd}$$

wobei α_p die Cupproduktabbildung und β_p die durch die Kontraktionsabbildung

$$T_Y \otimes \Omega_Y^p \longrightarrow \Omega_Y^{p-1}$$

induzierte Abbildung ist. Die Abbildung $\overline{\delta}_p$ induziert in natürlicher Weise die Abbildung

$$H_0^1(Y, T_Y) \xrightarrow{\delta_p} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H_0^{k-p}(Y, \Omega_Y^p), H_0^{k-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1})\right) \ .$$

Da wir die Garbe $\mathcal{L}$ durch Einschränkung von $\mathcal{L}_\mathcal{Y}$ auf die Faser Y erhalten haben, gilt

$$\mathrm{im}\rho_s \subset H_0^1(Y, T_Y) \ .$$

Somit ist

$$\mathrm{im}\overline{\delta}_p \subset H_0^{k-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1}) \ .$$

Die durch ρ_s induzierte Abbildung

$$T_s(S) \xrightarrow{\rho_s} H_0^1(Y, T_Y)$$

bezeichnen wir ebenfalls mit ρ_s. Wir fassen die von uns benötigten Eigenschaften des Differentials einer Periodenabbildung in dem folgenden Theorem zusammen.

Theorem 2.9 *Das folgende Diagramm ist kommutativ :*

$$\begin{array}{ccc}
T_s(S) & \xrightarrow{\mu \cdot d\tilde{\varphi}_{\Gamma,U}} & \bigoplus_{p=1}^{k} HOM_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{r=p}^{k} H_0^{k-r}(Y, \Omega_Y^r), \bigoplus_{r=1}^{p} H_0^{k-r+1}(Y, \Omega_Y^{r-1})\right) \\
\rho_s \downarrow & & \uparrow i \\
H_0^1(Y, T_Y) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{p=1}^{k} HOM_{\mathbb{C}}\left(H_0^{k-p}(Y, \Omega_Y^p), H_0^{k-p+1}(Y, \Omega_Y^{p-1})\right)
\end{array}$$

Hierbei ist $\delta = \oplus_{p=1}^k \delta_p$, μ die Abbildung $\mu_{\{F_s^\bullet\}}$ in (2.2.5) und i die natürliche Inklusion zweier Summen von Vektorräumen.

Beweis. Nach den obigen Ausführungen bleibt nur die Kommutativität des Diagramms zu zeigen. Diese gilt aber nach [Gri1] (vgl. [PS, Thm. 5.11]). □

Bemerkung 2.10 Für die Abbildung δ in Theorem 2.9 gelten nach [Gri3] und [PS, §6] die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Für $\xi_1, \xi_2 \in H_0^1(Y, T_Y)$ gilt

$$\delta_{p-1}(\xi_1) \cdot \delta_p(\xi_2) = \delta_{p-1}(\xi_2) \cdot \delta_p(\xi_1) \ .$$

2. Für $\xi \in H_0^1(Y, T_Y)$, $\phi \in \mathcal{F}_s^p$ und $\psi \in \mathcal{F}_s^{k-p+1}$ gilt

$$Q(\delta_p(\xi)\phi, \psi) + Q(\phi, \delta_{k-p+1}(\xi)\psi) = 0 \ .$$

IVHS

Ausgehend von den Eigenschaften in Theorem 2.9 und Bemerkung 2.10, die für das Differential einer Periodenabbildung einer Familie von polarisierten Varietäten gelten, definiert man eine Infinitesimale Variation von Hodgestrukturen (IVHS) vom Gewicht k abstrakt folgendermaßen (siehe [PS, (6.4),(10.3)]).

Definition 2.11 (IVHS vom Gewicht k) Eine IVHS $(H_{\mathbf{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta)$ vom Gewicht k besteht aus einer polarizierten Hodgestruktur $(H_{\mathbf{Z}}, F^\bullet, Q)$ vom Gewicht k, einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum T und einer linearen Abbildung

$$T \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p=1}^{k} \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}\left(F^p/F^{p+1}, F^{p-1}/F^p\right) .$$

Für $\delta = \oplus_{p=1}^{k} \delta_p$ wird außerdem gefordert

1. $\delta_{p-1}(\xi_1) \cdot \delta_p(\xi_2) = \delta_{p-1}(\xi_2) \cdot \delta_p(\xi_1)$ für alle $\xi_1, \xi_2 \in T$.
2. $Q(\delta_p(\xi)\phi, \psi) + Q(\phi, \delta_{k-p+1}(\xi)\psi) = 0$ für $\xi \in T$, $\phi \in F^p$ und $\psi \in F^{k-p+1}$.

Definition 2.12 (Isomorphie von IVHS) Zwei IVHS

$$(H_{\mathbf{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta) \text{ und } (H_{\mathbf{Z}}', F'^\bullet, Q', T', \delta')$$

vom Gewicht k heißen isomorph, falls die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Es gibt einen die Polarisation respektierenden Isomorphismus von Hodgestrukturen
$$(H_{\mathbf{Z}}, F^\bullet, Q) \xrightarrow[\simeq]{\varphi} (H_{\mathbf{Z}}', F'^\bullet, Q') .$$
2. Es gibt einen $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus $\alpha : T \longrightarrow T'$, sodaß das folgende Diagramm kommutativ ist:
$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\delta} & \oplus_{p=1}^{k} \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}\left(F^p/F^{p+1}, F^{p-1}/F^p\right) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow\wr\!\wr & & \wr\!\wr\downarrow{\scriptstyle(*)} \\ T' & \xrightarrow{\delta'} & \oplus_{p=1}^{k} \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}\left(F'^p/F'^{p+1}, F'^{p-1}/F'^p\right) \end{array} .$$

   Hierbei ist der Isomorphismus $(*)$ induziert durch die durch φ für $p = 1, \ldots, k$ gegebenen Isomorphismen
$$\mathrm{gr}^p\varphi : F^p/F^{p+1} \xrightarrow{\simeq} F'^p/F'^{p+1} .$$

Beispiel 2.13 Sei $g : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ eine glatte Familie von polarisierten Varietäten der Dimension n bezüglich einer relativ amplen Garbe $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ auf $\mathcal{Y}$ über einem glatten Schema S, das Tupel $(\mathbf{V}_{\mathbf{Z}}, \mathcal{F}^\bullet, Q)$ die durch die k-te primitive Kohomologie der

Fasern dieser Familie induzierte Polarisierte Variation von Hodgestrukturen, die Abbildung $\varphi_\Gamma : S \longrightarrow \Gamma \setminus D$ eine zugehörige Periodenabbildung und Y eine Faser von g. Nach Theorem 2.9 induziert das Differential von φ_Γ im Punkt $s = g(Y)$ eine IVHS $(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta)$ vom Gewicht k mit

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{Z}} &= H^k(Y, \mathbb{Z}) \\ F^p &= \bigoplus_{r \geq p} H_0^{k-r}(Y, \Omega_Y^r) \quad \text{und} \\ T &= H_0^1(Y, T_Y) \,. \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß diese IVHS nur von der polarisierten Varietät $(Y, \mathcal{L})$ abhängt. Deshalb sprechen wir auch von der durch eine polarisierte Varietät induzierten IVHS vom Gewicht k.

Definition 2.14 Sei $(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta)$ eine IVHS vom Gewicht k. Man bezeichnet das Tupel

$$(F^\bullet, Q, T, \delta)$$

als den algebraischen Anteil der IVHS $(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta)$.

Für die Tatsache, daß man in gewissen geometrischen Situationen aus dem algebraischen Anteil der IVHS einer Varietät die polarisierte Varietät selbst rekonstruieren kann, hat Donagi in [Do2] den Begriff des *Variationalen Torelli* eingeführt.

3 Hilbertschemata und Periodenabbildungen

Eine Technik beim Studium der Moduli von Varietäten ist die von Griffiths in [Gri1], [Gri2] und [Gri3] eingeführte Methode der Periodenabbildungen. In diesem Abschnitt stellen wir zunächst die Begriffe aus der algebraischen Theorie der Moduli (Grothendieck, Matsusaka, Mumford) zusammen, die notwendig sind um aus unserem technischen Hauptresultat in Theorem 9.1 das Hauptresultat 2 in Kapitel 1 zu folgern. Insbesondere definieren wir den Modulfunktor polarisierter zyklischer Überlagerungen und diskutieren seine Eigenschaften.

Modulfunktoren

Sei $h(\nu)$ ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n und $\boldsymbol{M}_h$ der Modulfunktor von glatten, polarisierten Varietäten $(Y, \mathcal{L})$ mit Hilbertpolynom $h(\nu) = \chi(Y, \mathcal{L}^\nu)$ (siehe [MF, Appendix zu Kap. 5], [Po, Lecture 2], [Vie5]). Dann ist

$$\boldsymbol{M}_h(\mathbb{C}) = \boldsymbol{M}_h(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$$

die Menge der Isomorphieklassen von polarisierten Varietäten $(Y, \mathcal{L})$, wobei für die Garbe $\mathcal{L}$ die Gleichung $h(\nu) = \chi(Y, \mathcal{L}^\nu)$ gilt. Entsprechend bezeichnen wir mit $\boldsymbol{M}_h(S)$ für ein Schema S die Menge der Isomorphieklassen von Paaren $(g_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to S, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}})$, wobei $g_{\mathcal{Y}}$ ein flacher, projektiver und surjektiver Morphismus und $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ eine invertierbare Garbe auf $\mathcal{Y}$ ist mit der Eigenschaft, daß für alle Fasern Y von $g_{\mathcal{Y}}$ das Paar $(Y, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}|Y})$ in $\boldsymbol{M}_h(\mathbb{C})$ liegt. Hierbei bezeichnen wir

$$(g_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to S, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}) \text{ und } (g_{\mathcal{Y}'} : \mathcal{Y}' \to S, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}'})$$

in $\boldsymbol{M}_h(S)$ als isomorph, falls es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "g_{\mathcal{Y}}"'] & \mathcal{Y}' \arrow[d, "g_{\mathcal{Y}'}"] \\ S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

existiert, sodaß τ ein Isomorphismus ist und auf jeder Faser von $g_{\mathcal{Y}}$ die Garbe $\tau^*\mathcal{L}_{\mathcal{Y}'}$ numerisch äquivalent zu $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ ist.

Bemerkung 3.1 Nach dem Satz von Matsusaka (siehe [LM, Thm. 1]) ist $\boldsymbol{M}_h$ ein beschränkter Modulfunktor, d.h. für eine genügend große Zahl ν_0 ist für alle

$$(Y, \mathcal{L}) \in \boldsymbol{M}_h(\mathbb{C})$$

die Garbe $\mathcal{L}^\nu$ sehr ample und $H^i(Y, \mathcal{L}^\nu) = 0$ für $i > 0$ und $\nu \geq \nu_0$.

Definition 3.2 Sei h_0 das durch $h_0(\nu) = h(\nu \cdot \nu_0)$ definierte Polynom. Indem man $(Y, \mathcal{L}) \in \boldsymbol{M}_h(\mathbb{C})$ auf $(Y, \mathcal{L}^{\nu_0}) \in \boldsymbol{M}_{h_0}(\mathbb{C})$ abbildet, erhält man eine natürliche Inklusion

$$\boldsymbol{M}_h(\mathbb{C}) \hookrightarrow \boldsymbol{M}_{h_0}(\mathbb{C}).$$

Den durch $\boldsymbol{M}_h$ definierten Unterfunktor von $\boldsymbol{M}_{h_0}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{M}'_h$.

Proposition 3.3 *Sei ν_0 wie in Bemerkung (3.1) gewählt. Dann gilt*

1. *Für alle $(g_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to S, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}) \in \boldsymbol{M}_h(S)$ ist die Garbe $g_{\mathcal{Y}*}\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^{\nu_0}$ lokal frei und kommutiert mit Basiswechsel.*
2. *Es existiert ein separiertes Schema H von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und ein Paar*

$$(g : \mathcal{X} \to H, \mathcal{H}) \in \boldsymbol{M}'_h(H)$$

zusammen mit einem Isomorphismus

$$\mathbb{P}(g_*\mathcal{H}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^{r-1} \times H,$$

sodaß für alle

$$(g_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to S, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}) \in \boldsymbol{M}_h(S)$$

mit einem Isomorphismus

$$\mathbb{P}(g_{\mathcal{Y}*}\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^{\nu_0}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^{r-1} \times S$$

es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\sigma : S \longrightarrow H$ gibt, sodaß das natürliche kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[dr, "g_{\mathcal{Y}}"'] & \mathbb{P}^{r-1} \times S \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

unter Zurückziehen mit σ^* aus dem entsprechenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^{r-1} \times H \arrow[d] \\ & H \end{tikzcd}$$

zu $g : \mathcal{X} \longrightarrow H$ hervorgeht und $\tau^*\mathcal{H} = \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^{\nu_0}$ gilt. Hierbei ist $\tau : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ die durch σ induzierte Abbildung auf $\mathcal{Y}$.

BEWEIS. [Po, Prop. 2.9], vgl. auch [Vie5, Thm. 1.2] □

Definition 3.4 Wir bezeichnen das durch die Proposition 3.3 gegebene Schema H in dem Paar $(g : \mathcal{X} \longrightarrow H, \mathcal{H})$ als das Hilbertschema zu dem Modulfunktor $\boldsymbol{M}_h$ mit der universellen Familie $g : \mathcal{X} \longrightarrow H$.

Der Modulfunktor zyklischer Überlagerungen

Sei $h(\nu)$ ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n und N eine positive ganze Zahl. Wir bezeichnen mit $M_h^N(S)$ für ein Schema S die Menge der Isomorphieklassen von Paaren

$$(g_\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \longrightarrow S, \mathcal{M}_\mathcal{Z}) \in M_h(S) \ ,$$

sodaß ein Schema $\mathcal{Y}$ mit einem flachen, projektiven und surjektiven Morphismus $g_\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \longrightarrow S$, eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}_\mathcal{Y}$ auf $\mathcal{Y}$, ein Morphismus $f_\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$, eine invertierbare Garbe $\mathcal{G}$ auf S mit $\mathcal{M}_\mathcal{Z} = f_\mathcal{Z}^* \mathcal{L}_\mathcal{Y} \otimes g_\mathcal{Z}^* \mathcal{G}$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{f_\mathcal{Z}} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle g_\mathcal{Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_\mathcal{Y}} \\ S & = & S \end{array}$$

existiert mit der Eigenschaft, daß für alle Fasern Z von $g_\mathcal{Z}$ die Einschränkung

$$f : Z \longrightarrow Y$$

von $f_\mathcal{Z}$ auf Z und die zugehörige Faser Y von $g_\mathcal{Y}$ eine zyklische Galoisüberlagerung von Grad N über einer glatten Varietät Y mit glattem, reduzierten Verzweigungsdivisor X und der Eigenschaft $\mathcal{L}_{\mathcal{Y}|Y}^N = \mathcal{O}_Y(X)$ ist.

Definition 3.5 Wir bezeichnen mit M_h^N den für ein Schema S durch $M_h^N(S)$ definierten Modulfunktor.

Somit ist $M_h^N(\mathbb{C})$ die Menge der $(Z, \mathcal{M}) \in M_h^N(\mathbb{C})$, sodaß eine glatte Varietät Y mit einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ und eine zyklische Galoisüberlagerung $f : Z \longrightarrow Y$ bezüglich $\mathcal{L}^N = \mathcal{O}_Y(X)$ mit glattem, reduzierten Verzweigungsdivisor X und der Eigenschaft $f^*\mathcal{L} = \mathcal{M}$ existiert. Natürlich haben wir damit spezielle Vertreter der numerischen Äquivalenzklasse von $\mathcal{M}$ ausgewählt.

Lemma 3.6 *Sei $(Z, \mathcal{M}) \in M_h^N(\mathbb{C})$ und $f : Z \longrightarrow Y$ bezüglich $\mathcal{L}^N = \mathcal{O}_Y(X)$ eine zugehörige zyklische Überlagerung mit $f^*\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Dann gilt für das Hilbertpolynom $h'(\nu) = \chi(Y, \mathcal{L}^\nu)$*

1. $h(\nu) = \sum_{i=0}^{N-1} h'(\nu - i)$.
2. *$h'(\nu)$ ist eindeutig bestimmt durch $h(\nu)$ und somit insbesondere unabhängig von der Wahl von $(Y, \mathcal{L})$.*

BEWEIS. Die 1. Behauptung folgt aus 1. in Lemma 5.1 mit Hilfe der Lerayschen Spektralsequenz

$$h(\nu) = \chi(Z, \mathcal{M}^\nu) = \sum_{i=0}^{N-1} \chi(Y, \mathcal{L}^{\nu-i}) = \sum_{i=0}^{N-1} h'(\nu - i) \ .$$

Sei $h(\nu) = \sum_{k=0}^{n} a_k \nu^k$ und $h'(\nu) = \sum_{k=0}^{n} b_k \nu^k$. Wir bezeichnen mit $a, b \in \mathbb{Q}^{n+1}$ die Vektoren mit den Koeffizienten a_k und b_k für $k = 0, \ldots, n$. Sei $C = (c_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ die durch

$$c_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} l^{j-i} & i \leq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte $(n+1) \times (n+1)$-Matrix. Da $\det(C) = N^{n+1}$ ist, überprüft man nun, daß $b = C^{-1} \cdot a$ gilt. Hieraus folgt die 2. Behauptung. □

Sei $\boldsymbol{M}_{h'}$ der Modulfunktor von glatten, polarisierten Varietäten mit Hilbertpolynom $h'(\nu)$, sodaß $h(\nu) = \sum_{i=0}^{N-1} h'(\nu - i)$ gilt. Nach Bemerkung 3.1 können wir nun eine positive ganze Zahl ν_0 wählen, sodaß für alle

$$(Y, \mathcal{L}) \in \boldsymbol{M}_{h'}(\mathbb{C}) \text{ und } (Z, \mathcal{M}) \in \boldsymbol{M}_h(\mathbb{C})$$

die Garben $\mathcal{L}^\nu$ und $\mathcal{M}^\nu$ jeweils auf Y bzw. Z sehr ample sind und

$$H^i(Y, \mathcal{L}^\nu) = H^i(Z, \mathcal{M}^\nu) = 0$$

ist für $i > 0$ und $\nu \geq \nu_0$. Sei $(g : \mathcal{Z} \longrightarrow H, \mathcal{M}_{\mathcal{Z}})$ und $(g' : \mathcal{Y} \longrightarrow H', \mathcal{L}_{\mathcal{Y}})$ jeweils das durch Proposition 3.3 gegebene Hilbertschema zu dem Modulfunktor $\boldsymbol{M}_h$ bzw. $\boldsymbol{M}_{h'}$ mit der universellen Familie $g : \mathcal{Z} \longrightarrow H$ bzw. $g' : \mathcal{Y} \longrightarrow H'$.

Definition 3.7 Wir bezeichnen die Menge der Punkte in H, die Paaren $(Z, \mathcal{M})$ aus $\boldsymbol{M}_h^N(\mathbb{C})$ entspricht mit H_N.

Lemma 3.8 *Die Menge H_N ist als Untermenge von H konstruierbar.*

Beweis. Zu $\mathbb{P} = \mathbb{P}((g'_* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N)^\vee)$ mit dem natürlichen Morphismus $\pi : \mathbb{P} \longrightarrow H'$ bilden wir das folgende Faserproduktdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\pi} & H' \end{array}$$

mit $\mathcal{Y}_{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \times_{H'} \mathcal{Y}$. Da π flach ist, erhält man durch flachen Basiswechsel nach [Ha, Kap. III, Prop. 9.3]

$$\mu_* \sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N = \pi^* g'_* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N \ .$$

Wir dualisieren die natürliche Surjektion

$$\pi^*(g'_* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N)^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$$

und tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Dies liefert

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \pi^* g'_* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = \mu_* \sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \ . \tag{3.8.1}$$

Dem Schnitt (3.8.1) entspricht eindeutig ein Schnitt in der Garbe

$$\sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N \otimes \mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \ .$$

Somit erhält man den universellen Schnitt

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{P}}} \longrightarrow \sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}^N \otimes \mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1). \tag{3.8.2}$$

Wir wenden nun für die Garbe $\mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ und die natürliche Zahl N das Lemma 3.9 an und erhalten einen endlichen, surjektiven Morphismus $\tau : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ und eine invertierbare Garbe $\mathcal{G}$ auf $\mathbb{P}_1$, wobei $\mathbb{P}_1$ eine glatte, projektive Varietät ist und $\tau^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = \mathcal{G}^N$ gilt. Zu $\tau : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ bilden wir das Faserproduktdiagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}_{\mathbb{P}_1} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mu_1"'] & \mathcal{Y}_{\mathbb{P}} \arrow[d, "\mu"] \\ \mathbb{P}_1 \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{Y}_{\mathbb{P}_1} = \mathbb{P}_1 \times_{\mathbb{P}} \mathcal{Y}_{\mathbb{P}}$. Das Zurückziehen des universellen Schnittes (3.8.2) mit ρ^* auf $\mathcal{Y}_{\mathbb{P}_1}$ liefert

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow (\rho^* \sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}} \otimes \mu_1^* \mathcal{G})^N. \tag{3.8.3}$$

Wir bezeichnen mit $f_{\mathbb{P}_1} : \mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{P}_1}$ die zyklische Galoisüberlagerung vom Grad N bezüglich des Schnittes (3.8.3) und mit $g_{\mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1}}$ die Komposition von μ_1 und $f_{\mathbb{P}_1}$. Somit erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1} \arrow[r, "f_{\mathbb{P}_1}"] \arrow[dr, "g_{\mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1}}"'] & \mathcal{Y}_{\mathbb{P}_1} \arrow[d, "\mu_1"] \\ & \mathbb{P}_1. \end{tikzcd}$$

Wir setzen

$$\mathbb{P}_0 = \left\{ p \in \mathbb{P}_1 \,\middle|\, \text{Faser von } g_{\mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1}} \text{ über } p \text{ ist glatt} \right\}.$$

Wir bezeichnen mit $g_{\mathcal{Z}_0} : \mathcal{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{P}_0$ die Einschränkung von $g_{\mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1}}$ auf $\mathcal{Z}_0 = g_{\mathcal{Z}_{\mathbb{P}_1}}^{-1}(\mathbb{P}_0)$ und mit $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}_0}$ die invertierbare Garbe

$$f_{\mathbb{P}_1}^* (\rho^* \sigma^* \mathcal{L}_{\mathcal{Y}} \otimes \mu_1^* \mathcal{G})_{|\mathcal{Z}_0}.$$

Da das Paar $(g_{\mathcal{Z}_0} : \mathcal{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{P}_0, \mathcal{M}_{\mathcal{Z}_0}) \in \boldsymbol{M}_h(\mathbb{P}_0)$ ist, existiert nach Proposition 3.3 ein eindeutig bestimmter Morphismus $d : \mathbb{P}_0 \longrightarrow H$. Nach Konstruktion ist

$$H_N = \operatorname{im}(d) \ .$$

Somit ist nach dem Satz von Chevalley (siehe [Ha, Kap. II, Ex. 3.19]) die Menge H_N als Untermenge von H konstruierbar. □

Im Beweis von Lemma 3.8 benötigen wir das folgende Hilfslemma.

Lemma 3.9 *Es sei W eine glatte, projektive Varietät, $\mathcal{F}$ eine invertierbare Garbe auf W und N eine positive, ganze Zahl. Dann existiert eine glatte Varietät W', eine invertierbare Garbe $\mathcal{G}$ auf W' und eine endlicher, surjektiver Morphismus*

$$\tau : W' \longrightarrow W \ ,$$

sodaß $\tau^*\mathcal{F} = \mathcal{G}^N$ gilt.

BEWEIS. [BG, Lemma 2.1], vgl. auch [Kal, Thm. 17] und [Viel, Lemma 2.1]. □

Da nach Lemma 3.8 die Menge H_N eine endliche disjunkte Vereinigung von lokal abgeschlossenen Untermengen in H ist, ist somit H_N ein Unterschema von H.

Definition 3.10 Wir bezeichnen das durch Einschränkung des Hilbertschemas

$$(g : \mathcal{Z} \longrightarrow H, \mathcal{M}_{\mathcal{Z}})$$

zu dem Modulfunktor $\boldsymbol{M}_h$ auf H_N erhaltene Paar

$$(g_N : \mathcal{X} \longrightarrow H_N, \mathcal{H})$$

als ein Hilbertschema zu dem Modulfunktor $\boldsymbol{M}_h^N$.

Bemerkung 3.11 Aus der Tatsache, daß für $\nu \geq \nu_1$, wobei wir ν_1 wie in Bemerkung 3.1 wählen, die Garbe $\mathcal{L}^\nu$ sehr ample auf Y ist für alle Paare $(Y, \mathcal{L}) \in \boldsymbol{M}_h(\mathbb{C})$, folgt nach [Vie7, Lemma 1.3], daß für $N > \nu_1(n+2)$ die Garbe $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-1}$ sehr ample ist auf Y. Da für einen endlichen surjektiven Morphismus $f : Z \longrightarrow Y$ eine invertierbare Garbe auf Y genau dann ample ist, wenn ihr Pullback auf Z ample ist, erhalten wir, daß für alle Paare $(Z, \mathcal{M}) \in \boldsymbol{M}_h^N(\mathbb{C})$ mit $N > \nu_1(n+2)$ die kanonische Garbe ω_Z nach der Adjunktionsformel ample ist. Somit folgt insbesondere, daß für ein Polynom h in einer Veränderlichen und eine genügend große positive ganze Zahl N für alle Paare $(Z, \mathcal{M}) \in \boldsymbol{M}_h^N(\mathbb{C})$ die Varietät Z keine Uni-Regelvarietät ist.

Sei R das zugehörige Schema zu der durch Definition 1.1 definierten Äquivalenzrelation auf H_N, d.h. R ist das Schema von Tripeln (p_1, p_2, τ), wobei $p_1, p_2 \in H_N$ und $\tau : \mathcal{X}_{p_1} \longrightarrow \mathcal{X}_{p_2}$ ein Isomorphismus der Fasern über p_1 und p_2 ist, sodaß $\tau^*\mathcal{H}_{|\mathcal{X}_{p_2}}$ numerisch äquivalent zu $\mathcal{H}_{|\mathcal{X}_{p_1}}$ ist. Unter Berücksichtigung der Bemerkung 3.11 erhält man nun nach [Ko, Thm. 4.1.1 und Bew. v. Thm. 4.2.1] (vgl. auch [MF, p. 172]), daß der Quotient H_N/R durch einen separierten Raum von endlichem Typ dargestellt wird. Wir bezeichnen diesen algebraischen Raum ebenfalls mit H_N/R . Somit läßt sich 7. in Theorem 4.2.1 in [Ko] in unserer Situation folgendermaßen formulieren.

Theorem 3.12 *Sei h ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n und N eine genügend große positive ganze Zahl. Dann wird der Modulfunktor $\mathbf{M}_h^N$ grob dargestellt durch einen separierten algebraischen Raum $M_h^N = H_N/R$ von endlichem Typ über $\mathbb{C}$.*

Bemerkung 3.13 Sei H_N^{gl} die offene Menge der glatten Punkte des reduzierten Schemas $(H_N)_{red}$ und

$$\varphi_\Gamma^{gl} : H_N^{gl} \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

eine durch g_N induzierte Periodenabbildung. Es existiert eine Zariski-offene Menge $H_N^0 \subset H_N^{gl}$, sodaß die Einschränkung der natürlichen Quotientenabbildung

$$\pi : H_N \longrightarrow M_h^N$$

auf H_N^0 einen glatten Morphismus

$$\pi_0 : H_N^0 \longrightarrow \left(M_h^N\right)^0 = \pi(H_N^0)$$

induziert, $(M_h^N)^0$ ein glattes Unterschema von M_h^N und die durch φ_Γ^{gl} induzierte Abbildung

$$\overline{\varphi}_\Gamma : \left(M_h^N\right)^0 \longrightarrow \Gamma \setminus D$$

holomorph ist (siehe [CDT, §2, Thm.]). Aus Korollar 9.2 und [CDT, §3,Thm.] folgt nun, daß nach einer eventuellen weiteren Einschränkung von H_N^0 die Abbildung $\overline{\varphi}_\Gamma$ injektiv ist (Generischer Torelli für zyklische Überlagerungen). Hieraus folgt, daß eine Faser der Abbildung π_0 aus polarisierten Varietäten besteht, die zur gleichen Isomorphieklasse von polarisierten Varietäten gehören. Somit ist eine Faser von π_0 Teilmenge eines Orbits der natürlichen $PGL(r, \mathbb{C})$-Operation auf H_N^{gl}. Hieraus folgt das Hauptresultat 2 in Kapitel 1.

4 Primitive De-Rham Kohomologie

In diesem Kapitel gehen wir auf die Interpretation der primitiven Kohomologie einer glatten, projektiven Varietät mit Hilfe des primitiven De-Rham Komplexes ein. Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. Sowie sich die Hodgefiltrierung der Kohomologiegruppen $H^i(Y, \mathbb{C})$ durch die *filtration bête* des De-Rham Komplexes $(\Omega_Y^\bullet, d)$ gewinnen läßt, erhält man, falls $\mathcal{L}$ ample ist, nach [Og] eine entsprechende Aussage für die primitive Kohomologie bezüglich der Garbe $\mathcal{L}$.

Die Garbe Σ_Y

Sei $\mathcal{J}_\Delta$ die Idealgarbe der Diagonalen Δ von $Y \times Y$ und $Y_{(2)}$ das durch die Idealgarbe $\mathcal{J}_\Delta^2$ definierte Unterschema von $Y \times Y$. Für eine lokalfreie, invertierbare Garbe $\mathcal{F}$ auf Y wird die Garbe $P(\mathcal{F})$ definiert durch

$$P(\mathcal{F}) = p_{1*}\left(p_2^*\mathcal{F}_{|Y_{(2)}}\right).$$

Hierbei bezeichnen p_1 und p_2 die beiden Projektionen $p_i : Y \times Y \to Y$. Da die Einschränkung von p_1 auf Δ einen Isomorphismus zwischen Δ und Y liefert, gilt, daß $p_{1*}(p_2^*\mathcal{F}_{|\Delta})$ isomorph zu $\mathcal{F}$ ist. Nach [GD, IV. 16.3.] ist die Garbe $\Omega_Y^1 \otimes \mathcal{F}$ der Kern der natürlichen Surjektion

$$P(\mathcal{F}) \longrightarrow p_{1*}(p_*^2\mathcal{F}_{|\Delta}) \simeq \mathcal{F}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Y$-Moduln

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow P(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{4.1.1}$$

Somit folgt insbesondere, daß $P(\mathcal{F})$ eine lokalfreie Garbe vom Rang $n+1$ auf Y ist.

Definition 4.2 Wir bezeichnen den $\mathcal{O}_Y$-Modul $P(\mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}$ mit $\Sigma_Y(\mathcal{F})$ und die durch Dualisieren und Tensorieren mit $\mathcal{F}$ aus (4.1.1) resultierende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Sigma_Y(\mathcal{F}) \longrightarrow T_Y \longrightarrow 0 \tag{4.2.1}$$

als die 1. *Fundamentalsequenz* der Garbe $\mathcal{F}$. Wenn es aus dem Zusammenhang klar ist, mit welcher Garbe wir arbeiten, werden wir statt $\Sigma_Y(\mathcal{F})$ nur Σ_Y schreiben.

Wir bezeichnen mit $c_1(\mathcal{L})$ die 1. Chernklasse der invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ und fassen diese als Kohomologieklasse $c_1(\mathcal{L}) = \delta(\mathcal{L})$ in $H^1(Y, \Omega_Y^1)$ mit Hilfe der durch

$$\mathcal{O}_Y^* \xrightarrow{\frac{1}{2\pi i} dlog} \Omega_Y^1$$

induzierten Abbildung

$$Pic(Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \xrightarrow{\delta} H^1(Y, \Omega_Y^1)$$

auf.

Lemma 4.3 *Es gelten die folgenden Aussagen :*

1. *Die Extensionsklasse der* 1. *Fundamentalsequenz* (4.2.1) *von* $\mathcal{L}$ *wird durch das Element* $-2\pi i \cdot c_1(\mathcal{L}) \in H^1(Y, \Omega^1_Y)$ *gegeben.*
2. *Für* $k \in \mathbb{Z}$ *und* $k \neq 0$ *sind die Garben* $\Sigma_Y(\mathcal{L})$ *und* $\Sigma_Y(\mathcal{L}^k)$ *kanonisch isomorph.*

BEWEIS. Es genügt die 1. Behauptung zu beweisen, da aus der Gleichheit

$$-2\pi i \cdot c_1(\mathcal{L}^k) = -2\pi i k \cdot c_1(\mathcal{L})$$

folgt, daß die Garben $\Sigma_Y(\mathcal{L})$ und $\Sigma_Y(\mathcal{L}^k)$ Extensionen sind, deren Extensionsklassen sich um $\cdot k$ unterscheiden, und somit sind sie als Extensionen isomorph. Die 1. Behauptung ist die Aussage der Proposition 12 in [At]. Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir die entsprechenden lokalen Rechnungen an. Für eine offene, affine Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von Y lassen sich die Garben Ω^1_Y, $\mathcal{L}$ und $P(\mathcal{L})$ auf U_α schreiben als

$$\begin{aligned}
\Omega^1_{Y|U_\alpha} &= \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot dx_i^\alpha, \\
\mathcal{L}_{|U_\alpha} &= \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot T_\alpha \text{ und} \\
P(\mathcal{L})_{|U_\alpha} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot dx_i^\alpha \otimes T_\alpha \right) \oplus \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot T_\alpha \ ,
\end{aligned}$$

wobei T_α die Faserkoordinate von $\mathcal{L}$ über U_α und $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ lokale Koordinaten von Y in U_α sind. Die $\mathcal{O}_{U_\alpha}$-Modulstruktur von $P(\mathcal{L})_{|U_\alpha}$ (vgl. [At, Kap.4]) wird für einen Schnitt $f \in \mathcal{O}_Y(U_\alpha)$ gegeben durch

$$f \cdot (dx_i^\alpha \otimes T_\alpha, T_\alpha) = (dx_i^\alpha \otimes f \cdot T_\alpha + df \otimes T_\alpha, f \cdot T_\alpha).$$

Wir definieren für die Sequenz (4.1.1) nun Schnitte $\phi_\alpha : \mathcal{L}(U_\alpha) \to P(\mathcal{L})(U_\alpha)$ durch $\phi_\alpha(f \cdot T_\alpha) = (df \otimes T_\alpha, f \cdot T_\alpha)$, wobei die $\mathcal{O}_{U_\alpha}$-Linearität von ϕ_α aus

$$f \cdot \phi_\alpha(T_\alpha) = f \cdot (0, T_\alpha) = (df \otimes T_\alpha, f \cdot T_\alpha)$$

folgt. Die Übergangsfunktionen der invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ bezeichnen wir mit $\{f_{\alpha\beta}\}$. Für diese Übergangsfunktionen gilt $T_\beta = f_{\alpha\beta} T_\alpha$ in $U_\alpha \cap U_\beta$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\phi_\beta - \phi_\alpha)(T_\beta) &= \phi_\beta(T_\beta) - \phi_\alpha(f_{\alpha\beta} \cdot T_\alpha) \\
&= (0, T_\beta) - (df_{\alpha\beta} \otimes f_{\alpha\beta}^{-1} \cdot T_\beta, T_\beta) \\
&= \left(-\frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}} \otimes T_\beta, 0 \right).
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}$ invertierbar ist, sind die Extensionsklassen von (4.1.1) und der 1. Fundamentalsequenz von $\mathcal{L}$ Elemente in $H^1(Y, \Omega^1_Y)$ und stimmen überein. Somit erhalten wir, daß die Extensionsklasse der 1. Fundamentalsequenz von $\mathcal{L}$ in $H^1(Y, \Omega^1_Y)$ durch den Cozykel $\{-\frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}}\}$ beschrieben wird. Da andererseits durch den Cozykel

$$\left\{\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}}\right\}$$

das Element $c_1(\mathcal{L}) = \delta(\mathcal{L})$ repräsentiert wird, folgt die 1. Behauptung. □

Lemma 4.4 *Sei $s \in H^0(Y, \mathcal{L})$ ein Schnitt mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$. Dann induziert die für einen lokalen Schnitt f in $\mathcal{O}_Y$ durch $f \mapsto f \otimes 1 \otimes s$ definierte $\mathcal{O}_Y$-lineare Abbildung $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\cdot 1 \otimes 1 \otimes s} P(\mathcal{L})$ die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\cdot 1 \otimes 1 \otimes s} P(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^1_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0 \ . \tag{4.4.1}$$

Beweis. Unter Verwendung der lokalen Beschreibung von $P(\mathcal{L})$ in Lemma 4.3 erhalten, daß für $s = s_\alpha \cdot T_\alpha$ die Abbildung $\cdot 1 \otimes 1 \otimes s$ über $\mathcal{O}_{U_\alpha}$ somit durch

$$1 \mapsto (ds_\alpha \otimes T_\alpha, s_\alpha \otimes T_\alpha)$$

gegeben wird. Durch die lokal über U_α durch

$$\begin{array}{lcll} (dx_i \otimes T_\alpha, 0) & \mapsto & dx_i \otimes T_\alpha & \text{und} \\ (0, T_\alpha) & \mapsto & -\frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \otimes T_\alpha & \end{array}$$

gegebene $\mathcal{O}_Y$-lineare Abbildung

$$P(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^1_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}$$

wird die gegebene Abbildung $\cdot 1 \otimes 1 \otimes s$ zu der exakten Sequenz (4.4.1) ergänzt. □

Definition 4.5 Wir bezeichnen die aus der Sequenz (4.4.1) durch Dualisieren und Tensorieren mit $\mathcal{L}$ entstehende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_Y\langle -X\rangle \longrightarrow \Sigma_Y \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{4.5.1}$$

als die 2. *Fundamentalsequenz* der Garbe $\mathcal{L}$.

Sei $s \in H^0(Y, \mathcal{L})$ ein Schnitt mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$ und $U = Y - X$ das offene Komplement von X mit zugehöriger Einbettung

$$j : U \longrightarrow Y \ .$$

Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf Y. Wir tensorieren (4.5.1) mit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ und erhalten die folgende exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Y$-Moduln

$$0 \longrightarrow T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \ . \tag{4.5.2}$$

Definition 4.6 ([Grel]) Für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ wird das Jacobisystem $J_{Y,\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ bezüglich dem globalen Schnitt s in $\mathcal{L}$ durch

$$J_{Y,\mathcal{F}} = \operatorname{im}\left\{H^0(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F})\right\}$$

definiert. Hierbei ist die Abbildung

$$H^0(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F})$$

durch die Sequenz (4.5.2) induziert. Falls es aus dem Zusammenhang klar zu ersehen ist, welches die zugrundeliegende Varietät für das Jacobisystem ist, schreiben wir für $J_{Y,\mathcal{F}}$ auch $J_{\mathcal{F}}$.

Definition 4.7 Wir definieren $P_X(\mathcal{L})$ als den lokalfreien $\mathcal{O}_Y$-Untermodul der Garbe $j_*P(\mathcal{L})$, der erzeugt wird durch $P(\mathcal{L})$ und durch Elemente der Form $\frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \otimes T_\alpha$, wobei s_α eine lokale Gleichung für den Divisor X sind und T_α eine lokale Faserkoordinate für $\mathcal{L}$ ist. Wir bezeichnen den $\mathcal{O}_Y$-Modul $(P_X(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1})^\vee$ mit $\Sigma_Y\langle X\rangle$.

Lemma 4.8 *Folgendes kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_Y \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^\vee_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_Y\langle X\rangle \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^\vee_Y\langle X\rangle \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{O}_X \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{4.8.1}$$

mit den natürlichen Abbildungen ist exakt und die mittlere horizontale Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1_Y\langle X\rangle \longrightarrow \Sigma^\vee_Y\langle X\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \tag{4.8.2}$$

spaltet. Hierbei sind die obere horizontale Sequenz die 1. Fundamentalsequenz und die linke vertikale Sequenz die Residuensequenz.

Beweis. Die obere horizonzale Sequenz und die linke vertikale Sequenz sind exakt. Aus der lokalen Beschreibung von $\Sigma^\vee_Y$ und $\Sigma^\vee_Y\langle X\rangle$ ergibt sich, daß der Cokern der Abbildung

$$\Omega^1_Y\langle X\rangle \longrightarrow \Sigma^\vee_Y\langle X\rangle$$

die Garbe $\mathcal{O}_Y$ ist. Somit folgt, daß der Cokern von

$$\Sigma_Y^\vee \longrightarrow \Sigma_Y^\vee\langle X\rangle$$

die Garbe $\mathcal{O}_X$ ist. Wir zeigen nun, daß die Sequenz (4.8.2) spaltet. Sei

$$\mathrm{res} : \Omega_X^1\langle X\rangle \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}$$

die Residuenabbildung und

$$\nabla : \mathcal{L} \longrightarrow \Omega_X^1\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}$$

ein holomorpher Zusammenhang auf Y mit logarithmischen Polen entlang X ([Del, Kap. II, §3], vgl. [EV2, §1]). Die Anwendung des Funktors $\mathrm{HOM}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}, \cdot)$ auf die Residuensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \Omega_Y^1\langle X\rangle\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{4.8.3}$$

liefert die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{HOM}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{|X}) \xrightarrow{\delta} H^1(Y, \Omega_Y^1) \xrightarrow{\sigma} H^1(Y, \Omega_Y^1\langle X\rangle) \longrightarrow \ldots .$$

Nach [EV2, Anhang B, Prop. B.1] wird das Element

$$\mathrm{res} \cdot \nabla \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{|X})$$

unter dem verbindenden Homomorphismus δ bis auf das Vorzeichen auf die Extensionsklasse der 1. Fundamentalsequenz (4.2.1) in $H^1(Y, \Omega_Y)$ abgebildet. Andererseits wird unter σ die Extensionsklasse der 1. Fundamentalsequenz auf die Extensionsklasse der Sequenz (4.8.2) in $H^1(Y, \Omega_Y\langle X\rangle)$ abgebildet. Aus $\sigma \cdot \delta = 0$ folgt die Behauptung. □

Eine interessante Eigenschaft der Garbe $\Sigma_Y^\vee$ geben wir in dem folgenden Lemma an.

Lemma 4.9 *Für $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ist die folgende durch die* 1. *Fundamentalsequenz induzierte Kohomologiesequenz*

$$0 \longrightarrow H^i(Y, \Omega_Y^1 \otimes \mathcal{L}^k) \longrightarrow H^i(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^k) \longrightarrow H^i(Y, \mathcal{L}^k) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Da nach Lemma 4.3 die Garbe $P(\mathcal{L}^k)$ für $k \neq 0$ isomorph zu $\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^k$ ist, genügt es zu zeigen, daß die natürliche Abbildung $H^i(Y, P(\mathcal{L})) \to H^i(Y, \mathcal{L})$ für $i \geq 0$ surjektiv ist. Dies gilt aber nach Proposition 2.3 in [Ei]. Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis an. Wir bezeichnen die Diagonale in $Y \times Y$ mit Δ und die natürlichen Projektionen von $Y \times Y$ nach Y mit p_1 und p_2. Aus der Lerayschen Spektralsequenz für $p_2^*\mathcal{L}$

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q p_{1*} p_2^* \mathcal{L}) \Rightarrow H^{p+q}(Y, p_2^* \mathcal{L})$$

ergibt sich die Abbildung

$$E_2^{p,0} = H^p(Y, p_{1*}p_2^*\mathcal{L}) \longrightarrow E_2^\infty = H^p(Y, p_2^*\mathcal{L})$$

und somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y, p_{1*}p_2^*\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^p(Y, p_2^*\mathcal{L}) \\ {\scriptstyle (*)}\big\downarrow & & {\scriptstyle (**)}\big\downarrow \\ H^p(Y, p_{1*}p_2^*\mathcal{L}_{|\Delta}) & = = & H^p(Y, p_{1*}p_2^*\mathcal{L}|\Delta)\ . \end{array}$$

Hierbei ist die Abbildung $(**)$ durch die Restriktionsabbildung auf die Diagonale induziert. Da die Einschränkung von p_2 auf Δ einen Isomorphismus zwischen Δ und Y liefert, gilt $p_{1*}(p_2^*\mathcal{L}|\Delta) = \mathcal{L}$ und somit ist die Abbildung $(*)$ ein Isomorphismus. Also ist die Abbildung $(**)$ surjektiv. In dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^i(Y \times Y, p_2^*\mathcal{L}) & \longrightarrow & H^i(Y \times Y, p_2^*\mathcal{L}_{|Y_{(2)}}) & \xleftarrow{\simeq} & H^i(Y, P(\mathcal{L})) \\ \| & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^i(Y \times Y, p_2^*\mathcal{L}) & \xrightarrow{(**)} & H^i(Y \times Y, p_2^*\mathcal{L}_{|\Delta}) & \xleftarrow{\simeq} & H^i(Y, \mathcal{L}) \end{array}$$

ist somit die Abbildung $(**)$ für $i \geq 0$ surjektiv. Hieraus folgt die Behauptung. □

Die Varietät $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1})$

Wir benutzen die folgende Notation:

$$\begin{aligned} L_0 &= \boldsymbol{Spec}_{\mathcal{O}_Y}\left(\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^{-l}\right) \\ L &= \boldsymbol{Spec}_{\mathcal{O}_Y}\left(\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-l}\right) \\ \overline{L} &= \mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1})\ . \end{aligned}$$

Mit den natürlichen Einbettungen $i : L_0 \longrightarrow L$ und $j : L \longrightarrow \overline{L}$ und den natürlichen Projektionen $\pi_0 : L_0 \longrightarrow Y$, $\pi : L \longrightarrow Y$ und $\overline{\pi} : \overline{L} \longrightarrow Y$ erhalten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{j} & \overline{L} \\ {\scriptstyle \pi_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{\pi}} \\ Y & = = & Y & = = & Y\ . \end{array}$$

Hierbei ist $\overline{\pi}$ ein $\mathbb{P}^1$-Bündel, π ein $\mathbf{A}^1$-Bündel und π_0 ein $\mathbb{C}^*$-Bündel. Die natürlichen Projektionen

$$\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

und

$$\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}$$

bestimmen den Nullschnitt

$$\sigma_0 : Y \longrightarrow \overline{L}$$

und den ∞-Schnitt

$$\sigma_\infty : Y \longrightarrow \overline{L}.$$

Wir setzen $D_0 = \sigma_0(Y)$ und $D_\infty = \sigma_\infty(Y)$. Den Divisor $D_0 + D_\infty$ auf $\overline{L}$ bezeichnen wir mit D. Die offene Einbettung $j : L \longrightarrow \overline{L}$ ergibt somit eine Zerlegung von $\overline{L}$ in eine disjunkte Vereinigung $\overline{L} = L \cup D_\infty$, wobei wir L mit seinem Bild in $\overline{L}$ identifizieren. Mit $\mathcal{O}_{\overline{L}}(1)$ bezeichnen wir die relativ ample Garbe auf $\overline{L}$, die eindeutig bestimmt ist durch die natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\overline{L}/Y} \otimes \mathcal{O}_{\overline{L}}(1) \longrightarrow \overline{\pi}^* \left(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{L}}(1) \longrightarrow 0 \, . \tag{4.9.1}$$

Außerdem ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{\pi}^* \Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_{\overline{L}} \longrightarrow \Omega^1_{\overline{L}/Y} \longrightarrow 0 \, . \tag{4.9.2}$$

der 1-Formen auf $\overline{L}$ exakt. Wir geben an dieser Stelle ein technisches Lemma an, das wir im Abschnitt über das Infinitesimale Torelliproblem benötigen werden.

Lemma 4.10 *Sei Z eine glatte, projektive Varietät und $f : Z \longrightarrow Y$ ein endlicher, surjektiver Morphismus vom Grad N, sodaß eine Einbettung $i_Z : Z \longrightarrow L$ über Y existiert, d.h. das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i_Z"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"] & \overline{L} \arrow[dl, "\overline{\pi}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dann gilt :

1. $f_*\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$
2. $\sigma_\infty^* \mathcal{O}_{\overline{L}}(1) = \mathcal{L}^{-1}$
3. $\mathcal{O}_{\overline{L}}(Z) = \mathcal{O}_{\overline{L}}(N) \otimes \overline{\pi}^* \mathcal{L}^N$

4. $\omega_{Z/Y} = f^*\mathcal{L}^{N-1}$

5. $\omega_{\overline{L}/Y} = \mathcal{O}_{\overline{L}}(-2) \otimes \overline{\pi}^*\mathcal{L}^{-1}$

6. $\mathcal{O}_{\overline{L}}(D_0) = \mathcal{O}_{\overline{L}}(1) \otimes \overline{\pi}^*\mathcal{L}$

7. $\mathcal{O}_{\overline{L}}(D_\infty) = \mathcal{O}_{\overline{L}}(1)$

BEWEIS. Da $PIC(\overline{L})$ kanonisch isomorph zu $PIC(Y) \times \mathbb{Z}$ ist, gilt

$$\mathcal{O}_{\overline{L}}(Z) = \mathcal{O}_{\overline{L}}(a) \otimes \overline{\pi}^*\mathcal{F} ,$$

wobei $a \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{F}$ eine invertierbare Garbe auf Y ist. Weil der Grad des Morphismus f mit dem Grad der Einschränkung von $\mathcal{O}_{\overline{L}}(Z)$ auf eine Faser von $\overline{\pi}$ übereinstimmt, gilt $a = N$. Da $\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\overline{L}}(-N) = 0$, $\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\overline{L}} = \mathcal{O}_Y$ und $R^1\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\overline{L}} = 0$ ist, folgt aus der natürlichen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{L}}(-N) \otimes \overline{\pi}^*\mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{L}} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \tag{4.10.1}$$

durch Anwendung des Funktors $\overline{\pi}_*$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow R^1\pi_*\mathcal{O}_{\overline{L}}(-N) \otimes \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow 0 . \tag{4.10.2}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}\left\{\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Z\right\} &= \left(\pi_*\mathcal{O}_{\overline{L}}(N-2)\right)^\vee \otimes \wedge^2\left(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1}\right)^\vee \otimes \mathcal{F}^{-1} \\ &= S^{N-2}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}) \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}^{-1} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{N-1} \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{F}^{-1} . \end{aligned} \tag{4.10.3}$$

Da $(j \cdot i_Z)(Z) \cap D_\infty = \emptyset$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sigma_\infty^*\overline{\pi}^*\mathcal{F} \\ &= \sigma_\infty^*\left(\mathcal{O}_{\overline{L}}(Z) \otimes \mathcal{O}_{\overline{L}}(-N)\right) \\ &= \sigma_\infty^*\mathcal{O}_{\overline{L}}(-N) \end{aligned} \tag{4.10.4}$$

Wir wählen eine offene, affine Überdeckung U_α von Y und verwenden die Notation aus dem Beweis von Lemma 4.3. Die natürliche Projektion

$$\overline{L} - D_0 = \boldsymbol{Spec}_{\mathcal{O}_Y}(\oplus_{l=-\infty}^{0} \mathcal{L}^{-l}) \rightarrow Y$$

bezeichnen wir mit π_∞. Wir setzen

$$V_\alpha = Spec(\mathcal{O}_Y(U_\alpha)[T_\alpha]) \quad \text{und} \quad W_\alpha = Spec(\mathcal{O}_Y(U_\alpha)[1/T_\alpha])$$

und erhalten, da π und π_∞ affine Morphismen sind, eine offene, affine Überdeckung $\{V_\alpha, W_\alpha\}$ von $\overline{L}$. Da für alle α der Divisor D_∞ in W_α für $T'_\alpha = 1/T_\alpha$ durch $T'_\alpha = 0$ gegeben ist und $V_\alpha \cap D_\infty = \emptyset$ gilt, folgt durch Vergleich der Übergangsfunktionen von $\sigma_\infty^* \mathcal{O}_{\overline{L}}(1)$ und $\mathcal{L}^{-1}$ bzw. $\mathcal{O}_{\overline{L}}(1)$ und $\mathcal{O}_{\overline{L}}(D_\infty)$ die 2. bzw. 7. Behauptung. Mit (4.10.4) folgt nun $\mathcal{F} = \mathcal{L}^N$ und somit die 3. Behauptung und (4.10.3) liefert die 1. Behauptung. Aus 3. folgt für $N = 1$ die 6. Behauptung. Mit der Sequenz (4.9.1) folgt durch Dachproduktbildung die 5. Behauptung

$$\omega_{\overline{L}/Y} = \mathcal{O}_{\overline{L}}(-2) \otimes \overline{\pi}^* \mathcal{L}^{-1} . \tag{4.10.5}$$

Mit Hilfe der Adjunktionsformel für Z in $\overline{L}$ folgt

$$\omega_Z = i_Z^*(\omega_{\overline{L}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{L}}(Z)) = \overline{\pi}^*(\mathcal{L}^{N-1} \otimes \omega_Y) .$$

Somit ergibt sich die 4. Behauptung. □

Der primitive De-Rham Komplex

Sei $(\Omega^\bullet_{L_0}, d_{L_0})$ der De-Rham Komplex auf L_0. Der Komplex $(\pi_{0*}\Omega^\bullet_{L_0}, \pi_{0*}d_{L_0})$ ist ein Komplex von graduierten $\mathcal{O}_Y$-Moduln, dessen Differentiale die Graduierung respektieren (vgl. [Og, p. 1087-1089]).

Definition 4.11 Man bezeichnet den Unterkomplex der Terme vom Grad 0 des Komplexes $(\pi_{0*}\Omega^\bullet_{L_0}, \pi_{0*}d_{L_0})$ als den *primitiven De-Rham Komplex* $(\mathcal{P}^\bullet_Y, d)$ von Y bezüglich $\mathcal{L}$.

Lemma 4.12 *Es existieren die folgenden kanonischen Isomorphismen von $\mathcal{O}_{L_0}$, $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_{\overline{L}}$ bzw. $\mathcal{O}_Y$-Moduln*

1. $\pi_0^* \mathcal{P}^1_Y = \Omega^1_{L_0}$, $\qquad \pi_0^* \mathcal{L} = \Omega^1_{L_0/Y}$,
2. $\pi^* \mathcal{P}^1_Y = \Omega^1_L \langle D_0 \rangle$, $\qquad \pi^* \mathcal{L} = \Omega^1_{L/Y}$, $\qquad \Omega^1_{L/Y}\langle D_0 \rangle = \mathcal{O}_L$,
3. $\overline{\pi}^* \mathcal{P}^1_Y = \Omega^1_{\overline{L}} \langle D \rangle$, $\qquad \Omega^1_{\overline{L}/Y}\langle D \rangle = \mathcal{O}_{\overline{L}}$,
4. $\wedge^k \Sigma_Y^\vee = \mathcal{P}^k_Y$ *für* $k \geq 0$.

BEWEIS. Wir wählen eine offene, affine Überdeckung U_α von Y mit lokalen Koordinaten $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ in U_α und verwenden die Notation aus dem Beweis von Lemma 4.3 und 4.10. Die natürliche Projektion $\overline{L} - D_0 \to Y$ bezeichnen wir wieder mit π_∞ und mit $\{V_\alpha, W_\alpha\}$ die offene, affine Überdeckung von $\overline{L}$, die gegeben ist durch

$V_\alpha = Spec(\mathcal{O}_Y(U_\alpha)[T_\alpha])$ und $W_\alpha = Spec(\mathcal{O}_Y(U_\alpha)[1/T_\alpha])$. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}^*\Omega^1_{Y|V_\alpha} &= \pi^*\Omega^1_{Y|V_\alpha} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{U_\alpha}[T_\alpha]\pi^* dx_i^\alpha \ , \\
\Omega^1_{\overline{L}|V_\alpha} &= \Omega^1_{L|V_\alpha} = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{U_\alpha}[T_\alpha]\pi^* dx_i^\alpha\right) \oplus \mathcal{O}_{U_\alpha}[T_\alpha]dT_\alpha \text{ und} \\
\Omega^1_{\overline{L}/Y|V_\alpha} &= \Omega^1_{L/Y|V_\alpha} = \mathcal{O}_{U_\alpha}[T_\alpha]dT_\alpha \ .
\end{aligned}$$

Wir bemerken, daß $\pi^*x_1^\alpha, \ldots, \pi^*x_n^\alpha, T_\alpha$ lokale Koordinaten in V_α sind. Eine entsprechende Darstellung ergibt sich für die W_α's. Da $df_{\alpha\beta} = 0$ in $\Omega^1_{L/Y}(V_\alpha \cap V_\beta)$ ist, erhalten wir aus $T_\beta = f_{\alpha\beta} \cdot T_\alpha$, daß $dT_\beta = f_{\alpha\beta} \cdot dT_\alpha$ gilt. Da $\Omega^1_{\overline{L}/Y}\langle D\rangle_{|V_\alpha} = \mathcal{O}_{V_\alpha} \cdot \frac{dT_\alpha}{T_\alpha}$ gilt, folgen nun entsprechend aus

$$\begin{aligned}
\frac{dT_\beta}{T_\beta} &= \frac{d(f_{\alpha\beta} \cdot T_\alpha)}{f_{\alpha\beta} \cdot T_\alpha} = \frac{dT_\alpha}{T_\alpha} \quad \text{und} \\
\frac{d(1/T_\beta)}{1/T_\beta} &= \frac{d(1/f_{\alpha\beta} \cdot 1/T_\beta)}{1/f_{\alpha\beta} \cdot 1/T_\beta} = \frac{d(1/T_\alpha)}{T_\alpha}
\end{aligned}$$

in 2. und 3. jeweils die letzten beiden Behauptungen. Für die Garbe $\mathcal{P}^1_Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^1_{Y|U_\alpha} &= \left(\left(\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty}\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{U_\alpha}dx_i\right)\cdot T_\alpha^j\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}_{U_\alpha}\cdot dT_\alpha \cdot T_\alpha^k\right)\right)_0 \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{U_\alpha}dx_i\right) \oplus \mathcal{O}_{U_\alpha}\cdot\frac{dT_\alpha}{T_\alpha},
\end{aligned}$$

wobei wir für einen graduierten $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{F} = \oplus\mathcal{F}_i$ mit $(\mathcal{F})_0$ den Anteil $\mathcal{F}_0$ bezeichnen. Hieraus folgen in 1., 2. und 3. jeweils die 1. Behauptungen. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{dT_\beta}{T_\beta} = \frac{d(f_{\alpha\beta}\cdot T_\alpha)}{f_{\alpha\beta}\cdot T_\alpha} = \frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}} + \frac{dT_\alpha}{T_\alpha}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_\beta} \otimes (0, T_\beta) &= \frac{1}{f_{\alpha\beta}\cdot T_\alpha} \otimes (0, f_{\alpha\beta}\cdot T_\alpha) \\
&= \frac{1}{T_\alpha} \otimes \left(\frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}} \otimes T_\alpha, T_\alpha\right) \\
&= \left(\frac{df_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}}, 0\right) + \frac{1}{T_\alpha} \otimes (0, T_\alpha)
\end{aligned}$$

folgt durch Vergleich der Übergangsfunktionen zunächst die Isomorphie von $\mathcal{P}^1_Y$ und $\Sigma^\vee_Y$. Aus $\pi_0^* \wedge^k \Sigma^\vee_Y = \Omega^k_{L_0}$ folgt durch die Anwendung des Funktors π_{0*} die Isomorphie von $\wedge^k\Sigma^\vee_Y$ und $\mathcal{P}^k_Y$ für alle $k \geq 0$. $\square$

Bemerkung 4.13 Wir identifizieren den primitiven De-Rham Komplex $(\mathcal{P}_Y^\bullet, d)$ mit dem Komplex $(\wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee, d)$, wobei das Differential des Komplexes $\wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee$ durch das Differential des primitiven De-Rham Komplexes induziert ist.

Lemma 4.14 *Es gelten die folgenden Aussagen*

1. *Für $p \geq 0$ liefert die Anwendung des Funktors $\overline{\pi}_*$ auf die exakte Sequenz der Garben der logarithmischen 1-Formen auf $\overline{L}$*

$$0 \longrightarrow \overline{\pi}^*\Omega_Y^p \longrightarrow \Omega_{\overline{L}}^p\langle D\rangle \longrightarrow \Omega_{\overline{L}/Y}^p\langle D\rangle \longrightarrow 0$$

die duale p-te Dachproduktsequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^p \xrightarrow{\sigma_p} \wedge^p \Sigma_Y^\vee \xrightarrow{\rho_p} \Omega_Y^{p-1} \longrightarrow 0 \tag{4.14.1}$$

zur 1. *Fundamentalsequenz* (4.2.1). *Insbesondere gilt*

$$\overline{\pi}_*\Omega_{\overline{L}}^1\langle D\rangle = \Sigma_Y^\vee \ .$$

2. *Die folgende Sequenz von Komplexen ist exakt*

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^\bullet \xrightarrow{\sigma} \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee \xrightarrow{\rho} \Omega_Y^\bullet[-1] \longrightarrow 0 \ . \tag{4.14.2}$$

Hierbei ist $\Omega_Y^\bullet$ der De-Rham Komplex mit dem Differential d, der Komplex $\Omega_Y^\bullet[-1]$ ist der um eine Stelle nach rechts verschobene De-Rham Komplex mit dem Differential $-d$ und $\wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee$ ist der primitive De-Rham Komplex. Weiterhin sind die Abbildungen σ und ρ durch die Abbildungen σ_p und ρ_p in der Sequenz (4.14.1) *induziert.*

BEWEIS. Die 1. Behauptung folgt unmittelbar aus dem Lemma 4.12 (vgl. [Og, p.1088]). Die 2. Behauptung folgt aus der Exaktheit der Sequenz (1.6.4) in [Og]. □
Für einen Komplex von Garben $\mathcal{K}^\bullet$ auf Y bezeichnet man mit

$$\mathbb{H}^i(Y, \mathcal{K}^\bullet)$$

die i-te Hyperkohomologiegruppe von $\mathcal{K}^\bullet$ und mit $\mathcal{K}^\bullet[r]$ den um r Stellen nach links geshifteten Komplex, d.h. an der i-ten Stelle des Komplexes $\mathcal{K}^\bullet[r]$ steht $\mathcal{K}^{i+r}$. Weiterhin bezeichnet man mit $\{F^p\mathcal{K}^\bullet\}$ die *filtration bête* des Komplexes $\mathcal{K}^\bullet$, d.h. an der q-ten Stelle des Komplexes $F^p\mathcal{K}^\bullet$ steht $\mathcal{K}^q$, falls $q \geq p$ ist, und sonst 0.

Bemerkung 4.15 Die exakte Sequenz von Komplexen (4.14.2) induziert für die Faserung $\pi_0 : L_0 \to Y$ die Gysinsequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{H}^{i-2}(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee) \longrightarrow \mathbb{H}^{i-1}(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \ldots,$$

wobei der verbindende Homomorphismus $\mathbb{H}^{i-2}(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, \Omega_Y^\bullet)$ durch Cupprodukt mit einem komplexen Vielfachen der Klasse $c_1(\mathcal{L}) \in H^1(Y, \Omega_Y^1)$ gegeben ist. Wir nehmen nun an, daß die Garbe $\mathcal{L}$ ample ist. Nach dem Harten Lefschetzsatz (siehe z.B. [GH, p.122]) erhält man nun für $0 \leq i \leq n$ die folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^{i-2}(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, \Omega_Y^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee) \longrightarrow 0\,. \tag{4.15.1}$$

Wir bezeichnen für $0 \leq k \leq n$ die primitive Kohomologiegruppe

$$\ker\left\{ H^k(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cup c_1(\mathcal{L})^{n-k+1}} H^{2n-k+2}(Y, \mathbb{C}) \right\}$$

von $H^k(Y, \mathbb{C})$ mit $H_0^k(Y, \mathbb{C})$. Weiterhin definieren wir für $0 \leq p+q \leq n$ die primitive Kohomologiegruppe $H_0^p(Y, \Omega_Y^q)$ durch

$$H_0^p(Y, \Omega_Y^q) = H_0^k(Y, \mathbb{C}) \cap H^p(Y, \Omega_Y^q).$$

Hierbei erhalten wir nach dem Poincarélemma einen natürlichen Quasiisomorphismus von Komplexen $\mathbb{C}_Y \longrightarrow \Omega_Y^\bullet$ und identifizieren deshalb die Kohomologiegruppen $H^i(Y, \mathbb{C})$ und $\mathbb{H}^i(Y, \Omega_Y^\bullet)$.

Proposition 4.16 *Für* $0 \leq k \leq n$ *induziert die Sequenz* (4.15.1) *einen natürlichen Isomorphismus*

$$H_0^k(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^k(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee).$$

Der Isomorphismus ist verträglich mit der Hodgezerlegung von $H_0^k(Y, \mathbb{C})$ *und induziert somit für* p, q *mit* $p + q = k$ *die folgenden Isomorphismen*

$$H_0^p(Y, \Omega_Y^q) \xrightarrow{\simeq} H^p(Y, \wedge^q \Sigma_Y^\vee).$$

BEWEIS. Aus der Sequenz (4.15.1) erhalten wir $0 \leq k \leq n$ folgendes exakte kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & H_0^k(Y, \mathbb{C}) \arrow[d] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
0 \arrow[r] & H^{k-2}(Y, \mathbb{C}) \arrow[r, "\cup c_1(\mathcal{L})"] \arrow[dr, "\alpha"'] & H^k(Y, \mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\cup c_1(\mathcal{L})^{n-k+1}"] & \mathbb{H}^k(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee) \arrow[r] & 0 \\
 & & H^{2n-k+2}(Y, \mathbb{C}) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist α die durch Cupprodukt mit $c_1(\mathcal{L})^{n-k+2}$ gegebene Abbildung. Aus dem Harten Lefschetzsatz folgt, daß α ein Isomorphismus ist. Somit ist auch β ein Isomorphismus. Nach Theorem 1.9 in [Og] degeneriert die Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^q(Y, \wedge^p \Sigma_Y^\vee) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee)$$

auf E_1-Level. Da die Hodgespektralsequenz auch auf E_1-Level degeneriert, induziert somit der Isomorphismus β die Isomorphismen

$$H_0^p(Y, \Omega_Y^q) \xrightarrow{\simeq} H^p(Y, \wedge^q \Sigma_Y^\vee)$$

für die $E_1^{p,q}$-Terme der zugehörigen Spektralsequenzen. □

Bemerkung 4.17 Die zur *filtration bête* gehörende Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^q(Y, \wedge^p \Sigma_Y^\vee) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \wedge^\bullet \Sigma_Y^\vee) \xrightarrow{\simeq} H_0^{p+q}(Y, \mathbb{C})$$

degeneriert somit in E_1.

5 Hodgetheorie zyklischer Überlagerungen

Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. Weiterhin sei für eine natürliche Zahl N ein Schnitt $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$ mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$ gegeben. Der Schnitt s definiert durch die Injektion

$$\mathcal{L}^{-N} \xrightarrow{\cdot s} \mathcal{O}_Y$$

eine $\mathcal{O}_Y$-Algebrastruktur auf $\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$. Wir bezeichnen die glatte Varietät

$$Z = \boldsymbol{Spec}_{\mathcal{O}_Y} \left(\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \right)$$

zusammen mit dem natürlichen Morphismus

$$f : Z \to Y$$

als zyklische Überlagerung von Y bezüglich $\mathcal{L}^N \simeq \mathcal{O}_Y(X)$. Den Divisor $(f^*X)_{red}$ bezeichnen wir mit X'.

Die Galoisgruppe G von Z über Y ist zyklisch von der Ordnung N. Wir wählen ein erzeugendes Element σ von G und eine primitive Einheitswurzel ζ, sodaß σ auf dem direkten Summanden $\mathcal{L}^{-i}$ von $f_*\mathcal{O}_Z$ durch Multiplikation mit ζ^i operiert. Falls für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Z die Garbe $f_*\mathcal{F}$ lokal frei ist und die Galoisgruppe G auf $f_*\mathcal{F}$ operiert, so bezeichnen wir mit $(f_*\mathcal{F})_i$ den Eigenraum zum Eigenwert ζ^i des erzeugenden Elementes σ.

Pushdown von Garben

Das Standardargument bei der Untersuchung einer Kohomologiegruppe $H^i(Z, \mathcal{F})$ für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Z ist die Anwendung der Leray-Spektralsequenz in dieser Situation. Da $R^i f_*\mathcal{F} = 0$ ist für $i > 0$, erhält man natürliche Isomorphismen

$$H^i(Z, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, f_*\mathcal{F})$$

für $i > 0$. Aus diesem Grunde wenden wir nun den Funktor f_* auf einige im folgenden wichtige Garben auf Z an. Nach [EV1] erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 5.1 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für* $p \geq 1$*:*

1. $$f_*\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$$

$$(f_*\mathcal{O}_Z)_i = \mathcal{L}^{-i} \quad \textit{für } i = 0, \ldots, N-1$$

2. $$f_*\Omega_Z^p = \Omega_Y^p \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} \Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \right)$$

$$(f_*\Omega_Z^p)_i = \begin{cases} \Omega_Y^p & \textit{für } i = 0 \\ \Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} & \textit{für } i = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

3. $$f_*\Omega_Z^p\langle X'\rangle = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}$$

$$(f_*\Omega_Z^p\langle X'\rangle)_i = \Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \quad \textit{für } i = 0, \ldots, N-1$$

4. $$f_* \wedge^p T_Z = \wedge^p T_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} \wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+1+i} \right)$$

$$(f_* \wedge^p T_Z)_i = \begin{cases} \wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} & \textit{für } i = 0, \ldots, N-2 \\ \wedge^p T_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1} & \textit{für } i = N-1 \end{cases}$$

5. $$f_* \wedge^p T_Z\langle -X'\rangle = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+1+i}$$

$$(f_* \wedge^p T_Z\langle -X'\rangle)_i = \wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \quad \textit{für } i = 0, \ldots, N-1$$

Bemerkung 5.2 Falls $\mathcal{L}$ ample ist, so besitzt Z zwei natürliche Polarisierungen : zum einen die kanonische durch ω_Z und zum anderen die durch $f^*\mathcal{L}$ gegebene Polarisierung. Die uns interessierende Polarisierung auf Z ist die durch $f^*\mathcal{L}$ gegebene. Da für die kanonischen Garben ω_Y und ω_Z die Adjunktionsformel

$$\omega_Z = f^*(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-1})$$

gilt, bemerken wir, daß für multikanonische Überlagerungen, d.h. für $\mathcal{L} = \omega_Y$, die Polarisierungen übereinstimmen.

Da uns die primitive Kohomologie von Z bezüglich $f^*\mathcal{L}$ interessiert, untersuchen wir nun das Verhalten der Garben $\wedge^p\Sigma_Z$ und $\wedge^p\Sigma_Z^\vee$ mit $\Sigma_Z = P(f^*\mathcal{L})^\vee \otimes f^*\mathcal{L}$ unter dem Funktor f_*. Mit Σ_Y bezeichnen wir die Garbe $\Sigma_Y = P(\mathcal{L})^\vee \otimes \mathcal{L}$ auf Y.

Lemma 5.3 *Es gilt für $p \geq 1$:*

1. $$f_* \wedge^p \Sigma_Z^\vee = \wedge^p \Sigma_Y^\vee \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} (\Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \oplus \Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i})\right)$$

$$(f_* \wedge^p \Sigma_Z^\vee)_i = \begin{cases} \wedge^p \Sigma_Y^\vee & \textit{für } i = 0 \\ \Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \oplus \Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} & \textit{für } i = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

2. $$f_* \wedge^p \Sigma_Z = \wedge^p \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} (\wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+1+i} \oplus \wedge^{p-1} T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+1+i})\right)$$

$$(f_* \wedge^p \Sigma_Z)_i = \begin{cases} \wedge^p T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} \oplus \wedge^{p-1} T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i} & \textit{für } i = 0, \ldots, N-2 \\ \wedge^p \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1} & \textit{für } i = N-1 \end{cases}$$

Beweis. Durch Dachproduktsequenzbildung erhalten wir aus der spaltenden Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^1\langle X\rangle \longrightarrow \Sigma_Y^\vee\langle X\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

in Lemma 4.8 für $p \geq 1$ die exakte spaltende Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^p\langle X\rangle \longrightarrow \wedge^p \Sigma_Y^\vee\langle X\rangle \longrightarrow \Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle \longrightarrow 0\ . \tag{5.3.1}$$

Da nach [Vie2, Lemma 1.6] gilt

$$f^* \Omega_Y^p\langle X\rangle = \Omega_Z^p\langle X'\rangle\ ,$$

folgt nach der Anwendung des Funktors f^* auf die Sequenz (5.3.1) die Gleichheit

$$f^* \wedge^p \Sigma_Y^\vee\langle X\rangle = \wedge^p \Sigma_Z^\vee\langle X'\rangle\ . \tag{5.3.2}$$

Hieraus folgt für $p \geq 1$

$$f_* \wedge^p \Sigma_Z^\vee\langle X'\rangle = (\wedge^p \Sigma_Y^\vee\langle X\rangle) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i}\right)\ .$$

Mit einer entsprechenden Überlegung wie im Beweis von Lemma 4.8 ergibt sich nun, daß für $p = 1, \ldots, n+1$ der Cokern der natürlichen Einbettung

$$\wedge^p \Sigma_Z^\vee \longrightarrow \wedge^p \Sigma_Z^\vee\langle X'\rangle$$

isomorph zu dem $\mathcal{O}_{X'}$-Modul

$$\wedge^{p-1} \Sigma_{X'}^\vee = \wedge^{p-1} \left(P(f^* \mathcal{L}_{|X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} f^* \mathcal{L}_{|X'}^{-1}\right)$$

ist. Somit erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \wedge^p \Sigma_Z^\vee \longrightarrow \wedge^p \Sigma_Z^\vee \langle X' \rangle \longrightarrow \wedge^{p-1} \Sigma_{X'}^\vee \longrightarrow 0 \ . \tag{5.3.3}$$

Indem wir den Funktor f_* auf (5.3.3) anwenden bekommen wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f_* \wedge^p \Sigma_Z^\vee \xrightarrow{\alpha} (\wedge^p \Sigma_Y^\vee \langle X \rangle) \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \right) \xrightarrow{\beta} \wedge^{p-1} \Sigma_X^\vee \longrightarrow 0 \ . \tag{5.3.4}$$

mit $\Sigma_X^\vee = P(\mathcal{L}_{|X}) \otimes \mathcal{L}_{|X}^{-1}$. Für eine affine Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von Y läßt sich $\Sigma_Z^\vee$ über $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ darstellen als

$$\Sigma^\vee_{Z|V_\alpha} = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{V_\alpha} dx_i \right) \oplus \mathcal{O}_{V_\alpha} \frac{dT_\alpha}{T_\alpha},$$

wobei T_α die Faserkoordinate von $\mathcal{L}$ über U_α und $x_1, \ldots, x_n$ lokale Koordinaten von Z in V_α sind. Die natürliche Operation von G auf $\Sigma_Z^\vee$ ist gegeben durch

$$\sigma \left(f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + g \cdot \frac{dT_\alpha}{T_\alpha} \right) = \sigma f \cdot d(\sigma x_1) \wedge \ldots \wedge d(\sigma x_n) + \sigma g \cdot \frac{dT_\alpha}{T_\alpha} \ .$$

Somit sind die Abbildungen in der Sequenz (5.3.4) G-equivariant. Da die Garbe $\wedge^{p-1} \Sigma_X^\vee$ eine G-invariante Garbe ist, liefert dies

$$(\ker \beta)^G = \wedge^p \Sigma_Y^\vee \ .$$

Die Abbildung α in (5.3.4) induziert auf dem nicht G-invarianten Anteil einen Isomorphismus. Hieraus folgt die 1. Behauptung. Nun kommen wir zum Beweis der 2. Behauptung. Eine Anwendung der Dualitätstheorie für endliche flache Morphismen (vgl. [Ha, Kap.III, Ex. 6.10]) auf den Morphismus f liefert

$$f_* \wedge^p \Sigma_Z = \mathcal{HOM}_{\mathcal{O}_Y} \left(\mathcal{L}^{N-1} \otimes f_* \wedge^p \Sigma_Z^\vee, \mathcal{O}_Y \right) \ .$$

Indem man das Resultat der 1. Behauptung in diese Gleichung einsetzt, folgt die 2. Behauptung. □

Die IVHS einer zyklischen Überlagerung

Sei nun $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf Y. In diesem Abschnitt untersuchen wir die von der polarisierten Varietät $(Z, f^*\mathcal{L})$ induzierte IVHS vom Gewicht k (siehe Beispiel 2.13). Für $p = 1, \ldots, k$ zerfällt die Abbildung

$$H_0^1(Z, T_Z) \xrightarrow{\delta_p} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}} \left(H_0^{k-p}(Z, \Omega_Z^p), H_0^{k-p+1}(Z, \Omega_Z^{p-1}) \right)$$

aufgrund der Eigenraumzerlegungen der Vektorräume $H_0^1(Z, T_Z)$, $H_0^{k-p}(Z, \Omega_Z^p)$ und $H_0^{k-p+1}(Z, \Omega_Z^{p-1})$ in eine direkte Summe

$$\delta_p = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \delta_{p,i}$$

mit

$$\delta_{p,i} = (\delta_{p,i,0}, \ldots, \delta_{p,i,N-1}) \quad ,$$

wobei für $0 \leq i, j \leq N-1$ die Abbildung $\delta_{p,i,j}$ gegeben ist durch

$$T^{(i)} \xrightarrow{\delta_{p,i,j}} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(U_p^{(j)}, U_{p-1}^{(i+j-[\frac{i+j}{N}]\cdot N)}\right) \quad .$$

Hierbei bezeichnet

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= \left(H_0^1(Z, T_Z)\right)_i \quad \text{für } 0 \leq i \leq N-1 \text{ und} \\ U_p^{(j)} &= \left(H^{k-p}(Z, \Omega_Z^p)\right)_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq N-1 \; . \end{aligned}$$

Wir präzisieren nun den Begriff des IVHS-Isomorphismus von zyklischen Überlagerungen. Seien $(Y, \mathcal{L})$ und $(Y', \mathcal{L}')$ zwei polarisierte Varietäten der Dimension n und $f : Z \longrightarrow Y$ bzw. $f : Z' \longrightarrow Y'$ zyklische Überlagerungen bezüglich $\mathcal{L}^N = \mathcal{O}_Y(X)$ bzw. $\mathcal{L}'^N = \mathcal{O}_{Y'}(X')$, wobei X bzw. X' ein glatter reduzierter Divisor auf Y bzw. Y' ist. Die durch $(Z, f^*\mathcal{L})$ bzw. $(Z', f^*\mathcal{L}')$ induzierten IVHS vom Gewicht k bezeichnen wir mit

$$(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta)$$

und

$$(H'_{\mathbb{Z}}, F'^\bullet, Q', T', \delta') \; .$$

Definition 5.4 Wir bezeichnen eine IVHS-Isomorphismus

$$(H_{\mathbb{Z}}, F^\bullet, Q, T, \delta) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\psi}} (H'_{\mathbb{Z}}, F'^\bullet, Q', T', \delta')$$

als einen IVHS-Isomorphismus von zyklischen Überlagerungen, falls für $p = 1, \ldots, k$ und $0 \leq i, j \leq N-1$ das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^{(i)} & \xrightarrow{\delta_{p,i,j}} & \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(U_p^{(j)}, U_{p-1}^{(i+j-[\frac{i+j}{N}]\cdot N)}\right) \\ \wr\!\!\downarrow & & \wr\!\!\downarrow \\ T'^{(i)} & \xrightarrow{\delta'_{p,i,j}} & \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(U_p'^{(j)}, {U'_{p-1}}^{(i+j-[\frac{i+j}{N}]\cdot N)}\right) \end{array}$$

kommutativ ist. Hierbei sind die vertikalen Isomorphismen durch ψ induziert.

Nun betrachten wir die Abbildungen $\delta_{p,i,j}$ genauer. Da die invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ ample ist, gilt nach [EV2, (2.8)]

$$H^{k-p}(Y, \Omega_Y^{p-1}\langle X \rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, N-1 \text{ und } p = 0, \ldots, k \; .$$

Zusammen mit Lemma 5.3 erhalten wir

$$T^{(i)} \simeq \begin{cases} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) & \text{für } i = 0, \ldots, N-2 \\ H^1(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1}) & \text{für } i = N-1 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

und

$$\left(H_0^{k-p}(Z, \Omega_Z^p)\right)_j \simeq \begin{cases} H^{k-p}(Y, \wedge^p \Sigma_Y^\vee) & \text{für } j = 0 \\ H^{k-p}(Y, \Omega^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) & \text{für } j = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß für $i = 0, \ldots, N-2$ der Isomorphismus (5.4.1) durch Komposition mit dem durch die 1. Fundamentalsequenz (4.2.1) induzierten Isomorphismus

$$T^{(i)} \simeq (H^1(Y, f_*\Sigma_Z))_i \xrightarrow{\simeq} (H^1(Y, f_*T_Z))_i \simeq H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i})$$

gegeben ist und der Isomorphismus (5.4.2) durch den Isomorphismus in Proposition 4.16 induziert wird.

Für $p = 1, \ldots, k$, $0 \leq i \leq N-2$, $1 \leq j \leq N-1$ und $i + j \leq N-1$ bezeichnen wir mit $\widetilde{\delta}_{p,i,j}$ die folgende durch Cupprodukt und Kontraktion von Garben induzierte Abbildung von Kohomologiegruppen auf Y

$$H^1(T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) \xrightarrow{\widetilde{\delta}_{p,i,j}} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^{k-p}(\Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}), H^{k-p+1}(\Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i-j})\right).$$

Die hierzu entsprechenden Abbildungen $\delta_{p,i,j}$ spielen für uns eine wichtige Rolle, da wir aufgrund der Bedingung $i + j < N-1$ die $\mathcal{O}_Y$-Algebrastruktur auf den Pushdowns der jeweiligen Garben unter f_* nicht zu berücksichtigen brauchen und somit diese Abbildungen einfacher zu handhaben sind (vgl. [Kn, 3.2]). Aufgrund der Verträglichkeit der Leray-Spektralsequenz mit Cupprodukt und Kontraktion von Garben erhalten wir nun das folgende Lemma.

Lemma 5.5 *Für $p = 1, \ldots, k$, $0 \leq i \leq N-2$, $1 \leq j \leq N-1$ und $i + j \leq N-1$ ist das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccc} T^{(i)} & \xrightarrow{\delta_{p,i,j}} & HOM_{\mathbb{C}}\left(U_p^{(j)}, U_{p-1}^{(i+j)}\right) \\ \wr\Vert\downarrow & & \wr\Vert\downarrow \\ H^1(T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}_{p,i,j}} & HOM_{\mathbb{C}}\left(H^{k-p}(\Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}), H^{k-p+1}(\Omega_Y^{p-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i-j})\right) \end{array}$$

Hierbei sind die vertikalen Isomorphismen durch die Isomorphismen in (5.4.1) *und* (5.4.2) *induziert.*

Bemerkung 5.6 Falls N genügend groß ist, so gilt

$$H^1(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N+1}) = 0 \ .$$

Insbesondere erhält man somit in diesem Fall

$$H^1(Z, T_Z) = H^1_0(Z, T_Z) = \bigoplus_{i=0}^{N-2} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+1-i}) \ .$$

Jacobisysteme

Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf Y. Wir setzen, um Fallunterscheidungen zu vermeiden, der Einfachheit halber voraus, daß $n \geq 2$ ist, obwohl sich alles Folgende im Fall der Kurven natürlich entsprechend formulieren läßt. Weiterhin sei für eine natürliche Zahl N ein Schnitt $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$ mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$ gegeben und $f : Z \to Y$ die zyklische Überlagerung bezüglich $\mathcal{L}^N = \mathcal{O}_Y(X)$. Der globale Verschwindungssatz für ganzzahlige Anteile von $\mathbb{Q}$-Divisoren [EV2, (2.8)] liefert in dieser Situation $H^q(Y, \Omega^p_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) = 0$ für $1 \leq i \leq N-1$ und $p + q \neq n$. Somit erhalten wir $H^q(Y, \Omega^p_Y) \xrightarrow{\simeq} H^q(Z, \Omega^p_Z)$ für $p + q \neq n$. Der interessante Anteil der Kohomologie $H^*(Z, \mathbb{C})$ von Z liegt somit im mittleren Bereich $H^n(Z, \mathbb{C})$. Wir werden im folgenden mit Hilfe der Jacobisysteme (siehe Definiton 4.6) sowohl die Summanden

$$H^p(Y, \Omega^{n-p}_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i})$$

der Hodgestruktur $H^n(Z, \mathbb{C})/H^n(Y, \mathbb{C})$ als auch die Summanden

$$H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i})$$

der Kohomologiegruppe $H^1(Y, T_Z)$ interpretieren. Diese Interpretation gestattet es uns die Abbildungen $\widetilde{\delta}_{p,i,j}$ und somit auch $\delta_{p,i,j}$ in Lemma 5.5 zumindest für großes N und gewisse i und j gut zu kontrollieren.

Proposition 5.7 *Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokalfreie Garben auf Y. Es existieren durch die 2. Fundamentalsequenz induzierte Abbildungen*

$$\frac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G})}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G}}} \xrightarrow{\psi_p(\mathcal{G})} H^p(Y, \Omega^{n-p}_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{G}) \textit{ für } p = 0, \ldots, n$$

und

$$\frac{H^0(Y, \mathcal{L}^N \otimes \mathcal{F})}{J_{\mathcal{L}^N \otimes \mathcal{F}}} \xrightarrow{\phi(\mathcal{F})} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{F}) \ ,$$

sodaß das folgende Diagramm für $p = 0, \ldots, n-1$ kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccc} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} H^p(Y, \Omega^{n-p}_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{G}) & \xrightarrow{(*)} & H^{p+1}(Y, \Omega^{n-p-1}_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \phi(\mathcal{F}) \otimes \psi_p(\mathcal{G})} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \psi_{p+1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})} \\ \dfrac{H^0(Y, \mathcal{L}^N \otimes \mathcal{F})}{J_{\mathcal{L}^N \otimes \mathcal{F}}} \otimes_{\mathbb{C}} \dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G})}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G}}} & \xrightarrow{(**)} & \dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+2)} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+2)} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}} \end{array}$$

Hierbei ist die Abbildung $(*)$ durch die Komposition von Cupprodukt und der Kontraktionsabbildung $T_Y\langle -X\rangle \otimes \Omega_Y^{n-p}\langle X\rangle \rightarrow \Omega_Y^{n-p-1}\langle X\rangle$ gegeben. Die Abbildung $(**)$ ist die durch Multiplikation von globalen Schnitten induzierte Abbildung. Die Abbildung $\phi(\mathcal{F})$ ist injektiv.
Unter zusätzlichen Voraussetzungen erhalten wir die folgenden Ergebnisse :

1. *Falls*
$$H^s(Y, \wedge^{n-s}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = 0$$
ist für $s = 1, \ldots, p-1$, so ist $\psi_p(\mathcal{G})$ injektiv.
2. *Falls*
$$H^{s+1}(Y, \wedge^{n-s}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = 0$$
ist für $s = 0, \ldots, p-1$, so ist $\psi_p(\mathcal{G})$ surjektiv.
3. *Falls $H^1(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{F}) = 0$ ist, so ist $\phi(\mathcal{F})$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Aus der dualen Sequenz zur 2. Fundamentalsequenz (4.5.1) erhalten wir für $q \geq 1$ folgende exakte Sequenz von Dachprodukten

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^{q-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N} \longrightarrow \wedge^q\Sigma_Y^\vee \longrightarrow \Omega_Y^q\langle X\rangle \longrightarrow 0 .$$

Für eine lokalfreie Garbe $\mathcal{G}$ auf Y und $p \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq p \leq n$ setzen wir diese Sequenzen zu dem Komplex $(K^\bullet, d_\bullet)$ mit

$$K^i := (\wedge^{n-p+i+1}\Sigma_Y^\vee) \otimes \mathcal{L}^{N(i+1)} \otimes \mathcal{G}$$

für $i \geq 0$ zusammen. Den Komplex $K^\bullet$ kann man ebenso aus dem Koszulkomplex zur Surjektion $\Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Y$ gewinnen. Bis auf die 0-te Stelle ist $K^\bullet$ exakt und es gilt

$$\ker d_0 = \Omega_Y^{n-p}\langle X\rangle \otimes \mathcal{G} .$$

Somit sind $\Omega_Y^{n-p}\langle X\rangle \otimes \mathcal{G}$ und $K^\bullet$ als Komplexe quasiisomorph. Es gilt insbesondere

$$K^p = \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G} .$$

Wir definieren α_p als Komposition der folgenden natürlichen Abbildungen :

$$\begin{array}{ccc}
H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha_p} & H^p(Y, \Omega_Y^{n-p}\langle X\rangle \otimes \mathcal{G}) \\
\| \wr \downarrow & & \uparrow \wr \| \\
\mathbb{H}^p(Y, K^p[-p]) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{H}^p(Y, K^\bullet)
\end{array}$$

Hierbei ist α durch die natürliche Inklusion von Komplexen $K^p[-p] = F^pK^\bullet \hookrightarrow K^\bullet$ induziert. Es gilt

$$\ker \alpha = \mathrm{im}\{\mathbb{H}^{p-1}(Y, K^\bullet/F^pK^\bullet) \xrightarrow{\beta} \mathbb{H}^p(Y, F^pK^\bullet)\} .$$

Insbesondere erhalten wir für die Komposition von β und der durch

$$K^{p-1}[-p+1] \hookrightarrow K^\bullet/F^pK^\bullet$$

definierten Abbildung

$$\mathbb{H}^{p-1}(Y, K^{p-1}[-p+1]) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{H}^{p-1}(Y, K^\bullet/F^pK^\bullet),$$

daß $\mathrm{im}(\beta \cdot \gamma) \subset \ker \alpha$ ist. Die durch α_p auf

$$\frac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G})}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(p+1)} \otimes \mathcal{G}}} \xrightarrow{\simeq} \frac{\mathbb{H}^p(Y, K^p[-p])}{im(\beta \cdot \gamma)}$$

induzierte Abbildung bezeichnen wir als $\psi_p(\mathcal{G})$. Falls $H^s(Y, K^{p-s-1}) = 0$ ist für $s = 1, \ldots, p-1$, so folgt mit Hilfe der 2. Spektralsequenz für die Hyperkohomologie, daß

$$H^0(Y, K^{p-1}) \simeq \mathbb{H}^{p-1}(Y, K^\bullet/F^pK^\bullet)$$

ist. Dies liefert die 1. Behauptung. Falls $H^{s+1}(Y, K^{p-s-1}) = 0$ ist für $s = 0, \ldots, p-1$, so folgt entsprechend, daß

$$\mathbb{H}^p(Y, K^\bullet/F^pK^\bullet) = 0$$

ist. Dies liefert die 2. Behauptung. Die Abbildung $\phi(\mathcal{F})$ ist durch die lange exakte Kohomologiesequenz zur 2. Fundamentalsequenz (4.5.1) induziert. Hieraus folgt unmittelbar die 3. Behauptung. Die Kommutativität des Diagramms (vgl. [Fl, §2]) ergibt sich mit Hilfe der 2. Spektralsequenz für die Hyperkohomologie zu den Komplexen

$$(K^\bullet, d_{K^\bullet}) := \left((\wedge^{n-p+\bullet+1}\Sigma_Y^\vee) \otimes \mathcal{L}^{N(\bullet+1)} \otimes \mathcal{G}, d_\bullet\right),$$

$$(M^\bullet, d_{M^\bullet}) := \left\{\Sigma_Y \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{L}^N \otimes \mathcal{F}\right\} \quad \text{und}$$

$$(N^\bullet, d_{N^\bullet}) := \left((\wedge^{n-p+\bullet}\Sigma_Y^\vee) \otimes \mathcal{L}^{N(\bullet+1)} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, d_\bullet\right).$$

Die durch Kontraktion gegebene Paarung $\Sigma_Y \times \wedge^k\Sigma_Y^\vee \to \wedge^{k-1}\Sigma_Y^\vee$ induziert für

$$E_1^{a,b}(K^\bullet) = H^a(Y, K^b)$$

$$E_1^{a,b}(M^\bullet) = H^a(Y, M^b)$$

$$E_1^{a,b}(N^\bullet) = H^a(Y, N^b)$$

eine Paarung

$$E_r^{a,b}(M^\bullet) \times E_r^{c,d}(K^\bullet) \longrightarrow E_r^{a+c,b+d}(N^\bullet)$$

auf dem r-ten Level der Spektralsequenzen und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_r^{0,p}(K^\bullet) \times E_r^{0,1}(M^\bullet) & \longrightarrow & E_r^{0,p+1}(N^\bullet) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_1^{0,p}(K^\bullet) \times E_1^{0,1}(M^\bullet) & \longrightarrow & E_1^{0,p+1}(N^\bullet) \end{array} .$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar 5.8 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt :*

1. *Falls* $H^s(Y, \Omega_Y^{n-s} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = H^s(Y, \Omega_Y^{n-s-1} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = 0$ *ist für* $s = 1, \ldots, p-1$, *so ist* $\psi_p(\mathcal{G})$ *injektiv.*
2. *Falls* $H^{s+1}(Y, \Omega_Y^{n-s} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = H^{s+1}(Y, \Omega_Y^{n-s-1} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) = 0$ *ist für* $s = 0, \ldots, p-1$, *so ist* $\psi_p(\mathcal{G})$ *surjektiv.*
3. *Falls* $H^1(Y, \mathcal{F}) = H^1(Y, T_Y \otimes \mathcal{F}) = 0$ *ist, so ist* $\phi(\mathcal{F})$ *ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Aus der 1. Fundamentalsequenz erhalten wir die folgende kurze exakte Sequenz von Dachprodukten

$$\Omega_Y^{n-s} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G} \hookrightarrow \Lambda^{n-s}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G} \twoheadrightarrow \Omega_Y^{n-s-1} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G} .$$

Die liefert die exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^r(Y, \Omega_Y^{n-s} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^r(Y, \Lambda^{n-s}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow$$
$$H^r(Y, \Omega_Y^{n-s-1} \otimes \mathcal{L}^{N(p-s)} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow \ldots .$$

Indem wir $r = s$ bzw. $r = s + 1$ setzen, folgt hieraus die 1. und 2. Behauptung. Aus der mit $\mathcal{F}$ tensorierten 1. Fundamentalsequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \Sigma_Y \otimes \mathcal{F} \longrightarrow T_Y \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

ergibt sich die 3. Behauptung. □

Von besonderem Interesse sind für uns die Abbildungen $\phi(\mathcal{F})$ und $\psi_p(\mathcal{G})$, falls $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ gewisse negative Potenzen der invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ sind.

Definition 5.9 Wir bezeichnen die Abbildungen $\psi_p(\mathcal{L}^{-i})$ für $i = 0, \ldots, N-1$ und $\phi(\mathcal{L}^{-k})$ für $k = 0, \ldots, N-2$ mit $\psi_{p,i}$ und ϕ_k.

Um die in in Proposition 5.7 bzw. Korollar 5.8 geforderten Verschwindungsbedingungen für die Abbildungen in Definition 5.9 einfacher handzuhaben, führen wir die beiden Zahlen $r_{Y,\mathcal{L}}$ und $s_{Y,\mathcal{L}}$ ein.

Definition 5.10 Wir definieren die natürlichen Zahlen $r_{Y,\mathcal{L}}$ und $s_{Y,\mathcal{L}}$ durch

$$\begin{aligned} r_{Y,\mathcal{L}} = \min\{l \mid & H^p(Y, \Lambda^{n-p}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{l'}) = 0 \text{ und} \\ & H^p(Y, \Lambda^{n-p+1}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{l'}) = 0 \quad \text{für } l' \geq l \text{ und } p > 0\} \end{aligned}$$

und

$$s_{Y,\mathcal{L}} = \min\{l \mid H^1(Y, T_Y \otimes \mathcal{L}^{-l}) = 0 \text{ für } l' \geq l\} .$$

Wir bemerken, daß die Zahlen $r_{Y,\mathcal{L}}$ und $s_{Y,\mathcal{L}}$ nur von der polarisierten Varietät $(Y, \mathcal{L})$ abhängen.

Korollar 5.11 *Für $N \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, N-1\}$ gilt*

1. *Falls $i \leq N - r_{Y,\mathcal{L}}$ ist, so ist $\psi_{p,i}$ für $p = 0, \dots, n$ ein Isomorphismus.*
2. *Falls $k \geq s_{Y,\mathcal{L}}$ ist, so ist ϕ_k ein Isomorphismus.*

Definition 5.12 Mit ω bezeichnen wir die invertierbare Garbe $\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{N(n+1)}$.

Nun formulieren wir in unserer Situation die verallgemeinerte Macaulay-Dualität nach [Grel, Thm. 2.15]. Hierbei spielt die Garbe ω eine ähnliche Rolle, wie die kanonische Garbe in der Serredualität.

Proposition 5.13 (Macaulay-Dualität) *Sei $\mathcal{E}$ eine lokalfreie Garbe auf Y und $a \in \mathbb{Z}$. Falls die folgenden Verschwindungsbedingungen erfüllt sind*

1. $H^q(Y, \Lambda^{q+1}\Sigma_Y \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a-N(q+1)}) = 0$ *für* $q = 1, \dots, n-1$,

2. $H^q(Y, \Lambda^{q}\Sigma_Y \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a-Nq}) = 0$ *für* $q = 1, \dots, n-1$,

3. $H^q(Y, \Lambda^{q+1}\Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N(q+1)}) = H^q(Y, \Lambda^{q}\Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-Nq}) = 0$
   für $q = 1, \dots, n-1$,

4. $H^0(Y, T_Y \otimes \mathcal{L}^{-N}) = 0$,

so ist

$$\frac{H^0(Y,\omega)}{J_\omega} \simeq \mathbb{C}$$

und die durch Cuprodukt induzierte Paarung

$$\frac{H^0(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a)}{J_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^a}} \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-a} \otimes \omega)}{J_{\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-a}\otimes\omega}} \longrightarrow \frac{H^0(Y,\omega)}{J_\omega} \simeq \mathbb{C}$$

ist nicht degeneriert.

Beweis. Wir bilden den Koszulkomplex zur Surjektion $\Sigma_Y \otimes \mathcal{L}^{-N} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Y$ in der 2. Fundamentalsequenz und tensorieren diesen mit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a$. Dies liefert den Komplex $(K^\bullet, d_\bullet)$ mit

$$K^i = \Lambda^{n-i}\Sigma_Y \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a-N(n-i)}$$

für $i \geq 0$. Bis auf die 0-te Stelle ist $K^\bullet$ exakt und es gilt

$$\ker d_0 = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a \otimes \omega_Y \otimes \omega^{-1} .$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz zu $F^nK^\bullet = K^n[-n] \hookrightarrow K^\bullet \twoheadrightarrow K^\bullet/F^nK^\bullet$ liefert

$$\dots \longrightarrow \mathbb{H}^{n-1}(Y, K^\bullet/F^nK^\bullet) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a) \xrightarrow{\alpha} H^n(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a \otimes \omega_Y \otimes \omega^{-1}) \longrightarrow \mathbb{H}^n(Y, K^\bullet/F^nK^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Aus der 1. Voraussetzung ergibt sich mit Hilfe der Dachproduktsequenzen zur 1. Fundamentalsequenz $H^q(Y, K^{n-1-q}) = 0$ für $q = 1, \ldots, n-1$. Somit ist

$$H^0(Y, \Sigma_Y \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a-N}) \simeq \mathbb{H}^{n-1}(Y, K^\bullet / F^n K^\bullet).$$

Die 2. Voraussetzung liefert entsprechend, daß $H^q(Y, K^{n-q}) = 0$ ist für $q = 1, \ldots, n-1$ und somit ist

$$H^n(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a+N} \otimes \omega_Y \otimes \omega^{-1}) \simeq \mathbb{H}^n(Y, K^\bullet / F^n K^\bullet).$$

Deshalb induziert α den folgenden Isomorphismus

$$\frac{H^0(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a)}{J_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^a}} \xrightarrow{\simeq}$$

$$\ker \left\{ H^n(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a \otimes \omega_Y \otimes \omega^{-1}) \longrightarrow H^n(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{a+N} \otimes \omega_Y \otimes \omega^{-1}) \right\} \quad .$$

Durch Anwendung der Serredualität erhalten wir

$$\frac{H^0(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^a)}{J_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^a}} \xrightarrow{\simeq} \left(\frac{H^0(Y, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-a} \otimes \omega)}{J_{\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-a}\otimes\omega}} \right)^\vee.$$

Indem wir obigen Isomorphismus für $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y$ und $a = 0$ unter Berücksichtigung der 3. und 4. Voraussetzung auswerten, erhalten wir

$$\frac{H^0(Y, \omega)}{J_\omega} \simeq \mathbb{C}.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.14 Wir bemerken, daß die 4. Voraussetzung in Proposition 5.13 keine wirkliche Voraussetzung ist, da nach [Wa, Thm. 1] aus $H^0(Y, T_Y \otimes \mathcal{L}^{-N}) \neq 0$ folgt, daß $(Y, \mathcal{L}^N)$ entweder zu $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ oder zu $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))$ isomorph ist. Insbesondere ist in diesem Fall $N = 1$ bzw. $n = 1$ und dies sind für uns uninteressante Fälle.

Bemerkung 5.15 Sei $\mathcal{E}$ eine festgewählte lokalfreie Garbe auf Y. Falls N genügend groß ist, so sind die Verschwindungsbedingungen in Proposition 5.13 erfüllt.

In der folgenden speziellen Situation läßt sich die Macaulay-Dualität als Hodge-Dualität interpretieren.

Proposition 5.16 *Sei N genügend große natürliche Zahl. Für $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ mit $r_{Y,\mathcal{L}} \leq i \leq N - r_{Y,\mathcal{L}}$ und $r = 0, \ldots, n$ ist das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccc}
H^r(Y, \Omega_Y^{n-r}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-r}(Y, \Omega_Y^r\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+i}) & \xrightarrow{(*)} & H^n(Y, \omega_Y) \simeq \mathbb{C} \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \psi_{r,i}\otimes\psi_{n-r,N-i}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle (***)} \\
\dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(r+1)-i})}{J_{\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{N(r+1)-i}}} \otimes_{\mathbb{C}} \dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N(n-r)+i})}{J_{\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{N(n-r)+i}}} & \xrightarrow{(**)} & \dfrac{H^0(Y, \omega)}{J_\omega} \simeq \mathbb{C}
\end{array}$$

Hierbei ist die Abbildung $(*)$ durch die Komposition von Cupprodukt und der natürlichen Abbildung

$$\Omega_Y^{n-r}\langle X\rangle \otimes \Omega_Y^r\langle X\rangle \to \Omega_Y^n\langle X\rangle \simeq \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N$$

gegeben. Die Abbildung $(**)$ ist durch die Multiplikation von globalen Schnitten induziert. Die Abbildung $(***)$ ist durch die Macaulay-Dualität und Serredualität

$$\frac{H^0(Y,\omega)}{J_\omega} \simeq \left(H^0(Y,\mathcal{O}_Y)\right)^\vee \simeq H^n(Y,\omega_Y)$$

induziert. Die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen und die Paarungen $(*)$ und $(**)$ sind nichtdegeneriert.

Beweis. Aus der Voraussetzung $r_{Y,\mathcal{L}} \le i \le N - r_{Y,\mathcal{L}}$ ergibt sich, daß $\psi_{r,i}$ und $\psi_{n-r,N-i}$ Isomorphismen sind. Da nach der Voraussetzung N genügend groß gewählt ist, ist die Abbildung $(***)$ ebenfalls ein Isomorphismus. Da $(*)$ als Serredualitätspaarung nicht degeneriert ist, folgt, daß auch $(**)$ nicht degeneriert ist. □

Bemerkung 5.17 (Macaulay-Dualität = Hodge-Dualität) Die Paarung $(*)$ in Proposition 5.16 ist die Paarung der Serredualität

$$(H^r(Y,\mathcal{F}))^\vee \simeq H^{n-r}(Y,\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_Y)$$

für die Garbe $\mathcal{F} = \Omega_Y^{n-r}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}$. Die Macaulay-Dualität läßt sich in dieser Situation aber nicht nur als Serredualität, sondern auch folgendermaßen als Hodgedualität interpretieren. Die Galoisgruppe G von Z über Y operiert auf $f_*\Omega_Z^p$ bzw. auf $H^{p+q}(Y,\mathbb{C})$ durch Multiplikation mit ζ^i (vgl. [EV1, Thm. 1.10]). Wir bezeichnen mit $(\ )_i$ die zu ζ^i assoziierte Untergarbe bzw. den zu ζ^i assoziierten Untermodul. Da durch die komplexe Konjugation ζ^i und ζ^{N-i} ineinander überführt werden, gilt entsprechendes für $\left(H^{p+q}(Z,\mathbb{C})\right)_i$ und $\left(H^{p+q}(Z,\mathbb{C})\right)_{N-i}$, somit gilt

$$\overline{(H^q(Z,\Omega_Z^p))_i} = (H^p(Z,\Omega_Z^q))_{N-i}$$

und inbesondere

$$\overline{H^q(Y,\Omega_Y^p\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i})} = H^p(Y,\Omega_Y^q\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+i}).$$

Proposition 5.18 *Sei N eine genügend große positive ganze Zahl. Für $k \ge 0$ ist die folgende Abbildung ein Isomorphismus :*

$$\left(\frac{H^0(Y,\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{Nn+k})}{J_{\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^{Nn+k}}}\right)^\vee \xrightarrow{\simeq} H^1(Y,T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-k}).$$

Beweis. Dies folgt durch eine entsprechende Konstruktion wie in Proposition 5.13 . Wir setzen $\mathcal{E} = \omega_Y^2$ und $a = Nn + k$. In der Notation des Beweises der Proposition 5.13 ist der Komplex $F^1K^\bullet[1]$ bis auf die 0-te Stelle exakt und es ist

$$\ker\left\{(F^1K^\bullet[1])_0 \longrightarrow (F^1K^\bullet[1])_1\right\} = \Omega_Y^1\langle X\rangle \otimes \omega_Y \otimes \mathcal{L}^k.$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz zu

$$K^{n-1}[-n+1] \hookrightarrow F^1K^\bullet[1] \twoheadrightarrow F^1K^\bullet[1]/K^{n-1}[-n+1]$$

liefert

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{H}^{n-2}(Y, F^1K^\bullet[1]/K^{n-1}[-n+1]) \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{Nn+k}) \xrightarrow{\beta}$$

$$H^{n-1}(Y, \Omega_Y^1\langle X\rangle \otimes \omega_Y \otimes \mathcal{L}^k) \to \mathbb{H}^{n-1}(Y, F^1K^\bullet[1]/K^{n-1}[-n+1]) \to \ldots$$

Da wir N genügend groß gewählt haben, ergibt sich mit den Dachproduktsequenzen zur 1. Fundamentalsequenz $H^q(Y, (F^1K^\bullet[1])_{n-2-q}) = H^q(Y, K^{n-1-q}) = 0$ für $q = 1, \ldots, n-2$. Somit ist

$$H^0(Y, \Sigma_Y \otimes \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{N(n-1)+k}) \simeq H^{n-2}(Y, F^1K^\bullet[1]/K^{n-1}[-n+1]).$$

Nun erhalten wir entsprechend, daß $H^q(Y, (F^1K^\bullet[1])_{n-1-q}) = H^q(Y, K^{n-q}) = 0$ ist für $q = 1, \ldots, n-1$. Deshalb induziert β den folgenden Isomorphismus

$$\frac{H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{Nn+k})}{J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{Nn+k}}} \xrightarrow{\simeq} H^{n-1}(Y, \Omega_Y^1\langle X\rangle \otimes \omega_Y \otimes \mathcal{L}^k).$$

Durch Anwendung der Serredualität

$$\left(H^{n-1}(Y, \Omega_Y^1\langle X\rangle \otimes \omega_Y \otimes \mathcal{L}^k)\right)^\vee \simeq H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-k})$$

erhalten wir die Behauptung. □

6 Das $I_{(1,1)}$ - Kriterium

Es seien Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sehr ample invertierbare Garben auf Y. Wir benutzen die folgende Notation :

$$V = H^0(Y, \mathcal{F}) \text{ mit } r_1 = \dim V \ , \ W = H^0(Y, \mathcal{G}) \text{ mit } r_2 = \dim W \ ,$$

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V) \ , \ \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(W) \text{ und } \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \ .$$

Mit p_1 und p_2 bezeichnen wir die natürlichen Projektionen $\mathbb{P} \to \mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P} \to \mathbb{P}_2$. Die durch die Linearsysteme $| \mathcal{F} |$ und $| \mathcal{G} |$ induzierten Morphismen bezeichnen wir mit $\varphi_{|\mathcal{F}|} : Y \to \mathbb{P}_1$ und $\varphi_{|\mathcal{G}|} : Y \to \mathbb{P}_2$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "i"'] & Y \times Y \arrow[d, "\varphi_{|\mathcal{F}|} \times \varphi_{|\mathcal{G}|}"] \\ & \mathbb{P}. \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet Δ die Diagonaleinbettung und i die durch die Komposition von $\varphi_{|\mathcal{F}|} \times \varphi_{|\mathcal{G}|}$ und Δ gegebene Einbettung. Für $a, b \geq 0$ bezeichnen wir den Kern der natürlichen Abbildung $S^aV \otimes_{\mathbb{C}} S^bW \to H^0(Y, \mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b)$ mit $I_{(a,b)}$ und die invertierbare Garbe $p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(b)$ mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a,b)$. Es existieren natürliche Isomorphismen $S^{k_1}V \simeq H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_1))$ und $S^{k_2}W \simeq H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k_2))$. Deshalb identifizieren wir im folgenden $S^{k_1}V$ mit $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_1))$ und $S^{k_2}W$ mit $H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k_2))$. Wir geben nun eine hinreichende Bedingung dafür an, daß Y aufgefaßt als Untervarietät von $\mathbb{P}$ schematheoretischer Schnitt der Divisoren $D \in I_{(1,1)}$ ist. Hierbei sei $\mathcal{J}_Y$ die Idealgarbe von Y in $\mathbb{P}$.

Proposition 6.1 **($I_{(1,1)}$ - Kriterium)** *Falls $\mathcal{F}^{-n} \otimes \mathcal{G} \otimes \omega_Y^{-1}$ nef und big ist, dann ist die natürliche Abbildung*

$$H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{J}_Y(1,1)$$

surjektiv.

Bemerkung 6.2 Die uns interessierende Anwendung der Proposition ist die folgende : falls $\mathcal{G}$ *genügend ample* ist im Vergleich zu $\mathcal{F}$, so kann man bei Vorgabe von V und W und der Abbildung $V \otimes_{\mathbb{C}} W \to H^0(Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ die Einbettung $i : Y \to \mathbb{P}$ rekonstruieren. Denn der Kern der Multiplikationsabbildung $V \otimes_{\mathbb{C}} W \to H^0(Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ ist $I_{(1,1)} = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1))$. Somit ist die durch die Auswertungsabbildung induzierte Abbildung $I_{(1,1)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1,-1) \twoheadrightarrow \mathcal{J}_Y$ surjektiv und wir können die Idealgarbe $\mathcal{J}_Y$ von Y und deshalb auch die Einbettung $i : Y \to \mathbb{P}$ rekonstruieren.

Bemerkung 6.3 Sei $\mathcal{L}$ eine sehr ample invertierbare Garbe auf Y und

$$\varphi_{|\mathcal{L}|} : Y \longrightarrow \mathbb{P}(U)$$

mit $U = H^0(Y,\mathcal{L})$ die zugehörige Einbettung. Bezüglich dieser Einbettung ist $\varphi_{|\mathcal{L}|}(Y)$ ein schematheoretischer Schnitt von Quadriken in $\mathbb{P}(U)$, falls die natürliche Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}(U),\mathcal{J}_Y(2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \twoheadrightarrow \mathcal{J}_Y(2) \tag{6.3.1}$$

surjektiv ist. Andererseits ist das homogene Ideal von Y bezüglich dieser Einbettung $\varphi_{|\mathcal{L}|}$ von Quadriken erzeugt, falls die natürliche Abbildung

$$I_2 \otimes_{\mathbb{C}} S^k U \twoheadrightarrow I_{k+2} \quad \text{für } k \geq 1 \tag{6.3.2}$$

surjektiv ist. Hierbei bezeichnet I_k für $k \geq 2$ den Kern der natürlichen Abbildung

$$S^k U \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{L}^k)\ .$$

Hierbei ist $I_2 = H^0(\mathbb{P}(U),\mathcal{J}_Y(2))$ die Menge der Quadriken in $\mathbb{P}(U)$, die das Bild von Y enthalten. Aus der Bedingung (6.3.2) folgt (6.3.1), d.h. es gilt die Implikation

Homogenes Ideal von $\varphi_{\vert\mathcal{L}\vert}(Y)$ von Quadriken erzeugt	$\Longrightarrow$	$\varphi_{\vert\mathcal{L}\vert}(Y)$ ist schematheoretischer von Quadriken .

BEWEIS DER IMPLIKATION. Da die Garbe $\mathcal{L}$ ample ist, können wir ein $k > 2$ wählen, sodaß die natürliche Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}(U),\mathcal{J}_Y(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \longrightarrow \mathcal{J}_Y(k)$$

surjektiv ist. Das folgende natürliche Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I_2 \otimes_{\mathbb{C}} S^{k-2} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \arrow[r, "(*)"] \arrow[dd] & I_k \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \arrow[d, equal] \\
& H^0(\mathbb{P}(U),\mathcal{J}_Y(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \arrow[d, "(**)"] \\
H^0(\mathbb{P}(U),\mathcal{J}_Y(2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(k-2) \arrow[r, "(***)"] & \mathcal{J}_Y(k)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Falls das homogenes Ideal von $\varphi_{|\mathcal{L}|}(Y)$ von Quadriken erzeugt ist, ist die Abbildung $(*)$ surjektiv. Es folgt aus der Surjektivität von $(*)$ und $(**)$ die der Abbildung $(***)$ und somit folgt die Behauptung, indem wir die Abbildung $(***)$ mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-k+2)$ tensorieren. □

Die Umkehrung dieser Implikation ist falsch. Die Angabe eines Gegenbeispiels ist zumindest für Kurven ein nicht-triviales Problem, denn nach [EEK, Thm. 2.1] ist die Umkehrung für glatte irreduzible Kurven im $\mathbb{P}^r$ mit $r = 2,3,4$ richtig. In [EEK, Thm. 5.1] wird gezeigt, daß eine allgemeine elliptische Oktik im $\mathbb{P}^5$ schematheoretischer Schnitt von 5 Quadriken im $\mathbb{P}^5$ ist, aber das homogene Ideal dieser Oktik nicht von

Quadriken erzeugt ist. In [Mu2] entwickelte Mumford Methoden um das Problem der Erzeugtheit des homogenen Ideals durch Quadriken anzugehen. Unser erster Versuch war es das Mumford'sche Kriterium [Mu2, Thm. 5] auf das Produkt zweier projektiver Räume zu verallgemeinern um Erzeugtheit des homogenen Ideals zu folgern. Das von uns hierbei erzielte Kriterium für zwei genügend ample invertierbare Garben läßt sich aber nicht so knapp formulieren wie Proposition 6.1 . Deshalb verzichten wir auf dessen Formulierung, da uns ohnehin das schwächere $I_{(1,1)}$-Kriterium genügt. Bei den Mumford'schen Kriterien in [Mu2] spielt implizit der vom ihm in [Mu1] eingeführte Begriff der m-Regularität einer kohärenten Garbe auf dem projektiven Raum eine wichtige Rolle. So ist es zu verstehen, daß im Beweis der Proposition 6.1 die 0-Regularität gewisser Garben benötigt wird. Eine kohärente Garbe $\mathcal{E}$ auf $\mathbb{P}^r$ heißt m-regulär, falls

$$H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{E}(m-i)) = 0 \quad \text{für } i > 0$$

ist. Nach [Mu1, lecture 14] gilt für eine m-reguläre Garbe $\mathcal{E}$ auf $\mathbb{P}^r$, daß $\mathcal{E}$ $(m+1)$-regulär und die natürliche Multiplikationsabbildung

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{E}(m)) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{E}(m+1))$$

surjektiv ist.

Zunächst folgen nun einige Hilfslemmas für den Beweis der Proposition 6.1 .

Lemma 6.4 *Es gilt* $R^i p_{j*} \mathcal{J}_Y(a,b) = 0$ *für* $a, b > 0$, $i > 0$ *und* $j = 1, 2$.

BEWEIS. Die durch die natürliche Surjektion $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b$ gegebene Abbildung

$$p_{1*}\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a,b) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(a) \otimes_{\mathbb{C}} S^b W \rightarrow \mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b \tag{6.4.1}$$

faktorisiert über die natürlichen Surjektionen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a) \otimes_{\mathbb{C}} S^b W \longrightarrow \mathcal{F}^a \otimes_{\mathbb{C}} S^b W \quad \text{und}$$

$$\mathcal{F}^a \otimes_{\mathbb{C}} S^b W \longrightarrow \mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b \ .$$

Also ist (6.4.1) surjektiv. Zunächst erhalten wir die Behauptung für $i = 1$ und $j = 1$ aus

$$R^1 p_{1*}\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a,b) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(a) \otimes_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(b)) = 0 \ .$$

Da die Einschränkung von p_1 auf die Diagonale einen Isomorphismus liefert, ist $R^i p_{1*}(\mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b) = 0$ für $i > 1$. Für $i > 1$ und $j = 1$ folgt die Behauptung aus

$$R^i p_{1*}(\mathcal{F}^a \otimes \mathcal{G}^b) = 0 \text{ und } R^i p_{1*}(p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(b)) = 0 \ .$$

Schließlich gilt sie aus Symmetriegründen für $j = 2$. □

Lemma 6.5 *Falls* $\mathcal{F}^{-n} \otimes \mathcal{G} \otimes \omega_Y^{-1}$ *nef und big ist, dann ist die natürliche Abbildung*

$$H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_1} V \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(k_1+1, 1))$$

surjektiv für $k_1 \geq 0$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß die Garbe $p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)$ 0-regulär ist, d.h. es gilt $H^i(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)(-i)) = 0$ für $0 < i \leq n$. Nach Lemma 6.4 ist die folgende Sequenz exakt

$$0 \longrightarrow p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \otimes_{\mathbb{C}} W \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow 0 .$$

So erhalten wir für $i > 0$ die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \ldots &\to H^{i-1}(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1-i)) \otimes_{\mathbb{C}} W \to H^{i-1}(Y, \mathcal{F}^{1-i} \otimes \mathcal{G}) \\ &\to H^i(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)(-i)) \to H^i(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1-i)) \otimes_{\mathbb{C}} W \to \ldots \quad . \end{aligned}$$

Da $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \otimes_{\mathbb{C}} W \xrightarrow{\simeq} H^0(Y, \mathcal{G})$ ein Isomorphismus und $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ ist, so folgt $H^1(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)(-1)) = 0$.
Nun wenden wir uns dem Fall $i > 1$ zu. Da $\mathcal{F}^{-n} \otimes \mathcal{G} \otimes \omega_Y^{-1}$ nef und big ist, ist auch $\mathcal{F}^{1-i} \otimes \mathcal{G} \otimes \omega^{-1}$ nef und big für $i \leq n+1$. Deshalb gilt nach dem Verschwindungssatz von Kawamata-Viehweg [Vie2] und [Ka2] $H^{i-1}(Y, \mathcal{F}^{1-i} \otimes \mathcal{G}) = 0$ für $i > 1$. Weil auch $H^i(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1-i)) = 0$ ist für $i > 1$, folgt die 0-Regularität der Garbe $p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)$. Nach Bemerkung 6.3 erhalten wir aus der 0-Regularität der Garbe $p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)$ nun für $l > 0$ die Surjektivität der Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(l,1)) \otimes_{\mathbb{C}} V \to H^0(\mathbf{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(l+1,1)) . \tag{6.5.1}$$

Aus der Surjektivität der obigen Abbildung folgt nun durch Induktion über k_1, daß die Abbildung

$$H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes k_1} \xrightarrow{(*)} H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1))$$

für $k_1 > 0$ surjektiv ist. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes k_1} \arrow[r, "(*)"] \arrow[d] & H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)) \\ H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_1}V \arrow[ur, "(**)"'] & \end{tikzcd}$$

folgt, da die Abbildung $(*)$ surjektiv ist, die Surjektivität von $(**)$ und somit die Behauptung. □

Zur Wahl von k_0. Wir wählen nun ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodaß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind :

1. $k_0 \geq \min\{k \mid \mathcal{J}_Y(k', k'') \text{ ist erzeugt für } k', k'' \geq k\}$,
2. die Abbildung $S^k H^0(Y, \mathcal{F}) \to H^0(Y, \mathcal{F}^k)$ ist surjektiv für $k \geq k_0$,
3. $\mathcal{F}^{k_0+1} \otimes \mathcal{G}^{-n} \otimes \omega_Y^{-1}$ ist ample .

Lemma 6.6 *Für $k_1 > k_0$ gilt, daß die natürliche Abbildung*

$$H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_2}W \to H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,k_2+1))$$

surjektiv ist für $k_2 \geq 0$.

BEWEIS. Der Beweis verläuft wie in Lemma 6.4. Wir zeigen, daß $p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)$ eine 0-reguläre Garbe ist, d.h. es gilt $H^i(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)(-i)) = 0$ für $i > 0$. Da nach Lemma 6.4 gilt $R^1p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1) = 0$, erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1) \longrightarrow S^{k_1+1}V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \longrightarrow \mathcal{F}^{k_1+1} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow .$$

Dies liefert für $i > 0$ die folgende exakte Sequenz

$$\begin{aligned} &\ldots \to S^{k_1+1}V \otimes_{\mathbb{C}} H^{i-1}(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1-i)) \to H^{i-1}(Y, \mathcal{F}^{k_1+1} \otimes \mathcal{G}^{1-i}) \\ &\to H^i(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)(-i)) \to S^{k_1+1}V \otimes_{\mathbb{C}} H^i(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1-i)) \to \ldots \quad . \end{aligned}$$

Da aufgrund der Wahl von k_0 die natürliche Abbildung

$$S^{k_1+1}V \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}) \to H^0(Y, \mathcal{F}^{k_1+1})$$

surjektiv ist und $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ ist, erhalten wir

$$H^1(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)(-1)) = 0.$$

Da $\mathcal{F}^{k_1+1} \otimes \mathcal{G}^{-n} \otimes \omega_Y^{-1}$ ample ist, gilt nach dem Verschwindungssatz von Kodaira $H^{i-1}(Y, \mathcal{F}^{k_1+1} \otimes \mathcal{G}^{1-i}) = 0$ für $1 < i \leq n$. Weil auch $H^i(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1-i)) = 0$ ist für $i > 1$, folgt die 0-Regularität der Garbe $p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)$, also ist die folgende Abbildung für $l > 0$ surjektiv

$$H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,l)) \otimes_{\mathbb{C}} W \to H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,l+1) \quad .$$

Wie in Lemma 6.5 folgt nun die Behauptung. □

BEWEIS DER PROPOSITION 6.1. Aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(k_1+1,k_2+1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2) & \longrightarrow & \mathcal{J}_Y(k_1+1,k_2+1) \end{array}$$

folgt, daß es aufgrund der Wahl von k_0 genügt für zwei natürliche Zahlen k_1 und k_2 mit $k_1, k_2 \geq k_0$ die Surjektivität der folgenden Abbildung zu zeigen

$$H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(k_1+1,k_2+1)) .$$

In dem folgenden natürlichen kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2)) \arrow[r, "(***)"] \arrow[d, "\wr\|"'] & H^0(\mathbb{P}, \mathcal{J}_Y(k_1+1, k_2+1)) \\
H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2)) \arrow[d, "\wr\|"'] & \\
H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_1}V \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_2}W \arrow[d, "(*)"'] & \\
H^0(\mathbb{P}_1, p_{1*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_2}W \arrow[d, "\wr\|"'] & \\
H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1,1)) \otimes_{\mathbb{C}} S^{k_2}W \arrow[r, "(**)"] & H^0(\mathbb{P}_2, p_{2*}\mathcal{J}_Y(k_1+1, k_2+1)) \arrow[uuuu, "\wr\|"']
\end{tikzcd}$$

ist nach Lemma 6.5 die Abbildung $(*)$ und nach Lemma 6.6 die Abbildung $(**)$ surjektiv. Durch Anwendung der Leray-Spektralsequenz sind die anderen vertikalen Abbildungen nach Lemma 6.4 bzw. nach der Eigenschaft $R^i p_{1*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k_1,k_2) = 0$ für $i > 0$ Isomorphismen. Somit erhalten wir die Surjektivität von $(***)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

7 Symmetrizer

Für $\mathbb{C}$-Vektorräume U, V, W und eine lineare Abbildung

$$q : U \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow W$$

bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$B(q) = \{T \in HOM(U,V) \mid q(u_1 \otimes T(u_2)) = q(u_2 \otimes T(u_1)) \text{ für alle } u_1, u_2 \in U\}$$

als den Symmetrizervektorraum der Abbildung q. Die natürliche lineare Abbildung $s(q)$ mit

$$\begin{array}{rccc} s(q): & U \otimes_{\mathbb{C}} B(q) & \longrightarrow & V \\ & \sum\limits_i u_i \otimes T_i & \longmapsto & \sum\limits_i T(u_i) \end{array}$$

bezeichnen wir als die Symmetrizerabbildung von q oder kurz als den Symmetrizer von q. Wir werden im folgenden hierzu auch sagen, daß die Abbildung $s(q)$ durch Symmetrizerbildung aus q entsteht (siehe [Do1]).

Bemerkung 7.1 Zur Illustration geben wir nun ein einfaches Beispiel einer Symmetrizerbildung an. Seien $\mathcal{F}$ eine lokalfreie invertierbare Garbe und $\mathcal{G}$ eine lokalfreie Garbe auf einer projektiven Varietät Y. Wir wollen den Symmetrizer zu der Multiplikationsabbildung

$$q : H^0(Y,\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

bilden. Es gilt das folgende Resultat.

> Falls $\mathcal{F}$ von globalen Schnitten erzeugt ist und $H^1(Y,\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) = 0$ ist, folgt, daß die natürliche Abbildung
>
> $$H^0(Y,\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{\phi} \mathrm{HOM}(H^0(Y,\mathcal{F}), H^0(Y,\mathcal{G}))$$
>
> mit $\phi(s)(u) = s \cdot u$ für $s \in H^0(Y,\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G})$ und $u \in H^0(Y,\mathcal{F})$ einen Isomorphismus zwischen $H^0(Y,\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G})$ und $B(q)$ induziert. Die Symmetrizerabbildung
>
> $$s(q) : H^0(Y,\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y,\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{G})$$
>
> ist durch Multiplikation von globalen Schnitten gegeben.

BEWEIS. Wir bilden den Koszulkomplex zu der nach Voraussetzung surjektiven Auswertungsabbildung

$$H^0(Y,\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

bis zur zweiten Stufe

$$\wedge^2 H^0(Y,\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{-2} \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0\,.$$

Diese Sequenz ist rechts und in der Mitte exakt. Nun dualisieren wir diese Sequenz, tensorieren mit $\mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}$ und wenden den Funktor der globalen Schnitte an, dies liefert

$$H^0(Y, \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \hookrightarrow H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{G}) \xrightarrow{\phi} \wedge^2 H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}). \quad (7.1.1)$$

Den Kern der Auswertungsabbildung $H^0(Y, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{-1} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$. Aus den beiden exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{K}^\vee \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^\vee \longrightarrow \wedge^2 H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^2 \longrightarrow \wedge^2 \mathcal{K}^\vee \longrightarrow 0$$

erhalten wir zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow$$

$$H^0(Y, \mathcal{K}^\vee \otimes \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow \dots$$

und

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{K}^\vee \otimes \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow \wedge^2 H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \longrightarrow \dots$$

Da $H^1(Y, \mathcal{F}^{-1} \otimes \mathcal{G}) = 0$ ist, folgt die Exaktheit in der Mitte der Sequenz (7.1.1). Da die Abbildung ϕ in der Sequenz (7.1.1) für

$$T \in H^0(Y, \mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{G}) \text{ und } u_1, u_2 \in H^0(Y, \mathcal{F})$$

gegeben ist durch

$$\phi(T)(u_1 \wedge u_2) = u_1 \cdot T(u_2) - u_2 \cdot T(u_1) \ ,$$

erhalten wir die Behauptung. □

Bemerkung 7.2 Man sieht in Bemerkung (7.1), daß bei der Identifikation der Symmetrizervektorräume die Exaktheit eines gewissen Koszulkomplexes eine Rolle spielt. Wir werden im folgenden mit diesem Standpunkt arbeiten. Nun formulieren wir ein verallgemeinertes Symmetrizerlemma.

Sei Y eine glatte projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf Y.

Proposition 7.3 (Green's Verallgemeinertes Symmetrizerlemma) *Sei $\mathcal{E}$ eine lokalfreie Garbe auf Y und $\mathcal{M}$ eine lokalfreie von globalen Schnitten erzeugte invertierbare Garbe auf Y. Falls N genügend groß ist, so ist die folgende durch den Koszulkomplex zu der Auswertungsabbildung*

$$H^0(Y, \mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{M}$$

gegebene Sequenz

$$\begin{aligned} &\wedge^2 H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y,\mathcal{M}^{-2}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\mathcal{M}^{-2}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} \longrightarrow \\ &H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y,\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} \longrightarrow \frac{H^0(Y,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

in der Mitte und rechts exakt.

Beweis. Dies ist im wesentlichen die Aussage von [Grel, Thm. 2.21]. Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir einen Beweis an. Wir bilden den Koszulkomplex zu der nach Voraussetzung surjektiven Auswertungsabbildung

$$H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \tag{7.3.2}$$

bis zur zweiten Stufe

$$\wedge^2 H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{-2} \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0\ . \tag{7.3.3}$$

Diese Sequenz (7.3.3) ist auf den beiden mittleren Termen exakt. Mit $\mathcal{K}$ bezeichnen wir den Kern der Auswertungsabbildung (7.3.2). Indem wir die Sequenz (7.3.3) mit $\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega$ tensorieren erhalten wir den Komplex

$$\begin{aligned} &\wedge^2 H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y,\mathcal{M}^{-2}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \longrightarrow \\ &H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y,\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)\ . \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Falls N genügend groß ist, gilt

$$H^0(Y,\mathcal{K}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) = 0$$

und

$$H^0(Y,\mathcal{K}^2\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) = 0\ .$$

Somit liefert in diesem Fall (7.3.4) die folgende exakte Sequenz von Kohomologiegruppen auf Y

$$\begin{aligned} &\wedge^2 H^0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{M}^{-2}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \longrightarrow \\ &H^0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \longrightarrow 0\ . \end{aligned}$$

Aus dem durch (7.3.2) und die 2. Fundamentalsequenz (4.5.1) induzierten natürlichen kommutativen Diagramm von Kohomologiegruppen auf Y

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(\Sigma_Y\otimes\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N-1}\otimes\omega) \arrow[r, "(*)"] \arrow[d] & H^0(\Sigma_Y\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N-1}\otimes\omega) \arrow[d] \\ H^0(\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \arrow[r] & H^0(\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega) \end{tikzcd}$$

folgt, da für N genügend groß die Abbildung $(*)$ surjektiv ist, daß die folgende natürliche Abbildung

$$H^0(Y, \mathcal{M}) \otimes J_{\mathcal{M}^{-1} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-N} \otimes \omega} \longrightarrow J_{\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-N} \otimes \omega}$$

surjektiv ist. Hieraus ergibt sich die Exaktheit der Sequenz (7.3.1) auf der rechten Seite. In dieser Situation gilt nach [Grel, Lemma 2.29] auch die Exaktheit in der Mitte ohne weitere Voraussetzungen. Dies liefert die Behauptung. □

Nun geben wir das im Beweis des Variationalen Torelli-Theorems (9.1) benötigte Symmetrizerresultat an. Wir erinnern an dieser Stelle, daß die Zahl $r_{Y,\mathcal{L}}$ definiert ist als

$$\min\left\{ l \mid H^p(Y, \wedge^{n-p}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{l'}) = H^{p+1}(Y, \wedge^{n-p}\Sigma_Y^\vee \otimes \mathcal{L}^{l'}) = 0 \text{ für } l' \geq l \text{ und } p > 0 \right\}.$$

Proposition 7.4 *Sei k eine natürliche Zahl , sodaß die folgenden Eigenschaften erfüllt für $j \in \{0,1\}$ sind :*

1. *Für k gilt $k \geq r_{Y,\mathcal{L}}$.*
2. *Die Garbe $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^k$ ist von globalen Schnitten erzeugt.*
3. *$H^q(Y, \wedge^q \Sigma_Y \otimes \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-k-j}) = 0$ für $q = 1, \ldots, n-1$.*
4. *$H^0(Y, \Sigma_Y \otimes_Y \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-k-j}) = 0$.*

Sei N eine genügend große positive ganze Zahl und $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$ ein Schnitt mit glattem reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$. Wir setzen $i = N - k$. Für die natürliche durch Cupprodukt und Kontraktion gegebene Abbildung

$$H^0(Y, \Omega_Y^n\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) \xrightarrow{\delta} H^1(Y, \Omega_Y^{n-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i-j})$$

gilt dann

1. *Der Symmetrizervektoraum $B(\delta)$ ist kanonisch isomorph zu*

$$H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{i-j})$$

und die Symmetrizerabbildung $\delta_1 = s(\delta)$ ist

$$H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{i-j}) \xrightarrow{\delta_1} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}).$$

2. *Der Symmetrizervektorraum $B(\delta_1)$ ist kanonisch isomorph zu*

$$H^0(Y, \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{2i-N-j})$$

und die Symmetrizerabbildung $\delta_2 = s(\delta_1)$ ist

$$H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{2i-N-j}) \xrightarrow{\delta_2} H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{i-j})$$

Hierbei sind die beiden Symmetrizerabbildungen δ_1 und δ_2 durch Multiplikation von globalen Schnitten gegeben, wobei bei δ_1 noch mit der durch die 2. Fundamentalsequenz (4.5.1) *induzierten Abbildung*

$$H^0(Y,\mathcal{L}^{N-j}) \longrightarrow H^1(Y,T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j})$$

komponiert wird.

Bemerkung 7.5 In Proposition 7.4 entspricht die Abbildung δ der Abbildung $\widetilde{\delta}_{n,j,i}$ in Lemma 5.5. Diese Abbildung $\widetilde{\delta}_{n,j,i}$ ist der Ausgangspunkt für unseren Beweis des Variationalen Torelli-Theorems 9.1.

Beweis. Um die 1. Behauptung zu beweisen, müssen wir die Exaktheit links und in der Mitte der natürlichen Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(Y,\omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{i-j}) &\longrightarrow H^0(Y,\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y,T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) \\ &\xrightarrow{\psi} \wedge^2 H^0(Y,\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y,\Omega_Y^{n-1}\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-i-j}) \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

zeigen. Da nach der 4. Voraussetzung $H^0(Y,\Sigma_Y \otimes \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-k-j}) = 0$ ist, gilt

$$J_{\omega^{-1}\otimes\mathcal{L}^{i-j}} = 0 \ .$$

Da N genügend groß ist, genügt es unter Anwendung von Korollar 5.11 die Exaktheit links und in der Mitte der Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(Y,\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^N) &\longrightarrow H^0(Y,\mathcal{M})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y,T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) \\ &\longrightarrow \wedge^2 H^0(Y,\mathcal{M})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y,\mathcal{M}^2 \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\mathcal{M}^2\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^N}} \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

zu zeigen, wobei wir

$$\mathcal{M} = \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i} \text{ und } \mathcal{E} = \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-N+i-j}$$

gesetzt haben und $J_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^N} = 0$ ist. Da N genügend groß ist und die 3. Voraussetzung erfüllt ist, gilt nach Proposition 5.13 die Macaulay-Dualität für $H^0(Y,\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^N)$. Indem wir die Proposition 5.16 und 5.18 anwenden, erhalten wir, daß die Sequenz (7.5.2) dual zu der folgenden Sequenz

$$\begin{aligned} \wedge^2 H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y,\mathcal{M}^{-2} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-N} \otimes \omega)}{J_{\mathcal{M}^{-2}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} &\longrightarrow \\ H^0(Y,\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{C}} \frac{H^0(Y,\mathcal{M}^{-1} \otimes \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-N} \otimes \omega)}{J_{\mathcal{M}^{-1}\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} \longrightarrow \frac{H^0(Y,\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}^{-N} \otimes \omega)}{J_{\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}} &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

ist. Die Exaktheit der Sequenz (7.5.3) in der Mitte und rechts folgt aus Proposition 7.3, da N genügend groß gewählt ist und die 2. Voraussetzung gilt. Hieraus folgt die 1. Behauptung. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß wir in der Voraussetzung zuerst k

gewählt haben und in Abhängigkeit dieser Wahl ein genügend großes N wählen. In diesem Sinne ist

$$\mathcal{M} = \omega_Y \otimes \mathcal{L}^k \text{ und } \mathcal{E} = \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-k-j}$$

von Wahl von N unabhängig und deshalb können wir die benötigten Verschwindungen in Proposition 7.3 erreichen. Wie im Beweis der 1. Behauptung genügt es für die Exaktheit links und in der Mitte der Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{2i-N-j}) \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{i-j})$$
$$\longrightarrow \wedge^2 H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y, T_Y\langle X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) \qquad (7.5.4)$$

die Exaktheit der Macaulay-dualen Sequenz zu zeigen. Da wir nach der 2. Voraussetzung einen globalen Schnitt ungleich Null für $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^k$ finden, folgt aus der 4. Voraussetzung

$$H^0(Y, \Sigma_Y \otimes \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{-2k-j}) = 0 .$$

Also ist $J_{\omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{2i-N-j}} = 0$. Da N genügend groß ist, genügt es wieder die Exaktheit links und in der Mitte der Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^N) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{M})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^N)$$
$$\longrightarrow \wedge^2 H^0(Y, \mathcal{M})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle \otimes \mathcal{L}^{-j}) \qquad (7.5.5)$$

zu zeigen, wobei wir in diesem Fall

$$\mathcal{M} = \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-i} \text{ und } \mathcal{E} = \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^{2i-2N-j}$$

gesetzt haben. Da N genügend groß ist, können wir die Macaulay-Dualität in Proposition 5.13 auf die Sequenz (7.5.5) anwenden, und erhalten wieder unter Berücksichtigung der Propositionen 5.16 und 5.18, daß die Sequenz (7.5.5) auch in diesem Fall dual zu der Sequenz (7.5.3) ist. Die Exaktheit der Sequenz (7.5.3) in der Mitte und rechts folgt in diesem Fall wieder aus Proposition 7.3, da N genügend groß gewählt ist und die 2. Voraussetzung gilt. Hieraus folgt die 2. Behauptung. □

Bemerkung 7.6 Die etwas technischen Voraussetzungen in Proposition 7.4 stammen daher, daß wir einerseits sowohl k als auch N genügend groß zu wählen haben. Es darf aber andererseits k im Vergleich zu N nicht zu groß werden. Deshalb sind die Voraussetzungen in Proposition 7.4 so zu interpretieren, daß zunächst k genügend groß gewählt wird und dann erst N.

8 Infinitesimale Torelliprobleme

Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. Wir betrachten nun eine Klasse von Überlagerungen der Varietät Y, die die zyklischen Überlagerungen umfasst. Hierbei benutzen wir die Notation aus dem Abschnitt über die Varietät $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}^{-1})$ auf Seite 28. Auch wenn nach [CDT] die Infinitesimale Torelli-Eigenschaft zum Beweis der Generischen Torelli-Eigenschaft nicht mehr nötig ist, geben wir im folgenden einen kurzen Beweis der den Methoden der anderen Ergebnisse angepasst ist.

Definition 8.1 Wir bezeichnen eine glatte, projektive Varietät Z als eine einfache Überlagerung vom Grad N über Y bezüglich der invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$, falls ein endlicher, surjektiver Morphismus $f : Z \longrightarrow Y$ vom Grad N und eine Einbettung $i_Z : Z \hookrightarrow L$ existiert mit der Eigenschaft $f = \pi \cdot i_Z$.

Lemma 8.2 *Sei Z eine glatte, projektive Varietät. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Varietät Z ist eine einfache Überlagerung vom Grad N über Y bezüglich $\mathcal{L}$.*
2. *Die Varietät Z ist isomorph zu der Nullstellenmenge eines Schnittes in*

$$H^0(\overline{L}, \mathcal{O}_{\overline{L}}(N) \otimes \overline{\pi}^*\mathcal{L}^N) \ .$$

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.10. □

Bemerkung 8.3 Die Bezeichnung *einfach* für die Varietäten in Definition 8.1 rührt daher, daß eine solche Varietät Z mit $i_Z : Z \hookrightarrow L$ sich als

$$Z = \boldsymbol{Spec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E})$$

für eine lokalfreie $\mathcal{O}_Y$-Algebra $\mathcal{E}$ schreiben läßt, wobei die Garbe $\mathcal{E}$ eine besonders *einfache* $\mathcal{O}_Y$-Algebrastruktur besitzt. Als $\mathcal{O}_Y$-Modul ist $\mathcal{E}$ nach 1. in Lemma 4.10 isomorph zu $\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i}$. Da $\pi : L \to Y$ ein affiner Morphismus ist, folgt aus der durch Einschränkung der exakten Sequenz (4.10.1) auf die Varietät L gewonnenen Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathcal{L}^{-N} \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

durch Anwendung des Funktors π_* die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=-N}^{\infty} \mathcal{L}^{-i} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-i} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \longrightarrow 0 \ . \tag{8.3.1}$$

Die Surjektion von $\mathcal{O}_Y$-Algebren in (8.3.1)

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-i} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}^{-i} \ ,$$

die somit auf dem Anteil $\bigoplus_{i=0}^{N-1}\mathcal{L}^{-i}\subset\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-i}$ die Identität ist, entspricht der Einbettung $i_Z : Z \hookrightarrow L$. Die $\mathcal{O}_Y$-Algebrastruktur auf $\bigoplus_{i=0}^{N-1}\mathcal{L}^{-i}$ wird deshalb gegeben durch einen injektiven $\mathcal{O}_Y$-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{L}^{-N}\xrightarrow{\alpha}\bigoplus_{k=0}^{N-1}\mathcal{L}^{-k},$$

wobei $\alpha=\bigoplus_{k=0}^{N-1}\cdot s_k$ durch Schnitte $s_k\in H^0(Y,\mathcal{L}^{N-k})$ induziert ist. Hierbei ist die Multiplikation für $i+j\le N-1$ definiert durch die natürliche Abbildung

$$\mathcal{L}^{-i}\oplus\mathcal{L}^{-j}\longrightarrow\mathcal{L}^{-i}\otimes\mathcal{L}^{-j}=\mathcal{L}^{-i-j}$$

und für $i+j>N-1$ durch

$$\mathcal{L}^{-i}\oplus\mathcal{L}^{-j}\longrightarrow\mathcal{L}^{-i}\otimes\mathcal{L}^{-j}\xrightarrow{(*)}\bigoplus_{k=0}^{N-1}\mathcal{L}^{-(i+j-N-k)}\xrightarrow{(**)}\bigoplus_{k=0}^{N-1}\mathcal{L}^{-k}\ .$$

Die natürlichen Abbildungen $(*)$ und $(**)$ sind durch α gegeben, wobei bei der Abbildung $(**)$ zu beachten ist, daß die Abbildung $(**)$ auf den Summanden $\mathcal{L}^{-(i+j-N-k)}$ mit $i+j-N-k>N-1$ durch α induziert ist und sonst die Identität ist. Falls $s_k=0$ ist für $i=1,\ldots,N-1$, so ist man in der Situation einer durch $s_0\in H^0(Y,\mathcal{L}^N)$ gegebenen zyklischen Überlagerung $f: Z\longrightarrow Y$ vom Grad N mit Verzweigungsdivisor $\{s_0=0\}$.

Theorem 8.4 *Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare ample Garbe auf Y. Es existiert eine positive ganze Zahl N_0, sodaß für eine einfache Überlagerung $f: Z\longrightarrow Y$ vom Grad N mit $N\ge N_0$ über Y bezüglich $\mathcal{L}$ die durch Cupprodukt und Kontraktion induzierte Abbildung*

$$H^1(Z,T_Z)\longrightarrow HOM_{\mathbb{C}}\left(H^0(Z,\Omega_Z^n),H^1(Z,\Omega_Z^{n-1})\right) \tag{8.4.1}$$

injektiv ist.

Bemerkung 8.5 In Theorem 8.4 erhalten wir die Infinitesimale Torelli-Eigenschaft für den ganzen lokalen Modulraum von Z. Dies legt die Vermutung nahe, daß auch die Generische Torelli-Eigenschaft für den ganzen Modulraum von Z gelten sollte und nicht nur, wie von uns bewiesen wird, für die Untervarietät des Modulraumes, deren Punkte von solchen zyklischen Überlagerungen herrühren.

BEWEIS VON THEOREM 8.4. Wir gehen zunächst ähnlich wie im Beweis von Proposition 5.7 vor. Aus der dualen Sequenz zu der Normalenbündelsequenz

$$0\longrightarrow T_Z\longrightarrow T_{\overline{L}|Z}\longrightarrow\mathcal{O}_Z(Z)\longrightarrow 0$$

erhalten wir für $q\ge 1$ folgende exakte Sequenz von Dachprodukten

$$0\longrightarrow\Omega_Z^{q-1}(Z)\longrightarrow\Omega_{\overline{L}|Z}^q\longrightarrow\Omega_Z^q\longrightarrow 0.$$

Für eine lokalfreie Garbe $\mathcal{G}$ auf Z und $p \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq p \leq n$ setzen wir diese Sequenzen zu dem Komplex $(K^\bullet, d_\bullet)$ mit

$$K^i := \Omega^{n-p+i+1}_{\overline{L}|Z} \otimes \mathcal{O}_{\overline{L}}((i+1)Z) \otimes \mathcal{G}$$

für $i \geq 0$ zusammen. Bis auf die 0-te Stelle ist $K^\bullet$ exakt und es gilt

$$\ker d_0 = \Omega^{n-p}_Z \otimes \mathcal{G}.$$

Somit sind $\Omega^{n-p}_Z \otimes \mathcal{G}$ und $K^\bullet$ als Komplexe quasiisomorph. Es ist

$$K^p = \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z(pZ) \otimes \mathcal{G}.$$

Wir definieren $\alpha_p(\mathcal{G})$ als Komposition der folgenden natürlichen Abbildungen :

$$\begin{array}{ccc} H^0(Y, \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z(pZ) \otimes \mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha_p(\mathcal{G})} & H^p(Y, \Omega^{n-p}_Z \otimes \mathcal{G}) \\ \wr\Vert \downarrow & & \uparrow \wr\Vert \\ \mathbb{H}^p(Y, K^p[-p]) & \xrightarrow{\alpha(\mathcal{G})} & \mathbb{H}^p(Y, K^\bullet) \end{array}$$

Hierbei ist $\alpha(\mathcal{G})$ durch die natürliche Inklusion von Komplexen

$$K^p[-p] = F^p K^\bullet \hookrightarrow K^\bullet$$

induziert. Falls

$$H^{s+1}\left(Z, \Omega^{n-s}_{\overline{L}|Z} \otimes \mathcal{O}_Z\left((p-s)\, Z\right) \otimes \mathcal{G}\right) = 0 \quad \text{für } s = 0, \ldots, p-1 \tag{8.5.1}$$

ist, so folgt die Surjektivität von $\alpha_p(\mathcal{G})$. Denn aus (8.5.1) folgt

$$H^{s+1}\left(Z, K^{p-s-1}\right) = 0 \text{ für } s = 0, \ldots, p-1$$

und hieraus ergibt sich mit der 2. Spektralsequenz für die Hyperkohomologie, daß $\mathbb{H}^p(Z, K^\bullet / F^p K^\bullet) = 0$ ist und somit $\alpha_p(\mathcal{G})$ surjektiv ist. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß in dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(Z, \omega_Z) \otimes H^{n-1}\left(Z, \Omega^1_Z\right) & \xrightarrow{(**)} & H^{n-1}\left(Z, \Omega^1_Z \otimes \omega_Z\right) \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \alpha_{n-1}(\mathcal{O}_Z)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \alpha_{n-1}(\omega_Z)} \\ H^0(Z, \omega_Z) \otimes H^0(Z, \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z((n-1)Z)) & \xrightarrow{(*)} & H^0\left(Z, \omega_Z^2 \otimes \mathcal{O}_Z((n-1)Z)\right) \end{array}$$

die Abbildungen $(*)$ und $\alpha_{n-1}(\omega_Z)$ surjektiv sind. Denn die Abbildung $(**)$ ist durch Anwendung der Serredualität dual zu der Abbildung (8.4.1). Die Kommutativität des obigen Diagramms folgt aus den im Beweis der Proposition 5.7 benutzten Betrachtungen über Spektralsequenzen. Wir zeigen nun die Surjektivität der Abbildung $\alpha_{n-1}(\omega_Z)$. Es genügt das Kriterium (8.5.1) für $\mathcal{G} = \omega_Z$ zu überprüfen. Wir zeigen

$$H^{s+1}\left(Z, \Omega^{n-s}_{\overline{L}|Z} \otimes \mathcal{O}_Z\left((n-1-s)Z\right) \otimes \omega_Z\right) = 0 \quad \text{für } s = 0, \ldots, n-2\ . \tag{8.5.2}$$

Wir schränken die $(n-s)$-te exakte Dachproduktsequenz zu der Sequenz (4.9.2) auf Z ein und erhalten nach Lemma 4.10 die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^{n-s}_Y \longrightarrow \Omega^{n-s}_{\overline{L}|Z} \longrightarrow f^*\left(\Omega^{n-s-1}_Y \otimes \mathcal{L}^{-1}\right) \longrightarrow 0\ .$$

Wir tensorieren mit $\mathcal{O}_Z((n-1-s)Z) \otimes \omega_Z$. Dies liefert die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow f^*\left(\Omega^{n-s}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-1} \otimes \omega_Y\right) \quad &\longrightarrow \\ \Omega^{n-s}_{\overline{L}|Z} \otimes \mathcal{O}_Z\left((n-1-s)Z\right) \otimes \omega_Z \quad &\longrightarrow \quad f^*\left(\Omega^{n-s-1}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-2} \otimes \omega_Y\right) \longrightarrow 0\ . \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

Da die Garbe $\mathcal{L}$ ample ist existiert ein $N_0 > 0$, sodaß für $N > N_0$ und für alle $s \in \{0, \ldots, n-2\}$ unter Verwendung von 1. in Lemma 4.10

$$\begin{aligned} H^{s+1}\left(Z, f^*\left(\Omega^{n-s}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-1} \otimes \omega_Y\right)\right) &= \\ \bigoplus_{i=0}^{N-1} H^{s+1}\left(Y, \Omega^{n-s}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-1-i} \otimes \omega_Y\right) &= 0 \quad \text{und} \\ H^{s+1}\left(Z, f^*\left(\Omega^{n-s-1}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-2} \otimes \omega_Y\right)\right) &= \\ \bigoplus_{i=0}^{N-1} H^{s+1}\left(Y, \Omega^{n-s-1}_Y \otimes \mathcal{L}^{(n-s)\cdot N-2-i} \otimes \omega_Y\right) &= 0 \end{aligned}$$

sind. Also ist die Bedingung (8.5.2) erfüllt. Hieraus folgt die Surjektivität der Abbildung $\alpha_{n-1}(\omega_Z)$. Für den Beweis der Surjektivität der Abbildung $(*)$, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^0(Z,\omega_Z) \otimes H^0(Z, \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z((n-1)Z)) \arrow[r, "(*)"] & H^0(Z, \omega_Z^2 \otimes \mathcal{O}_Z((n-1)Z)) \\ \bigoplus_{i=0}^{N-1} H^0(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-1-i}) \otimes \bigoplus_{j=0}^{N-1} H^0(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{n\cdot N-1-j}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr\|"] & \bigoplus_{k=0}^{N-1} H^0(\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^{(n+1)\cdot N-2-k}) \arrow[u, "\wr\|"'] \end{tikzcd}$$

Hierbei sind die vertikalen Isomorphismen induziert durch die natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^0(Z,\omega_Z) &\simeq H^0(Z, f^*(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-1})) \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^{N-1} H^0(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{N-1-i})\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(Z,\omega_Z\otimes\mathcal{O}_Z((n-1)Z)) &\simeq H^0(Z,f^*(\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{n\cdot N-1})) \\ &\simeq \bigoplus_{j=0}^{N-1} H^0(\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{n\cdot N-1-j}) \ \text{ und} \\ H^0(Z,\omega_Z^2\otimes\mathcal{O}_Z((n-1)Z)) &\simeq H^0(Z,f^*(\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^{(n+1)\cdot N-2})) \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^{N-1} H^0(\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^{(n+1)\cdot N-2-k}) \ . \end{aligned}$$

Um die Surjektivität der Abbildung $(*)$ zu folgern genügt es zu zeigen, daß für $k=0,\ldots,N-1$ die Multiplikationsabbildung

$$H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{N-1-[\frac{k}{2}]})\otimes H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^{n\cdot N-1-(k-[\frac{k}{2}])})\longrightarrow H^0(Y,\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^{(n+1)\cdot N-2-k})$$

surjektiv ist. Da für $k=0,\ldots,N-1$ sowohl

$$N-1-\left[\frac{k}{2}\right]$$

als auch

$$n\cdot N-1-\left[k-\frac{k}{2}\right]$$

größer oder gleich $(N-1)/2$ ist, folgt nach Lemma 8.6 die Existenz einer positiven ganzen Zahl N_0, sodaß für $N>N_0$ diese Multiplikationsabbildung surjektiv ist. Hieraus folgt die Surjektivität der Abbildung $(*)$ und deshalb schließlich die Behauptung des Theorems. □

Im Beweis des Theorems 8.4 benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 8.6 (Donagi's Lemma) *Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n, $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf Y und $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ zwei lokalfreie Garben auf Y. Es existiert eine natürliche Zahl N_0, sodaß für alle $N_1,N_2>N_0$ die natürliche Multiplikationsabbildung*

$$H^0(Y,\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{L}^{N_1})\otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y,\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{N_2})\longrightarrow H^0(Y,\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{L}^{N_1+N_2})$$

surjektiv ist.

BEWEIS. [Grel, Lemma 1.28] □

9 Ein Variationales Torelli-Theorem

In diesem Abschnitt beweisen wir ein variationales Torelli-Theorem für zyklische Überlagerungen von genügend hohem Grad. Zu dem im folgenden verwendeten Begriff eines IVHS-Isomorphismus von zyklischen Überlagerungen verweisen wir auf Definition 5.4 .

Theorem 9.1 *Seien $(Y_1, \mathcal{L}_1)$ und $(Y_2, \mathcal{L}_2)$ zwei durch ample invertierbare Garben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ polarisierte glatte projektive Varietäten der Dimension n. Falls N eine genügend große positive ganze Zahl ist, so gilt für zyklische Überlagerungen*

$$f_i : Z_i \longrightarrow Y_i \ ,$$

mit $i = 1, 2$, bezüglich $\mathcal{L}_i^N = \mathcal{O}_{Y_i}(X_i)$, wobei X_i ein glatter, reduzierter Divisor auf Y_i ist, die folgende variationale Torelli-Eigenschaft :

Falls es einen IVHS*-Isomorphismus von zyklischen Überlagerungen*

$$\mathrm{IVHS}(Z_1, f_1^*\mathcal{L}_1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IVHS}(Z_2, f_2^*\mathcal{L}_2) \tag{9.1.1}$$

gibt, so existiert ein Isomorphismus

$$\sigma : Y_1 \xrightarrow{\simeq} Y_2$$

mit $\sigma^*\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$ und $\sigma^* X_2 = X_1$. Somit sind insbesondere $(Z_1, f_1^*\mathcal{L}_1)$ und $(Z_2, f_2^*\mathcal{L}_2)$ als polarisierte Varietäten isomorph.

Korollar 9.2 *Sei h ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n. Falls N eine genügend große positive ganze Zahl ist, gilt für jedes Schema S und für jede Familie*

$$(g_Z : \mathcal{Z} \longrightarrow S, \mathcal{M}_Z) \in \mathcal{M}_h^N(S)$$

die folgende Eigenschaft:

Für $i = 1, 2$ bezeichnen wir zu $s_i \in S$ die Faser von g_Z über s_i mit Z_i und die Einschränkung der Garbe $\mathcal{M}_Z$ auf Z_i mit $\mathcal{M}_i$. Falls es einen IVHS*-Isomorphismus von zyklischen Überlagerungen*

$$\mathrm{IVHS}(Z_1, \mathcal{M}_1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IVHS}(Z_2, \mathcal{M}_2) \tag{9.2.1}$$

gibt, so existiert ein Isomorphismus

$$(Z_1, \mathcal{M}_1) \xrightarrow{\simeq} (Z_2, \mathcal{M}_2)$$

von polarisierten Varietäten.

Beweis von Korollar 9.2. Sei h' das durch $h(\nu) = \sum_{i=0}^{N-1} h'(\nu - i)$ nach Lemma 3.6 eindeutig bestimmte Polynom und $(g' : \mathcal{Y} \longrightarrow H', \mathcal{L}_\mathcal{Y})$ ein durch Proposition 3.3 gegebenes Hilbertschema zu dem Modulfunktor $\mathcal{M}_{h'}$ mit der universellen Familie

$g' : \mathcal{Y} \longrightarrow H'$. Nach den Eigenschaften des Hilbertschemas und der Definition von $\mathcal{M}_h^N(S)$ existieren für $i = 1,2$ zwei Punkte $p_i \in H'$ und glatte, reduzierte Divisoren X_i auf den Fasern Y_i von g' über p_i, sodaß Z_i für $i = 1,2$ eine zyklische Überlagerung $f_i : Z_i \longrightarrow Y_i$ bezüglich $\mathcal{L}^N_{\mathcal{Y}|Y_i}$ ist. Somit können wir Theorem 9.1 anwenden. Da für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{Y}$ für genügend große $k \in \mathbb{N}$ nach [Ha, III. Thm. 8.8.(c)] gilt

$$R^i g'_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k_{\mathcal{Y}}) = 0 \quad \text{für } i > 0 \ , \tag{9.2.2}$$

folgt die Behauptung aus der Feststellung, daß sich alle Stellen, an denen wir im Beweis von Theorem 9.1 die Bedingung, daß N genügend groß ist, benutzen, auf endlich viele Verschwindungsbedingungen der Form (9.2.2) reduzieren lassen. □

Beweis von Theorem 9.1. Wir wählen ein $k > 0$, sodaß jeweils für $i = 1,2$ die Garbe $\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^k$ sehr ample ist und die Voraussetzungen in Proposition 7.4 erfüllt sind. Weiterhin setzen wir für $i = 1,2$:

$$U_i = H^0(Y_i, \omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^k) \ ,$$

$$T_i = H^1(Y_i, T_{Y_i}\langle -X_i \rangle) \ , \qquad T_i' = H^1(Y_i, T_{Y_i}\langle -X_i \rangle \otimes \mathcal{L}^{-1}) \ ,$$

$$W_i = H^1(Y_i, \Omega^{n-1}_{Y_i}\langle X_i \rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+k}) \ , \quad W_i' = H^1(Y_i, \Omega^{n-1}_{Y_i}\langle X_i \rangle \otimes \mathcal{L}^{-N+k-1}) \ .$$

Die Voraussetzung (9.1.1) liefert Vektorraumisomorphismen

$$\begin{aligned} &U_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \ , \\ &T_1 \xrightarrow{\cong} T_2 \ , \qquad T_1' \xrightarrow{\cong} T_2' \ , \\ &W_1 \xrightarrow{\cong} W_2 \quad \text{und} \quad W_1' \xrightarrow{\cong} W_2' \ , \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

und insbesondere folgenden beiden kommutativen Diagramme, wobei die vertikalen Abbildungen durch diese Isomorphismen gegeben werden (siehe Definition 5.4) :

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes_{\mathbb{C}} T_1 & \longrightarrow & W_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \otimes_{\mathbb{C}} T_2 & \longrightarrow & W_2 \end{array} \tag{9.2.4}$$

und

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes_{\mathbb{C}} T_1' & \longrightarrow & W_1' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \otimes_{\mathbb{C}} T_2' & \longrightarrow & W_2' \ . \end{array} \tag{9.2.5}$$

Schritt 1 : Die Konstruktion des Isomorphismus $\sigma : Y_1 \to Y_2$

Wir wenden Proposition 7.4 (Fall $j = 0$) auf das kommutative Diagramm (9.2.4) an. Dies liefert uns die folgenden beiden kommutativen Diagramme, in denen die vertikalen Abbildungen Vektorraumisomorphismen sind :

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes_{\mathbf{C}} B_1 & \longrightarrow & T_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \otimes_{\mathbf{C}} B_2 & \longrightarrow & T_2 \end{array} \tag{9.2.6}$$

und

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes_{\mathbf{C}} C_1 & \longrightarrow & B_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \otimes_{\mathbf{C}} C_2 & \longrightarrow & B_2 \end{array} \tag{9.2.7}$$

Hierbei gibt es nach Proposition 7.4 für $i = 1, 2$ kanonische Isomorphismen

$$B_i \simeq H^0(Y_i, \omega_{Y_i}^{-1} \otimes \mathcal{L}_i^{N-k}) \quad \text{und} \quad C_i \simeq H^0(Y_i, \omega_{Y_i}^{-2} \otimes \mathcal{L}_i^{N-2k}). \tag{9.2.8}$$

Da wir in der Voraussetzung die Zahl N genügend groß gewählt haben, können wir nach Proposition 6.1 aus dem Kern der linearen Abbildung $U_i \otimes_{\mathbf{C}} C_i \to B_i$ in Diagramm (9.2.7) für $i = 1, 2$ die Einbettungen $Y_i \hookrightarrow \mathbb{P}(U_i) \times \mathbb{P}(C_i)$ rekonstruieren. Aus (9.2.3) erhalten wir einen Isomorphismus

$$a : \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}(C_1) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}(C_2) . \tag{9.2.9}$$

Das Diagramm (9.2.7) induziert deshalb folgendes kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}(C_1) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "p_1"'] & & \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}(C_2) \arrow[d, "p_2"] \\ & Y_1 \arrow[ul] \arrow[dl] \quad \xrightarrow{\sigma} \quad Y_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}(U_1) \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbb{P}(U_2) \end{tikzcd} \tag{9.2.10}$$

Hierbei sind p_1 und p_2 die natürlichen Projektionen. Der Isomorphismus α ist induziert durch den entsprechenden Isomorphismus in (9.2.3) . Weiterhin sind die Morphismen $Y_i \to \mathbb{P}(U_i)$ für $i = 1, 2$ Einbettungen, da wir $\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^k$ sehr ample gewählt haben. Der Morphismus σ , den wir durch Einschränkung von a in (9.2.9) auf Y_1 erhalten, ist ein Isomorphismus, da die Idealgarben von Y_1 und Y_2 unter a ineinander übergehen.

Da $\omega_{Y_i} \otimes \mathcal{L}_i^k$ für $i = 1, 2$ sehr ample ist und für N genügend groß

$$H^j(Y_i, \omega_{Y_i}^{-j-1} \otimes \mathcal{L}_i^{N-k(j+1)}) = 0$$

für $1 \leq j \leq n$ ist, gilt nach [Mu2, Thm. 2], daß $U_i \otimes_{\mathbb{C}} C_i \to B_i$ in (9.2.7) surjektiv ist. Da N genügend groß ist, ist auch $\omega_{Y_i}^{-1} \otimes \mathcal{L}_i^{N-k}$ sehr ample für $i = 1, 2$. Deshalb sind die natürlichen Morphismen $\mathbb{P}(B_i) \to \mathbb{P}(U_i \otimes_{\mathbb{C}} C_i)$ und $Y_i \to \mathbb{P}(B_i)$ jeweils Einbettungen. Das Diagramm (9.2.7) induziert das folgende kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}(C_1) \arrow[d] \arrow[rrr, "\alpha"] & & & \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}(C_2) \arrow[d] \\
\mathbb{P}(U_1 \otimes_{\mathbb{C}} C_1) & Y_1 \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, "\sigma"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathbb{P}(U_2 \otimes_{\mathbb{C}} C_2) \\
\mathbb{P}(B_1) \arrow[u] \arrow[rrr, "\beta"] & & & \mathbb{P}(B_2) \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{9.2.11}$$

Hierbei ist im obigen Diagramm (9.2.11) der Morphismus

$$\mathbb{P}(U_i) \times \mathbb{P}(C_i) \to \mathbb{P}(U_i \otimes_{\mathbb{C}} C_i)$$

für $i = 1, 2$ die natürliche Segreeinbettung. Insbesondere erhalten wir nun, daß der Isomorphismus σ sowohl durch Einschränkung von α in (9.2.10) als auch durch Einschränkung von β in (9.2.11) auf Y_1 gewonnen werden kann. Indem wir die Gleichung $\beta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(B_2)}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(B_1)}(1)$ auf Y_1 einschränken, erhalten wir

$$\sigma^*(\omega_{Y_2}^{-1} \otimes \mathcal{L}_2^{N-k}) = \omega_{Y_1}^{-1} \otimes \mathcal{L}_1^{N-k} . \tag{9.2.12}$$

Schritt 2 : $\sigma^* \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$

Wir führen die ganze Konstruktion aus *Schritt 1* unter nochmaliger Anwendung von Proposition 7.4 (Fall $j = 1$) nun mit Diagramm (9.2.5) durch. Da in dem Diagramm (9.2.5) die Vektorräume U_1 und U_2 ebenfalls auftreten, erhalten wir insbesondere

$$\sigma^*(\omega_{Y_2}^{-1} \otimes \mathcal{L}_2^{N-k-1}) = \omega_{Y_1}^{-1} \otimes \mathcal{L}_1^{N-k-1} . \tag{9.2.13}$$

Aus (9.2.12) und (9.2.13) folgt schließlich $\sigma^* \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$.

Schritt 3 : $\sigma^* X_2 = X_1$

In *Schritt 1* haben wir gezeigt, daß die Isomorphismen $U_1 \to U_2$ und $B_1 \to B_2$ in (9.2.3) als durch σ induzierte Isomorphismen betrachtet werden können. Aus (9.2.6) erhalten wir nun folgendes kommutative Diagramm :

$$\begin{tikzcd} & H^0(Y_1, \mathcal{L}_1^N) \arrow[d] \\ U_1 \otimes_{\mathbb{C}} B_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[d] \\ U_2 \otimes_{\mathbb{C}} B_2 \arrow[r] \arrow[dr] & T_2 \\ & H^0(Y_2, \mathcal{L}_2^N) \arrow[u] \end{tikzcd} \quad . \tag{9.2.14}$$

Hierbei ist $H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N) \to T_i$ für $i = 1, 2$ in (9.2.14) die natürliche durch die 2. Fundamentalsequenz zu der Garbe $\mathcal{L}^N$ (siehe Def. 4.5) gegebene Abbildung. Da wir N genügend groß gewählt haben, sind die Abbildungen $U_i \otimes_{\mathbb{C}} B_i \to H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N)$ in (9.2.14) surjektiv. Deshalb erhalten wir für die Jacobisysteme

$$J_{Y_i, \mathcal{L}_i^N} := ker\{H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N) \to T_i\}$$

einen durch σ induzierten Isomorphismus

$$J_{Y_1, \mathcal{L}_1^N} \xrightarrow{\cong} J_{Y_2, \mathcal{L}_2^N} \ . \tag{9.2.15}$$

Hieraus folgt nach [Grel, S. 153-154] die Gleichung $\sigma^* X_2 = X_1$. □

Bemerkung 9.3 Falls $H^0(Y_i, T_{Y_i}) = 0$ ist, kann man, um die Gleichheit $\sigma^* X_2 = X_1$ aus (9.2.15) zu folgern, auch folgendermaßen argumentieren. Es folgt mit Hilfe des exakten kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{Y_i} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y_i} \arrow[d, "\cdot s_i"] \\ T_{Y_i}(-X_i) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma_{Y_i} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}_i^N \arrow[d] \\ T_{Y_i}(-X_i) \arrow[r] & T_{Y_i} \arrow[r] & \mathcal{L}_i^N{}_{|X_i} \end{tikzcd} \quad , \tag{9.3.1}$$

in dem die mittlere vertikale bzw. horizontale Sequenz aus der 1. bzw. 2. Fundamentalsequenz (siehe 4.2 bzw. 4.5) besteht,daß

$$J_{Y_i, \mathcal{L}_i^N} = \mathbb{C} \cdot s_i$$

ist. Hierbei ist $s_i \in H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N)$ ein Schnitt mit Nullstellendivisor X_i. Somit folgt im Fall $H^0(Y_i, T_{Y_i}) = 0$ unmittelbar die Gleichung $\sigma^* X_2 = X_1$.

10 Ein Variationales Gemischtes Torelli-Theorem

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Theorems. Hierbei verwenden wir die Bezeichnungen und Methoden der vorausgegangenen Kapitel.

Theorem 10.1 *Seien $(Y_1, \mathcal{L}_1)$ und $(Y_2, \mathcal{L}_2)$ zwei durch ample invertierbare Garben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ polarisierte glatte projektive Varietäten der Dimension n mit sehr ampler kanonischer Garbe ω_{Y_1} und ω_{Y_2}. Falls N eine genügend große positive ganze Zahl ist und die durch Cupprodukt induzierte Abbildung*

$$H^0(Y_i, \omega_{Y_i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-1}(Y_i, \Sigma_{Y_i}^{\vee}) \longrightarrow H^{n-1}(Y_i, \Sigma_{Y_i}^{\vee} \otimes \omega_{Y_i}) \tag{10.1.1}$$

für $i = 1, 2$ surjektiv ist, so gilt für Paare von Varietäten (Y_i, X_i), $i = 1, 2$, wobei X_i ein glatter, reduzierter Divisor auf Y_i ist mit $\mathcal{L}_i^N = \mathcal{O}_{Y_i}(X_i)$, die folgende variationale Torelli-Eigenschaft :

Falls Isomorphismen

$$H^1(Y_1, T_{Y_1}\langle -X_1\rangle) \xrightarrow{\simeq} H^1(Y_2, T_{Y_2}\langle -X_2\rangle)$$

und

$$H^{n-p}(Y_1, \Omega^p_{Y_1}\langle X_1\rangle) \xrightarrow{\simeq} H^{n-p}(Y_2, \Omega^p_{Y_2}\langle X_2\rangle)$$

für $p = 0, \ldots, n$ existieren, und das durch diese Isomorphismen induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^1(Y_1, T_{Y_1}\langle -X_1\rangle) & \xrightarrow{\delta^{log}_{Y_1}} & \bigoplus_{p=1}^{n} HOM_{\mathbb{C}}\left(H^{n-p}(Y_1, \Omega^p_{Y_1}\langle X_1\rangle), H^{n-p+1}(Y_1, \Omega^{p-1}_{Y_1}\langle X_1\rangle)\right) \\
\wr\!\!\downarrow & & \downarrow\!\wr \\
H^1(Y_2, T_{Y_2}\langle -X_2\rangle) & \xrightarrow{\delta^{log}_{Y_2}} & \bigoplus_{p=1}^{n} HOM_{\mathbb{C}}\left(H^{n-p}(Y_2, \Omega^p_{Y_2}\langle X_2\rangle), H^{n-p+1}(Y_2, \Omega^{p-1}_{Y_2}\langle X_2\rangle)\right)
\end{array} \tag{10.1.2}$$

kommutativ ist, so existiert ein Isomorphismus

$$\sigma : Y_1 \xrightarrow{\simeq} Y_2$$

mit $\sigma^*\mathcal{L}_2^N = \mathcal{L}_1^N$ und $\sigma^* X_2 = X_1$. Insbesondere erhält man somit, daß die offenen Varietäten $U_1 = Y_1 - X_1$ und $U_2 = Y_2 - X_2$ isomorph sind.

Sei Y eine glatte, projektive Varietät der Dimension n und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. Weiterhin sei für eine natürliche Zahl N ein Schnitt $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$ mit glattem, reduzierten Nullstellendivisor $X = \{s = 0\}$ gegeben.

Bemerkung 10.2 Falls für die Varietät Y der Infinitesimale Torelli für die n-Formen gilt, d.h. die Abbildung

$$H^1(Y, T_Y) \longrightarrow \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^0(Y, \Omega^n_Y), H^1(Y, \Omega^{n-1}_Y)\right) \tag{10.2.1}$$

ist injektiv, und es gilt

$$q(Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0 \ ,$$

so ist die Abbildung

$$H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee) \longrightarrow H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \omega_Y)$$

surjektiv. Somit ist für solche Varietäten die Voraussetzung (10.1.1) in Theorem 10.1 erfüllt. Dies ergibt sich aus dem folgenden durch die 1. Fundamentalsequenz (4.2.1) und das Cupprodukt von Garben induzierten exakten kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-1}(Y, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & H^{n-1}(Y, \omega_Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee) & \xrightarrow{(***)} & H^{n-1}(Y, \Sigma_Y^\vee \otimes \omega_Y) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (**)} \\ H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^{n-1}(Y, \Omega_Y^1) & \xrightarrow{(*)} & H^{n-1}(Y, \Omega_Y^1 \otimes \omega_Y) \ . \end{array}$$

Denn die Gleichung

$$H^{n-1}(Y, \omega_Y) = (H^1(Y, \mathcal{O}_Y))^\vee = 0$$

impliziert die Surjektivität der Abbildung (**) und die Injektivität von (10.2.1) ist per Serredualität äquivalent zur Surjektivität von (*). Also ist die Abbildung (* * *) surjektiv.

Nun stellen wir die zum Beweis des Theorems 10.1 nötigen Hilfsergebnisse zusammen. Wir bezeichnen mit β_1 die durch die natürliche Dachproduktabbildung von Garben

$$T_Y\langle -X\rangle^{\otimes n} \longrightarrow \wedge^n T_Y\langle -X\rangle \simeq \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-N}$$

induzierte Cupprodukt-Abbildung

$$H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} \xrightarrow{\beta_1} H^n(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-N}) \ .$$

Indem wir in (1.6.1) die Abbildungen

$$\delta_n^{log}, \delta_{n-1}^{log}, \ldots, \delta_2^{log}, \delta_1^{log}$$

iterieren (vgl. [CGGH, 2.]), erhalten wir die Abbildung

$$H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} \xrightarrow{\Phi_1} \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N), H^n(Y, \mathcal{O}_Y)\right) \ . \qquad (10.2.2)$$

Lemma 10.3 *Das folgende Diagramm ist kommutativ*

$$\begin{array}{ccc} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} & \xrightarrow{\beta_1} & H^n(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-N}) \\ & \searrow^{\Phi_1} & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ & & HOM_{\mathbb{C}}\left(H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N), H^n(Y, \mathcal{O}_Y)\right) \ . \end{array} \qquad (10.3.1)$$

Hierbei bezeichnet ρ die natürliche durch Cupprodukt von Garben induzierte Abbildung.

BEWEIS. Für $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf Y ist das natürliche Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{G}^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \wedge^n \mathcal{G} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^n \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \wedge^n \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Hierbei sind die Abbildungen auf der Garbe $\mathcal{F}$ jeweils die Identität. Für $\mathcal{F} = \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N$ und $\mathcal{G} = T_Y\langle -X\rangle$ folgt hieraus die Kommutativität des folgenden natürlichen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \otimes_{\mathbb{C}} H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d] & H^n(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, equal] \\
H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \otimes_{\mathbb{C}} H^n(Y, \omega^{-1} \otimes \mathcal{L}^N) \arrow[r] & H^n(Y, \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

Somit folgt die Behauptung □

Indem wir mit den durch die Serredualität induzierten Isomorphismen

$$H^n(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-N}) \simeq H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)^\vee$$

und

$$\mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}\left(H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N), H^n(Y, \mathcal{O}_Y)\right) \simeq \left(H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y)\right)^\vee$$

komponieren, erhalten wir aus Diagramm (10.3.1) das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^1(Y, T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\Phi"'] & H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)^\vee \arrow[d, "\mu^t"] \\
& \left(H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y)\right)^\vee .
\end{tikzcd} \qquad (10.3.2)$$

Hierbei ergibt sich nach Konstruktion, daß die rechte vertikale Abbildung die transponierte Abbildung zu der natürlichen Multiplikationsabbildung

$$H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y) \xrightarrow{\mu} H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)$$

ist. Die im folgenden betrachteten Jacobisysteme $J_{\mathcal{F}}$ für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf Y beziehen sich auf die 2. Fundamentalsequenz (4.5.1) zum Schnitt $s \in H^0(Y, \mathcal{L}^N)$.

Lemma 10.4 *Falls N genügend groß ist, so gilt*

$$\mathrm{im}\, \beta = \left(\frac{H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N}}\right)^\vee . \qquad (10.4.1)$$

BEWEIS. Das folgende natürliche Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^1(Y,T_Y\langle -X\rangle)^{\otimes n} \arrow[r, "\beta_1"] & H^n(Y,\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N}) \\
H^0(Y,\mathcal{L}^N)^{\otimes n} \arrow[u, "(**)"] \arrow[r, "(*)"] & H^0(Y,\mathcal{L}^{Nn}) \arrow[u, "\psi_n(\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N})"']
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Die Abbildung $\psi_n(\omega^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N})$ ist die in Proposition 5.7 definierte, die Abbildung $(**)$ ist durch die 2. Fundamentalsequenz induziert und $(*)$ ist durch Multiplikation von Schnitten gegeben. Die Existenz und die Kommutativität des obigen Diagramms folgt wie in Proposition 5.7. Da für genügend großes N die Kohomologiegruppe

$$H^{s+1}(Y,\wedge^{n-s}\Sigma_Y^\vee\otimes\mathcal{L}^{N(n-s-1)}\otimes\omega_Y^{-1})=0$$

ist für $s=0,\ldots,n-2$, erhalten wir aus dem Beweis der Proposition 5.7

$$\operatorname{im}\psi_n(\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N})=\operatorname{im}\left\{H^{n-1}(Y,\Omega_Y^1\langle X\rangle\otimes\omega_Y^{-1})\xrightarrow{\alpha}H^n(Y,\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N})\right\}\ .$$

Hierbei ist α durch die mit der Garbe $\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N}$ tensorierten dualen Sequenz zur 2. Fundamentalsequenz (4.5.1)

$$0\longrightarrow\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N}\longrightarrow\Sigma_Y^\vee\otimes\omega_Y^{-1}\longrightarrow\Omega_Y^1\langle X\rangle\otimes\omega_Y^{-1}\longrightarrow 0$$

induziert. Also gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}\beta_1 &= \ker\left\{H^n(Y,\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N})\longrightarrow H^n(Y,\Sigma_Y^\vee\otimes\omega^{-1})\right\}\\
&\simeq \operatorname{coker}\left\{H^0(Y,\Sigma_Y\otimes\omega_Y^2)\longrightarrow H^0(Y,\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N)\right\}^\vee\\
&= \left(\frac{H^0(Y,\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N}}\right)^\vee\ .
\end{aligned}\tag{10.4.2}$$

Da nach Donagi's Lemma 8.6, welches für sich unmittelbar auf den Fall mehrfacher Tensorprodukte überträgt, die Abbildung $(*)$ für genügend großes N surjektiv ist, erhalten wir die Behauptung. □

Die Komposition der Multiplikationsabbildung μ und der natürlichen Quotientenabbildung, wobei wir den Quotienten bezüglich des zugehörigen Jacobisystems bilden, bezeichnen wir mit π

$$H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^N)\otimes_{\mathbb{C}}H^0(Y,\omega_Y)\xrightarrow{\pi}\frac{H^0(Y,\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N}}\ .$$

Aus dem Diagramm (10.3.2) und Lemma 10.4 folgt somit für genügend großes N

$$\ker\Phi^t=\ker\pi\ .\tag{10.4.3}$$

Lemma 10.5 *Falls N genügend groß und ω_Y ample und basispunktfrei ist, gilt*

$$J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^N} = \ker \left\{ H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N) \xrightarrow{\phi} H^0(Y, \omega_Y)^\vee \otimes_{\mathbf{C}} \frac{H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N}} \right\} . \quad (10.5.1)$$

Hierbei ist die Abbildung ϕ durch π induziert.

BEWEIS. Da das Bild der Abbildung der Multiplikationsabbildung

$$J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^N} \otimes_{\mathbf{C}} H^0(Y, \omega_Y) \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)$$

in $J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N}$ liegt, gilt

$$J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^N} \subset \ker \phi .$$

Deshalb genügt es zu zeigen, daß die durch ϕ induzierte Abbildung

$$\frac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^N}} \xrightarrow{\bar{\phi}} H^0(Y, \omega_Y)^\vee \otimes_{\mathbf{C}} \frac{H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N}}$$

injektiv ist. Wir betrachten hierzu das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbf{C}} \left(\dfrac{H^0(Y, \omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2 \otimes \mathcal{L}^N}} \right)^\vee & \xrightarrow{\bar{\phi}^t} & \left(\dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^N}} \right)^\vee \\
\uparrow & & \uparrow (**) \\
H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbf{C}} \dfrac{H^0(Y, \mathcal{L}^{Nn})}{J_{\mathcal{L}^{Nn}}} & \longrightarrow & \dfrac{H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{Nn})}{J_{\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{Nn}}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^0(Y, \omega_Y) \otimes H^0(Y, \mathcal{L}^{Nn}) & \xrightarrow{(*)} & H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{Nn}) .
\end{array}$$

Hierbei sind die beiden unteren vertikalen Abbildungen durch Quotientenbildung induziert. Die beiden oberen vertikalen Abbildungen sind durch die Abbildung α im Beweis der Macaulay-Dualität 5.13 für $a = Nn$ und $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y$ bzw. $\mathcal{E} = \omega_Y$ gegeben. Die beiden unteren horizontalen Abbildungen sind durch Cupprodukt induziert. Da ω_Y nach Voraussetzung ample und basispunktfrei und für N genügend groß

$$H^i(Y, \mathcal{L}^{Nn} \otimes \omega_Y^{-i}) = 0$$

ist für $i \geq 1$, gilt nach [Mu2, Thm. 2], daß die Abbildung $(*)$ surjektiv ist. Aus dem Beweis der Macaulay-Dualität in Proposition 5.13 erhalten wir für $\mathcal{E} = \omega_Y$, $a = Nn$

und genügend großes N, daß die Abbildung (**) surjektiv ist, da die Verschwindungsbedingungen in der 2. Voraussetzung von Proposition 5.13 erfüllt sind. Zusammenfassend erhalten wir, daß die Abbildung $\overline{\phi}^t$ surjektiv ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir bezeichnen mit $\overline{\pi}$ die durch π induzierte Abbildung

$$H^0(Y,\omega_Y)\otimes_{\mathbb{C}}\frac{H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y\otimes\mathcal{L}^N}}\xrightarrow{\overline{\pi}}\frac{H^0(Y,\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y^2\otimes\mathcal{L}^N}}.$$

Lemma 10.6 *Sei N genügend groß und die durch Cupprodukt induzierte Abbildung*

$$H^0(Y,\omega_Y)\otimes_{\mathbb{C}}H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee)\longrightarrow H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee\otimes\omega_Y)\tag{10.6.1}$$

surjektiv. Dann ist der Symmetrizervektorraum $B(\overline{\pi})$ kanonisch isomorph zu

$$\frac{H^0(Y,\mathcal{L}^N)}{J_{\mathcal{L}^N}}$$

und die Symmetrizerabbildung $\overline{\pi}_1=s(\overline{\pi})$ ist

$$H^0(Y,\omega_Y)\otimes_{\mathbb{C}}\frac{H^0(Y,\mathcal{L}^N)}{J_{\mathcal{L}^N}}\xrightarrow{\overline{\pi}_1}\frac{H^0(Y,\omega_Y\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\omega_Y\otimes\mathcal{L}^N}}.$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt unmittelbar durch Anwendung des Verallgemeinerten Symmetrizerlemmas in [Grel, Thm. 2.21]. Wir geben zur Bequemlichkeit des Lesers einen Beweis in der Notation von Proposition 5.13 an. Zunächst bemerken wir, daß für N genügend groß das Jacobisystem J_{ω_Y} verschwindet, wie man mit Hilfe der 1. Fundamentalsequenz sieht. Der Grund für die Forderung nach der Surjektivität der Abbildung (10.6.1) ist, daß, obwohl N genügend groß ist, die 2. Verschwindungsbedingung der Macaulay-Dualität in Proposition 5.13 für $q=1$, $a=1$ und $\mathcal{E}=\omega_Y^r$ mit $r=0,1,2$ nicht erfüllt zu sein braucht. Für genügend großes N besagt die Macaulay-Dualität in diesem Fall

$$H^0(Y,\omega_Y)\simeq\left(\frac{H^0(Y,\omega_Y^{-1}\otimes\omega)}{J_{\omega_Y^{-1}\otimes\omega}}\right)^\vee$$

und

$$\frac{H^0(Y,\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^N)}{J_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^N}}\simeq\left(\frac{H^0(Y,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{L}^{-N}\omega}+H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee\otimes\mathcal{E}^\vee\otimes\omega_Y)}\right)^\vee$$

für $\mathcal{E}=\omega_Y^r$ mit $r=0,1,2$. Es genügt für den Beweis der Behauptung die Exaktheit der folgenden Sequenz in der Mitte und rechts

$$\begin{aligned}\Lambda^2 H^0(Y,\omega_Y)\otimes_{\mathbb{C}}\frac{H^0(Y,\omega_Y^{-2}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\omega_Y^{-2}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}+\mathrm{im}\ H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee\otimes\omega_Y^{-1})}&\longrightarrow\\ H^0(Y,\omega_Y)\otimes_{\mathbb{C}}\frac{H^0(Y,\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\omega_Y^{-1}\otimes\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}+\mathrm{im}\ H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee)}&\longrightarrow\\ \frac{H^0(Y,\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega)}{J_{\mathcal{L}^{-N}\otimes\omega}+\mathrm{im}\ H^{n-1}(Y,\Sigma_Y^\vee\otimes\omega_Y)}&\longrightarrow 0\end{aligned}\tag{10.6.2}$$

zu zeigen. Hierzu läßt sich die Argumentation in Proposition 7.3 unmittelbar übertragen unter Berücksichtigung der Surjektivität der Abbildung (10.6.1). Hieraus folgt die Behauptung. □

Lemma 10.7 *Sei N genügend groß und ω_Y sehr ample. Dann gilt*

1. *Der Symmetrizervektorraum $B(\overline{\pi}_1)$ ist kanonisch isomorph zu*

$$H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^N)$$

und die Symmetrizerabbildung $\overline{\pi}_2 = s(\overline{\pi}_1)$ ist

$$H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^N) \xrightarrow{\overline{\pi}_2} \frac{H^0(Y, \mathcal{L}^N)}{J_{\mathcal{L}^N}} .$$

2. *Der Symmetrizervektorraum $B(\overline{\pi}_2)$ ist kanonisch isomorph zu*

$$H^0(Y, \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^N)$$

und die Symmetrizerabbildung $\overline{\pi}_3 = s(\overline{\pi}_2)$ ist

$$H^0(Y, \omega_Y) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(Y, \omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^N) \xrightarrow{\overline{\pi}_3} H^0(Y, \omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^N) .$$

Beweis. Da ω_Y sehr ample ist, folgt aus

$$H^0(Y, \omega_Y^{-r}) = H^0(Y, T_Y \otimes \omega_Y^{-r}) = 0 ,$$

für $r = 1, 2$ daß die Jacobisysteme $J_{\omega_Y^{-1} \otimes \mathcal{L}^N}$ und $J_{\omega_Y^{-2} \otimes \mathcal{L}^N}$ verschwinden. Aus [Gre1, Cor. 2.34] folgen nun beide Behauptungen. Es ist zu beachten, daß in der Notation von Green die invertierbare Garbe L unserem $\mathcal{L}^N$ entspricht. Für $m = 1$ bzw. $m = 2$ liefert [Gre1, Cor. 2.34] die 1. Behauptung bzw. 2. Behauptung. □

Beweis des Theorem 10.1. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 9.1. Da wir N genügend groß gewählt haben, ist die invertiebare Garbe $\omega_{Y_i}^r \otimes \mathcal{L}_i^N$ für $r = 1, 2$ und $i = 0, 1$ sehr ample. Wir setzen für $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} U_i &= H^0(Y_i, \omega_{Y_i}) , \\ T_i &= \frac{H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N)}{J_{\mathcal{L}_i^N}} , \\ B_i &= H^0(Y_i, \omega_{Y_i}^{-1} \otimes \mathcal{L}_i^N) , \\ C_i &= H^0(Y_i, \omega_{Y_i}^{-2} \otimes \mathcal{L}_i^N) . \end{aligned} \tag{10.7.1}$$

Nach den Resultaten in den Lemmata 10.3, 10.4, 10.5, 10.6 und 10.7 erhalten wir zwei kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes_{\mathbb{C}} B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & T_1 \arrow[d, "\wr"] \\ U_2 \otimes_{\mathbb{C}} B_2 \arrow[r] & T_2 \end{tikzcd} \tag{10.7.2}$$

und

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes_{\mathbb{C}} C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & B_1 \arrow[d, "\wr"] \\ U_2 \otimes_{\mathbb{C}} C_2 \arrow[r] & B_2 \ , \end{tikzcd} \tag{10.7.3}$$

in denen die vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind. Die Argumentation verläuft nun wie in *Schritt 1* und *Schritt 3* des Beweises von Theorem 9.1. Hierbei ist zu beachten, daß *Schritt 2* entfällt. Deshalb können wir im Gegensatz zu Theorem 9.1 nur folgern, daß $\sigma^*\mathcal{L}_2^N = \mathcal{L}_1^N$. Bei der Argumentation analog zu *Schritt 3* im Beweis des Theorems 9.1 ist hier zu beachten, daß die Abbildung

$$H^0(Y_i, \mathcal{L}_i^N) \longrightarrow T_i$$

für $i = 1, 2$ in diesem Fall die Quotientenabbildung ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[ACGJ] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths , P., Harris, J. : Geometry of Algebraic Curves I. Grundlehren der math. Wissenschaften 267. Springer (1985)

[At] Atiyah, M. : Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Am. Math. Soc. **85**, 181 - 207 (1957)

[Be] Beauville, A. : Le problème de Torelli. Sém. Bourbaki 38-651, 7 - 20 (1985-86)

[BG] Bloch, S., Giesecker, D. : The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle. Invent. math. **12**, 112 - 117 (1971)

[Ca] Catanese, F. : Infinitesimal Torelli theorems and counterexamples to Torelli problems. Topics of Transcendental Algebraic Geometry. Princeton Univ. Press. Ann. of Math. Stud. **106**, 143 - 156 (1984)

[CD] Cox, D., Donagi, R. : On the failure of Variational Torelli for regular elliptic surfaces with a section. Math. Ann. **273**, 673 - 683 (1986)

[CDT] Cox, D., Donagi, R., Tu, L. : Variational Torelli implies generic Torelli. Invent. math. **88**, 439 - 446 (1987)

[CG] Carlson, J., Griffiths, P. : Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem. Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff and Nordhoff, 51 - 76 (1980)

[CGGH] Carlson, J., Green, M., Griffiths, P., Harris, J. : Infinitesimal variation of Hodgestructure I. Compos. Math. **50**, 109 - 205 (1983)

[De1] Deligne, P. : Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lect. Notes Math. **163**, (1070)

[De2] Deligne, P. : Théorie de Hodge II. Publ. Math. I.H.E.S. **40**, 5 - 58 (1971)

[De3] Deligne, P. : Théorie de Hodge III. Publ. Math. I.H.E.S. **44**, 5 - 77 (1974)

[Do1] Donagi, R. : Generic Torelli for projective hypersurfaces. Compos. Math. **50**, 325 - 353 (1983)

[Do2] Donagi, R. : Generic Torelli and Variational Schottky. Topics in Transcendental Algebraic Geometry, Ann. of Math. Stud. 106, Princeton Univ. Press, 239 - 258 (1984)

[DG] Donagi, R., Green, M. L. : A new proof of the symmetrizer lemma and a stronger weak Torelli theorem for projective hypersurfaces. J. Diff. Geom. **20**, 459 - 461 (1984)

[DT] Donagi, R., Tu, L. : Generic Torelli for weighted hypersurfaces. Math. Ann. **276**, 399 - 413 (1987)

[EEK] Ein, L., Eisenbud, D., Katz, S. : Varieties cut out by quadrics: Scheme-theoretic versus homogeneous generation of ideals. Algebraic Geometry Sundance 1986. Proc. of a Conf. at Sundance. Lect. Notes in Math. **1311**, 51 - 70 (1987)

[Ei] Ein, L. : Vanishing theorems for varieties of low codimension. Algebraic Geometry Sundance 1986. Proc. of a Conf. at Sundance. Lect. Notes in Math. **1311**, 71 - 75 (1987)

[EV1] Esnault, H., Viehweg, E. : Revêtement cycliques. Algebraic Threefolds, Proceedings, Varenna 1981. Lect. Notes Math. **947**, 241 - 250 (1982)

[EV2] Esnault, H., Viehweg, E. : Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems. Invent. math. **86**, 161 - 194 (1986)

[Fl] Flenner, H. : The infinitesimal Torelli problem for zero sets of sections of vector bundles. Math. Z. **193**, 307 - 322 (1986)

[Gre1] Green, M. L. : The period map for hypersurface sections of high degree of an arbitrary variety. Compos. Math. **55**, 135 - 156 (1984)

[Gre2] Green, M. L. : Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. J. Diff. Geometry **19**, 125 - 171 (1984)

[Gri1] Griffiths, P. : Periods of integrals on algebraic manifolds I. Am. J. of Math. **90**, 568 - 626 (1968)

[Gri2] Griffiths, P. : Periods of integrals on algebraic manifolds II. Am. J. of Math. **90**, 805 - 865 (1968)

[Gri3] Griffiths, P. : Periods of integrals on algebraic manifolds III. Publ. Math. I.H.E.S. **38**, 125 - 180 (1970)

[Gri4] Griffiths, P. : On the periods of certain rational integrals: I. Annals of Math. **90**, 460 - 495 (1969)

[Gri5] Griffiths, P. : Letter to E. Viehweg (1983)

[Gro1] Grothendieck, A. : Fondements de la géométrie algébrique (FGA). Extraits du Sém. Bourbaki 1957-1962, Paris (1962)

[GH] Griffiths, P., Harris, J. : Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons 1978

[GD] Grothendieck, A., Dieudonné, J. : Étude locale des schémas et de morphismes de schémas. EGA IV. Publ. Math. I.H.E.S. **32** (1967)

[Ha] Hartshorne, R. : Algebraic geometry. GTM 52. Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1977

[Ka1] Kawamata, Y. : Characterization of abelian varieties. Compos. Math. **43**, 253 - 276 (1981)

[Ka2] Kawamata, Y. : A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann. **261**, 43 - 46 (1982)

[Ko] Kollár, J. : Toward moduli of singular varieties. Compos. Math. **56**, 369 - 398 (1985)

[Kn] Konno, K. : On Deformations and the local Torelli Problem of cyclic branched coverings. Math. Ann. **271**, 601 - 617 (1985)

[LM] Lieberman, D., Mumford, D. : Matsusaka's big theorem. Algebraic Geometry, Arcata 1974. Proc. Symp. in Pure Math. **29**, 513 - 530 (1975)

[LPW] Lieberman, D., Peters, C., Wilsker, R. : A theorem of Local-Torelli type. Math. Ann. **231**, 39 - 45 (1977)

[Mu1] Mumford, D. : Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton University Press (1966)

[Mu2] Mumford, D. : Varieties defined by quadratic equations. Questions on Algebraic Varieties, CIME, 29 - 100 (1970)

[MF] Mumford, D., Fogarty, J. : Geometric invariant theory. Second Edition (Ergebnisse der Math., Vol. 34). Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1982

[Og] Ogus, A. : On the formal neighborhood of a subvariety of projective space. Am. J. of Math. **97**, 1085 - 1107 (1976)

[Pe1] Peters, C. : The Local-Torelli theorem. Math. Ann. **217**, 1 - 16 (1975)

[Pe2] Peters, C. : The Local-Torelli theorem. II: Cyclic branched Coverings. Ann. Sc. Norm. Sup., Serie IV - Vol. 3, n. 2, 321 - 339 (1976)

[PS] Peters, C., Steenbrink, J. : Infinitesimal variations of Hodgestructures and the generic Torelli problem for projective hypersurfaces. Classification of Algebraic and Analytic Manifolds, Birkhäuser, 399 - 464 (1983)

[Po] Popp, H. : Moduli theory and classification theory of algebraic varieties. Lect. Notes in Math. **620**, (1977)

[Re] Reider, I. : On the infinitesimal Torelli theorem for certain irregular surfaces of general type. Math. Ann. **280**, 285 - 302 (1988)

[Sa1] Saito, M.-H. : Weak global Torelli theorem for certain weighted projective hypersurfaces. Duke Math. J. **53**, 67 - 111 (1986)

[Sa2] Saito, M.-H. : Generic Torelli theorem for hypersurfaces in compact irreducible Hermitian symmetric spaces. Proc. Japan Acad. **61**, 321 - 324 (1985)

[Se] Seshadri, C. S. : Theory of Moduli.
Proc. of Symp. in Pure Math. **29**, 263 - 304 (1975)

[SSU] Saito, M.-H., Shimizu, Y., Usui, S. : Variation of mixed Hodgestructure and Torelli problem. Adv. Stud. Pure Math. 10. North-Holland Publ. & Kinokuniya Book-Store, 649 - 693 (1987)

[Us1] Usui, S. : Local Torelli theorems for non-singular complete intesections. Japan J. Math. **2-2**, 411 - 418 (1976)

[Us2] Usui, S. : Deformations and local Torelli theorem for certain surfaces of general type. Lect. Notes Math. **732**, 605 - 629 (1979)

[Us3] Usui, S. : Effect of automorphisms on variation of Hodgestructures.
J. Math. Kyoto Univ. **21-4**, 645 - 672 (1981)

[Us4] Usui, S. : Variation of mixed Hodge structure arising from family of logarithmic deformations. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 16, 91 - 107 (1983)

[Us5] Usui, S. : Variation of mixed Hodge structure arising from family of logarithmic deformations II: Classifying space. Duke Math. J. **51**, 851 - 875 (1986)

[Vie1] Viehweg, E. : Die Additivität der Kodaira Dimension für projektive Faserräume über Varietäten des allgemeinen Typs. J. Reine Angew. Math. **330**, 132 - 142 (1982)

[Vie2] Viehweg, E. : Vanishing theorems.
J. Reine Angew. Math. **335**, 1 - 8 (1982)

[Vie3] Viehweg, E. : Weak positivity and the additivity of the Kodaira Dimension for certain fibre spaces. Algebraic Varieties and Analytic Varieties. Adv. Stud. Pure Math. Vol. 1, North-Holland, 329 - 353 (1983)

[Vie4] Viehweg, E. : Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension, II: The local Torelli map. Classification of Algebraic and Analytic Manifolds. Progress in Math. Vol. 39, Birkhäuser, 567 - 589 (1983)

[Vie5] Viehweg, E. : Weak positivity and the stability of certain Hilbert points. Invent. math. **96**, 639 - 667 (1989)

[Vie6] Viehweg, E. : Weak positivity and the stability of certain Hilbert points II. Preprint, Universität-GH-Essen (1989)

[Vie7] Viehweg, E. : Weak positivity and the stability of certain Hilbert points III. Preprint, Universität-GH-Essen (1989)

[Wa] Wahl, J. M. : A cohomological characterization of $\mathbb{P}^n$. Invent. math. **72**, 315 - 322 (1983)

[We] Wehler, J. : Cyclic coverings: Deformations and Torelli theorem. Math. Ann. **274**, 443 - 472 (1986)