

**Algebraische Zyklen auf Hilbertschen Modulflächen**

mit Anhang: Klassifikation Hilbertscher Modulflächen  
zu gewissen diskreten Erweiterungen der Modulgruppe

von

Jürgen Koehl

Dissertation

Bonn 1987

Anhang: Diplomarbeit, Bonn 1983

Max - Planck - Institut für Mathematik

Gottfried - Claren - Straße 26

D - 5300 Bonn 3

MPI/87-24

## Einleitung

Es sei  $D$  die Diskriminante eines reellquadratischen Zahlkörpers  $F$ ,  $B$  die Norm eines ganzen Ideals von  $F$  und  $Y(D,B)$  die durch  $D$  und  $B$  definierte Hilbertsche Modulfläche. Auf der glatten komplexen projektiven Fläche  $Y(D,B)$  existiert eine Klasse algebraischer Kurven, die zuerst von Hirzebruch in [Hi<sub>1</sub>] systematisch beschrieben wurde. Den von den Poincarédualen ihrer Komponenten aufgespannten Unterraum von  $H^2(Y(D,B), \mathbb{C})$  nennen wir - wie in [HLR] - den Raum der Hirzebruch-Zagier-Zykel. Ziel dieser Arbeit ist es, die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel und der algebraischen Zykel, d.h. die Picardzahl der glatten projektiven Fläche  $Y(D,B)$ , zu bestimmen. Für eine Primdiskriminante  $D$  haben Hirzebruch und Zagier in [HZ<sub>1</sub>] algebraischen Kurven auf  $Y(D,1)$  Spitzenformen vom Gewicht zwei zur Stufe  $D$  vom Nebentypus zugeordnet. Wir greifen diesen Gedanken in Kapitel 3 und 4 wieder auf.

Die Grundlage für diese Arbeit sind die Ergebnisse von Harder, Langlands und Rapoport in [HLR]. Wir werden in Kapitel 2 Shimuravarietäten  $S_K$  konstruieren, die über  $\mathbb{Q}$  definiert sind, und deren minimale glatte Kompaktifizierungen  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  der komplexwertigen Punkte  $S_K(\mathbb{C})$  von  $S_K$  die disjunkte Vereinigung von Hilbertschen Modulflächen zur erweiterten ( bzw. gewöhnlichen ) Modulgruppe sind.

Für einen algebraischen Zahlkörper  $L$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{Z}(L)$  den Unterraum von  $H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ , der von den über  $L$  definierten algebraischen Kurven von  $\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$  erzeugt wird. Die Galoisgruppe  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)$  operiert auf  $H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  und läßt  $\mathcal{Z}(L)$  invariant, d.h.:

$$\mathcal{Z}(L) \subset H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)}.$$

Die Tate-Vermutung für  $\bar{S}_K$  besagt nun, daß  $\mathcal{Z}(L)$  bereits der ganze  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)$ -invariante Unterraum von  $H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  ist, d.h.

$$\mathcal{Z}(L) = H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/L)}.$$

Die Kohomologie  $H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell(1))$  zerlegt sich in die direkte Summe der Schnittkohomologie der Satake-Baily-Borel Kompaktifizierung  $\bar{S}_K$  von  $S_K$  und dem Teil, der von den Poincarédualen der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{S}_K$  erzeugt wird

$$H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell(1)) \cong IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell(1)) \oplus H_{\text{sing}}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell(1)) .$$

Die Schnittkohomologie  $IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$  zerfällt unter der Aktion der Hecke-Algebra von  $Gl_2((A_F)_f)$  in eine direkte Summe

$$(*) \quad IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \bigoplus_{\pi} X(\pi_f) \otimes W(\pi_f)$$

über automorphe Darstellungen  $\pi$  von  $Gl_2(A_F)$  mit nicht-trivialer relativer Lie-Algebren Kohomologie. Dabei ist  $X(\pi_f)$  ein endlich-dimensionaler  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Vektorraum, auf dem die Galoisgruppe  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  operiert. Harder, Langlands und Rapoport haben in [HLR] die Tate-Vermutung für automorphe Darstellungen  $\pi$ , die nicht vom CM-Typ sind, und für abelsche CM-Formen bewiesen. Der Beweis der Tate-Vermutung für diedrale CM-Formen wurde von Klingenberg in [Kl] und von Murty und Ramakrishnan in [MR] durchgeführt. Diese Ergebnisse sind in Kapitel 2 zusammengestellt.

In [HLR] wird die Dimension des Raumes der Tate-Zykel in  $X(\pi_f)$  für die automorphen Darstellungen, die in (\*) auftreten, beschrieben. Es zeigt sich, daß, außer für diedrale CM-Formen, die Tate-Zykel bereits durch die Hirzebruch-Zagier-Zykel gegeben sind. In Kapitel 3 wird die Anzahl gewisser automorpher Darstellungen  $\pi$  von  $Gl_2(A_F)$ , die in (\*) auftreten, bestimmt und damit in Kapitel 4 die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^2(Y(D,B), \mathbb{C})$  und die Picardzahl von  $Y(D,B)$  abgeschätzt (Satz 4.4 und 4.5):

**Satz:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D > 12$  und  $B = N(\mathfrak{b})$  die Norm eines ganzen Ideals von  $F$ . Wir setzen  $B$  teilerfremd zu  $D$

voraus. Dann ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  größer oder gleich

$$1 + \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left(\frac{D_1}{\cdot}\right)) + \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{d}{B}\right)\right) \cdot h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) \right\} .$$

( $S_2(D_1, \left(\frac{D_1}{\cdot}\right))$  ist der Raum der Spitzenformen vom Gewicht zwei zum Nebentypus.) Wenn wir mit  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Kurven auf  $Y(D, \mathfrak{b})$  bezeichnen, die durch Auflösung von Singularitäten entstanden sind, dann ist die Picardzahl  $\text{Pic}(Y(D, B))$  von  $Y(D, B)$  größer oder gleich

$$\sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left(\frac{D_1}{\cdot}\right)) - \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) \right\} \\ + \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} \left(1 + \left(\frac{d}{B}\right)\right) \cdot h(d) \cdot h(D/d) + 2 + l(\mathfrak{b}) .$$

Es zeigt sich, daß diese Abschätzungen für Primdiskriminanten  $D$  bereits die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel und die Picardzahl liefern (Satz 4.6):

**Satz:**

Für einen reellquadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante  $D$  ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^2(Y(D, 1), \mathbb{C})$  gleich

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \dim S_2(D, \left(\frac{D}{\cdot}\right)) .$$

Die Picardzahl von  $Y(D, 1)$  ist

$$2 + \frac{1}{2} \cdot \dim S_2(D, \left(\frac{D}{\cdot}\right)) + l(\mathcal{O}) .$$

Dabei ist  $l(\mathcal{O})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D, \mathcal{O})$ .

Damit ist die Vermutung aus [HZ<sub>1</sub>] über die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel bewiesen. Wir zeigen in Abschnitt 4.4., daß für reellquadratische Zahlkörper  $F$ , die eine Grundeinheit negativer Norm besitzen, eine einfache Beziehung zwischen der Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel von  $Y(D,B)$ , und den geometrischen Geschlechtern der Modulflächen  $Y(D,1)$  und  $Y_r(D,1)$  ( der symmetrische Modulfläche ) besteht (Satz 4.16):

**Satz:**

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper, der eine Grundeinheit  $e_0$  negativer Norm enthält, und  $p_g$  bzw.  $p_g^*$  die geometrischen Geschlechter der Hilbertschen Modulfläche  $Y(D,1)$  bzw. der symmetrischen Modulfläche  $Y_r(D,1)$ . Dann ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel von  $Y(D,B)$  gleich

$$(p_g - 2 \cdot p_g^*) + 1$$

und die Picardzahl

$$(p_g - 2 \cdot p_g^*) + 2 + l(\mathfrak{b}) .$$

Dabei ist  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D,\mathfrak{b})$ .

Für die Lefschetzzahl  $\lambda(Y(D,B))$  von  $Y(D,B)$ , d.h. der Differenz zwischen der Dimension von  $H^{1,1}(Y(D,B),\mathbb{C})$  und der Picardzahl von  $Y(D,B)$ , und die Lefschetzzahl  $\lambda(Y_r(D,B))$  gilt unter diesen Voraussetzungen (Satz 4.17 und 4.18):

**Satz:**

Falls  $F$  eine Einheit negativer Norm enthält, ist die Lefschetzzahl der Hilbertschen Modulflächen  $Y(D,B)$  gleich

$$\lambda(Y(D,B)) = p_g + 2 \cdot p_g^*$$

und die Lefschetzzahl der symmetrischen Hilbertschen Modulfläche  $Y_r(D,1)$

$$\lambda(Y_r(D,1)) = 2 \cdot p_g^* .$$

Diese Beziehungen wurden für Primdiskriminanten bereits von Hirzebruch (unveröffentlicht) vermutet.

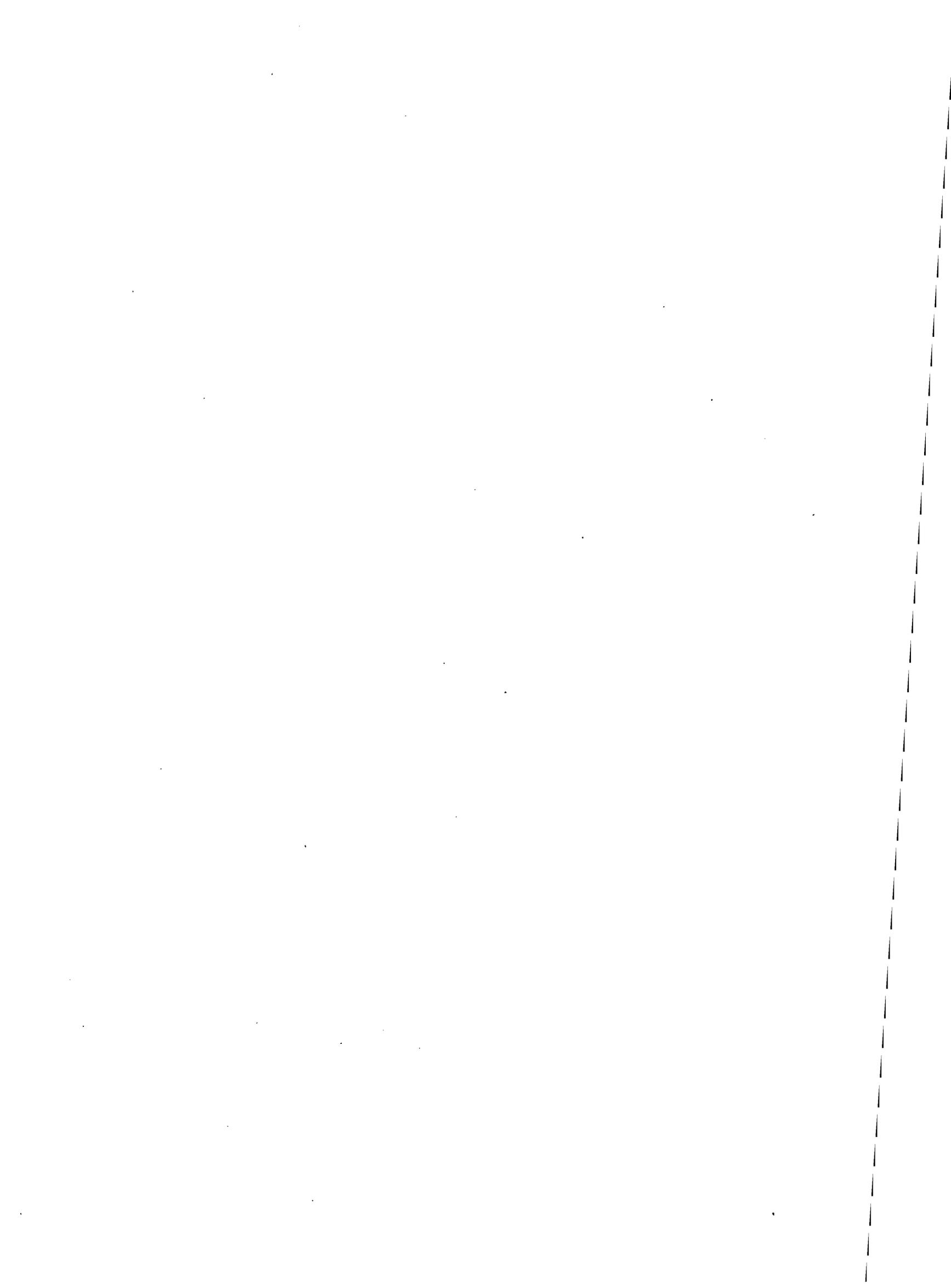
In den übrigen Fällen können wir mit Hilfe von Lemma 4.19 die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel und die Picardzahl der Hilbertschen Modulflächen  $Y_e(D,B)$  zur erweiterten Modulgruppe für alle Diskriminanten  $13 \leq D < 300$  bestimmen.

Bei diesen Untersuchungen stellt sich heraus, daß es genau eine Hilbertsche Modulfläche  $Y(D,B)$  vom allgemeinen Typ mit maximaler Picardzahl gibt. Es ist dies die Fläche  $Y(60,11)$ . Sie wird in Kapitel 5 untersucht.

In der anschließenden Tabelle werden diese Ergebnisse für die Flächen  $Y_e(D,B)$  mit  $13 \leq D < 300$  und  $B$  beliebig angegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden die Invarianten der Hilbertschen Modulflächen ( und der Modulflächen zur erweiterten Modulgruppe ) als bekannt vorausgesetzt. Diese Ergebnisse sind in [Ko] zusammengestellt. Da die Arbeit [Ko] bisher nicht veröffentlicht wurde, ist sie als Anhang in diesen Preprint aufgenommen worden.

Diese Arbeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. F. Hirzebruch. Ich danke ihm herzlich für die Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit und die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen, die ich am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn vorfand. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. G. Harder, dessen Hilfe sehr zu meinem Verständnis der grundlegenden Arbeit [HLR] beigetragen hat, und Herrn Prof. Dr. J. Schwermer für seine wertvollen Hinweise bei der endgültigen Fertigstellung dieser Arbeit. Außerdem danke ich Herrn Dipl. Math. U. Weselmann, der mir einen Beweis von Lemma 2.9 mitgeteilt hat.



## Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
Kapitel 1	
1.1. Größencharaktere	1
1.2. Darstellungstheorie von $Gl_2$	7
Kapitel 2	
2.1. Die Shimuravarietät $S_K$	13
2.2. Die Zusammenhangskomponenten gewisser Shimuravarietäten und Hilbertsche Modulflächen	15
2.3. Die Kohomologie von $S_K$	20
2.4. Die Hirzebruch-Zagier-Zykel	24
2.5. Die algebraischen Zykel	26
Kapitel 3	
3.1. Die Dimension des Raumes der K-invarianten Funktionen einer automorphen Darstellung	35
3.2. Die unverzweigt gelifteten Darstellungen	37
3.3. Die unverzweigt gelifteten CM-Formen aus $Coh_0$	46
3.4. Die CM-Formen aus $Coh_0$	53
3.5. Die unverzweigten Darstellungen aus $Coh_e$	57
Kapitel 4	
4.1. Die Kohomologie der Hilbertschen Modulflächen	58
4.2. Die algebraischen und die Hirzebruch-Zagier-Zykel im Primzahlfall	67
4.3. Bemerkungen zur Lefschetz-Zahl der Hilbertschen Modulflächen	70
4.4. Die Picardzahl gewisser Hilbertscher Modulflächen	72
Kapitel 5	
5. Die Hilbertsche Modulfläche $Y(60,11)$	87
Tabelle	94
Literaturverzeichnis	101
Anhang:	
Klassifikation Hilbertscher Modulflächen zu gewissen diskreten Erweiterungen der Modulgruppe.	



## 1.1. Größencharaktere

1.1.1. Es sei  $L$  ein algebraischer Zahlkörper. Mit  $F$  bezeichnen wir im folgenden immer einen reellquadratischen Zahlkörper der Diskriminante  $D$ . Die Grundeinheit von  $F$  bezeichnen wir mit  $e_0$ . Falls  $e_0$  positive Norm hat, wählen wir  $e_0$  immer totalpositiv, d.h. mit  $\sigma(e_0) > 0$  für die zwei reellen Einbettungen  $\sigma$  von  $F$ . Für eine Primstelle  $\mathfrak{v}$  von  $L$  bezeichnen wir mit  $L_{\mathfrak{v}}$  die Vervollständigung von  $L$  bezüglich  $\mathfrak{v}$ . Die endlichen Primstellen  $\mathfrak{v}$  von  $L$  entsprechen bijektiv den Primidealen  $\mathfrak{p}$  von  $L$ . Wir werden daher auch die Bezeichnung  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{v}}$  für eine endliche Primstelle  $\mathfrak{v}$  verwenden. In diesem Fall bezeichnen wir mit  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  den Ring der ganzen Zahlen in  $L_{\mathfrak{p}}$  und mit  $U_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$  die Einheiten von  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ . Für eine unendliche Primstelle  $\mathfrak{v}$  definieren wir

$$U_{\mathfrak{v}} := \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{für } L_{\mathfrak{v}} \cong \mathbb{R} \\ \mathbb{C}^* & \text{für } L_{\mathfrak{v}} \cong \mathbb{C} \end{cases} .$$

Ein  $L$ -Adel  $a = (a_{\mathfrak{v}})$  ist dann ein Element aus dem Produkt der lokalen Körper  $L_{\mathfrak{v}}$  über alle Primstellen  $\mathfrak{v}$  von  $L$ , so daß für fast alle endlichen Stellen  $\mathfrak{p}$  aus  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$  ist. Den Ring der  $L$ -Adele bezeichnen wir mit  $A_L$ . Für eine Primstelle  $\mathfrak{v}$  von  $L$  fassen wir  $L_{\mathfrak{v}}$  in kanonischer Weise als Unterring von  $A_L$  auf. Die  $\mathbb{Q}$ -Adele bezeichnen wir mit  $A := A_{\mathbb{Q}}$  und die endlichen  $\mathbb{Q}$ -Adele mit  $A_{\mathbb{F}}$ . Die invertierbaren Elemente von  $A_L$  bilden die Idelegruppe  $I_L$ . Die multiplikative Gruppe  $L^*$  läßt sich in kanonischer Weise in  $I_L$  einbetten, und wir bezeichnen mit  $C_L := I_L/L^*$  die Idelklassengruppe von  $L$ . Auf  $A_L$  ( und damit auf  $I_L$  ) wird durch die beschränkte Produkttopologie eine Topologie erklärt ( siehe [W], I, 1.1. ).

1.1.2. Es sei  $K$  eine endliche Galoiserweiterung von  $L$ . Eine Primstelle  $\mathfrak{w}$  von  $K$  liegt über einer Primstelle  $\mathfrak{v}$  von  $L$ , wenn  $\mathfrak{w}$  die Bewertung  $\mathfrak{v}$  fortsetzt. Wir schreiben dafür  $\mathfrak{w}|\mathfrak{v}$ . Wir benützen die Notation  $\mathfrak{p} < \infty$  für die endlichen und  $\mathfrak{p} = \infty$  für die unendlichen Primstellen. Die Relativnorm von  $K_{\mathfrak{w}}$  über  $L_{\mathfrak{v}}$  und von  $K$  über  $L$  wird mit  $N_{K_{\mathfrak{w}}/L_{\mathfrak{v}}}$  beziehungsweise  $N_{K/L}$  bezeichnet. Das Produkt der Relativ-

normen über alle Primstellen  $\mathfrak{p}$  von  $K$  definiert einen Homomorphismus von  $I_K$  nach  $I_L$ , der auf  $K^*$  mit  $N_{K/L}$  übereinstimmt. Wir bezeichnen daher diesen Homomorphismus und den durch ihn definierten Homomorphismus der Idealklassengruppen ebenfalls mit  $N_{K/L}$ .

Die Galoisgruppe  $G = \text{Gal}(K/L)$  operiert auf  $I_K$  beziehungsweise auf  $C_K$ . Für den Fixteil dieser Operation gilt:

$$I_K^G = I_L \text{ und } C_K^G = C_L$$

(siehe z.B.: [N], III, Satz (2.5) und (2.7)). Dabei haben wir  $I_L$  und  $C_L$  durch die kanonische Einbettung  $I_L \rightarrow I_K$  als Untergruppen von  $I_K$  bzw.  $C_K$  aufgefaßt.

1.1.3. Mit  $J_L$  bezeichnen wir die Idealklassengruppe von  $L$  und mit  $h(L) := |J_L|$  die Klassenzahl von  $L$ . Für den reellquadratischen Zahlkörper  $F$  der Diskriminante  $D$  setzen wir  $h(D) := h(F)$ . Der Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} I_L & \longrightarrow & J_L \\ (a_{\mathfrak{p}}) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p} < \infty} (p_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})} \end{array}$$

definiert einen Isomorphismus (siehe z.B.: [N], III, Satz (2.3))

$$(1.1) \quad C_L / \left( \prod_{\mathfrak{p} < \infty} U_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} | \infty} L_{\mathfrak{p}}^* \right) \cong J_L$$

Für den reellquadratischen Zahlkörper  $F$  bezeichnen wir mit  $\tilde{J}_F$  die Idealklassengruppe von  $F$  im engeren Sinne und mit  $\tilde{h}(D)$  die Klassenzahl im engeren Sinne. Dann definiert der Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} I_F & \longrightarrow & \tilde{J}_F \\ (a_{\mathfrak{p}}) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p} < \infty} (p_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})} \end{array}$$

einen Isomorphismus

$$(1.2) \quad C_F / \left( \prod_{\mathfrak{p} < \infty} U_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} | \infty} U_{\mathfrak{p}} \right) \cong \tilde{J}_F$$

1.1.4. Ein Größencharakter von  $L$  ist ein stetiger Homomorphismus  $\eta: I_L \longrightarrow \mathbb{C}^*$ , der trivial auf  $L^*$  ist. Nach (1.1) entsprechen die Idealklassencharaktere von  $L$  gerade den Größencharakteren von  $L$ , die trivial auf  $\prod U_{\mathfrak{p}} \times \prod L_{\mathfrak{p}}^*$  sind. Für einen reellquadratischen Zahlkörper  $F$  entsprechen die Charaktere der Idealklassengruppe im engeren Sinne den Größencharakteren von  $F$  die trivial auf  $\prod U_{\mathfrak{p}}$  sind. Eine besondere Rolle spielen in diesem Fall die Geschlechtsklassencharaktere, d.h. die Charaktere von  $\bar{J}_F$  der Ordnung zwei. Sie sind gerade die  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ -invarianten Charaktere von  $\bar{J}_F$ . Sie werde z.B. in [Z], §12 beschrieben. Insbesondere gibt es  $2^{t(D)-1}$  Geschlechtsklassencharaktere ( wir bezeichnen mit  $t(D)$  die Anzahl der Primteiler von  $D$ ).

**Definition:**

Für eine endliche Primstelle  $\mathfrak{p}$  eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  und einen Charakter  $\lambda$  von  $K_{\mathfrak{p}}^*$  sei  $\alpha$  die kleinste natürliche Zahl, für die  $\lambda$  trivial auf  $U_{\mathfrak{p}}^{\alpha} := 1 + \mathfrak{p}^{\alpha}$  ( $U_{\mathfrak{p}}^0 := U_{\mathfrak{p}}$ ) ist. Dann nennt man das Ideal  $\mathfrak{p}^{\alpha}$  den Führer des Charakters  $\lambda$  und schreibt  $\text{cond}(\lambda) := \mathfrak{p}^{\alpha}$ . Für  $K = \mathbb{Q}$  schreiben wir auch  $\text{cond}(\lambda) := p^{\alpha}$  statt  $(p)^{\alpha}$ . Der Führer eines Größencharakters von  $K$  ist dann das Produkt der Führer der lokalen Charaktere über die endlichen Primstellen von  $K$ .

Für eine abelsche Erweiterung  $K$  über  $L$  haben wir den Reziprozitätsisomorphismus ([N], III, 6.12)

$$C_L / N_{K/L} C_K \cong \text{Gal}(K/L) .$$

Insbesondere ist für eine quadratische Erweiterung  $N_{K/L} C_K$  eine Untergruppe vom Index zwei in  $C_L$ . Wir bezeichnen in diesem Fall mit  $\epsilon_{K/L}$  den nicht-trivialen Größencharakter von  $L$ , der trivial auf  $N_{K/L} C_K$  ist. Analog definieren wir  $\epsilon_{E_1/E}$  für eine quadratische Erweiterung lokaler Körper.

1.1.5. Zum Abschluß dieses Abschnitts beweisen wir einige Aussagen über die Existenz von lokalen Charakteren und Größencharakteren, die gewisse Bedingungen erfüllen.

**Lemma 1.1:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$  mit der Grundeinheit  $e_0$  und  $N(e_0) = 1$ . Dann gibt es eine in  $F$  verzweigte Primstelle  $q$  von  $\mathbb{Q}$ , so daß für die Primstelle  $q$  von  $F$  über  $q$  ein Charakter  $\mu$  von  $F_q^*$  der Ordnung 2,

$$\mu: F_q^* \longrightarrow \{\pm 1\}$$

mit  $\mu(e_0) = -1$  existiert.

**Beweis:** Nach [Kol], Satz 2, gibt es einen Primteiler  $q$  von  $D$ , der die Norm  $N(e_0+1)$  teilt. Aus  $N(e_0+1) \cdot N(e_0-1) = N(e_0^2-1)$  folgt, daß es eine natürliche Zahl  $\alpha \geq 1$  mit

$$(1.3) \quad \begin{aligned} q^\alpha & \mid N(e_0^2-1), \text{ aber} \\ q^\alpha & \nmid N(e_0-1). \end{aligned}$$

Für die Primstelle  $q$  von  $F$  über  $q$  gilt  $q^2 = (q)$  und  $N(q) = q$ . Nach (1.3) gilt daher

$$\begin{aligned} e_0^2 & \equiv 1 \pmod{q^\alpha}, \text{ aber} \\ e_0 & \not\equiv 1 \pmod{q^\alpha}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit  $U_q^\alpha$  die Untergruppe  $1+q^\alpha$  von  $U_q$ . Der Quotient  $U_q/U_q^\alpha$  ist eine endliche, abelsche Gruppe, in der die Klasse  $[e_0]$  die Ordnung zwei hat. Wir wählen einen Charakter  $\tilde{\mu}: U_q/U_q^\alpha \longrightarrow \{\pm 1\}$  mit  $\tilde{\mu}([e_0]) = -1$ . Verbunden mit der Projektion

$$U_q \longrightarrow U_q/U_q^\alpha$$

definiert  $\tilde{\mu}$  einen Charakter von  $U_q$ . Jedes Element  $x$  aus  $F_q^*$  läßt sich schreiben als  $x = \tilde{w}^t \cdot u$  für eine lokale Uniformisierende  $\tilde{w}$  von  $q$ ,  $t$  aus  $\mathbb{Z}$  und  $u$  aus  $U_q$ . Wir setzen  $\mu$  durch  $\mu(x) := \tilde{\mu}(u)$  auf  $F_q^*$  fort.  $\square$

**Lemma 1.2:**

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D$ . Für die endlichen Stellen  $\rho$  von  $F$  seien Charaktere  $c_\rho$  von  $U_\rho$  und für die unendlichen Stellen  $\mathfrak{o}_1$  und  $\mathfrak{o}_2$  Charaktere  $c_{\mathfrak{o}_1}$  und  $c_{\mathfrak{o}_2}$  von  $\mathbb{R}^+$  vorgegeben. Dann gibt es einen Größencharakter

$$(1.4) \quad \eta : C_F \longrightarrow \mathbb{C}^* \text{ mit} \\ \eta|_{U_\mathfrak{o}} = c_\mathfrak{o} \quad \text{für alle Stellen } \mathfrak{o} \text{ von } F,$$

genau dann, wenn

$$\prod_{\mathfrak{o}} c_\mathfrak{o}(e) = 1$$

für alle totalpositiven Einheiten  $e$  von  $F$  gilt. In diesem Fall gibt es  $\bar{h}(D)$  Charaktere, die (1.4) erfüllen.

**Beweis:** Für ein vollständiges Repräsentantensystem  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{\bar{h}}$  ( $\bar{h} = \bar{h}(D)$ ) der Idealklassen von  $F$  im engeren Sinne wählen wir endlich  $F$ -Ideale  $b_1, \dots, b_{\bar{h}}$  mit

$$(1.5) \quad b_i \cdot (\prod_{\rho} \mathcal{O}_\rho \cdot \mathbb{R}^2) \cap F = \mathfrak{b}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, \bar{h}.$$

Dann ist nach (1.2)

$$I_F = \bigcup_{i=1}^{\bar{h}} b_i \cdot F^* \cdot (\prod U_\mathfrak{o})$$

und

$$C_F = \bigcup_{i=1}^{\bar{h}} b_i \cdot \left\{ \prod U_\mathfrak{o} / (F^* \cap \prod U_\mathfrak{o}) \right\}.$$

Wir können einen Größencharakter  $\eta$ , der (1.4) erfüllt, genau dann konstruieren, wenn

$$\prod_{\mathfrak{o}} c_\mathfrak{o}(e) = 1$$

erfüllt ist für alle  $e$  aus  $F^* \cap \prod U_{\mathfrak{p}}$ , das heißt für alle totalpositiven Einheiten  $e$  von  $F$ . Der Quotient zweier Größencharaktere, die (1.4) erfüllen, kann mit Hilfe von (1.2) als Charakter der Idealklassengruppe im engeren Sinne aufgefaßt werden. Wie wir gesehen haben gibt es genau  $\bar{h}(D)$  solche Charaktere. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Mit Hilfe des Isomorphismus (1.1) beweist man analog.

**Lemma 1.3:** Es sei  $L$  ein algebraischer Zahlkörper. Für die endlichen Primstellen seien lokale Charaktere  $c_{\mathfrak{p}}$  von  $U_{\mathfrak{p}}$  und für die unendlichen Primstellen Charaktere  $c_{\mathfrak{v}}$  von  $L_{\mathfrak{v}}^*$  gegeben. Dann gibt es einen Größencharakter  $\eta$  von  $L$  mit

$$\eta|_{U_{\mathfrak{p}}} = c_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle endlichen Primstellen } \mathfrak{p} \text{ von } L \text{ und}$$

$$\eta|_{F_{\mathfrak{v}}^*} = c_{\mathfrak{v}} \quad \text{für alle unendlichen Primstellen } \mathfrak{v} \text{ von } L,$$

genau dann, wenn

$$\prod c_{\mathfrak{v}}(E) = 1$$

für alle Einheiten  $E$  von  $L$  gilt. In diesem Fall gibt genau es  $h(L)$  solche Charaktere.

1.2. Darstellungstheorie von  $Gl_2$ 

1.2.1. Es sei  $L$  ein algebraischer Zahlkörper. Mit  $G$  bezeichnen wir die über  $\mathbb{Q}$  definierte algebraische Gruppe  $\text{Res}_{L/\mathbb{Q}} Gl_2$ , die durch Weil-Restriktion aus  $Gl_2$  über  $L$  entsteht (siehe [W], Kap. 1.3). Das Zentrum von  $G$  bezeichnen wir mit  $Z$ . Dann ist

$$Z(A) = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right] \mid a \in I_L \right\},$$

und wir können einen Größencharakter  $\psi$  von  $L$  durch

$$\psi \left( \left[ \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right] \right) := \psi(a)$$

auch als Charakter von  $Z(\mathbb{Q}) \backslash Z(A)$  auffassen. Für einen Größencharakter  $\psi$  von  $L$  definieren wir den Hilbertraum  $L^2(\psi) := L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A), \psi)$  der meßbaren, komplexwertigen Funktionen  $f$ , für die gilt

$$(1.6) \quad (1) \quad f(z \cdot g) = \psi(z) \cdot f(g) \text{ für alle } g \in G(A) \text{ und } z \in Z(A), \text{ und} \\ (2) \quad \int_{Z(A) \cdot G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)} |f(g)|^2 \cdot |\psi(\det(g))|^{-1} dg < \infty.$$

Die Gruppe  $G(A)$  operiert durch die rechtsreguläre Darstellung  $R^\psi(g)$  unitär auf  $L^2(\psi)$ . Nach [Ge], §8 (siehe auch [Sch], 1.6.) läßt sich  $R^\psi$  als direkte Hilbertsumme von irreduziblen unitären Darstellungen  $\pi^j$  (mit Multiplizität eins) und stetigen Integralen von unitären Darstellungen  $\pi^{k,s}$  zerlegen:

$$(1.7) \quad R^\psi(g) = \left( \bigoplus_j \pi^j \right) \oplus \left( \bigoplus_k \int \pi^{k,s} ds \right).$$

**Definition:**

Eine *automorphe Darstellung* ist eine irreduzible, unitäre Darstellung  $\pi: G(A) \longrightarrow \text{Aut}(H_\pi)$ , die, für einen Größencharakter  $\psi$  von  $L$ , zu einer der Darstellungen  $\pi^j$  oder  $\pi^{k,s}$  äquivalent ist. Wir nennen  $\omega_\pi := \psi$  den zentralen Charakter von  $\pi$ .

**Definition:**

Eine Funktion  $f \in L^2(\psi)$  heißt *cuspidal*, wenn sie

$$\int_{\mathbb{Q} \setminus A} f \left( \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g \right) dx = 0 \text{ für fast alle } g \text{ aus } G(A) \text{ erfüllt.}$$

Wir benutzen die Bezeichnung  $L_0^2(\psi)$  für den Unterraum der cuspidalen Formen in  $L^2(\psi)$ . Der Raum  $L_0^2(\psi)$  ist  $G(A)$ -invariant unter  $R^\psi$ , und wir bezeichnen mit  $R_0^\psi(g)$  die Darstellung von  $G(A)$  auf  $L_0^2(\psi)$ .

**Lemma 1.4:** ([Ha], 3.1.1. und 3.1.2.)

Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$ , die diskret in der Zerlegung (1.7) vorkommt, gilt:

- (1) Wenn  $H_\pi$  endlich-dimensional ist, dann ist  $H_\pi$  ein-dimensional, und die Darstellung  $\pi: G(A) \rightarrow \mathbb{C}^*$  faktorisiert über die Determinante, d.h.  $\pi(g) = \eta(\det(g))$  für einen Größencharakter  $\eta$  von  $L$ .
- (2) Wenn  $H_\pi$  unendlich-dimensional ist, dann ist  $\pi$  cuspidal, d.h.  $H_\pi$  ist ein irreduzibler Unterraum von  $L_0^2(\psi)$ .

Die  $G(A)$ -Module  $H_\pi$  können in ein beschränktes Tensorprodukt

$$H_\pi = \hat{\otimes}_{\mathfrak{p}} H_{\mathfrak{p}}$$

von  $GL_2(L_{\mathfrak{p}})$ -Modulen  $H_{\mathfrak{p}}$  zerlegt werden. Dabei läßt  $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$  für fast alle endliche Primstellen  $\mathfrak{p}$  von  $L$  einen ein-dimensionalen Unterraum von  $H_{\mathfrak{p}}$  fest. Das beschränkte Tensorprodukt  $\hat{\otimes}_{\mathfrak{p}} H_{\mathfrak{p}}$  besteht dann aus allen  $(h_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  mit  $h_{\mathfrak{p}} \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ -invariant für fast alle  $\mathfrak{p}$ . Wir schreiben  $\pi$  als

$$(1.8) \quad \pi = \hat{\otimes}_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}$$

mit lokalen Darstellungen  $\pi_{\mathfrak{p}}$  von  $GL_2(L_{\mathfrak{p}})$ . Diese Zerlegung ist bis auf Äquivalenz eindeutig. Wir benutzen die Abkürzungen

$$\pi_f := \hat{\otimes}_{\mathfrak{p} < \infty} \pi_{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad \pi_{\infty} := \hat{\otimes}_{\mathfrak{p} | \infty} \pi_{\mathfrak{p}} .$$

1.2.2. Wir werden nun die lokalen Darstellungen, die in (1.8) auftreten, beschreiben. (siehe [GL], Appendix B). Dazu setzen wir  $K := L_v$ .

**Definition:**

Eine komplexwertige Funktion  $f$  auf  $GL_2(K)$  heißt *glatt*, wenn sie vom Typ  $C^\infty$  für einen archimedischen Körper  $K$ , beziehungsweise lokalkonstant für einen nicht-archimedischen Körper ist.

Für zwei Charaktere  $\mu_1$  und  $\mu_2$  von  $K^*$  bezeichnen wir mit  $\pi(\mu_1, \mu_2)$  die Darstellung von  $GL_2(K)$  durch Rechtstranslation auf dem Raum der glatten, komplexwertigen Funktionen  $f$  auf  $GL_2(K)$ , die

$$f(a \cdot n \cdot g) = \mu_1(u) \cdot \mu_2(v) \cdot \left| \frac{u}{v} \right|^{1/2} \cdot f(g),$$

für alle  $a = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ ,  $n = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $g$  beliebig aus  $GL_2(K)$ , erfüllen.

Falls die Darstellung  $\pi(\mu_1, \mu_2)$  reduzibel ist, hat sie genau einen unendlich-dimensionalen, irreduziblen Quotienten. Wir bezeichnen diese Darstellung mit  $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ .

**Definition:**

Die irreduziblen Darstellungen  $\pi(\mu_1, \mu_2)$  heißen *Hauptseriendarstellungen*. Die Darstellungen  $\sigma(\mu_1, \mu_2)$  heißen *diskrete Seriendarstellungen* für  $K$  archimedisch, beziehungsweise *spezielle Darstellungen* für  $K$  nicht-archimedisch. Eine irreduzible unitäre Darstellung  $\pi$  auf einem komplexen Vektorraum  $H$  heißt *supercuspidal*, wenn es für alle  $h$  aus  $H$  eine offene kompakte Untergruppe  $U$  von  $N := \left( \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in K \right)$  gibt, mit

$$\int_U \pi(n)h \, dn = 0 \quad .$$

Man kann für eine quadratische Körpererweiterung  $K_1$  von  $K$  und einen Charakter  $\lambda$  auf  $K_1^*$  eine Weil-Darstellung  $\pi(\lambda)$  von  $GL_2(K)$  konstruieren. Diese Konstruktion ist zum Beispiel in [Ge], §7 beschrieben. Falls  $\lambda$  invariant unter der Operation von  $\text{Gal}(K_1/K)$  ist, d.h. falls  $\lambda = \eta \circ N_{K_1/K}$  für einen Charakter  $\eta$  von  $K^*$  gilt, ist  $\pi(\lambda)$  äquivalent zu der Darstellung  $\pi(\eta, \eta \cdot \epsilon_{K_1/K})$ , sonst ist  $\pi(\lambda)$  supercuspidal. Eine supercuspidale Darstellung, die nicht äquivalent zu einer Weil-Darstellung ist, heißt *exzeptionell*. Exzeptionelle Darstellungen von  $GL_2(K)$  treten nur für nicht-archimedische lokale Körper  $K$  mit Restklassenkörpercharakteristik zwei auf (siehe [GL], Appendix B). Im Fall  $K = \mathbb{Q}_2$  gibt es, bis auf Äquivalenz, genau vier verschieden exzeptionelle Darstellungen. Sie wurden von Nobs in [No] konstruiert.

**Lemma 1.6:** ([Ge], Th. 4.21)

Es sei  $\pi$  eine cuspidale automorphe Darstellung von  $G(A)$ ,  $\pi = \otimes \pi_v$ . Dann ist für alle Stellen  $v$  die Darstellung  $\pi_v$  supercuspidal oder äquivalent zu einer irreduziblen Darstellung  $\pi(\mu_1, \mu_2)$  oder  $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ .

Für eine quadratische Erweiterung algebraischer Zahlkörper  $L_1$  von  $L$  definiert ein Größencharakter  $\lambda$  von  $L_1$  eine irreduzible Darstellung  $\pi(\lambda)$  von  $GL_2(A_{L_1})$  (siehe [Ge], §7, B). Es gilt:

**Lemma 1.7:** ([Ge], Th. 7.11)

Falls  $\lambda$  nicht über die Norm  $N_{L_1/L}$  faktorisiert, ist  $\pi(\lambda)$  cuspidal.

1.2.3. Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  und einen Größencharakter  $\eta$  von  $L$  bezeichnen wir mit  $\pi \otimes \eta$  die automorphe Darstellung  $(\pi \otimes \eta)(g) := \pi(g) \cdot \eta(\det(g))$ .

**Definition:**

Eine cuspidale automorphe Darstellung  $\pi$  heißt *CM-Form*, wenn es einen nicht-trivialen Größencharakter  $\eta$  von  $L$  gibt mit

$$\pi \cong \pi \otimes \eta .$$

**Lemma 1.8:** ([GL], Appendix C, (2.1))

Eine automorphe Darstellung  $\pi$  ist genau dann eine CM-Form, wenn es eine quadratische Erweiterung  $L_1$  von  $L$  und einen Größencharakter  $\lambda$  von  $L_1$  mit  $\pi \cong \pi(\lambda)$  gibt. In diesem Fall gilt  $\pi \otimes \eta \cong \pi$  für einen Größencharakter  $\eta$  von  $L$  genau dann, wenn  $\eta$  trivial auf  $N_{L_1/L} C_{L_1}$  ist.

1.2.4. Für eine quadratische Erweiterung algebraischer Zahlkörper  $E$  über  $L$  bezeichnen wir mit  $(\pi \times E)$  die Liftung einer automorphen Darstellung  $\pi$  von  $GL_2(A_L)$  zu einer automorphen Darstellung von  $GL_2(A_E)$ . Zu der Definition der Liftung automorpher Darstellungen verweisen wir auf [L], Chapt. 2 und [Sh]. Es gilt:

**Lemma 1.9:** ([Sh], Th. 3)

Es sei  $E$  über  $L$  eine quadratische Erweiterung algebraischer Zahlkörper, dann gilt:

- (1) Jede automorphe Darstellung  $\pi$  hat genau eine Liftung.
- (2) Eine automorphe Darstellung  $\Pi$  von  $GL_2(A_E)$  ist genau dann die Liftung einer automorphen Darstellung von  $GL_2(A_L)$ , wenn sie  $\text{Gal}(E/L)$ -invariant ist.
- (3) Die Darstellungen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  haben genau dann die gleiche Liftung, wenn  $\pi_1 = \pi_2$  oder  $\pi_1 = \pi_2 \otimes \epsilon_{E/L}$  gilt.

Wir benötigen die folgenden Aussagen über die Liftung lokaler Darstellungen:

**Lemma 1.10:** ([Sh], Prop. 1 )

Es seien  $E$  und  $L$  wie in Lemma 1.9,  $\mathfrak{v}$  eine Primstelle von  $L$  und  $\mathfrak{w}$  eine Primstelle von  $E$  über  $\mathfrak{v}$ . Dann gilt:

(1)  $(\pi \times E)_{\mathfrak{w}} = \pi_{\mathfrak{w}}$  falls  $\mathfrak{v}$  in  $E$  zerfällt.

(2) Falls  $\mathfrak{v}$  nicht zerfällt dann gilt,

(2.1) für  $\pi_{\mathfrak{v}}$  nicht supercuspidal und  $N := N_{E_{\mathfrak{w}}/L_{\mathfrak{v}}}$ ,

$(\pi \times E)_{\mathfrak{w}} = \pi(\mu_1 \circ N, \mu_2 \circ N)$  für  $\pi_{\mathfrak{v}} = \pi(\mu_1, \mu_2)$  und

$(\pi \times E)_{\mathfrak{w}} = \sigma(\mu_1 \circ N, \mu_2 \circ N)$  für  $\pi_{\mathfrak{v}} = \sigma(\mu_1, \mu_2)$ .

(2.2) Falls  $\pi_{\mathfrak{v}} = \pi(\lambda)$  für einen Charakter  $\lambda$  einer quadratischen Körpererweiterung  $K$  von  $L_{\mathfrak{v}}$  ist, gilt

$(\pi \times E)_{\mathfrak{w}} = \pi(\lambda \circ N_{E_{\mathfrak{w}}/K/K})$  für  $E_{\mathfrak{w}} \neq K$  und

$(\pi \times E)_{\mathfrak{w}} = \pi(\lambda, \lambda')$  für  $E_{\mathfrak{w}} = K$  und  $\lambda'$  den bezüglich  $L_{\mathfrak{v}}$  konjugierten Charakter von  $E_{\mathfrak{w}}$ .

1.2.5. Der Führer einer automorphen Darstellung  $\pi$  von  $GL_2(A_L)$  wird z.B. in [Ge], 4.25 definiert. Eine lokale Darstellung  $\pi_{\mathfrak{w}}$  ist genau dann unverzweigt, wenn sie äquivalent zu einer Hauptseriendarstellung  $\pi(\mu, \nu)$  mit  $\mu$  und  $\nu$  unverzweigt, d.h. trivial auf  $U_{\mathfrak{w}}$ , ist ([Ge], Th. 4.23.).

2.1. Die Shimuravarietät  $S_K$ 

2.1.1. Für den reellquadratischen Zahlkörper  $F$  der Diskriminante  $D$  bezeichnen wir, wie im Abschnitt 1.2, mit  $G$  die über  $\mathbb{Q}$  definierte, reduktive algebraische Gruppe  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \text{Gl}_2$ . Die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe  $G(\mathbb{R})$  der reellen Punkte von  $G$  bezeichnen wir mit  $G^0(\mathbb{R})$ . Im folgenden ist  $K$  immer eine offene kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ . Dann bestimmt der Homomorphismus

$$\begin{aligned} h: \mathbb{C}^* &\longrightarrow G(\mathbb{R}) \\ a + i \cdot b &\longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine quasiprojektive Varietät  $S_K := S_K(G, h)$ , die in natürlicher Weise über  $\mathbb{Q}$  definiert ist (siehe [HLR], 1.1 und [De<sub>1</sub>], §3). Wir bezeichnen mit

$$K_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in G^0(\mathbb{R}) \right\}$$

den Zentralisator von  $h$ . Dann gilt für die komplexwertigen Punkte von  $S_K$

$$(2.1) \quad S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K \cdot K_\infty.$$

Die quasiprojektive Varietät  $S_K$  besitzt eine natürliche Kompaktifizierung  $\bar{S}_K$  über  $\mathbb{Q}$ , die Satake-Baily-Borel Kompaktifizierung. Die projektive Varietät  $\bar{S}_K$  ist der Zariski-Abschluß des Bildes von  $S_K$  unter einer plurikanonischen Einbettung. Das Komplement von  $S_K$  in  $\bar{S}_K$  besteht aus endlich vielen Punkten, den Spitzen. Falls  $K$  fixpunktfrei auf  $G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K_\infty$  operiert, ist  $S_K(\mathbb{C})$  glatt. Die Auflösung der Spitzensingularitäten von  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  wird in [HLR], §1 beschrieben.

2.1.2. Die Zusammenhangskomponenten von  $S_K(\mathbb{C})$  werden zum Beispiel in [R], 2.24 beschrieben. Die Determinantenabbildung

$$\det : S_K(\mathbb{C}) \longrightarrow C_F / (\det(K \cdot K_\infty))$$

bildet die Menge der Zusammenhangskomponenten von  $S_K(\mathbb{C})$  bijektiv auf die endliche Menge  $C_F / (\det(K \cdot K_\infty))$  ab. Es gibt eine endliche Menge  $C$  in  $G(A_F)$  mit ([BJ], 4.3.)

$$(2.2) \quad G(A) = \bigcup_{c \in C} G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K \cdot G^0(\mathbb{R}).$$

Für  $c$  aus  $C$  setzen wir

$$(2.3) \quad \Gamma_c := G(\mathbb{Q}) \cap (c \cdot K \cdot c^{-1} \cdot G^0(\mathbb{R})),$$

dann ist

$$(2.4) \quad G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K \cdot K_\infty \cong \dot{\bigcup}_{c \in C} \Gamma_c \backslash G^0(\mathbb{R}) / K_\infty.$$

Der Homomorphismus von  $GL_2(\mathbb{R})$  nach  $\mathbb{C}^*$ , der einer Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  die komplexe Zahl  $(a \cdot i + b) / (c \cdot i + d)$  zuordnet, definiert einen Isomorphismus  $G^0(\mathbb{R}) / K_\infty \cong \mathbb{H}^2$ . Die Operation von  $\Gamma_c$  auf  $\mathbb{H}^2$  unter diesem Isomorphismus läßt sich nun wie folgt beschreiben. Wir fixieren eine Einbettung von  $F$  in  $\mathbb{R}$  und bezeichnen mit  $a \rightarrow a'$  die über  $\mathbb{Q}$  konjugierte Einbettung. Dann operiert die Untergruppe  $\Gamma_c$  von  $G(\mathbb{Q}) \cong GL_2(F)$  als

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left( \frac{a \cdot z_1 + b}{c \cdot z_1 + d}, \frac{a' \cdot z_2 + b'}{c' \cdot z_2 + d'} \right)$$

auf  $\mathbb{H}^2$ . Aus (2.4) folgt dann:

$$(2.6) \quad G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K \cdot K_\infty \cong \dot{\bigcup}_{c \in C} \Gamma_c \backslash \mathbb{H}^2.$$

## 2.2. Die Zusammenhangskomponenten gewisser Shimuravarietäten und Hilbertsche Modulflächen

2.2.1. Für den reellquadratischen Zahlkörper  $F$  der Diskriminante  $D$  mit Grundeinheit  $e_0$  benutzen wir die Bezeichnungen:

- $\mathcal{O}$  für den Ring der ganzen Zahlen von  $F$ ,
- $\mathfrak{b}$  für ein Ideal in  $\mathcal{O}$ ,
- $U$  für die Einheitengruppe von  $\mathcal{O}$ ,
- $U^+$  für die totalpositiven Einheiten aus  $U$  und
- $U^2$  für die Einheitenquadrate in  $U$ .

Die Gruppe der Einheitenquadrate  $U^2$  ist eine Untergruppe der totalpositiven Einheiten  $U^+$ . Für ihren Index in  $U^+$  gilt ( $N := N_{F/\mathbb{Q}}$ )

$$[U^+ : U^2] = \begin{cases} 1 & \text{falls } N(e_0) = -1 \\ 2 & \text{falls } N(e_0) = 1 \end{cases} .$$

Wir definieren die Modulgruppe  $\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  durch

$$\tilde{\Gamma}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(F) \mid a, d \in \mathcal{O}, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b} \text{ und } a \cdot d - b \cdot c = 1 \right\} \text{ und}$$

$$\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) := \tilde{\Gamma}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) / \text{Zentrum}(\tilde{\Gamma}(\mathcal{O}, \mathfrak{b})) .$$

Die erweiterte Modulgruppe  $\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  definieren wir durch

$$\tilde{\Gamma}_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(F) \mid a, d \in \mathcal{O}, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b} \text{ und } a \cdot d - b \cdot c \in U^+ \right\} \text{ und}$$

$$\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) := \tilde{\Gamma}_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) / \text{Zentrum}(\tilde{\Gamma}_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b})) .$$

Die Determinantenabbildung  $\det: \tilde{\Gamma}_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) \longrightarrow U^+$  liefert einen Isomorphismus zwischen  $\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) / \Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  und  $U^+ / U^2$ . Es ist also  $\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  gleich  $\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  falls  $N(e_0) = -1$ , beziehungsweise eine Untergruppe vom Index zwei in  $\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  falls  $N(e_0) = 1$  ist.

Wir bezeichnen mit  $X(D, \mathfrak{b})$  und  $X_e(D, \mathfrak{b})$  die quasi-projektiven komplexen Flächen  $\Gamma(0, \mathfrak{b}) \setminus \mathbb{H}^2$  bzw.  $\Gamma_e(0, \mathfrak{b}) \setminus \mathbb{H}^2$ . Sie können durch Hinzufügen von endlich vielen Punkten, den Spitzen, zu projektiven, normalen Flächen  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  bzw.  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$  kompaktifiziert werden. Die Flächen  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  und  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$  haben endlich viele Singularitäten, die durch die elliptischen Fixpunkte von  $\Gamma(0, \mathfrak{b})$  bzw.  $\Gamma_e(0, \mathfrak{b})$  und die Spitzen gegeben sind. Die Auflösung der Spitzensingularitäten wurde in [Hi<sub>1</sub>], §2 beschrieben. Die glatten projektiven komplexen Flächen, die durch minimale Desingularisierung von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  und  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$  entstehen, bezeichnen wir mit  $Y(D, \mathfrak{b})$  und  $Y_e(D, \mathfrak{b})$ .

**Definition:**

Die Flächen  $Y(D, \mathfrak{b})$  und  $Y_e(D, \mathfrak{b})$  heißen *Hilbertsche Modulflächen* (bzw. Hilbertsche Modulflächen zur erweiterten Modulgruppe) zur Diskriminante  $D$  und zum Ideal  $\mathfrak{b}$ .

Falls  $\mathfrak{b}_1$  und  $\mathfrak{b}_2$  zum selben Idealgeschlecht gehören, sind die Flächen  $Y(D, \mathfrak{b}_1)$  und  $Y(D, \mathfrak{b}_2)$  bzw.  $Y_e(D, \mathfrak{b}_1)$  und  $Y_e(D, \mathfrak{b}_2)$  isomorph. Da das Geschlecht eines Ideals  $\mathfrak{b}$  nur von seiner Norm  $B := N(\mathfrak{b})$  abhängt, benutzen wir auch die Bezeichnungen  $Y(D, B)$  für  $Y(D, \mathfrak{b})$ , bzw.  $Y_e(D, B)$  für  $Y_e(D, \mathfrak{b})$ . Dabei wählen wir  $\mathfrak{b}$  immer so, daß  $B = N(\mathfrak{b})$  teilerfremd zu  $D$  ist.

2.2.2. Wir bezeichnen mit  $K_0$  die maximal kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ , gegeben durch

$$(2.7) \quad K_0 := \prod_{\mathfrak{p} < \infty} \text{Gl}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

Wie wir in Abschnitt 2.1.2. gesehen haben, gibt es dann eine Bijektion zwischen den Zusammenhangskomponenten der komplexwertigen Punkte  $S_{K_0}(\mathbb{C})$  von  $S_{K_0}$  und der endlichen Menge  $C_F / (\prod_{\mathfrak{v}} U_{\mathfrak{v}})$ . Nach (1.2) ist diese als Gruppe

isomorph zu der Idealklassengruppe im engeren Sinne  $\tilde{J}_F$ . Wir können nun die Zusammenhangskomponenten von  $S_{K_0}(\mathbb{C})$  wie folgt beschreiben:

**Lemma 2.1:**

Es sei  $K_0$  die maximal kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$  und  $\mathfrak{B}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der Idealklassen im engeren Sinne von  $F$ . Dann sind die komplexwertigen Punkte der Shimuravarietät  $S_{K_0}$  die disjunkte Vereinigung der Flächen  $X_e(D, \mathfrak{b})$  über alle  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ :

$$S_{K_0}(\mathbb{C}) \cong \dot{\bigcup}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} X_e(D, \mathfrak{b})$$

**Beweis:** Für ein Repräsentantensystem  $\mathfrak{B}$  der Idealklassen im engeren Sinne von  $F$  wählen wir endliche  $F$ -Ideale  $\mathfrak{b}$  mit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}_p \cdot (\prod \mathcal{O}_p \cdot \mathbb{R}^2)$ . Wir definieren

$$(2.8) \quad C_D := \left\{ \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b = \mathfrak{b} \text{ für ein } \mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \right\}.$$

Dann ist

$$G(A) = \bigcup_{c \in C_D} G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_0 \cdot G^0(\mathbb{R}),$$

und es gilt für alle  $c$  aus  $C_D$ :

$$\Gamma_c := G(\mathbb{Q}) \cap (c \cdot K_0 \cdot c^{-1} \cdot G^0(\mathbb{R})) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(F) \mid a, d \in \mathcal{O}, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b} \text{ und } a \cdot d - b \cdot c \in U^+ \right\}.$$

Aus (2.6) folgt dann die Behauptung. □

2.2.3. Wir wollen nun im Fall  $N(\mathfrak{e}_0) = 1$  eine offene kompakte Untergruppe  $K_1$  von  $G(A_f)$  konstruieren, so daß  $S_{K_1}(\mathbb{C})$  die disjunkte Vereinigung von Flächen  $X(D, \mathfrak{b})$  ist.

Lemma 2.2:

Falls  $F$  eine Grundeinheit  $e_0$  mit  $N(e_0) = 1$  besitzt, gibt es, nach Lemma 1.1, eine Primstelle  $\mathfrak{q}$  von  $F$  und einen quadratischen Charakter  $\mu$  von  $F_{\mathfrak{q}}^*$  mit  $\mu(e_0) = -1$ . Wir setzen

$$K_1 := \{ k \in K_0 \mid \mu(\det(k_{\mathfrak{q}})) = 1 \}.$$

Dann sind die komplexwertigen Punkte der Shimuravarietät  $S_{K_1}$  die disjunkte Vereinigung (mit  $\mathfrak{B}$  wie in Lemma 2.1.)

$$S_{K_1}(\mathbb{C}) = \dot{\bigcup}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} X(D, \mathfrak{b}).$$

Beweis: Wir betrachten wieder die Zerlegung

$$G(A) = \bigcup_{c \in C_D} G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_0 \cdot G^0(\mathbb{R}),$$

d.h. jedes  $g \in G(A)$  läßt sich schreiben als

$$g = \gamma \cdot c \cdot k \cdot g_{\infty}$$

mit  $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ ,  $c \in C_D$ ,  $g_{\infty} \in G^0(\mathbb{R})$  und  $k \in K_0$ . Falls  $k$  nicht aus  $K_1$  ist, d.h. falls  $\mu(\det(k_{\mathfrak{q}})) = -1$  ist, schreiben wir  $g$  als

$$g = \gamma \cdot \begin{pmatrix} e_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c \cdot \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{f}} \cdot k \cdot \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\infty} \cdot g_{\infty}$$

mit  $\gamma \cdot \begin{pmatrix} e_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q})$ ,  $\begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\infty} \cdot g_{\infty} \in G^0(\mathbb{R})$  und

$$\mu(\det(\begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{q}} \cdot k_{\mathfrak{q}})) = \mu(e_0) \cdot \mu(\det(k_{\mathfrak{q}})) = 1,$$

d.h.  $\begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{f}} \cdot k \in K_1$ . Also ist  $G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_0 \cdot G^0(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_1 \cdot G^0(\mathbb{R})$  für alle  $c$  aus  $C_D$  und wir erhalten die Zerlegung

$$G(A) = \bigcup_{c \in C_D} G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_1 \cdot G^0(\mathbb{R}).$$

Es gilt:

$$\Gamma_c := G(\mathbb{Q}) \cap (c \cdot K_1 \cdot c^{-1} \cdot G^{\mathfrak{o}}(\mathbb{R}))$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(F) \mid a, d \in \mathfrak{o}, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b}, ad - bc \in U^+ \text{ und } \mu(ad - bc) = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(F) \mid a, d \in \mathfrak{o}, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{b}, ad - bc \in U^{\times} \right\}.$$

Das liefert uns einen Isomorphismus

$$\Gamma_c / \text{Zentrum}(\Gamma_c) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}_c).$$

Dabei bezeichnen wir für  $c = \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mit  $\mathfrak{b}_c$  das Ideal  $\mathfrak{b}_c := F \cap b \cdot \left( \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2 \right)$ .

Aus (2.4) folgt dann die Behauptung. □

### 2.3. Die Kohomologie von $S_K$

2.3.1. Es sei  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G(\mathbb{R})) \otimes \mathbb{C}$  die komplexifizierte Lie-Algebra von  $G(\mathbb{R})$  und  $\pi$  eine cuspidale oder ein-dimensionale automorphe Darstellung von  $G(A)$ . Wir betrachten den  $G(\mathbb{R})$ -Modul

$$(H_\pi)_\infty := \otimes_{\mathfrak{o}|\infty} H_{\pi_{\mathfrak{o}}} \quad (\text{siehe (1.8)}).$$

Dann ist ([Ha], 3.1.2) der Unterraum  $\overline{(H_\pi)_\infty}$  der  $K_\infty$ -endlichen Vektoren in  $(H_\pi)_\infty$  ein  $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ -Modul ([BW], 0, 2.2). Für die Definition der relativen Lie-Algebren Kohomologie  $H^q(\mathfrak{g}, K_\infty; \overline{(H_\pi)_\infty})$  verweisen wir auf [BW], I, 5.1. Wir setzen

$$H^q(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty) := H^q(\mathfrak{g}, K_\infty; \overline{(H_\pi)_\infty}).$$

#### Definition:

Mit  $\text{Coh}$  bezeichnen wir die Menge der cuspidalen oder ein-dimensionalen automorphen Darstellungen  $\pi$  von  $G(A)$  mit nicht-trivialer relativer Lie-Algebren Kohomologie

$$H^1(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty).$$

Die Menge  $\text{Coh}$  zerfällt in den Anteil  $\text{Coh}_0$  der cuspidalen und  $\text{Coh}_e$  der ein-dimensionalen Darstellungen.

Es gilt:

**Lemma 2.3:** ([Ha], 3.4 und [BL], 3.2)

Eine automorphe Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$  ist genau dann aus  $\text{Coh}$ , wenn gilt:

- (1)  $\pi$  ist cuspidal und die lokalen Darstellungen  $\pi_{\mathfrak{o}}$  an den unendlichen Stellen  $\mathfrak{o}$  von  $F$  sind äquivalent zu der diskreten Seriedarstellung  $\sigma(|t|^{1/2}, |t|^{-1/2})$ , oder
- (2)  $\pi$  ist ein-dimensional, d.h.  $\pi = \chi \circ \det$  für einen Größencharakter  $\chi$  von  $F$ , und der Charakter  $\chi$  ist trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

2.3.2. Für eine Primzahl  $\ell$  bezeichnen wir wie üblich mit  $\mathbb{Z}_\ell$  die  $\ell$ -adischen ganzen Zahlen und mit  $\mathbb{Q}_\ell$  ihren Quotientenkörper. Der Tate-Modul  $\mathbb{Q}_\ell(1)$  ist der  $\ell$ -adische Galoismodul  $\mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  mit

$$\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \{ \zeta \in \bar{\mathbb{Q}} \mid \zeta \text{ eine } \ell^n\text{-te Einheitswurzel} \}.$$

Außerdem setzen wir  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell := \mathbb{Q}_\ell \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell(1) := \mathbb{Q}_\ell(1) \otimes \bar{\mathbb{Q}}$  und fixieren Einbettungen  $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Darstellung der Galoisgruppe  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  auf  $\mathbb{Z}_\ell(1)$  entspricht unter dem Artinschen Reziprozitätsgesetz dem Ideleklassencharakter (Tate-Charakter)

$$(2.9) \quad \alpha : x \longrightarrow |x| := \prod_{\mathfrak{s}} |x_{\mathfrak{s}}|_{\mathfrak{s}}.$$

(siehe z.B.: [N], Satz 4.10)

2.3.3. Es sei  $K$  eine offene kompakte Untergruppe von  $G(A_f)$ . Dann hat  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  Spitzen- und (möglicherweise) Quotientensingularitäten. Wir bezeichnen mit  $S'_K$  eine offene Untervarietät von  $S_K$ , deren komplexwertige Punkte  $S'_K(\mathbb{C})$  gerade die Menge der glatten Punkte von  $S_K(\mathbb{C})$  sind. Die Quotientensingularitäten können durch endliche Ketten von rationalen Kurven mit normalen Schnitten aufgelöst werden. Die Auflösung der Spitzensingularitäten wurde in [HLR], §1 über  $\mathbb{Q}$ , beziehungsweise in [Hi<sub>1</sub>] über  $\mathbb{C}$  beschrieben. Wir bezeichnen mit  $\bar{S}_K$  die so gewonnene glatte Kompaktifizierung von  $S_K$ . Dann ist  $\bar{S}_K(\mathbb{C}) - S'_K(\mathbb{C})$  ein Divisor mit normalen Schnitten. Das Bild der Restriktionsabbildung

$$\bar{H}^2(S_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) := \text{im} ( H^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow H^2(S'_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) )$$

ist unabhängig von der Wahl der glatten Kompaktifizierung ([HLR], §2). Wenn wir die Schnittkohomologie  $\text{IH}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  der Kompaktifizierung  $\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$  von  $S_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$  (siehe z. B. [CGM]) als Untergruppe von  $H^2(S'_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  auffassen, gilt nach [HLR], Lemma 2.2. :

$$\bar{H}^2(S_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) = \text{IH}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) .$$

Auf  $IH^2(S_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$  operiert die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}_K(\bar{\mathbb{Q}})$  der  $\bar{\mathbb{Q}}$ -wertigen,  $K$ -bi-invarianten Funktionen auf  $G(A_f)$  mit kompaktem Träger. Diese Operation kommutiert mit der Operation von  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Man bekommt somit ([HLR], 2.3. und [BL], 3.4) eine Zerlegung von  $IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)$  in isotypische Komponenten:

$$(2.10) \quad IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_l) = \bigoplus_{\pi \in \text{Coh}} X(\pi_f) \otimes W(\pi_f).$$

Dabei ist  $W(\pi_f)$  ein irreduzibler  $\mathcal{H}_K(\bar{\mathbb{Q}})$ -Modul, dessen Komplexifizierung  $W(\pi_f) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \mathbb{C}$  isomorph zu  $\pi_f^K$ , dem Raum der  $K$ -invarianten Elementen aus  $\pi_f$ , ist ([BL], 3.4.).  $X(\pi_f)$  ist ein endlich-dimensionaler  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -Vektorraum mit Galoisoperation

$$(2.11) \quad \rho(\pi) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) : \longrightarrow \text{Aut}(X(\pi_f)).$$

Betrachten wir nun die Schnittkohomologie der komplexwertigen Punkte  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  von  $\bar{S}_K$ . Nach [BL], 3.4. ist  $IH^2(\bar{S}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  isomorph zur direkten Summe der relativen Lie-Algebren Kohomologien über die automorphen Darstellungen  $\pi$  aus Coh:

$$(2.12) \quad IH^2(\bar{S}(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\pi \in \text{Coh}} H^2(\mathfrak{g}, K_{\infty}; \pi_{\infty}) \otimes \pi_f^K.$$

Nach [BL], 3.2. gilt für die Dimension der Kohomologie  $H^2(\mathfrak{g}, K_{\infty}; \pi_{\infty})$ :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^2(\mathfrak{g}, K_{\infty}; \pi_{\infty}) = \begin{cases} 2 & \text{für } \pi \in \text{Coh}_e \\ 4 & \text{für } \pi \in \text{Coh}_o. \end{cases}$$

Ein Vergleich von (2.10) und (2.12) ergibt:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{(i)} & \quad X(\pi_f) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \mathbb{C} \cong H^2(\mathfrak{g}, K_{\infty}; \pi_{\infty}) \text{ und} \\ \text{(ii)} & \quad W(\pi_f) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \mathbb{C} \cong \pi_f^K. \end{aligned}$$

2.3.4. Wir bezeichnen mit  $H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  den von den Poincarédualen der Auflösungskurven von  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  in  $H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  erzeugten Unterraum von  $H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Mit  $Z(\mathbb{C})$  bezeichnen wir eine Auflösung der Untervarietät  $\bar{S}_K(\mathbb{C}) - S'_K(\mathbb{C})$ . Wir betrachten die Gysin-Sequenz ([De<sub>4</sub>], (8.2.8))

$$\longrightarrow H^0(Z(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow$$

Das Bild des Gysin-Homomorphismus  $\gamma$  ist per Definition  $H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Daraus folgt:

$$(2.14) \quad H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \text{im}(H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})) \oplus H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Wir können diese Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

**Lemma 2.4:**

Es sei  $K$  eine offene kompakte Untergruppe von  $G(A_f)$ ,  $\bar{S}_K$  ein glattes Modell von  $\bar{S}_K$  und  $H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  der von den Poincarédualen der Auflösungskurven erzeugte Unterraum von  $H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ , dann gilt

$$\begin{aligned} H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\cong \text{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \oplus H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ &\cong \bigoplus_{\pi \in \text{Coh}} (H^2(\mathcal{O}, K_{\infty}; \pi_{\infty}) \otimes \pi_f^K) \oplus H^2_{\text{sing}}(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}). \end{aligned}$$

## 2.4. Die Hirzebruch-Zagier-Zykel

2.4.1. Es sei  $H$  die über  $\mathbb{Q}$  definierte algebraische Gruppe  $Gl_2$ ,  $h'$  der Homomorphismus

$$\begin{aligned} h' : \mathbb{C}^* &\longrightarrow H(\mathbb{R}) \\ a+i \cdot b &\longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und  $L$  eine offene kompakte Untergruppe von  $H(A_F)$ . Dann existiert, wie in 2.1.1, eine Shimuravarietät  $J_L := J_L(H, h')$ , definiert über  $\mathbb{Q}$ , für deren komplexwertige Punkte gilt:

$$J_L(\mathbb{C}) = H(\mathbb{Q}) \backslash H(A) / L \cdot L_\infty .$$

mit

$$L_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in H(\mathbb{R}) \right\} .$$

Wir betrachten die über  $\mathbb{Q}$  definierte Diagonaleinbettung

$$\Delta : H \longrightarrow G .$$

Falls die Diagonaleinbettung die Untergruppe  $L$  von  $H(A_F)$  in die Untergruppe  $K$  von  $G(A_F)$  abbildet, gibt es einen über  $\mathbb{Q}$  definierten Morphismus

$$(2.15) \quad J_L \longrightarrow S_K .$$

Nach [HLR], 2.10, liegt der Zykel, der durch das Bild von  $J_L$  unter diesem Morphismus gegeben ist, in  $I\mathbb{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ . Wir erhalten somit eine Abbildung

$$H^0(J_L \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow I\mathbb{H}^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) .$$

2.4.2. Für ein  $g$  aus  $G(A_F)$  und eine offene kompakte Untergruppe  $K'$  von  $G(A_F)$  mit  $K' \subset g \cdot K \cdot g^{-1}$  gibt es einen über  $\mathbb{Q}$  definierten Morphismus

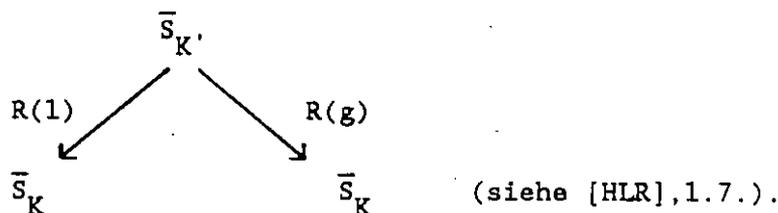
$$R(g) : S_{K'} \longrightarrow S_K ,$$

der auf den komplexen Punkten von  $S_{K'}$  durch Rechtsmultiplikation mit  $g$  gegeben ist ([De<sub>1</sub>], 3.2.). Der Morphismus  $R(g)$  läßt sich zu einem endlichen, flachen

Morphismus

$$R(g) : \bar{S}_{K'} \longrightarrow \bar{S}_K$$

fortsetzen ([HLR], 1.7.). Wir erhalten somit für  $K' := K \cap g \cdot K \cdot g^{-1}$  die Hecke-korrespondenz



$R(g)$  induziert einen Homomorphismus auf der Kohomologie

$$R(g)^* : IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow IH^2(\bar{S}_{K'} \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1)).$$

Durch Komposition mit der Transferabbildung ([BL], 2.3.1)

$$\text{Trans} : IH^2(\bar{S}_{K'} \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \longrightarrow IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1))$$

erhalten wir eine Operation von  $g$  auf  $IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ .

**Definition:** ([HLR], 2.10.)

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{D}$  den von den Bildern von  $H^0(J_L \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell)$  unter dieser Operation erzeugten Unterraum von  $IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ . Seine Elemente heißen *Hirzebruch-Zagier-Zykel*. Das Bild von  $\mathfrak{D} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C}$  unter dem Isomorphismus

$$IH^2(\bar{S}_K \times_{\mathbb{Q}} \bar{Q}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C} \cong IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$ .

## 2.5. Die algebraischen Zyklen

2.5.1. Es sei  $X$  eine glatte, zwei-dimensionale quasi-projektive Varietät, definiert über  $\mathbb{Q}$ . Ein Divisor auf  $X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$  ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum n_C C, \quad n_C \in \mathbb{Z},$$

von irreduziblen Kurven  $C$  auf  $X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ . Die Picardgruppe  $\text{Pic}(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$  ist dann die Gruppe der Divisoren modulo linearer Äquivalenz, d.h. modulo  $\bar{\mathbb{Q}}(X)^*$ . Ein Divisor  $D$  heißt  $E$ -rational für einen algebraischen Zahlkörper  $E$ , wenn  $D = D^\sigma := \sum n_C C^\sigma$  für alle  $\sigma$  aus  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$  ist. Die freie abelsche Gruppe der  $E$ -rationalen Divisoren bezeichnen wir mit  $\text{Div}_E(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$  und die Gruppe der  $E$ -rationalen Divisoren modulo  $E(X)^*$  mit  $\text{Pic}_E(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$ . Dann haben wir die Chernklassenabbildung

$$(2.16) \quad c : \text{Pic}(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \longrightarrow H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)).$$

Das Bild von  $\text{Pic}_E(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$  unter  $c$  ist invariant unter der Operation von  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$  auf  $H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ . Ein Teil der *Tate-Vermutung* für  $X$  besagt nun, daß das Bild von (2.16), tensoriert mit  $\mathbb{Q}_\ell$ , bereits der ganze  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ -invariante Teil von  $H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  ist:

$$(2.17) \quad c(\text{Pic}_E(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)}.$$

### Definition:

Für einen algebraischen Zahlkörper  $E$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{Z}(E)$  den Unterraum  $c(\text{Pic}_E(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$  von  $H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ . Mit  $\mathcal{Z}$  bezeichnen wir den Unterraum  $c(\text{Pic}(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$  von  $H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ . Die Elemente von  $\mathcal{Z}$  heißen *algebraische Zyklen* von  $X$ .

2.5.2. Für die komplexe, quasi-projektive Mannigfaltigkeit  $X(\mathbb{C})$  definieren wir  $\text{Pic}(X(\mathbb{C}))$  als die freie abelsche Gruppe der über  $\mathbb{C}$  definierten irreduziblen Kurven modulo globaler meromorpher Funktionen. Die Picardzahl von  $X(\mathbb{C})$  ist dann der Rang des Bildes von  $\text{Pic}(X(\mathbb{C}))$  unter der Chernklassenabbildung

$$(2.18) \quad c: \text{Pic}(X(\mathbb{C})) \longrightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

**Definition:**

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$  den Unterraum  $c(\text{Pic}(X(\mathbb{C}))) \otimes \mathbb{C}$ . Die Elemente von  $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$  nennen wir *algebraische Zykel*.

2.5.3. Der Isomorphismus

$$(2.19) \quad H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C} \cong H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

liefert eine Abbildung von  $\mathcal{Z} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C}$  nach  $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ . Aus dem Beweis von Proposition 1.5. in [De<sub>4</sub>] folgt, daß jeder über  $\mathbb{C}$  definierte Divisor  $Z$  zu einem über  $\bar{\mathbb{Q}}$  definierten Divisor  $Z_0$  algebraisch äquivalent ist. Insbesondere haben dann  $Z$  und  $Z_0$  dasselbe Bild in  $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Deshalb gilt

$$(2.20) \quad \mathcal{Z} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C} \cong \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$$

und die Picardzahl der komplexen Fläche  $X(\mathbb{C})$  ist gleich der Dimension des von  $c(\text{Pic}(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}))$  aufgespannten Unterraumes in  $H^2(X \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ .

2.5.4. Betrachten wir nun die algebraischen Zykel auf  $S'_K(\mathbb{C})$ . Nach (2.14) gilt

$$H^2(\bar{S}'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \text{im}(H^2(\bar{S}'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})) \oplus H^2_{\text{sing}}(\bar{S}'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Der Summand  $H^2_{\text{sing}}(\bar{S}'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  besteht per definitionem aus algebraischen Zykeln.

Jeder algebraische Zykel auf  $S'_K(\mathbb{C})$  kann zu einem algebraischen Zykel auf  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  fortgesetzt werden. Daher sind die algebraischen Zykel  $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$  von  $S'_K(\mathbb{C})$  in  $\text{im}(H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow H^2(S'_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})) \cong \text{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  enthalten.

2.5.5. Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus Coh operiert  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  durch  $\rho(\pi)$  auf dem  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Vektorraum  $X(\pi_f)$  (siehe (2.10) und (2.11)). Wir bezeichnen mit  $\alpha$  den Tate-Charakter (siehe 2.3.2.) und definieren für einen algebraischen Zahlkörper  $E$  und eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus Coh:

$$(2.21) \quad \mathcal{F}(\pi, E) := \left\{ x \in X(\pi_f) \mid \rho(\pi)(\sigma)(x) = \alpha^{-1}(\sigma) \cdot x \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E) \right\}$$

und  $t(\pi, E) := \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathcal{F}(\pi, E)$ .

Dann gilt für die  $E$ -rationalen algebraischen Zykel  $\mathcal{Z}(E)$  von  $S'_K$ :

$$\mathcal{Z}(E) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell \subset \bigoplus_{\pi \in \text{Coh}} \mathcal{F}(\pi, E) \otimes \pi_f^K,$$

und die Tate-Vermutung für  $S'_K$  läßt sich mit diesen Bezeichnungen als

$$\mathcal{Z}(E) \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\pi \in \text{Coh}} \mathcal{F}(\pi, E) \otimes \pi_f^K$$

formulieren (siehe auch [HLR], §2). Es gilt:

**Satz 2.5:** ([HLR], 4.6. und 4.7.)

Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus Coh gilt:

- (1) Für alle algebraischen Zahlkörper  $E$  ist  $t(\pi, E)$  aus  $\{0, 1, 2\}$ .
- (2) Für alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_e$  gibt es einen algebraischen Zahlkörper  $E_0$  mit  $t(\pi, E_0) = 2$ .
- (3) Für  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  gibt es genau dann einen Zahlkörper  $E_0$  mit  $t(\pi, E_0) = 2$ , wenn  $\pi$  vom CM-Typ (siehe 1.2.3.) und die zugehörige quadratische Erweiterung von  $F$  biquadratisch über  $\mathbb{Q}$  ist.

**Definition:**

Eine CM-Form  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  heißt *abelsch*, wenn sich der algebraische Zahlkörper  $E_0$  in Satz 2.5,(3) so wählen läßt, daß  $E_0$  über  $\mathbb{Q}$  abelsch ist. Anderenfalls heißt  $\pi$  *diedral*.

2.5.6. Es sei  $\omega$  ein Größencharakter endlicher Ordnung von  $\mathbb{Q}$ . Mit Hilfe des Reziprozitätsisomorphismus (siehe [N], III, 6.12) fassen wir  $\omega$  auch als Charakter endlicher Ordnung von  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  auf. Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}$  definieren wir den  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -Vektorraum der *Tate-Klassen*

$$(2.22). \quad \mathcal{T}(\pi, \omega) := \left\{ x \in X(\pi_F) \mid \rho(\pi)(\sigma)(x) = \alpha^{-1}(\sigma) \cdot \omega^{-1}(\sigma) \cdot x \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \right\}$$

und  $t(\pi, \omega) := \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathcal{T}(\pi, \omega)$ .

Außerdem definieren wir die Tate-Klassen in  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{Z}$  durch:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}(\pi, \omega) &:= \mathcal{Z} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell \cap \mathcal{T}(\pi, \omega) \quad , \quad z(\pi, \omega) := \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathcal{Z}(\pi, \omega) \\ \mathcal{D}(\pi, \omega) &:= \mathcal{D} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell \cap \mathcal{T}(\pi, \omega) \quad , \quad d(\pi, \omega) := \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathcal{D}(\pi, \omega). \end{aligned}$$

Die Dimensionen  $z(\pi, \omega)$  und  $d(\pi, \omega)$  wurden in [HLR] untersucht. Um diese Ergebnisse angeben zu können, benötigen wir die folgende Definition.

**Definition:** ([HLR], 2.7.)

Es sei  $\omega$  ein Größencharakter von  $\mathbb{Q}$ . Eine cuspidale automorphe Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$  heißt *ausgezeichnet* bezüglich  $\omega^{-1}$ , wenn sie sich darstellen läßt als:

$$\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes (\nu' \cdot \omega')^{-1}.$$

Dabei sind

- (1)  $\pi_{\mathbb{Q}}$  eine automorphe Darstellung von  $\text{Gl}_2(A)$  und  $\pi_{\mathbb{Q}} \times F$  ihre Liftung nach  $F$  (siehe 1.2.4.) und

(2)  $\nu'$  und  $\omega'$  Größencharaktere endlicher Ordnung von  $F$ , für deren Einschränkungen auf  $I_{\mathbb{Q}}$  gilt:

$$\omega = \omega' |_{I_{\mathbb{Q}}}, \quad \omega_{\pi_{\mathbb{Q}}} = \nu' |_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}}.$$

(Dabei ist  $\omega_{\pi_{\mathbb{Q}}}$  der zentrale Charakter von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  und  $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}$  der nicht-triviale Größencharakter von  $\mathbb{Q}$ , der trivial auf  $N_{F/\mathbb{Q}} I_F$  ist).

Wir bezeichnen dann  $(\pi, \omega)$  als ein *ausgezeichnetes Paar*.

**Satz 2.6:** ([HLR], 2.8.-2.11.)

Es sei  $\omega$  ein Größencharakter endlicher Ordnung von  $\mathbb{Q}$  und  $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}$  der nicht-triviale Größencharakter von  $\mathbb{Q}$ , der trivial auf  $N_{F/\mathbb{Q}} I_F$  ist, dann gilt:

(1) Für alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}$  ist  $\chi(\pi, \omega)$  aus  $(0, 1)$  und  $\chi(\pi, \omega) = t(\pi, \omega)$ .

(2) Für alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_e$ , d.h.  $\pi(g) = \eta(\det(g))$  sei  $\chi_{\pi} := \eta |_{I_{\mathbb{Q}}}$ , dann ist

$\chi(\pi, \omega) = 1$  genau dann, wenn  $\chi_{\pi} = \omega^{-1}$  oder  $\chi_{\pi} = \omega^{-1} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}}$  ist und

$d(\pi, \omega) = 1$  genau dann, wenn  $\chi_{\pi} = \omega^{-1}$  ist.

(3) Für  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  ist:

$d(\pi, \omega) = \chi(\pi, \omega) = t(\pi, \omega)$  und

$d(\pi, \omega) = 1$  genau dann, wenn  $(\pi, \omega)$  ein ausgezeichnetes Paar ist.

**Lemma 2.7:**

Für eine CM-Form  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$ , die zu einer biquadratischen Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  gehört, gibt es genau dann einen algebraischen Zahlkörper  $E$  und Größencharaktere endlicher Ordnung  $\omega_1$  und  $\omega_2$  von  $\mathbb{Q}$  mit  $t(\pi, \omega_1) = t(\pi, \omega_2) = 1$  und

$$\mathcal{F}(\pi, E) = \mathcal{F}(\pi, \omega_1) \oplus \mathcal{F}(\pi, \omega_2),$$

wenn  $\pi$  eine abelsche CM-Form ist.

**Beweis:**

"  $\Rightarrow$  " : Es seien  $E$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  wie oben. Wir wählen  $E_0$  mit

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E_0) = (\text{Ker } \omega_1) \cap (\text{Ker } \omega_2).$$

Dann ist  $t(\pi, E_0) = t(\pi, E) - 2$  und

$$\text{Gal}(E_0/\mathbb{Q}) \cong \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / ((\text{Ker } \omega_1) \cap (\text{Ker } \omega_2)).$$

Also ist  $\text{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$  abelsch.

" $\Leftarrow$ ": Falls  $\pi$  eine abelsche CM-Form ist, gibt es eine abelsche Erweiterung  $E_0$  von  $\mathbb{Q}$  mit  $t(\pi, E_0) = 2$ . Dann ist  $\rho(\pi)$  eine zwei-dimensionale Darstellung der abelschen Gruppe  $\text{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$  auf  $\mathcal{F}(\pi, E_0)$  und damit direkte Summe von zwei ein-dimensionalen Darstellungen.  $\square$

Nach Satz 2.6 wissen wir, daß für ein-dimensionale und cuspidale automorphe Darstellungen  $\pi$  von  $G(A)$ , die nicht vom CM-Typ sind, und für abelsche CM-Formen der Raum der Tate-Zykel  $\mathcal{F}(\pi, E)$  für einen algebraischen Zahlkörper  $E$  bereits aus Hirzebruch-Zagier-Zykeln besteht. Der Fall der diedralen CM-Formen wurde in [K1] und [MR] behandelt. Auch in diesem Fall besteht  $\mathcal{F}(\pi, E)$  aus algebraischen Zykeln ([K1], Satz 4.4.5.).

**Satz 2.8:** ([HLR], [K1] und [MR])

Es sei  $\pi$  eine automorphe Darstellung von  $G(A)$  und  $E$  ein algebraischer Zahlkörper. Dann sind alle Tate-Zykel aus  $\mathcal{F}(\pi, E)$  algebraische Zykel.

Wir werden nun beweisen, daß alle ausgezeichneten CM-Formen abelsch sind. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 2.9:**

Es sei  $L$  über  $\mathbb{Q}$  eine biquadratische Körpererweiterung. Wir bezeichnen mit  $\sigma$  und  $\tau$  zwei Erzeugende von  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  und mit  $E$  und  $F$  die Fixkörper von  $\sigma$  bzw.  $\tau$ . Dann gibt es Größencharaktere  $\mu$  und  $\nu$  von  $E$  bzw.  $F$  mit

$$\mu \circ N_{L/E} = \nu \circ N_{L/F}$$

die keine Liftungen von Größencharakteren von  $\mathbb{Q}$  sind. Es gilt

$$\mu|_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot \nu^{-1}|_{I_{\mathbb{Q}}} = \epsilon_{E/\mathbb{Q}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}}.$$

Beweis: Wir wählen eine Fortsetzung  $\epsilon$  des quadratischen Größencharakters  $\epsilon_{F/Q}$  auf  $C_E$ . Dann ist  $\epsilon^2|_{I_Q} = 1$  und es gibt einen Größencharakter  $\eta$  von  $E$  mit

$$\epsilon^2 = \eta \cdot (\eta^\tau)^{-1}.$$

Wir definieren

$$\mu := \eta \cdot \epsilon^{-1}.$$

Dann gilt für  $x$  aus  $I_E$ :

$$\begin{aligned} \mu(x^\tau) &= \eta(x^\tau) \cdot \epsilon(x^\tau)^{-1} = \eta(x) \cdot \epsilon(x)^{-2} \cdot \epsilon(x^\tau)^{-1} \\ &= \mu(x) \cdot \epsilon(x)^{-1} \cdot \epsilon(x^\tau)^{-1} \\ &= \mu(x) \cdot \epsilon_{F/Q}(x \cdot x^\tau)^{-1}. \end{aligned}$$

Da die Normgruppe  $N_{E/Q}(I_E)$  nicht in  $N_{F/Q}(I_F)$  enthalten ist, kann  $\mu$  insbesondere keine Liftung sein. Weiterhin gilt für  $y$  aus  $I_L$ :

$$\begin{aligned} (\mu \circ N_{L/E})(y/y^\tau) &= \eta((y \cdot y^\sigma) \cdot (y^\tau \cdot y^{\tau\sigma})^{-1}) \cdot \epsilon((y \cdot y^\sigma) \cdot (y^\tau \cdot y^{\tau\sigma})^{-1})^{-1} \\ &= \epsilon(y \cdot y^\sigma \cdot y^\tau \cdot y^{\tau\sigma}) = \epsilon_{F/Q}(y \cdot y^\tau \cdot (y \cdot y^\tau)^\sigma) = 1. \end{aligned}$$

Also gibt es einen Größencharakter  $\nu$  von  $F$  mit

$$(2.24) \quad \mu \circ N_{L/E} = \nu \circ N_{L/F}.$$

Dann kann  $\nu$  ebenfalls keine Liftung sein, denn für einen Größencharakter  $\alpha$  von  $Q$  mit  $\alpha \circ N_{F/Q} = \nu$  gilt  $\mu \circ N_{L/E} = (\alpha \circ N_{E/Q}) \circ N_{L/E}$ . Daraus folgt  $\mu = \alpha \circ N_{E/Q}$  oder  $\mu = (\alpha \cdot \epsilon_{F/Q}) \circ N_{E/Q}$ , im Widerspruch dazu, daß  $\mu$  keine Liftung ist. Wir definieren

$$\Omega := \mu|_{I_Q} \cdot \nu^{-1}|_{I_Q}.$$

Aus (2.24) folgt

$$\Omega|_{N_{L/Q}(I_L)} = 1.$$

Außerdem gilt für  $x$  aus  $I_E$

$$\begin{aligned} \Omega(x \cdot x^\tau) &= \mu(x \cdot x^\tau) \cdot \nu^{-1}(x \cdot x^\tau) \\ &= \mu(x \cdot x^\tau) \cdot \mu^{-1}(x \cdot x^\sigma) && \text{( nach (2.24) )} \\ &= \mu(x^\tau \cdot x^{-1}) && \text{( denn } x^\sigma = x \text{ )}. \end{aligned}$$

Da  $\mu$  keine Liftung ist, ist  $\Omega$  also nicht trivial auf  $N_{E/\mathbb{Q}}(I_E)$ . Analog zeigen wir, daß  $\Omega$  nicht trivial auf  $N_{F/\mathbb{Q}}(I_F)$  ist. Damit ist  $\mathbb{Q}^* \cdot N_{L/\mathbb{Q}}(I_L)$  die größte Untergruppe von  $I_{\mathbb{Q}}$  auf der  $\Omega$  verschwindet. Da die Charaktergruppe von  $I_{\mathbb{Q}}/(\mathbb{Q}^* \cdot N_{L/\mathbb{Q}}(I_L))$  von  $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}$  und  $\epsilon_{E/\mathbb{Q}}$  erzeugt wird, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

Mit diesem Lemma beweisen wir:

**Lemma 2.10:**

Jede ausgezeichnete CM-Form  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  ist abelsch.

**Beweis:** Nach Lemma 2.7 müssen wir zeigen, daß  $\pi$  bezüglich zweier verschiedener Größencharaktere  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ausgezeichnet ist. Wir schreiben  $\pi$  als

$$\pi = (\pi(\Omega) \times F) \otimes \lambda$$

mit einem Größencharakter  $\Omega$  einer imaginärquadratischen Erweiterung  $E$  von  $\mathbb{Q}$ .

(Das wir  $\pi$  so darstellen können folgt zum Beispiel aus den Beweisen von Lemma 3.10 und Satz 3.12.) Dann ist  $\pi$  ausgezeichnet bezüglich

$$\omega_1^{-1} = \omega_{\pi(\Omega) \cdot \lambda} |_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}}.$$

Wir setzen  $L := E \cdot F$  und definieren mit den Charaktere  $\mu$  und  $\nu$  aus Lemma 2.9

$$\pi' := (\pi(\Omega \cdot \mu) \times F) \otimes (\lambda \cdot \nu^{-1}).$$

Dann ist (siehe [GL], Appendix B)

$$\begin{aligned} \pi' &= \pi((\Omega \cdot \mu) \circ_{N_{L/E}} (\lambda \cdot \nu^{-1}) \circ_{N_{L/F}}) \\ &= \pi(\Omega \circ_{N_{L/E}} \lambda \circ_{N_{L/F}}) \quad (\text{nach Lemma 2.9}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

und  $\pi'$  ist ausgezeichnet bezüglich

$$\begin{aligned} \omega_2^{-1} &= \omega_{\pi(\Omega \cdot \mu) \cdot (\lambda \cdot \nu^{-1})} |_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}} \\ &= \omega_{\pi(\Omega) \cdot \lambda} |_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot (\epsilon_{F/\mathbb{Q}} \cdot \epsilon_{E/\mathbb{Q}}) \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}} \\ &= \omega_1^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Daraus folgt:

**Korollar 2.11:**

Es seien  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  und  $\mathfrak{Z}_{\mathbb{C}}$  der Raum der Hirzebruch-Zagier-Zykel beziehungsweise der algebraischen Zykel in  $\mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Dann gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{D}_{\mathbb{C}} = \sum_{\substack{\pi \text{ ausg.} \\ \text{nicht CM}}} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K) + 2 \sum_{\substack{\pi \text{ ausg.} \\ \text{CM}}} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K) + \sum_{\pi \in \mathrm{Coh}_e} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K)$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{Z}_{\mathbb{C}} = \sum_{\substack{\pi \text{ ausg.} \\ \text{nicht CM}}} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K) + 2 \sum_{\substack{\pi \text{ CM} \\ \text{biquad.}}} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K) + 2 \sum_{\pi \in \mathrm{Coh}_e} \dim_{\mathbb{C}}(\pi_f^K)$$

(Dabei wird immer über  $\pi$  aus  $\mathrm{Coh}$  summiert).

Zur Berechnung der Dimensionen von  $\mathfrak{Z}_{\mathbb{C}}$  und  $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}}$  benötigen wir also die folgenden Informationen:

- (1) Die Dimension des Raumes der  $K$ -invarianten Funktionen  $\pi_f^K$  für  $\pi$  aus  $\mathrm{Coh}$ .
- (2) Die Anzahl der ausgezeichneten Darstellungen  $\pi$  aus  $\mathrm{Coh}_0$  mit  $\pi_f^K \neq (0)$ .
- (3) Die Anzahl der ausgezeichneten CM-Formen  $\pi$  aus  $\mathrm{Coh}_0$  mit  $\pi_f^K \neq (0)$ .
- (4) Die Anzahl der CM-Formen  $\pi$  aus  $\mathrm{Coh}_0$  mit  $\pi_f^K \neq (0)$ , die zu einer biquadratischen Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  gehören (siehe Lemma 1.8).

### 3.1. Die Dimension des Raumes der K-invarianten Funktionen einer automorphen Darstellung

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D$ ,  $G$  die algebraische Gruppe  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \text{Gl}_2$  und  $K$  eine offene kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ . Ziel dieses Abschnittes ist es, die cuspidalen automorphen Darstellungen  $\pi$  von  $G(A)$  zu beschreiben, für die es nicht-triviale  $K$ -invariante Funktionen in  $\pi_F$  gibt, und die Dimension von  $\pi_F^K$ , dem Unterraum der  $K$ -invarianten Funktionen in  $\pi_F$ , zu bestimmen. Wir werden dies für die maximal kompakte Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_F)$  und für ihre, in Lemma 2.2 definierte, Untergruppe  $K_1$  tun. Nach [JL] gilt

**Lemma 3.1:** ([JL], 3.9.)

Es sei  $K_0$  die maximal kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ ,  $\pi$  eine cuspidale automorphe Darstellung von  $G(A)$  und  $\pi_F^{K_0}$  der Unterraum der  $K_0$ -invarianten Funktionen in  $\pi_F$ . Dann ist  $\pi_F^{K_0}$  genau dann nicht-trivial, wenn für alle endlichen Primstellen  $\mathfrak{p}$  von  $F$  die lokale Darstellung  $\pi_{\mathfrak{p}}$  eine unverzweigte Hauptseriendarstellung ist, d.h. wenn es unverzweigte Charaktere  $\mu_1$  und  $\mu_2$  von  $F_{\mathfrak{p}}^*$  gibt mit  $\pi_{\mathfrak{p}} \cong \pi(\mu_1, \mu_2)$ . In diesem Fall ist  $\dim_{\mathbb{C}} \pi_F^{K_0} = 1$ .

**Lemma 3.2:**

Falls der reellquadratische Zahlkörper  $F$  eine Grundeinheit  $e_0$  mit  $N(e_0) = -1$  besitzt, gibt es nach Lemma 1.1 eine Primstelle  $\mathfrak{q}$  von  $F$  und einen quadratischen Charakter  $\mu$  von  $F_{\mathfrak{q}}^*$  mit  $\mu(e_0) = -1$ . Wir setzen wie in Lemma 2.2

$$K_1 := \{ k \in K_0 \mid \mu(\det(k_{\mathfrak{q}})) = 1 \}.$$

Für eine cuspidale Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$  ist  $\pi_F^{K_1}$  genau dann nicht-trivial, wenn gilt

- (1) an jeder endlichen Primstelle  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$  ist  $\pi_{\mathfrak{p}}$  unverzweigt und
- (2)  $\pi_{\mathfrak{q}}$  oder  $\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \mu$  ist unverzweigt.

In diesem Fall ist  $\dim_{\mathbb{C}} \pi_F^{K_1} = 1$ .

Beweis: Wir zerlegen  $\pi_f$  als  $\pi_f = \otimes_{\rho} \pi_{\rho}$  und  $K_1$  als  $\prod_{\rho} K_{\rho}$ , dann ist

$$\pi_f^{K_1} = \otimes_{\rho \neq q} \pi_{\rho}^{(K_{\rho})} \otimes \pi_q^{(K_q)}.$$

Für  $\rho \neq q$  ist  $K_{\rho} = \text{Gl}_2(\mathcal{O}_{\rho})$  und damit ([JL], 3.9.)

$$\dim_{\mathbb{C}} \pi_{\rho}^{(K_{\rho})} = \begin{cases} 1 & \text{für } \pi_{\rho} \text{ unverzweigt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es reicht also zu zeigen:

$$\dim_{\mathbb{C}} \pi_q^{(K_q)} = \begin{cases} 1 & \text{für } \pi_q \text{ oder } \pi_q \otimes \mu \text{ unverzweigt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bis zum Ende dieses Beweises setzen wir  $K := K_q$  und  $K' := \text{Gl}_2(\mathcal{O}_q)$ . Dann ist

$$K' = K \dot{\cup} \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K.$$

Für eine Funktion  $f$  aus  $\pi_q^K$  definieren wir  $\bar{f}$  durch

$$\bar{f}(g) := f(g) + f\left(g \cdot \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Dann ist  $\bar{f}$  aus  $\pi_q^{K'}$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1)  $\pi_q$  ist verzweigt und  $\pi_q^K \neq (0)$ : Dann gibt es eine Funktion  $f$  aus  $\pi_q^K - (0)$ , und  $\bar{f}$  ist aus  $\pi_q^{K'} - (0)$ , d.h.

$$f\left(g \cdot \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -f(g), \text{ und}$$

$$(f \otimes \mu)\left(g \cdot \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (f \otimes \mu)(g) \text{ für alle } g \text{ aus } \text{Gl}_2(\mathcal{F}_q).$$

Dann ist  $f \otimes \mu$  aus  $(\pi_q \otimes \mu)^{K'}$ . Da aber  $f \otimes \mu \neq 0$  ist, muß  $\pi_q \otimes \mu$  unverzweigt sein. Außerdem ist die Abbildung  $f \longrightarrow f \otimes \mu$  ein Isomorphismus zwischen  $\pi_q^K$  und  $(\pi_q \otimes \mu)^{K'}$ , daraus folgt  $\dim_{\mathbb{C}} \pi_q^K = 1$ .

(2)  $\pi_{\mathfrak{q}}$  ist unverzweigt: In diesem Fall ist der ein-dimensionale Unterraum  $\pi_{\mathfrak{q}}^{K'}$  in  $\pi_{\mathfrak{q}}^K$  enthalten. Die Abbildung  $f \longrightarrow \bar{f}$  ist ein Homomorphismus von  $\pi_{\mathfrak{q}}^K$  nach  $\pi_{\mathfrak{q}}^{K'}$ . Wenn die Dimension von  $\pi_{\mathfrak{q}}^K$  größer als eins ist, gibt es eine Funktion  $f$  aus  $\pi_{\mathfrak{q}}^{K-(0)}$  mit  $\bar{f} = 0$ , d.h.

$$f\left(g \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -f(g) \text{ für alle } g \text{ aus } \text{Gl}_2(F_{\mathfrak{q}})$$

und  $f \otimes \mu = 0$  ist aus  $(\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \mu)^{K'}$ , im Widerspruch zu  $\pi_{\mathfrak{q}}$  unverzweigt, denn dann ist  $\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \mu$  verzweigt und  $(\pi_{\mathfrak{q}} \otimes \mu)^{K'} = \{0\}$ . Daraus folgt  $\dim_{\mathbb{C}} \pi_{\mathfrak{q}}^K = 1$ .  $\square$

### 3.2. Die unverzweigt gelifteten Darstellungen

3.2.1. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit  $K$  immer die maximal kompakte Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_f)$ .

Notation:

Wir bezeichnen mit  $\text{Coh}_0^K$  die Menge der unverzweigten automorphen Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$ .

Wir führen die folgende Definition ein:

Definition:

Eine Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  heißt unverzweigt geliftet, wenn sie sich schreiben läßt als

$$\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda$$

mit einer unverzweigten Liftung  $\pi_{\mathbb{Q}} \times F$  aus  $\text{Coh}_0^K$  und einem Größencharakter  $\lambda$  von  $F$ .

In diesem Fall ist auch  $\lambda$  unverzweigt und trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Dann entspricht  $\lambda$  unter dem Isomorphismus (1.2) einem Charakter der Idealklassengruppe von  $F$  im engeren Sinne, insbesondere ist also  $\lambda|_{I_{\mathbb{Q}}} = 1$ . Unverzweigt geliftete Darstellungen sind ausgezeichnet bezüglich

$$\omega^{-1} = \omega_{\pi_{\mathbb{Q}}} \cdot \lambda|_{I_{\mathbb{Q}}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}} = \omega_{\pi_{\mathbb{Q}}} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}}$$

Wir werden in diesem Abschnitt die Anzahl der unverzweigt gelifteten Darstellungen  $\pi$  bestimmen und ein Kriterium dafür angeben, wann unverzweigte ausgezeichnete Darstellungen bereits unverzweigt geliftet sind.

**Lemma 3.3:**

Es sei  $\pi_{\mathbb{Q}}$  eine cuspidale automorphe Darstellung von  $GL_2(A)$  und  $F$  ein reell-quadratischer Zahlkörper. Dann ist die Liftung  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)$  von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  genau dann aus  $\text{Coh}_0^K$ , wenn gilt:

- (1) Für alle endlichen Primstellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$  ist  $\pi_{\mathbb{Q}}$  äquivalent zu einer Hauptseriendarstellung  $\pi(\mu, \nu)$  mit  $\mu \circ N_{F_p/\mathbb{Q}_p}$  und  $\nu \circ N_{F_p/\mathbb{Q}_p}$  unverzweigt.
- (2) An der unendlichen Stelle ist  $\pi_{\mathbb{Q}}$  äquivalent zu der diskreten Seriendarstellung  $\sigma(|t|^{1/2}, |t|^{-1/2})$ .

**Beweis:** (2) folgt unmittelbar aus Lemma 1.10 und 2.3.

(1) Falls  $p$  in  $F$  zerfällt, folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 1.10, (1). Wir nehmen also an, daß  $p$  in  $F$  nicht zerfällt, und bezeichnen mit  $\rho$  die Primstelle von  $F$ , die über  $p$  liegt, und mit  $N$  die Relativnorm  $N_{F_p/\mathbb{Q}_p}$ . Nach Voraussetzung gibt es unverzweigte Charaktere  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\nu}$  von  $F_p^*$ , so daß  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)_{\rho}$  äquivalent zu der Hauptseriendarstellung  $\pi(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$  ist. Da  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\nu}$  unverzweigt sind, sind sie insbesondere  $\text{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p)$ -invariant, und es gibt Charaktere  $\mu$  und  $\nu$  von  $\mathbb{Q}_p^*$  mit  $\tilde{\mu} = \mu \circ N$  und  $\tilde{\nu} = \nu \circ N$ . Nach [GL], Theorem 1, (c), kann man  $\mu$  und  $\nu$  so wählen, daß  $(\pi_{\mathbb{Q}})_{\rho}$  äquivalent zu  $\pi(\mu, \nu)$  ist.  $\square$

Der zentrale Charakter  $\omega$  von  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)$  ist unverzweigt und nach Lemma 3.3 trivial an den unendlichen Stellen. Er ist außerdem die Liftung des zentralen Charakters  $\omega_{\mathbb{Q}}$  von  $\pi_{\mathbb{Q}}$ . Wie wir bereits in 1.1.4. bemerkt haben, entspricht  $\omega$  unter dem Isomorphismus (1.2) einem Geschlechtsklassencharakter. Wir wollen diese Charaktere näher beschreiben. Dazu zerlegen wir die Diskriminante  $D$  von  $F$  in ein Produkt von Primdiskriminanten von  $D$ , d.h. wir schreiben  $D$  als

$$D = \prod_{p|D} D(p),$$

wobei  $p$  die Primteiler von  $D$  durchläuft und  $D(p)$  definiert ist als

$$(3.1) \quad D(p) := \begin{cases} p & \text{für } p \equiv 1(4) \\ -p & \text{für } p \equiv 3(4) \\ -4 & \text{für } p = 2, \quad D = 4(8) \\ 8 & \text{für } p = 2, \quad D = 0(8), \quad D/8 = 1(4) \\ -8 & \text{für } p = 2, \quad D = 0(8), \quad D/8 = 3(4) \end{cases}.$$

**Definition:**

Wenn ein Teiler  $D_1$  von  $D$  ein Produkt von Primdiskriminanten von  $D$  ist, dann sagen wir, daß  $D$  von  $D_1$  als *Diskriminante geteilt* wird, wir schreiben dafür  $D_1 \parallel D$ .

Die unverzweigten Größencharaktere von  $F$ , die über die Norm  $N_{F/\mathbb{Q}}$  faktorisieren, sind dann die Charaktere  $\epsilon_{L/F} = \epsilon_{L_1/\mathbb{Q}} \circ N_{F/\mathbb{Q}}$  mit  $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$ ,  $D_1 \parallel D$  und  $L := L_1 \cdot F$ . Da der zentrale Charakter  $\omega$  von  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)$  trivial auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist, muß  $D_1$  insbesondere positiv sein. Es gilt:

**Lemma 3.4:**

Eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  ist genau dann unverzweigt geliftet, wenn sie sich darstellen läßt als:

$$\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda$$

für einen positiven Teiler  $D_1 \parallel D$  und  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$  mit:

(1) Der zentrale Charakter  $\omega_{(\pi_{\mathbb{Q}})}$  von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  ist  $\epsilon_{L/\mathbb{Q}}$ .

(2) Für die Führer von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  und  $\omega_{(\pi_{\mathbb{Q}})}$  gilt:

$$\text{cond}(\pi_{\mathbb{Q}}) = \text{cond}(\omega_{(\pi_{\mathbb{Q}})}) = D_1.$$

(3) Für alle endlichen Primstellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$  ist  $(\pi_{\mathbb{Q}})_p$  äquivalent zu einer Hauptseriendarstellung  $\pi(\mu, \nu)$  mit  $\mu$  oder  $\nu$  unverzweigt.

(4) An der unendlichen Stelle ist  $\pi_{\mathbb{Q}}$  äquivalent zu  $\sigma(|t|^{1/2}, |t|^{-1/2})$ .

(5)  $\lambda$  ist ein unverzweigter Größencharakter von  $F$ , trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

In diesem Fall ist  $\pi$  ausgezeichnet bezüglich  $\omega^{-1} = \omega_{(\pi_{\mathbb{Q}})} \cdot \epsilon_{F/\mathbb{Q}} = \epsilon_{L_1/\mathbb{Q}}$  mit  $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{D/D_1})$ .

Beweis: Wir schreiben  $\pi$  als

$$\pi = (\pi'_Q \times F) \otimes \lambda'$$

mit  $\omega^{-1} = \omega_{\pi'_Q} \cdot \epsilon_{F/Q}$  und  $(\pi'_Q \times F)$  wie in Lemma 3.3. Es sei  $D_2$  das Produkt der Primdiskriminanten  $D(p)$  für die  $(\pi'_Q)_p$  äquivalent zu  $\pi(\mu, \nu)$ , mit  $\mu$  und  $\nu$  verzweigt, ist. Nach Lemma 3.3 kann dies nur für Teiler  $p$  von  $D$  der Fall sein. Wir setzen  $L_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{D_2})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \pi &= ((\pi'_Q \otimes \epsilon_{L_2/Q}) \times F) \otimes (\lambda' \cdot (\epsilon_{L_2/Q}^{-1} \circ N_{F/Q})) \\ \text{und } \omega^{-1} &= \omega_{(\pi'_Q \otimes \epsilon_{L_2/Q})} \cdot \epsilon_{F/Q} = \omega_{\pi'_Q} \cdot \epsilon_{F/Q}. \end{aligned}$$

Der zentrale Charakter von  $\pi_Q := \pi'_Q \otimes \epsilon_{L_2/Q}$  ist, wie wir gesehen haben, gleich  $\epsilon_{L/Q}$  für ein  $D_1 > 0$  mit  $D_1 \parallel D$  und  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$ . Außerdem erfüllt  $\pi_Q$  die Bedingung (3) nach Lemma 3.3, (1). Wir definieren

$$\lambda := \lambda' \cdot (\epsilon_{L_2/Q}^{-1} \circ N_{F/Q}).$$

Dann erfüllt  $\lambda$  die Bedingung (5) und es bleibt nur noch (2) zu zeigen.

Nach [Ge], 4.25, ist der Führer von  $\pi_Q$ :

$$\begin{aligned} \text{cond}(\pi_Q) &= \prod_p \text{cond}(\pi(\mu_p, \nu_p)) \\ &= \prod_p \text{cond}(\mu_p) \cdot \text{cond}(\nu_p). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist aber  $\mu_p$  oder  $\nu_p$  unverzweigt, also ist

$$\begin{aligned} \text{cond}(\pi_Q) &= \prod_p \text{cond}(\mu_p \cdot \nu_p) \\ &= \text{cond}(\omega(\pi_Q)) \\ &= D_1 \end{aligned}$$

Da  $\epsilon_{L/Q} \circ N_{F/Q}$  unverzweigt ist, folgt die andere Richtung unmittelbar aus Lemma 3.3. □

3.2.2. Für eine positive ganze Zahl  $N$  sei  $\Gamma_0(N)$  die Gruppe

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

und  $\psi$  ein Charakter von  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ . Dann bezeichnen wir wie üblich mit  $S_k(N, \psi)$  den Raum der  $\Gamma_0(N)$ -Spitzenformen vom Gewicht  $k$  zum Charakter  $\psi$ . Unser Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen den in Lemma 3.4 beschriebenen automorphen Darstellungen  $\pi_{\mathbb{Q}}$  von  $\text{Gl}_2(\mathbb{A})$  und den Spitzenformen  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$  ( $\left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$  ist der Legendrecharakter) für eine positive ganze Zahl  $D_1$ , die  $D$  als Diskriminante teilt, herzustellen. Für den Fall einer Hilbertschen Modulfläche zur Primdiskriminante wurde dies bereits - mit anderen Methoden - in [HZ<sub>1</sub>] durchgeführt.

Der Raum  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$  hat eine Basis aus Eigenformen bezüglich der Operation der Heckeoperatoren  $T(p)$  mit  $ggT(D_1, p) = 1$ . Da der Charakter  $\left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$  den Führer  $D_1$  hat, besteht diese Basis aus Neuformen ([Ge], §5, B). Der Legendrecharakter  $\left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$  auf  $(\mathbb{Z}/D_1\mathbb{Z})^*$  definiert durch den natürlichen Homomorphismus

$$o_p^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/D_1\mathbb{Z})^*$$

einen Größencharakter  $\epsilon_{D_1}$  von  $\mathbb{Q}$ , der mit dem Charakter  $\epsilon_{L/\mathbb{Q}}$  für  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$  identisch ist ([Ge], §3, A). Wie in [Ge], §5, C beschrieben, kann man einer Hecke-eigenform  $f$  aus  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$  eine automorphe Darstellung  $\pi(f)$  mit zentralem Charakter  $\epsilon_{L/\mathbb{Q}}$  von  $\text{Gl}_2(\mathbb{A})$  zuordnen. Dazu zerlegt man  $g$  aus  $\text{Gl}_2(\mathbb{A})$  in  $g = \gamma \cdot g_{\infty} \cdot k_0$  mit  $\gamma$  aus  $\text{Gl}_2(\mathbb{Q})$ ,  $g_{\infty} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  aus  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})^+$  und  $k_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  aus der maximal kompakten Untergruppe von  $\text{Gl}_2(\mathbb{A}_f)$ . Dann ist

$$\phi_f(g) := f\left(\frac{a \cdot i + b}{c \cdot i + d}\right) \cdot \left(\frac{1}{c \cdot i + d}\right)^2 \cdot \det(g_{\infty}) \cdot \epsilon_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)$$

aus  $L_0^2(\text{Gl}_2(\mathbb{Q}) \backslash \text{Gl}_2(\mathbb{A}), \epsilon_{L/\mathbb{Q}})$ . Der Unterraum  $H(f)$  von  $L_0^2(\text{Gl}_2(\mathbb{Q}) \backslash \text{Gl}_2(\mathbb{A}), \epsilon_{L/\mathbb{Q}})$ , der von den Rechtstranslaten von  $\phi_f$  erzeugt wird, ist dann der Darstellungsraum einer automorphen Darstellung  $\pi(f)$  von  $\text{Gl}_2(\mathbb{A})$ .

**Lemma 3.5:** ([Ge], Lemma 5.16 und Theorem 5.19)

Für eine fest gewählte Basis  $B$  aus Hecke-Eigenformen von  $S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right])$  ist die oben beschriebene Zuordnung

$$f \longrightarrow \pi(f)$$

eine Bijektion zwischen  $B$  und den automorphen Darstellungen  $\pi_{\mathbb{Q}}$  von  $GL_2(A)$ , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) Der zentrale Charakter von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  ist  $\epsilon_{L/\mathbb{Q}}$  mit  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$ .
- (2) Der Führer  $\text{cond}(\pi_{\mathbb{Q}})$  von  $\pi_{\mathbb{Q}}$  ist  $D_1$ .
- (3) An der unendlichen Stelle ist  $\pi_{\mathbb{Q}}$  äquivalent zu der diskreten Seriendarstellung  $\sigma(|\tau|^{1/2}, |\tau|^{-1/2})$ .

Die in Lemma 3.5 charakterisierten Darstellungen sind gerade die Darstellungen, die die Bedingungen (1), (2) und (4) aus Lemma 3.4 erfüllen. Wir werden nun zeigen, daß die Bedingung (3) in Lemma 3.4 überflüssig ist.

**Lemma 3.6:**

Es sei  $\pi_{\mathbb{Q}}$  eine cuspidale automorphe Darstellung von  $GL_2(A)$  mit zentralem Charakter  $\omega$  und  $\text{cond}(\pi_{\mathbb{Q}}) = \text{cond}(\omega)$ , dann ist  $\pi_{\mathbb{Q}}$  an allen endlichen Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$  äquivalent zu einer Hauptseriendarstellung  $\pi(\mu, \nu)$  mit  $\mu$  oder  $\nu$  unverzweigt.

**Beweis:** Nach [Ge], 4.25, gilt für eine Hauptseriendarstellung  $\pi(\mu, \nu)$

$$\text{cond}(\pi(\mu, \nu)) = \text{cond}(\mu) \cdot \text{cond}(\nu) .$$

Wir bezeichnen mit  $p^{\alpha}, p^{\beta}$  und  $p^{\gamma}$  die Führer  $\text{cond}(\mu)$ ,  $\text{cond}(\nu)$  und  $\text{cond}(\mu \cdot \nu)$ . Dann ist  $\gamma \leq \max(\alpha, \beta)$  und damit kann  $p^{\alpha+\beta} = p^{\alpha} \cdot p^{\beta} = p^{\gamma}$  nur dann erfüllt sein, wenn  $\alpha$  oder  $\beta$  null, d.h. wenn  $\mu$  oder  $\nu$  unverzweigt ist. Es genügt also zu zeigen, daß  $\pi_{\mathbb{Q}}$  an den endlichen Stellen nicht äquivalent zu einer speziellen oder einer supercuspidalen Darstellung sein kann.

**Fall 1:** Angenommen  $(\pi_{\mathbb{Q}})_p$  ist eine spezielle Darstellung  $\sigma(\mu, \nu)$ . Dann ist  $\mu \cdot \nu^{-1}(\tau) = |\tau|_p$  oder  $|\tau|_p^{-1}$  und daher  $\text{cond}(\mu) = \text{cond}(\nu)$ . Nach [Ge], 4.25 gilt

$$\text{cond}(\sigma(\mu, \nu)) = \begin{cases} \text{cond}(\mu)^2 & \text{für } \mu \text{ verzweigt} \\ p & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem ist  $\omega_p = \mu \cdot \nu$ . Zunächst bemerken wir, daß  $\mu$  unverzweigt sein muß, denn sonst ist  $\text{cond}(\omega_p) = 1$  und  $\text{cond}((\pi_{\mathbb{Q}})_p) = p$ .

Sei also  $\text{cond}(\mu) = p^\beta$  und  $\text{cond}(\mu \cdot \nu) = p^\gamma$  für ganze Zahlen  $\beta$  und  $\gamma \geq 1$ . Dann ist  $\gamma \leq \beta$  und  $\text{cond}((\pi_{\mathbb{Q}})_p) = p^{2\beta}$ . Also ist  $\gamma < 2\beta$ , im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Fall 2: Angenommen  $(\pi_{\mathbb{Q}})_p$  ist supercuspidal. Dann ist  $\pi_p$  äquivalent zu einer Weil-Darstellung  $\pi(\lambda)$  oder einer exzeptionellen Darstellung ([No]). Betrachten wir zunächst den Fall der Weil-Darstellung. Es sei  $Q$  über  $\mathbb{Q}_p$  eine quadratische Erweiterung lokaler Körper und  $\lambda$  ein Charakter von  $Q^*$ . Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{p}$  das maximale Ideal von  $Q$ . Da  $\pi(\lambda)$  supercuspidal ist, ist  $\lambda$  nicht  $\text{Gal}(Q/\mathbb{Q})$ -invariant, also insbesondere verzweigt. Nach [Ca], 3.1. und (30) gilt:

$$\text{cond}((\pi_{\mathbb{Q}})_p) = N_{Q/\mathbb{Q}_p}(\text{cond}(\lambda)) \cdot \text{cond}(\epsilon_{Q/\mathbb{Q}_p}).$$

Der zentrale Charakter von  $(\pi_{\mathbb{Q}})_p$  ist  $\lambda|_{\mathbb{Q}_p} \cdot \epsilon_{Q/\mathbb{Q}_p}$  ([GL], Appendix B) und damit

$$\text{cond}(\omega_p) = \text{cond}(\lambda|_{\mathbb{Q}_p} \cdot \epsilon_{Q/\mathbb{Q}_p}).$$

Da der Führer von  $\lambda$  nicht trivial ist, kann  $\text{cond}((\pi_{\mathbb{Q}})_p) = \text{cond}(\omega_p)$  nur dann erfüllt sein, wenn

$$\begin{aligned} N_{Q/\mathbb{Q}_p}(\text{cond}(\lambda)) &= \text{cond}(\lambda|_{\mathbb{Q}_p}) \text{ und} \\ \text{cond}(\epsilon_{Q/\mathbb{Q}_p}) &= 1 \end{aligned}$$

gilt. Aus der zweiten Gleichung folgt, daß  $\mathfrak{p} = (p)$  und  $N_{Q/\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{p}) = p^2$  ist. Wenn nun  $\text{cond}(\lambda) = \mathfrak{p}^\alpha$  für eine ganze Zahl  $\alpha \geq 1$  und  $\text{cond}(\lambda|_{\mathbb{Q}_p}) = \mathfrak{p}^\beta$  gilt, dann ist  $\beta \leq \alpha$ . Es gilt aber  $N_{Q/\mathbb{Q}_p}(\text{cond}(\lambda)) = p^{2\alpha}$  und  $\beta < 2\alpha$ , im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Exzeptionelle Darstellungen von  $\text{Gl}_2(\mathbb{Q}_p)$  existieren nur für  $p = 2$ . In diesem Fall gibt es, bis auf Äquivalenz, genau vier exzeptionelle Darstellungen. Die

Führer dieser Darstellungen werden in [No], Théorème 3' angegeben (Wir benutzen die Bezeichnungen von [No]):

$$\begin{aligned} \text{cond}(E_{3,+}) &= 2^3 \\ \text{cond}(E_{5,-}) &= 2^6 \\ \text{cond}(E_{7,+}) &= \text{cond}(E_{7,-}) = 2^7. \end{aligned}$$

Die Führer der zentralen Charaktere dieser Darstellungen bestimmen wir mit Hilfe der Tabelle in [No]. Danach gilt:

$$\text{cond}(\omega_p) = \begin{cases} 1 & \text{für } \pi_p = E_{3,+} \text{ und } E_{7,+} \\ 2 & \text{für } \pi_p = E_{5,-} \text{ und } E_{7,-} \end{cases}$$

Auch in diesem Fall ist  $\text{cond}(\omega_p) \neq \text{cond}(\langle \pi_{\mathbb{Q}} \rangle_p)$ . □

Aus Lemma 3.4 bis 3.6 folgt:

**Lemma 3.7:**

Eine automorphe Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$  aus  $\text{Coh}_0$  ist genau dann unverzweigt geliftet, wenn es eine Darstellung  $\pi_{\mathbb{Q}}$  und einen Größencharakter  $\lambda$  von  $F$  gibt mit

$$\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda,$$

und  $\pi_{\mathbb{Q}}$  und  $\lambda$  die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Es gibt eine positive ganze Zahl  $D_1$ , die  $D$  als Diskriminante teilt, und eine Hecke-Eigenform  $f$  aus  $S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right])$ , so daß  $\pi_{\mathbb{Q}}$  äquivalent zu der  $f$  zugeordneten automorphen Darstellung  $\pi(f)$  ist.

(2) Der Größencharakter  $\lambda$  ist unverzweigt und trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

In diesem Fall ist  $\pi$  ausgezeichnet bezüglich

$$\omega = \omega^{-1} = \epsilon_{L/\mathbb{Q}} \epsilon_{F/\mathbb{Q}} = \epsilon_{L_1/\mathbb{Q}}$$

mit  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$  und  $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{D/D_1})$ .

Um die Anzahl der unverzweigt gelifteten Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bestimmen zu können, benötigen wir noch das folgende Lemma:

**Lemma 3.8:**

Für  $i$  aus  $\{1,2\}$  seien  $D_i$  positive ganze Zahlen, die  $D$  als Diskriminante teilen, und  $B_i$  Basen aus Hecke-Eigenformen von  $S_2(D_i, \left[ \frac{D}{i} \right])$ . Für zwei Spitzenformen  $f_i$  aus  $B_i$  seien  $\pi_i = \pi(f_i)$  die entsprechenden automorphen Darstellungen. Dann gilt

$$(\pi_1 \times F) \otimes \lambda_1 = (\pi_2 \times F) \otimes \lambda_2$$

für zwei Größencharaktere  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  $F$ , die unverzweigt und trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind, genau dann, wenn  $D_1 = D_2$  ist und es einen Teiler  $d$  von  $D_1$  als Diskriminante gibt mit

$$\pi_1 = \pi_2 \otimes \epsilon_{L/\mathbb{Q}} \text{ und } \lambda_1 = \lambda_2 \cdot \epsilon_{L \cdot F/F}$$

für  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ .

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} & (\pi_1 \times F) \otimes \lambda_1 = (\pi_2 \times F) \otimes \lambda_2 \\ \Leftrightarrow & (\pi_1 \times F) \otimes \eta = (\pi_2 \times F) \quad \text{für } \eta := \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} \\ \Rightarrow & (\pi_1 \times F) \otimes (\eta^\sigma / \eta) = (\pi_1 \times F) . \end{aligned}$$

Dann ist entweder  $\eta$  eine Liftung, oder  $\pi$  ist eine CM-Form mit  $\pi \otimes \epsilon_{E/F} = \pi$  für eine imaginärquadratische Erweiterung  $E$  von  $F$  und  $\eta^\sigma / \eta = \epsilon_{E/F}$ . Da  $\eta$  unverzweigt und trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist kann der zweite Fall nicht auftreten, denn es gilt:

$$\eta_\infty^\sigma((\sqrt{D})_\infty) = \eta_\infty((-1)_\infty) \cdot \eta_\infty((\sqrt{D})_\infty) = \eta((\sqrt{D})_\infty)$$

und  $\epsilon_{E/F}((\sqrt{D})_\infty) = -1$  da  $E$  imaginärquadratisch ist.

Also ist

$$\eta = \bar{\eta} \circ N_{F/\mathbb{Q}} \text{ mit } \bar{\eta} = \epsilon_{L/\mathbb{Q}}, L := \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ und } d \parallel D.$$

Daraus folgt

$$(\pi_1 \otimes \bar{\eta}) \times F = \pi_2 \times F,$$

und nach Lemma 1.9, (3) gilt

$$\pi_1 \otimes \bar{\eta} = \pi_2 \text{ oder } \pi_2 \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}} .$$

Wir können o.B.d.A.  $\pi_1 \otimes \epsilon_{L/\mathbb{Q}} = \pi_2$  annehmen (sonst ersetze  $d$  durch  $D/d$ ) und es gilt  $\omega_{\pi_1} = \omega_{\pi_2}$  und damit  $D_1 = D_2$  nach Lemma 3.5.

Da der Führer von  $\pi_1$  gleich dem Führer von  $\pi_2$  ist, muß insbesondere  $d \parallel D_1$  gelten. □

Es gibt genau  $2^{t(D_1)}$  ( $t(D_1)$  ist die Anzahl der Primteiler von  $D_1$ ) Teiler von  $D_1$  als Diskriminante (dies sind die Produkte der in (3.1) definierten Primdiskriminanten) und  $\bar{h}(D)$  Größencharaktere von  $F$ , die unverzweigt und trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind. Damit gilt:

**Satz 3.9:**

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D$ . Dann ist die Anzahl der unverzweigt gelifteten automorphen Darstellungen  $\pi$  von  $Gl_2(A_F)$  aus  $Coh_0^K$  gleich

$$\sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} \dim S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right]) \cdot (\bar{h}(D) \cdot 2^{-t(D_1)}).$$

**Bemerkung:** Die Dimension des Raumes der Spitzenformen vom Nebentypus  $S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right])$  läßt sich einfach berechnen. Siehe dazu zum Beispiel [CO].

### 3.3. Die unverzweigt gelifteten CM-Formen aus $Coh_0$

In diesem Abschnitt werden wir die Anzahl der unverzweigt gelifteten CM-Formen  $\pi$  aus  $Coh_0^K$  bestimmen. Zunächst bemerken wir:

**Lemma 3.10:** (siehe auch [HLR], 4.81)

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper, der eine Einheit  $\epsilon$  mit negativer Norm enthält. Dann gibt es keine unverzweigten CM-Formen aus  $Coh_0$ .

**Beweis:** Sei  $\pi$  eine unverzweigte CM-Form aus  $Coh_0$ . Nach Lemma 1.8 gibt es dann eine quadratische Erweiterung  $L$  von  $F$  und einen Größencharakter  $\eta$  von  $L$  mit

$\pi = \pi(\eta)$ , und es gilt  $\pi \otimes \epsilon_{L/F} \cong \pi$ . Da  $\pi$  an den unendlichen Stellen äquivalent zu  $\sigma(|t|^{1/2}, |t|^{-1/2})$  ist, muß  $L$  imaginärquadratisch sein ([Ge], §7, B). Außerdem muß, da  $\pi$  unverzweigt ist, auch  $\epsilon_{L/F}$  unverzweigt sein. Deshalb gilt für die Einheit  $e$  von  $F$  mit negativer Norm:

$$\epsilon_{L/F}(e) = \text{sgn}(e) \cdot \text{sgn}(e') = -1,$$

im Widerspruch dazu, daß  $\epsilon_{L/F}$  ein Größencharakter von  $F$  ist. □

In 3.2.2. haben wir gesehen, wie man einer Hecke-Eigenform  $f$  aus  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$  eine automorphe Darstellung  $\pi(f)$  von  $GL_2(A)$  zuordnet. Es gilt:

**Lemma 3.11:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$ ,  $D_1$  ein Teiler von  $D$  als Diskriminante und  $B$  eine Basis aus Hecke-Eigenformen von  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$ . Dann ist die Anzahl der CM-Formen in

$$\{ \pi = \pi(f) \mid f \text{ aus } B \}$$

gleich

$$\sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} \left( h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right) \right).$$

Davon erfüllen für  $d < -4$ ,  $d \parallel D_1$  und  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$$h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right)$$

Darstellungen die Bedingung

$$\pi \cong \pi \otimes \epsilon_{L/\mathbb{Q}}.$$

**Beweis:** Es sei  $f$  eine Hecke-Eigenform aus  $S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right])$  und  $\pi = \pi(f)$  die ihr zugeordnete automorphe Darstellung von  $GL_2(A)$ . Wenn  $\pi$  vom CM-Typ ist, dann gibt es eine quadratische Erweiterung  $L$  von  $\mathbb{Q}$  und einen Größencharakter  $\lambda$  von  $L$  mit  $\pi \cong \pi(\lambda)$ . Da  $\pi \cong \sigma(|t|^{1/2}, |t|^{-1/2})$  ist, muß  $L$  imaginärquadratisch sein,

dann ist  $L_\infty \cong \mathbb{C}$  und ([Ge], 7.20)

$$(3.5) \quad \lambda_\infty(z) = z/|z| \text{ oder } \bar{z}/|z|.$$

Wegen  $\pi \otimes \epsilon_{L/\mathbb{Q}} \cong \pi$  und  $\text{cond}(\pi) = D_1$ , muß  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für ein  $d \parallel D_1$  sein.

Für eine endliche Primstelle  $p$  von  $\mathbb{Q}$  ist ([Ge], Theorem 7.4)  $\pi(\lambda)_p$  äquivalent zu

- (3.6) (1)  $\pi(\lambda_\beta, \lambda_{\beta'})$  für  $(p) = \beta \cdot \beta'$  in  $L$ ,  
 (2)  $\pi(\eta, \eta \cdot (\epsilon_{L/\mathbb{Q}})_p)$  falls  $p$  in  $L$  nicht zerfällt und  $\lambda_\beta = \eta \circ N_{L_\beta/\mathbb{Q}_p}$   
 gilt und  
 (3) supercuspidal in allen anderen Fällen.

Es sei  $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$  und  $\pi = \pi(f)$  für ein  $f$  aus  $B$ . Wir wollen die Einschränkungen von  $\lambda$  auf die lokalen Einheitengruppen von  $L$  beschreiben. Nach Lemma 3.6 und 3.7 ist  $\pi_p$  äquivalent zu  $\pi(\mu, \nu)$  für zwei Charaktere  $\mu$  und  $\nu$  von  $\mathbb{Q}_p^*$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1:  $p \mid d$  :

In diesem Fall ist  $(p) = \beta^2$  und nach (3.6) ist  $\lambda_\beta = \eta \circ N_{L_\beta/\mathbb{Q}_p}$  für einen unverzweigten Charakter  $\eta$  von  $\mathbb{Q}_p^*$ .

Fall 2:  $p \nmid (D_1/d)$  :

In diesem Fall muß  $p$  in  $L$  zerfallen, denn, da  $(\epsilon_{L/\mathbb{Q}})_p$  unverzweigt ist, hätten sonst - nach (3.6), (2) -  $\mu$  und  $\nu$  die gleiche Einschränkung auf  $U_p$ . Nach geeigneter Wahl von  $\beta$  und  $\beta'$  sind  $\lambda_\beta$  und  $\lambda_{\beta'} \cdot (\epsilon_{L_1/\mathbb{Q}})_p$  unverzweigt. Wir haben hier also insgesamt  $2^{t(D_1)-t(d)}$  Wahlmöglichkeiten.

Fall 3:  $p \nmid D_1$  :

In diesem Fall muß  $\lambda_\beta$  für alle  $\beta \mid p$  unverzweigt sein.

Wir sehen also, daß  $\pi(\lambda)$  genau dann die Bedingungen (1)-(3) in Lemma 3.5 erfüllt, wenn gilt

(3.7) (1) für alle  $p | (D_1/d)$  zerfällt die Primstelle  $p$  in  $L$ , d.h.  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ .

Wir schreiben  $(p) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$  und benutzen den Isomorphismus

$$\mathbb{Q}_p \cong L_{\mathfrak{p}} \cong L_{\mathfrak{p}'}, \text{ dann gilt}$$

$$\lambda_{\mathfrak{p}} \cdot \lambda_{\mathfrak{p}'} |_{U_p} = (\epsilon_{L/\mathbb{Q}}) |_{U_p}.$$

(2)  $\lambda_{\mathfrak{p}}$  ist unverzweigt für alle Primstellen  $\mathfrak{p}$  von  $L$ , die nicht über einem Teiler von  $D_1/d$  liegen.

(3)  $\lambda_{\infty}(z) = z/|z|$  oder  $\bar{z}/|z|$ .

Nach Lemma 1.3 gibt es einen Charakter  $\lambda$  von  $L$ , der (1)-(3) erfüllt, genau dann, wenn für alle Einheiten  $E$  von  $L$  gilt

$$(3.8) \quad \prod_{p | (D_1/d)} (\epsilon_{L_1/\mathbb{Q}})_p(E) \cdot (E/|E|) = 1$$

oder 
$$\prod_{p | (D_1/d)} (\epsilon_{L_1/\mathbb{Q}})_p(E) \cdot (\bar{E}/|E|) = 1.$$

Die Einheiten von  $L$  sind Einheitswurzeln und  $(\epsilon_{L_1/\mathbb{Q}})_p$  ist ein Charakter der Ordnung zwei. Deshalb kann (3.8) nur dann erfüllt sein, wenn  $E^2 = 1$  für alle Einheiten  $E$  von  $L$  gilt, d.h.  $L$  nur  $\pm 1$  als Einheiten hat. Das ist aber äquivalent zu  $d < -4$ . In diesem Fall gilt mit  $L_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{D_1/d})$

$$\prod_{p | (D_1/d)} (\epsilon_{L_1/\mathbb{Q}})_p(E) \cdot \text{sgn}(E) = (\epsilon_{L_2/\mathbb{Q}})(E) = 1.$$

Ein Charakter  $\lambda$  mit den gesuchten Eigenschaften existiert also genau dann, wenn  $d < -4$  ist und

$$\prod_{p | D_1/d} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) = 1$$

gilt. Wir haben für  $\lambda_{\infty}$  die Wahl zwischen  $z/|z|$  und  $\bar{z}/|z|$  und in (3.7), (2) haben wir  $2^{\tau(D_1) - \tau(d)}$  Wahlmöglichkeiten. Nach Lemma 1.3 gibt es damit

$$h(d) \cdot 2 \cdot 2^{t(D_1) - t(d)} \cdot \prod_{p|D_1/d} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) \\ = 2 \cdot h(d) \cdot \prod_{p|D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right)$$

Größencharaktere  $\lambda$  von  $L$ , die (3.7) erfüllen. Nach [GL], Appendix C, gilt

$$\pi(\lambda_1) \cong \pi(\lambda_2)$$

genau dann, wenn  $\lambda_1 = \lambda_2$  oder  $\lambda_1 = \lambda_2^\sigma$  für das nicht-triviale Element  $\sigma$  von  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  gilt. Das heißt, wir haben

$$h(d) \cdot \prod_{p|D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right)$$

verschiedene CM-Formen mit den gewünschten Eigenschaften. Summierung über  $d \parallel D_1$  und  $d < -4$  liefert die Behauptung.  $\square$

Daraus folgt:

**Satz 3.12:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$ . Die Anzahl der unverzweigt gelifteten CM-Formen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  ist

$$\bar{h}(D) \cdot \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left[ \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} \left( h(d) \cdot \prod_{p|D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) \right) \right]$$

Davon erfüllen für  $d < -4$  und  $d \parallel D$

$$\bar{h}(D) \cdot \sum_{\substack{d_1 = d, D/d \\ d_1 < -4}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left[ \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ d_1 \parallel D_1 \parallel D}} \left( h(d_1) \cdot \prod_{p|D_1} \left(1 + \left(\frac{d_1}{p}\right)\right) \right) \right]$$

Darstellungen die Bedingung  $\pi \otimes \epsilon_{L/F} \cong \pi$  mit  $L := F(\sqrt{d})$  ( $t(D_1)$  bezeichnet die Anzahl der Primteiler von  $D_1$ ).

**Beweis:** Sei  $\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda$  ausgezeichnet,  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)$  unverzweigt und  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$ . Wenn  $\pi$  eine CM-Form ist, gibt es einen unverzweigten, quadratischen

Größencharakter  $\eta$  von  $F$  mit

$$(\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \eta \cong \pi_{\mathbb{Q}} \times F.$$

Dann ist  $\eta$  eine Liftung  $\eta = \epsilon_{L/\mathbb{Q}} \circ N_{F/\mathbb{Q}}$  mit  $L := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für ein  $d \parallel D$ . Also ist o.B.d.A.

$$\pi_{\mathbb{Q}} \otimes \epsilon_{L/\mathbb{Q}} \cong \pi_{\mathbb{Q}}$$

(sonst vertausche  $d$  und  $D/d$ ).

Die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.8 und 3.11. □

**Korollar 3.13:**

Die Anzahl der unverzweigt gelifteten Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$ , die keine CM-Formen sind, ist

$$\bar{h}(D) \cdot \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left[ \begin{smallmatrix} D_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]) - \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right) \right\}.$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.9 und Satz 3.12. □

Nach Korollar 2.11 können wir die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel und die Picardzahl mit Hilfe der Anzahl der unverzweigt gelifteten Darstellungen abschätzen. Um zu entscheiden, wann diese Abschätzung eine Gleichheit ist, wollen wir nun die Fälle charakterisieren, in denen unverzweigte ausgezeichnete Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bereits unverzweigt geliftet sind. Dazu beweisen wir:

**Lemma 3.14:**

Für eine automorphe Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bezeichnen wir mit  $M_\pi$  die Menge der Darstellungen  $\pi \otimes \eta$ , wobei  $\eta$  die unverzweigten Größencharaktere durchläuft, die trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind. Es sei  $\sigma$  das nicht-triviale Element aus  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ . Dann gilt:

(1) Die Menge  $M_\pi$  wird genau dann von  $\sigma$  in sich überführt, wenn  $\pi$  ausgezeichnet ist.

(2) Die Aktion von  $\sigma$  auf  $M_\pi$  läßt genau dann mindestens ein Element von  $M_\pi$  fest, wenn  $\pi$  unverzweigt geliftet ist.

**Beweis:**

(1) Wenn  $\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda$  ausgezeichnet ist, gilt  $(\pi \otimes \eta)^\sigma = \pi \otimes (\lambda^\sigma/\lambda) \cdot \eta^\sigma$ , und  $(\pi \otimes \eta)^\sigma$  ist aus  $M_\pi$ . Falls  $M_\pi$  von  $\sigma$  festgelassen wird, gilt insbesondere  $\pi^\sigma = \pi \otimes \eta$  für ein  $\eta$ . Da  $\eta$  trivial auf  $I_{\mathbb{Q}}$  ist, gibt es einen Größencharakter  $\lambda$  von  $F$  mit  $\eta = \lambda/\lambda^\sigma$ . Also ist  $(\pi \otimes \lambda)$   $\sigma$ -invariant und daher eine Liftung  $\pi_{\mathbb{Q}} \times F$ . Also ist  $\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda^{-1}$  ausgezeichnet.

(2) Falls  $\pi = (\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \lambda$  aus  $\text{Coh}_0^K$  unverzweigt geliftet ist, wird  $\pi \otimes \lambda^{-1}$  von  $\sigma$  festgelassen. Andererseits ist ein  $\sigma$ -invariantes Element  $\pi \otimes \eta$  in  $M_\pi$  eine Liftung  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F)$  und wir können  $\pi$  schreiben als  $(\pi_{\mathbb{Q}} \times F) \otimes \eta^{-1}$ .  $\square$

**Korollar 3.15:**

(1) Falls die Diskriminante  $D$  des reellquadratischen Zahlkörpers  $F$  eine Primzahl ist, ist jede ausgezeichnete Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bereits unverzweigt geliftet.

(2) Falls die Klassenzahl im engeren Sinne  $\bar{h}(D) \equiv 2 \pmod{4}$  ist, ist jede ausgezeichnete CM-Form  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bereits unverzweigt geliftet.

**Beweis:**

(1) Die Diskriminante von  $F$  ist genau dann eine Primzahl, wenn die Klassenzahl von  $F$  im engeren Sinne ungerade ist ([Z], Korollar, p.112). Die Norm der Grundeinheit  $e_0$  von  $F$  ist in diesem Fall negativ und nach Lemma 3.10 gibt es keine CM-Formen. Deshalb hat  $M_\pi$  die Mächtigkeit  $\bar{h}(D)$ . Da  $\bar{h}(D)$  ungerade ist, wird, falls  $\pi$  ausgezeichnet ist, von  $\sigma$  mindestens ein Element von  $M_\pi$  festgelassen.

(2) Falls  $\pi$  eine CM-Form ist, hat  $M_\pi$  die Mächtigkeit  $\bar{h}(D)/2$  und wir argumentieren wieder wie in (1).  $\square$

**Bemerkung:**

Im allgemeinen sind nicht alle ausgezeichneten Darstellungen aus  $\text{Coh}_0^K$  unverzweigt geliftet. Wir können also nicht alle ausgezeichneten Darstellungen mit den Methoden von Lemma 3.7 konstruieren. Wir werden darauf noch in Abschnitt 4.4 eingehen.

**3.4. Die CM-Formen aus  $\text{Coh}_0$** 

Für den reellquadratischen Zahlkörper  $F$  der Diskriminante  $D$  sei  $K$  eine offene kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ . Wie wir in Korollar 2.11 gesehen haben, benötigen wir zur Bestimmung der Dimension des Unterraumes der algebraischen Zyklen  $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$  von  $\text{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  die Anzahl der CM-Formen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$ . Wir beschränken uns hier auf den Fall der maximal kompakten Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_F)$ , falls die Grundeinheit  $e_0$  von  $F$  negative Norm hat, und auf den Fall der in Lemma 3.2 definierten Untergruppe  $K_1$  von  $K_0$ , falls  $e_0$  positive Norm hat. In beiden Fällen folgt aus  $\pi \otimes \lambda \cong \pi$ , daß der quadratische Größencharakter  $\lambda$  eine biquadratische Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  definiert. Wie wir bereits in Lemma 3.10 gesehen haben, gibt es im Fall  $N(e_0) = -1$  und  $K := K_0$  keine CM-Formen aus  $\text{Coh}_0$  mit  $\pi_F^K \neq (0)$ . Für den Fall  $K := K_1$  gilt:

**Satz 3.16:**

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D > 12$  mit Grundeinheit  $e_0$  positiver Norm und  $K_1$  die, in Lemma 2.2 konstruierte, offene kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ . Es sei  $\pi$  eine CM-Form aus  $\text{Coh}_0$  mit  $\pi_F^{K_1} \neq (0)$ . Dann ist  $\pi$  äquivalent zu  $\pi(\Omega)$  für einen Größencharakter  $\Omega$  von  $L := F(\sqrt{d})$  mit  $d < 0$  und  $d \parallel D$ .

Die Anzahl der automorphen Darstellungen  $\pi(\Omega)$  aus  $\text{Coh}_0^{K_1}$  für einen Größencharakter  $\Omega$  von  $L := F(\sqrt{d})$  ist

$$h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D) \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } d \text{ oder } D/d \text{ aus } \{-3, -4\} \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gesamtzahl der CM-Formen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  mit  $\pi_f^{K_1} \neq (0)$  ist

$$\sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D) .$$

**Beweis:** Im Beweis von Lemma 3.10 haben wir bereits gesehen, daß  $\pi$  äquivalent zu  $\pi(\Omega)$  für einen Größencharakter  $\Omega$  einer unverzweigten quadratischen Erweiterung  $L := F(\sqrt{d})$  mit  $d < 0$  und  $d \parallel D$  ist. Die Darstellung  $\pi(\Omega)$  ist genau dann aus  $\text{Coh}_0^{K_1}$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (3.9) (1) An den unendlichen Stellen  $\mathfrak{o}$  von  $L$  ist  $\Omega_{\mathfrak{o}}(z) = z/|z|$  oder  $\bar{z}/|z|$ .  
 (2) An den endlichen Stellen  $\mathfrak{o} | \mathfrak{p}$  von  $L$  mit  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$  ist  $\Omega_{\mathfrak{o}}$  unverzweigt.  
 (3) An den endlichen Stellen  $\mathfrak{o} | \mathfrak{q}$  von  $L$  ist  $\Omega_{\mathfrak{o}}$  oder  $\Omega_{\mathfrak{o}} \cdot \mu \circ N_{L_{\mathfrak{o}}/F_{\mathfrak{q}}}$  unverzweigt.

Nach Lemma 1.3 gibt es einen Größencharakter  $\Omega$  von  $L$  mit diesen Eigenschaften genau dann, wenn

$$(3.10) \quad \prod_{\mathfrak{o}} \Omega_{\mathfrak{o}}(E) = 1$$

für alle Einheiten  $E$  von  $L$  erfüllt ist. In diesem Fall gibt es genau  $h(L)$  solche Charaktere. Da je zwei unter  $\text{Gal}(L/F)$  äquivalente Charaktere  $\Omega$  die gleiche Darstellung  $\pi(\Omega)$  definieren, können wir uns o.B.d.A. auf  $\Omega_{\mathfrak{o}}(z) = z/|z|$  an einer der beiden unendlichen Stellen festlegen. Die im folgenden benutzten Informationen über die Klassenzahl und die Einheitengruppe von  $L$  findet man in [Has], III, 26. Danach ist  $h(L) = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D)$ , wobei  $Q$  der Index der Einheitengruppe von  $F$  in der Einheitengruppe von  $L$  ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1:  $d, D/d \notin \{-3, -4\}$ :

In diesem Fall sind  $\pm 1$  die einzigen Einheitswurzeln in  $L$ . Die Einheiten  $E$  von  $L$  lassen sich schreiben als

$$E = \pm E_0^n$$

für eine Grundeinheit  $E_0$  von  $L$  und ein  $n$  aus  $\mathbb{Z}$ . Wir definieren  $E_0$  als

$$E_0 := \begin{cases} \sqrt{e_0} & \text{für } \sqrt{e_0} \in L \\ e_0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Klassenzahl von  $L$  ist

$$h(L) = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D)$$

mit

$$Q := \begin{cases} 1 & \text{für } E_0 = e_0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{v}_1$  und  $\mathfrak{v}_2$  die beiden unendlichen Primstellen von  $L$  und mit  $\mu \circ N$  das Produkt der lokalen Normen  $\prod_{\mathfrak{v}|q} \mu \circ N_{L_{\mathfrak{v}}/F_{\mathfrak{v}}}$ . Dann gibt es nach (3.9) bis auf Äquivalenz unter  $\text{Gal}(L/F)$  die folgenden Möglichkeiten für  $\Omega$ :

	$\prod_{\mathfrak{v} q} \Omega_{\mathfrak{v}} U_{\mathfrak{v}}$	$\Omega_{\mathfrak{v}_1}$	$\Omega_{\mathfrak{v}_2}$
(1)	1	$z/ z $	$z/ z $
(2)	1	$z/ z $	$\bar{z}/ z $
(3)	$\mu \circ N$	$z/ z $	$z/ z $
(4)	$\mu \circ N$	$z/ z $	$\bar{z}/ z $

In allen Fällen gilt

$$\Omega(-1) = \prod_{\mathfrak{v}|q} \Omega_{\mathfrak{v}}(-1) \cdot \Omega_{\mathfrak{v}_1}(-1) \cdot \Omega_{\mathfrak{v}_2}(-1) = 1.$$

Wir fixieren zwei Einbettungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  von  $L$  in  $\mathbb{C}$  mit  $\sigma_1|_F = \sigma_2|_F$ .

Falls  $E_0 = e_0$  ist, gilt:

$$\begin{aligned} & \prod_{\mathfrak{v}|q} \Omega_{\mathfrak{v}}(E_0) \cdot \Omega_{\mathfrak{v}_1}(\sigma_1(E_0)) \cdot \Omega_{\mathfrak{v}_2}(\sigma_2(E_0)) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{im Fall (1) und (2)} \\ \mu(e_0)^2 \quad \text{im Fall (3) und (4)} \end{array} \right\} \cdot \frac{N(e_0)}{|N(e_0)|} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Es erfüllen also alle vier Fälle die Bedingung (3.10) und es gibt (  $Q = 1$  )

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D) = 2 \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D)$$

verschiedene Darstellungen  $\pi(\Omega)$  aus  $\text{Coh}_0^{K_1}$ .

Falls  $E_0 = \sqrt{e_0}$  ist, gilt

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \Omega_{\mathfrak{p}}(E_0) \cdot \Omega_{\mathfrak{p}_1}(\sigma_1(E_0)) \cdot \Omega_{\mathfrak{p}_2}(\sigma_2(E_0)) \\ = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für (1) und (2)} \\ \mu(e_0) & \text{für (3) und (4)} \end{array} \right\} \cdot \pm \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für (1) und (3)} \\ -1 & \text{für (2) und (4)} \end{array} \right\}$$

Das Vorzeichen des letzten Faktors hängt von der Wahl der komplexen Einbettungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ab. Es treten also nur die Fälle (1) und (4) oder (2) und (3) auf. Auch in diesem Fall gibt es (  $Q = 2$  )

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D) = 2 \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D)$$

Darstellungen  $\pi(\Omega)$  in  $\text{Coh}_0^{K_1}$ .

Fall 2:  $d \in \{-3, -4\}$ ,  $D/d \notin \{-3, -4\}$

In diesem Fall lassen sich die Einheiten von  $L$  schreiben als

$$E = \eta \cdot E_0^n$$

für eine 6-te (bzw. 4-te) Einheitswurzel  $\eta$ ,  $n$  aus  $\mathbb{Z}$  und  $E_0 = e_0$  oder  $\sqrt{-e_0}$  (bzw.  $\sqrt{i \cdot e_0}$ ) falls  $d = -3$  (bzw.  $-4$ ) ist. Durch die Einheitswurzeln  $\eta$  und die Wahl der komplexen Einbettungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ist  $\Omega$  an den unendlichen Stellen bereits festgelegt. Damit halbiert sich die Zahl der Möglichkeiten. Der Beweis verläuft sonst analog zu Fall 1. □

### 3.5. Die unverzweigten Darstellungen aus $\text{Coh}_e$

Die ein-dimensionalen automorphen Darstellungen  $\pi$  von  $G(A)$  faktorisieren über die Determinante, d.h. es gibt einen Größencharakter  $\chi_\pi$  von  $F$  mit

$$\pi(g) = \chi_\pi(\det(g)) .$$

Nach Lemma 2.3 ist  $\pi$  genau dann aus  $\text{Coh}_e$ , wenn  $\chi_\pi$  trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist. Wir bezeichnen wieder mit  $K_0$  die maximal kompakte Untergruppe von  $G(A_F)$ . Dann ist  $\pi_F^{K_0}$  genau dann nicht trivial, wenn  $\chi_\pi$  trivial auf  $\det(K_0) = \prod_p U_p$  ist, d.h. wenn  $\chi_\pi$  unverzweigt ist. Für  $q$  und  $\mu$  wie in Lemma 1.1 definieren wir wieder die Untergruppe  $K_1$  von  $K_0$  als

$$K_1 := \{ k \in K_0 \mid \mu(k_q) = 1 \}$$

Es sei nun  $\pi$  aus  $\text{Coh}_e$  mit  $\pi_F^{K_1} \neq (0)$ . Dann ist  $\chi_\pi$  trivial auf  $\det(K_1) \cdot (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ . Nehmen wir an, daß  $\chi_\pi$  verzweigt ist. Dann ist  $\chi_\pi(e_0) = -1$ , im Widerspruch dazu, daß  $\chi_\pi$  ein Größencharakter von  $F$  ist. Damit haben wir bewiesen:

**Lemma 3.17:**

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D$ ,  $\pi$  eine automorphe Darstellung aus  $\text{Coh}_e$  und  $K$  entweder die maximal kompakte Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_F)$  oder, falls  $F$  keine Einheit negativer Norm enthält, die oben definierte Untergruppe  $K_1$  von  $K_0$ . Dann ist  $\pi_F^K$  genau dann nicht trivial, wenn  $\chi_\pi$  ein unverzweigter Größencharakter, trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , ist. Insbesondere gibt es genau  $\tilde{h}(D)$  automorphe Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_e$  mit  $\pi_F^K \neq (0)$ .

#### 4.1. Die Kohomologie der Hilbertschen Modulflächen

Es sei  $Y(D, B)$  die Hilbertsche Modulfläche zur Diskriminante  $D$  und Norm  $B = N(\mathfrak{b})$  eines ganzen Ideals  $\mathfrak{b}$  von  $F := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ . Wir wählen  $\mathfrak{b}$  immer so, daß  $B = N(\mathfrak{b})$  teilerfremd zu  $D$  ist. Wir untersuchen nun die Kohomologie der Komponenten  $X(D, \mathfrak{b})$  bzw.  $X_e(D, \mathfrak{b})$  der komplexen Varietät  $S_K(\mathbb{C})$ . Dazu definieren wir einen Automorphismus  $T_\eta$  auf der mittleren Schnittkohomologie und untersuchen, wie er auf ihrer Zerlegung in die Schnittkohomologien der Komponenten bzw. in relative Lie-Algebren Kohomologien (siehe (2.11)) operiert.

##### Notation:

In diesem Abschnitt bezeichnen wir, falls  $F$  eine Einheit negativer Norm besitzt, mit  $K$  die maximal kompakte Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_f)$ , sonst die, in Lemma 3.2 definierte, Untergruppe  $K_1$  vom Index zwei von  $K_0$ .

Die Menge der CM-Formen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  mit  $\pi_f^K \neq (0)$  bezeichnen wir mit  $\text{CM}$ . Mit  $\mathfrak{B}$  bezeichnen wir ein vollständiges Repräsentantensystem der Idealklassen im engeren Sinne von  $F$  und wählen - für alle  $\mathfrak{b}$  aus  $\mathfrak{B}$  - ein endliches  $F$ -Ideal  $\mathfrak{b}_\mathfrak{b}$ , das  $\mathfrak{b} = F \cap (\mathfrak{b}_\mathfrak{b} \cdot \Pi_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2)$  erfüllt. Wir definieren, wie in (2.8)

$$C_D := \left\{ \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b = \mathfrak{b}_\mathfrak{b} \text{ für ein } \mathfrak{b} \text{ aus } \mathfrak{B} \right\}$$

und bezeichnen mit  $\mathfrak{b}_c$  das endliche  $F$ -Ideal, für das  $c = \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gilt.

Nach Lemma 2.1 und 2.2 sind die Zusammenhangskomponenten des glatten Modells  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  von  $S_K(\mathbb{C})$  isomorph zu den Hilbertschen Modulflächen  $Y(D, \mathfrak{b})$  für  $\mathfrak{b}$  aus  $\mathfrak{B}$ . Die Kohomologie von  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  zerlegt sich daher in die direkte Summe der Kohomologie der Zusammenhangskomponenten:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} H^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) \\ &\cong \bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) \oplus H^2_{\text{sing}}(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Dabei haben wir mit  $H_{\text{sing}}^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  den Unterraum von  $H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  bezeichnet, der von den Poincarédualen der Auflösungskurven in  $H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  erzeugt wird. Da die Schnittmatrix der Auflösungskurven negativ-definit ist, ist die Dimension des komplexen Vektorraumes  $H_{\text{sing}}^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  gleich der Anzahl der Auflösungskurven. Wir wollen diese Anzahl mit  $l(\mathfrak{b})$  bezeichnen.

**Lemma 4.1:**

Für zwei ganze Ideale  $\mathfrak{b}_1$  und  $\mathfrak{b}_2$  von  $F$  gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_1), \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_2), \mathbb{C}).$$

**Beweis:** Für ein Ideal  $\mathfrak{b}$  aus  $\mathfrak{B}$  bezeichnen wir mit  $a_2(\mathfrak{b})$ ,  $a_3^+(\mathfrak{b})$  und  $a_3^-(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Quotientensingularitäten vom Typ  $(2;1,1)$ ,  $(3;1,1)$  und  $(3;2,1)$  (siehe [Hi<sub>1</sub>], 3.3) auf  $X(D, \mathfrak{b})$ , mit  $l_0(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Spitzensingularitäten von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  und mit  $\zeta_F(-1)$  den Wert der Zetafunktion von  $F$  an der Stelle  $-1$ . Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{IH}^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) - a_2(\mathfrak{b}) - a_3^+(\mathfrak{b}) - 2 \cdot a_3^-(\mathfrak{b}) - l_0(\mathfrak{b}).$$

Die Dimension von  $H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  berechnen wir nach [Ko], 1.1:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) = 2 \cdot \zeta_F(-1) + \frac{3}{2} \cdot a_2(\mathfrak{b}) + \frac{5}{3} \cdot a_3^+(\mathfrak{b}) + \frac{8}{3} \cdot a_3^-(\mathfrak{b}) + l_0(\mathfrak{b}) - 2.$$

Daraus folgt

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) = 2 \cdot \zeta_F(-1) - 2 + \frac{1}{2} \cdot a_2(\mathfrak{b}) + \frac{2}{3} \cdot (a_3^+(\mathfrak{b}) + a_3^-(\mathfrak{b})).$$

Nach [Hau] (siehe auch [Ko], S.6) hängen  $a_2(\mathfrak{b})$  und  $(a_3^+(\mathfrak{b}) + a_3^-(\mathfrak{b}))$  nicht mehr von  $\mathfrak{b}$  ab. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Nach Lemma 2.1 und 2.2 gilt

$$(4.2) \quad \bar{S}_K(\mathbb{C}) \cong \dot{\bigcup}_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \bar{X}(D, \mathfrak{b}).$$

Daraus folgt

$$(4.3) \quad \mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \mathrm{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}).$$

Wir wollen diesen Isomorphismus nun angeben. Dazu bezeichnen wir mit  $\mathfrak{b}_c$  das Ideal  $\mathfrak{b}_c := F \cap \mathfrak{b}_c \cdot (\prod \mathcal{O}_p \times \mathbb{R}^2)$  und setzen

$$(4.4) \quad \Gamma_c := G(\mathbb{Q}) \cap (c \cdot K \cdot c^{-1} \cdot G^0(\mathbb{R})).$$

Nach [BL], Cor. 1.3.5. und Prop. 1.3.8. ist die Schnittkohomologie isomorph zur relativen Lie-Algebren Kohomologie

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\cong H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)/K)^\infty) \text{ und} \\ \mathrm{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) &\cong H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; L^2(\Gamma_c \backslash G^0(\mathbb{R}))^\infty). \end{aligned}$$

Wie in [BJ], 4.3, definieren wir den Isomorphismus:

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccc} L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)/K)^\infty & \longrightarrow & \prod_{c \in C_D} L^2(\Gamma_c \backslash G^0(\mathbb{R}))^\infty \\ f & \longrightarrow & \prod_{c \in C_D} f_c \end{array}$$

mit  $f_c(g_\infty) := f(c \cdot g_\infty)$ . Der durch (4.6) induzierte Isomorphismus auf der Kohomologie liefert (4.3).

Ein unverzweigter Größencharaktere  $\eta$  von  $F$ , der trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist, definiert einen Automorphismus

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} \bar{T}_\eta : L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)/K)^\infty & \longrightarrow & L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A)/K)^\infty \\ f & \longrightarrow & f \otimes \eta \end{array}$$

Auf der Kohomologie  $\mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  erhalten wir mit (4.5) einen Isomorphismus

$$(4.8) \quad T_\eta : \mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Untersuchen wir zunächst die Operation von  $T_\eta$  auf der Zerlegung (4.3). Für ein  $c$  aus  $C_D$  und  $g_\infty$  aus  $G^0(\mathbb{R})$  gilt

$$\begin{aligned}
 (\bar{T}_\eta f)_c(g_\infty) &= (f \otimes \eta)_c(g_\infty) \\
 &= (f \otimes \eta)(c \cdot g_\infty) \\
 &= f(c \cdot g_\infty) \cdot \eta(\det(c)) \cdot \eta(\det(g_\infty)) \\
 &= f_c(g_\infty) \cdot \eta(b_c^{-1}) .
 \end{aligned}$$

Auf  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  operiert  $T_\eta$  deshalb durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel:

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad T_\eta : IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) &\longrightarrow IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \\
 x_c &\longrightarrow \eta(b_c^{-1}) \cdot x_c .
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Operation von  $T_\eta$  auf der Zerlegung (2.12)

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{\pi} H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty) \otimes \pi_f^K \\
 &\cong \bigoplus_{\pi} H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi^K) .
 \end{aligned}$$

Auf dieser Zerlegung operiert  $T_\eta$  durch

$$(4.11) \quad T_\eta : H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi^K) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; (\pi \otimes \eta)^K) .$$

Wir erhalten mehr Information über die Operation von  $T_\eta$ , wenn wir die Hodgezerlegung der Schnittkohomologie von  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  mit der von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  vergleichen. Aus (4.9) folgt, daß  $T_\eta$  die Hodgezerlegung von  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  und damit die von  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  invariant läßt. Die relative Lie-Algebren Kohomologie  $H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty)$  hat eine Hodgezerlegung, deren direkte Summe unter dem Isomorphismus (4.10) die Hodgezerlegung von  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  liefert. Die Hodgezerlegung  $H^{2,0}(\pi) \oplus H^{1,1}(\pi) \oplus H^{0,2}(\pi)$  von  $H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty)$  ist (siehe [HLR], §3):

$$H^{2,0}(\pi) \oplus H^{1,1}(\pi) \oplus H^{0,2}(\pi) \cong \begin{cases} (0) \oplus \mathbb{C}^2 \oplus (0) & \text{für } \pi \text{ aus } \text{Coh}_e \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} & \text{für } \pi \text{ aus } \text{Coh}_0 . \end{cases}$$

Das geometrische Geschlecht  $p_g(Y(D, \mathfrak{b}_c))$  ist die Dimension  $\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$ . Die Schnittkohomologie  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  ist gerade der reine Anteil vom Gewicht 2 der gemischten Hodge-Struktur von  $H^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  und es gilt

$$H^{p,q}(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \cong IH^{p,q}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \oplus H_{\text{sing}}^{p,q}(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) .$$

Da  $H_{\text{sing}}^2(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  per Definition aus algebraischen Zykeln besteht, ist dieser Summand vom Typ (1,1) und es gilt

$$\begin{aligned} p_g(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} IH^{2,0}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) . \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Hodgezerlegung von  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 4.2:**

Es sei  $\mathcal{O}$  der Ring der ganzen Zahlen des reellquadratischen Zahlkörpers  $F$  der Diskriminante  $D$  und  $\mathfrak{b}$  ein ganzes Ideal von  $F$ . Dann gilt für das geometrische Geschlecht  $p_g$  der Hilbertschen Modulfläche  $Y(D, \mathfrak{b})$ :

$$p_g(Y(D, \mathfrak{b})) - p_g(Y(D, \mathcal{O})) = \frac{1}{h(D)} \cdot \sum_{\pi \in \text{CM}} \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta(\pi)(\mathfrak{b}_\pi)) .$$

Dabei durchläuft  $\pi$  die CM-Formen aus  $\text{Coh}_0$ , für die  $\pi_{\mathbb{F}}^K \neq (0)$  ist, und  $\eta(\pi)$  ist der nicht-triviale Größencharakter von  $F$  mit  $\pi \cong \pi \otimes \eta(\pi)$ .

**Beweis:** Für ein  $d \parallel D$  bezeichnen wir mit  $\epsilon_d$  den Größencharakter  $\epsilon_{L/F}$  mit  $L := F(\sqrt{d})$ . Mit  $-b_1, \dots, -b_{l_{\mathcal{O}}(c)}$  bezeichnen wir die Selbstschnittzahl der Kurven der Spitzenauflösungen. Dann berechnet sich das geometrische Geschlecht von  $Y(D, \mathfrak{b})$  als ([Ko], S.7):

$$p_g(Y(D, \mathfrak{b})) = \frac{1}{2} r_F(-1) - 1 + \frac{1}{8} \cdot a_2(\mathfrak{b}) + \frac{1}{9} \cdot a_3^+(\mathfrak{b}) + \frac{2}{9} \cdot a_3^-(\mathfrak{b}) + \sum_{i=1}^{l_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} (3 - b_i) / 12 .$$

Wie wir wissen hängen  $a_2(\mathfrak{b})$  und  $(a_3^+(\mathfrak{b}) + a_3^-(\mathfrak{b}))$  nicht mehr von dem Ideal  $\mathfrak{b}$  ab.

Nach [VdG], Th.3.2. gilt

$$\sum_{i=1}^{l_D(b)} (3-b_i)/12 = - \sum_{\substack{d < (D/d) < 0 \\ d \parallel D}} \epsilon_d(b_b) \cdot h'(d) \cdot h'(D/d)$$

für die modifizierte Klassenzahl  $h'(d) := \begin{cases} h(d) & \text{für } d < -4 \\ 1/2 & \text{für } d = -4 \\ 1/3 & \text{für } d = -3 \end{cases}$ .

Außerdem gilt ([Ko], S.6):

$$a_3^-(b) - a_3^-(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } D \equiv 0(3) \\ \frac{3}{2} \cdot h(-D/3) \cdot (1 - \epsilon_d(b_b)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} & p_g(Y(D, b)) - p_g(Y(D, 0)) \\ &= \sum_{\substack{(D/d) < d < 0 \\ d \parallel D}} \frac{1}{2} \cdot (1 - \epsilon_d(b_b)) \cdot \begin{cases} 2 \cdot h(d) \cdot h(D/d) & \text{für } d \neq -3, -4 \\ h(-D/3) & \text{für } d = -3 \\ h(-D/4) & \text{für } d = -4 \end{cases} \\ &= \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} \frac{1}{2} \cdot (1 - \epsilon_d(b_b)) \cdot h(d) \cdot h(D/d) \\ &= \frac{1}{h(D)} \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} \frac{1}{2} \cdot (1 - \epsilon_d(b_b)) \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D) \\ &= \frac{1}{h(D)} \sum_{\pi \in CM} \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta(\pi)(b_b)) \quad (\text{nach Satz 3.17}) \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Hodgezerlegung von  $IH^2(\bar{X}(D, b_c), \mathbb{C})$  untersuchen, dazu bezeichnen wir, für ein  $x$  aus  $H^2(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi^K)$ ,  $x \neq 0$ , mit  $\langle \{T_\eta(x)\}_\eta \rangle$  den von den Bildern  $T_\eta(x)$  für alle unverzweigten Größencharaktere  $\eta$ , die trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind, aufgespannten Unterraum von  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Nach (4.9) ist, falls  $x$

aus  $H^{p,q}(\mathcal{G}, K_\omega; \pi^K)$  ist, auch der von  $x$  erzeugte Unterraum  $\langle \{T_\eta(x)\}_\eta \rangle$  in  $H^{p,q}(\mathcal{G}, K_\omega; \pi^K)$  enthalten.

**Lemma 4.3:**

Es sei  $\pi$  eine automorphe Darstellung aus Coh mit  $\pi_f^K \neq (0)$  und  $x \neq 0$  aus  $H^{p,q}(\mathcal{G}, K_\omega; \pi^K)$ . Dann gilt

(1) Falls  $\pi$  keine CM-Form ist und  $\pi_f^K \neq (0)$  gilt, ist der Unterraum  $\langle \{T_\eta(x)\}_\eta \rangle$   $\tilde{h}(D)$ -dimensional und hat eine Basis  $\{x_c\}_{c \in C_D}$  mit  $x_c$  aus  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$ .

(2) Falls  $\pi$  eine CM-Form und  $x$  aus  $H^{p,q}(\mathcal{G}, K_\omega; \pi^K)$  ist, ist  $\langle \{T_\eta(x)\}_\eta \rangle$   $\tilde{h}(D)/2$ -dimensional und hat eine Basis

$$\begin{aligned} \{x_c\}_{c \in C(\pi)} & \quad \text{für } (p,q) \text{ aus } \{(2,0), (0,2)\} \quad \text{und} \\ \{x_c\}_{c \in C(\pi)} & \quad \text{für } (p,q) = (1,1) . \end{aligned}$$

Dabei ist  $C(\pi) := \{ c \in C_D \mid \eta(\pi)(b_c) = 1 \}$  und  $x_c$  aus  $IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$ .

**Beweis:**

(1) Wenn  $\pi$  keine CM-Form ist, dann gilt (bezüglich der in [HLR] (3.2) definierten Paarung) für alle Charaktere  $\eta_1$  und  $\eta_2$  von  $C_F / (\prod U_{\mathfrak{v}})$ :

$$H^2(\mathcal{G}, K_\omega; (\pi \otimes \eta_1)^K) \perp H^2(\mathcal{G}, K_\omega; (\pi \otimes \eta_2)^K) \iff \eta_1 \neq \eta_2 .$$

Da es genau  $\tilde{h}(D)$  Charaktere von  $C_F / (\prod U_{\mathfrak{v}})$  gibt, ist also

$$\dim_{\mathbb{C}} \langle \{T_\eta(x)\}_\eta \rangle = \tilde{h}(D) .$$

Wir zerlegen  $x$  nach (4.3) als

$$x = \sum_{c \in C_D} x_c \quad \text{mit } x_c \text{ aus } IH^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) .$$

Aus (4.9) folgt dann

$$T_\eta(x) = \sum_{c \in C_D} \eta(b_c^{-1}) \cdot x_c$$

und damit ist  $\{x_c\}_{c \in C_D}$  eine Basis von  $\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle$ . Aus Dimensionsgründen ist  $x_c \neq 0$  für alle  $c$  aus  $C_D$ .

(2) Für eine CM-Form  $\pi$  ist  $T_{\eta(\pi)}^2 = \text{id}$  und damit operiert  $T_{\eta(\pi)}$  auf dem ein-dimensionalen Raum  $H^{2,0}(\mathfrak{g}, K_\omega; \pi^K)$  als Multiplikation mit einer konstanten  $s(\pi) = \pm 1$ . Außerdem gilt

$$H^2(\mathfrak{g}, K_\omega; (\pi \otimes \eta_1)^K) \perp H^2(\mathfrak{g}, K_\omega; (\pi \otimes \eta_2)^K) \\ \Rightarrow \eta_1 \neq \eta_2 \text{ und } \eta_1 \neq \eta_2 \cdot \eta(\pi).$$

Deshalb ist, für ein  $x$  aus  $H^{2,0}(\mathfrak{g}, K_\omega; \pi^K)$ , der Raum  $\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle \cong \tilde{h}(D)/2$ -dimensional. Wir zerlegen  $x$  wie oben als

$$x = \sum_{c \in C_D} x_c.$$

In diesem Fall gilt

$$T_{\eta(\pi)}(x) = \sum_{c \in C_D} \eta(\pi)(b_c^{-1}) \cdot x_c = \sum_{c \in C_D} s(\pi) \cdot x_c,$$

d.h.  $x_c = 0$  für  $c$  aus  $C(\pi) := \{c \in C_D \mid \eta(\pi)(b_c^{-1}) = -s(\pi)\}$ .

Da  $C(\pi)$  genau  $\tilde{h}(D)/2$  Elemente enthält, ist aus Dimensionsgründen  $x_c$  genau dann null, wenn  $c$  aus  $C(\pi)$  ist. Damit ist  $\{x_c\}_{c \in C(\pi)}$  eine Basis von  $\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle$ .

Wir bestimmen nun  $s(\pi)$ :

$$p_g(Y(D, \mathfrak{b})) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(Y(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \\ = \dim_{\mathbb{C}} IH^{2,0}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \\ = \sum_{\pi \in CM} \dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(\mathfrak{g}, K_\omega; \pi^K) \cdot \tilde{h}(D)^{-1} + \sum_{\pi \in CM} \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta(\pi)(b_c^{-1}) \cdot s(\pi)) \cdot 2 \cdot \tilde{h}(D)^{-1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & p_g(Y(D, \mathfrak{b}_c)) - p_g(Y(D, \mathcal{O})) \\ &= \sum_{\pi \in \text{CM}} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \bar{h}(D)^{-1} \cdot s(\pi) \cdot (\eta(\pi)(b_c^{-1}) - 1) \\ &= \frac{1}{h(D)} \sum_{\pi \in \text{CM}} \frac{1}{2} \cdot s(\pi) \cdot (\eta(\pi)(b_c^{-1}) - 1) \quad (\text{denn } \bar{h}(D) = 2 \cdot h(D) \text{ falls } \text{CM} \neq \emptyset) \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Lemma 4.2 liefert

$$s(\pi) = -1 \text{ f\u00fcr alle CM-Formen } \pi$$

$$\text{und } C(\pi) = \{ c \in C_D \mid \eta(\pi)(b_c) = 1 \}.$$

Da die komplexe Konjugation auf  $\text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  den Unterraum  $\text{IH}^{2,0}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  in  $\text{IH}^{0,2}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  \u00fcberf\u00fchrt, folgt die Behauptung f\u00fcr  $(p, q) = (0, 2)$  aus

$$\overline{\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle} = \langle (T_\eta(\bar{x}))_\eta \rangle = \langle (T_\eta(\bar{x}))_\eta \rangle.$$

Zum Schlu\u00df betrachten wir den Fall  $(p, q) = (1, 1)$ . Wieder zerlegen wir  $x$  aus  $H^{1,1}(\mathcal{G}, K_\infty; \pi^K)$  als

$$x = \sum_{c \in C_D} x_c.$$

Der Raum  $\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle$  ist  $\bar{h}(D)/2$ -dimensional und  $\eta(\pi)$  operiert darauf durch Multiplikation mit  $\bar{s}(\pi)$  aus  $\{\pm 1\}$ . Dann gilt wie oben

$$x_c = 0 \iff \eta(\pi)(b_c^{-1}) = -\bar{s}(\pi).$$

Insbesondere f\u00fcr  $c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gilt

$$x_{c_0} = 0 \iff \bar{s}(\pi) = -1.$$

Aus Lemma 4.1 folgt  $x_{c_0} \neq 0$  und damit  $\bar{s}(\pi) = 1$ . Daraus folgt

$$x_c = 0 \iff c \text{ ist nicht aus } C(\pi).$$

## 4.2. Die algebraischen und die Hirzebruch-Zagier-Zykel im Primzahlfall

In Kapitel 3 haben wir die Anzahl der unverzweigt gelifteten automorphen Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bestimmt. Diese sind insbesondere ausgezeichnet. Nach Korollar 2.11 liefert uns dies eine Abschätzung der Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel. Nach Lemma 3.14 sind, falls die Diskriminante  $D$  von  $F$  eine Primzahl ist, alle ausgezeichneten Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  bereits unverzweigt geliftet. Wir erhalten also in diesem Fall durch Satz 3.9 bereits alle ausgezeichneten Darstellungen.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf den Fall, daß der algebraische Zahlkörper  $F$  die Diskriminante  $D > 12$  hat. Für  $D \leq 12$  sind alle Hilbertschen Modulflächen  $Y(D, \mathfrak{b})$  rationale Flächen (siehe [Hi<sub>1</sub>], 4.6) und haben somit maximale Picardzahl, d.h. die Picardzahl von  $Y(D, \mathfrak{b})$  ist gleich der Dimension  $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$ . Damit läßt sich die Picardzahl aus den bekannten Invarianten dieser Flächen bestimmen. Aus Lemma 3.10 folgt außerdem, daß es in diesen Fällen keine CM-Formen gibt. Die Hirzebruch-Zagier-Zykel bilden also einen Unterraum der Kodimension  $l(\mathfrak{b}) + 1$  in  $H^{1,1}(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  ( dabei ist  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  ).

## Satz 4.4:

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D > 12$ ,  $B = N(\mathfrak{b})$  die Norm eines ganzen Ideals von  $F$  und  $Y(\mathfrak{b})$  die Hilbertsche Modulfläche  $Y(D, \mathfrak{b})$  oder die Hilbertsche Modulfläche  $Y_e(D, \mathfrak{b})$  zur erweiterten Modulgruppe. Wir bezeichnen mit  $\bar{X}(\mathfrak{b})$  die singulären Flächen  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$  oder  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$ . Wir setzen  $B$  teilerfremd zu  $D$  voraus. Dann ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^2(Y(\mathfrak{b}), \mathbb{C})$  größer oder gleich

$$1 + \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-\tau(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right]) + \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} \left( 1 + 2 \cdot \left[ \frac{d}{B} \right] \right) \cdot h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right) \right\} .$$

**Beweis:** Zunächst einmal bemerken wir, daß für  $x \neq 0$  aus  $H^2(\mathcal{G}, K_\infty; \pi^K) \cap \mathfrak{D}_\mathbb{C}$  und  $x = \sum_{c \in C_D} x_c$  mit  $x_c \in IH^2(\bar{X}(b_c), \mathbb{C})$  auch  $x_c$  aus  $\mathfrak{D}_\mathbb{C}$  ist. In diesem Fall ist  $x$  vom Typ

(1,1) und es gilt nach Lemma 4.3:

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}} (\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle \cap IH^2(\bar{X}(D, b_c), \mathbb{C})) \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \dim_{\mathbb{C}} (\langle (T_\eta(x))_\eta \rangle) \cdot \begin{cases} 1 \text{ falls } \pi \notin \text{CM} \\ 2 \text{ falls } \pi \in \text{CM und } \eta(\pi)(b_c) = 1 \\ 0 \text{ falls } \pi \in \text{CM und } \eta(\pi)(b_c) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1, 3.2 und 3.17 ist für alle automorphen Darstellungen  $\pi$  mit  $\pi_{\mathbb{F}}^K \neq (0)$  der Raum  $\pi_{\mathbb{F}}^K$  ein-dimensional. Aus Korollar 2.11 folgt dann (Wir setzen immer  $\pi$  aus  $\text{Coh}^K$  voraus und kürzen unverzweigt geliftet mit ug. ab.):

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{C}} (\mathfrak{D}_\mathbb{C} \cap IH^2(\bar{X}(b_c), \mathbb{C})) \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ausg.}}} 1 + 4 \cdot \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ausg.}}} \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta(\pi)(b_c)) + \sum_{\pi \in \text{Coh}_e} 1 \right\} \\ &\geq \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} 1 + 4 \cdot \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta(\pi)(b_c)) + \sum_{\pi \in \text{Coh}_e} 1 \right\} \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\pi \text{ ug.}} 1 - \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} 1 + 2 \cdot \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} (1 + \eta(\pi) \cdot (b_c)) + \bar{h}(D) \right\} \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\pi \text{ ug.}} 1 + \sum_{\substack{\pi \in \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} (1 + 2 \cdot \eta(\pi)(b_c)) + \bar{h}(D) \right\} \\ &= 1 + \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \begin{bmatrix} D_1 \\ \cdot \end{bmatrix}) + \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} (1 + 2 \cdot \left(\frac{d}{B}\right)) \cdot h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left(1 + \left(\frac{d}{p}\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

nach Satz 3.9 und 3.12 für  $B := N(b_c)$ . □

Satz 4.5:

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$  und  $B$  die Norm  $B := N(\mathfrak{b})$  eines ganzen Ideals von  $F$ , teilerfremd zu  $D$ . Wir bezeichnen mit  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$ . Dann ist die Picardzahl  $\text{Pic}(Y(D, B))$  von  $Y(D, B)$  größer oder gleich

$$\sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right]) - \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right) \right\} \\ + \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} \left( 1 + \left[ \frac{d}{B} \right] \right) \cdot h(d) \cdot h(D/d) + 2 + l(\mathfrak{b})$$

**Beweis:** Nach (4.1) ist die Picardzahl von  $Y(D, \mathfrak{b}_c)$  gleich :

$$\dim (\text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C}) \cap \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}) + l(\mathfrak{b}_c)$$

und nach Korollar 2.11 und Lemma 4.3 gilt (wir setzen immer  $\pi$  aus  $\text{Coh}^K$  voraus)

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{Z}_{\mathbb{C}} \cap \text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})) \\ = \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\substack{\pi \notin \text{CM} \\ \pi \text{ ausg.}}} 1 + 2 \cdot \sum_{\pi \in \text{CM}} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta(\pi)(\mathfrak{b}_c)) + \sum_{\pi \in \text{Coh}_e} 2 \right\} \\ \geq \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{\substack{\pi \notin \text{CM} \\ \pi \text{ ug.}}} 1 + 2 \cdot \sum_{\pi \in \text{CM}} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta(\pi)(\mathfrak{b}_c)) + \sum_{\pi \in \text{Coh}_e} 2 \right\}$$

Aus Korollar 3.13 und Satz 3.16 folgt dann

$$= \sum_{\substack{D_1 > 0 \\ D_1 \parallel D}} 2^{-t(D_1)} \cdot \left\{ \dim S_2(D_1, \left[ \frac{D_1}{\cdot} \right]) - \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D_1}} h(d) \cdot \prod_{p \mid D_1} \left( 1 + \left[ \frac{d}{p} \right] \right) \right\} + 2 \\ + 2 \cdot \bar{h}(D)^{-1} \cdot \sum_{\substack{d < -4 \\ d \parallel D}} \left( 1 + \left[ \frac{d}{B} \right] \right) \cdot h(d) \cdot h(D/d) \cdot h(D)$$

Daraus folgt die Behauptung, denn falls es negative Teiler  $d \parallel D$  gibt, hat  $F$  eine unverzweigte imaginärquadratische Erweiterung und der zugehörige unverzweigte Größencharakter ist nicht-trivial an den beiden unendlichen Stellen. Daher kann  $F$  keine Einheit negativer Norm enthalten und es gilt  $\bar{h}(D) = 2 \cdot h(D)$ .  $\square$

**Satz 4.6:**

Für einen reellquadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante  $D$  ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^2(Y(D,1), \mathbb{C})$  gleich

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \dim S_2(D, \left(\frac{D}{\cdot}\right)) .$$

Die Picardzahl von  $Y(D,1)$  ist

$$2 + \frac{1}{2} \cdot \dim S_2(D, \left(\frac{D}{\cdot}\right)) + l(\mathcal{O}) .$$

Dabei ist  $l(\mathcal{O})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D, \mathcal{O})$ .

**Bemerkung:**

Für die Primdiskriminaten  $12 < D < 300$  sind die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel (Hzz) und die Picardzahl (Pic) der Flächen  $Y(D,1)$  in der Tabelle am Ende dieser Arbeit angegeben.

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Korollar 3.15, Satz 4.4 und 4.5.  $\square$

### 4.3. Bemerkungen zur Lefschetz-Zahl der Hilbertschen Modulflächen

**Definition:**

Wir definieren die *Lefschetz-Zahl*  $\lambda(Y(D, \mathfrak{b}))$  der Fläche  $Y(D, \mathfrak{b})$  als

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) - \text{Pic}(Y(D, \mathfrak{b})) .$$

Die Lefschetzzahl ist birational invariant und, da  $H_{\text{sing}}^2(Y(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$  nicht zur Lefschetzzahl beiträgt, gilt

$$\lambda(Y(D, \mathfrak{b})) = \dim_{\mathbb{C}} \text{IH}^{1,1}(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} (\text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C}) \cap \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}).$$

Wir definieren

$$\lambda(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(\mathcal{G}, K_{\infty}; \pi^K) - \dim_{\mathbb{C}} (H^2(\mathcal{G}, K_{\infty}; \pi^K) \cap \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}).$$

Nach Satz 2.5 ist  $\lambda(\pi) = 0$  für  $\pi \in \text{Coh}_e$  und  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  vom CM-Typ. Damit ist

$$(4.12) \quad \lambda(\bar{S}_K(\mathbb{C})) := |\{ \pi \in \text{Coh}_0^K \mid \pi \text{ ausgezeichnet, nicht vom CM-Typ} \}| \\ + 2 \cdot |\{ \pi \in \text{Coh}_0^K \mid \pi \text{ nicht ausgezeichnet, nicht vom CM-Typ} \}|$$

Aus Lemma 4.3 folgt  $\lambda(Y(D, \mathfrak{b}_c)) = \bar{h}(D)^{-1} \cdot \lambda(\bar{S}_K(\mathbb{C}))$  und es gilt

**Lemma 4.7:**

Es sei  $D$  die Diskriminante des algebraischen Zahlkörpers  $F$  und  $B_1$  und  $B_2$  Normen von ganzen Idealen von  $F$ . Dann sind die Lefschetzzahlen der Hilbertschen Modulflächen  $Y(D, B_1)$  und  $Y(D, B_2)$  gleich.

**Satz 4.8:**

Es sei  $D$  die Diskriminante des algebraischen Zahlkörpers  $F$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Es gibt ein Ideal  $\mathfrak{b}_0$  von  $\mathcal{O}$ , so daß  $Y(D, \mathfrak{b}_0)$  maximale Picardzahl hat.
- (2) Für alle ganzen Ideale  $\mathfrak{b}$  von  $F$  hat  $Y(D, \mathfrak{b})$  maximale Picardzahl.
- (3) Die Fläche  $Y(D) := Y(D, \mathcal{O})$  ist rational.

**Beweis:** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) : siehe Lemma 4.7.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Wenn  $Y(D)$  rational ist, dann hat  $Y(D)$  maximale Picardzahl.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Wenn  $Y(D, \mathfrak{b})$  maximale Picardzahl für ein beliebiges ganzes Ideal  $\mathfrak{b}$  hat, dann hat die Fläche  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$ , deren Komponenten diese Flächen sind,

maximale Picardzahl und es gibt, wie wir in (4.12) gesehen haben, keine nicht-CM-Form aus  $\text{Coh}_0^K$ . Das geometrische Geschlecht  $p_g(Y(D))$  erfüllt die Gleichung (siehe Beweis von Lemma 4.3)

$$p_g(Y(D)) = \bar{h}(D)^{-1} \cdot \sum_{\pi \in \text{CM}} \dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(\mathcal{O}, K_{\infty}; \pi^K) .$$

Daraus folgt  $p_g(Y(D)) = 0$  und nach Satz 6 in [Ko], p.40 ist  $Y(D)$  rational.  $\square$

**Korollar 4.9:**

Die Hilbertsche Modulfläche  $Y(60,11)$  ist die einzige Hilbertsche Modulfläche vom allgemeinen Typ mit maximaler Picardzahl.

**Beweis:** Dies folgt aus der Klassifikation der Hilbertschen Modulflächen in [Ko], Tabelle IV, p.67.  $\square$

#### 4.4. Die Picardzahl gewisser Hilbertscher Modulflächen

4.4.1. Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper der Diskriminante  $D$  und  $t := -t(D)$  die Anzahl der Primteiler von  $D$ . In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit  $K$  die maximal kompakte Untergruppe  $K_0$  von  $G(A_F)$ , mit  $\sigma$  das nichttriviale Element der Galoisgruppe  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  und mit  $\mathfrak{S}$  ein vollständiges Repräsentantensystem der Idealklassen von  $F$  im engeren Sinne. Dann enthält  $\mathfrak{S}$  genau  $2^{t-1}$  Repräsentanten  $\mathfrak{b}$  ambiger Idealklassen. Diese werden durch Ideale  $\mathfrak{b}$  repräsentiert, für die  $\mathfrak{b}^{\sigma} = \alpha \cdot \mathfrak{b}$  mit einer total-positiven Zahl  $\alpha$  aus  $F^*$  gilt. Die anderen  $s := \bar{h}(D) - 2^{t-1}$  Idealklassen werden paarweise vertauscht.

Die Involution  $\sigma$  operiert auf den  $F$ -Adelen und damit auch auf  $G(A)$ . Die Untergruppen  $G(F)$ ,  $K$  und  $K_{\infty}$  werden dabei in sich überführt. Also definiert  $\sigma$  eine Involution auf den komplexwertigen Punkten der Shimuravarietät

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K \cdot K_{\infty} .$$

Wie wir in Lemma 2.1 gesehen haben, ist  $S_{K_0}(\mathbb{C})$  isomorph zu der disjunkten Vereinigung der Flächen  $X_e(D, \mathfrak{b})$  über alle  $\mathfrak{b}$  aus  $\mathfrak{B}$ . Die Determinantenabbildung

$$\det : S_K(\mathbb{C}) \longrightarrow I_F / F^* \cdot \Pi_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2 \cong \tilde{J}_F$$

(siehe (1.2)) identifiziert die Zusammenhangskomponenten  $X_e(D, \mathfrak{b})$  von  $S_{K_0}(\mathbb{C})$  mit den Idealklassen im engeren Sinne von  $F$ . Diese Abbildung ist mit der Aktion von  $\sigma$  verträglich. Es werden also von  $\sigma$  die  $2^{t-1}$  Komponenten von  $S_{K_0}(\mathbb{C})$ , die den ambigen Idealklassen entsprechen, festgelassen und die restlichen  $\tilde{h}(D) - 2^{t-1}$  Komponenten paarweise vertauscht. Wir wollen nun die Operation von  $\sigma$  auf den Fixkomponenten beschreiben. Dazu benötigen wir die Hurwitz-Maaß-Erweiterung  $\Gamma_m(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  der Hilbertschen Modulgruppe  $\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$ .

4.4.2. Die Hurwitz-Maaß-Erweiterung  $\Gamma_m(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  ist die maximale diskrete Erweiterung von  $\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  in  $(\text{PGL}_2^+(\mathbb{R}))^2$ . Nach [Hau], §1, kann man ein Repräsentantensystem von  $\Gamma_m(\mathcal{O}, \mathfrak{b})/\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  wie folgt angeben:

Für einen quadratfreien Teiler  $w$  von  $D$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{p}_w$  das ganze Ideal in  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_F$  mit  $N(\mathfrak{p}_w) = w$  und  $w \cdot \mathcal{O}_F = \mathfrak{p}_w^2$ . Wir betrachten die Matrizen  $S_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  aus  $\text{GL}_2(F)$  mit  $a, d$  aus  $\mathfrak{p}_w$ ,  $b$  aus  $\mathfrak{p}_w \mathfrak{b}^{-1}$ ,  $c$  aus  $\mathfrak{p}_w \mathfrak{b}$  und  $\det(S_w) = w$ . Es gilt:

**Lemma 4.10:** ([Hau<sub>1</sub>], §1 und [Kol], Satz 2)

Die Gruppe  $\Gamma_m(\mathcal{O}, \mathfrak{b})/\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  ist isomorph zu  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-1}$  und wird erzeugt von den Matrizen  $S_w$ . Wir bezeichnen mit  $\alpha_w$  die Klasse von  $S_w$  in  $\Gamma_m(\mathcal{O}, \mathfrak{b})/\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$ . Dann gelten die folgenden Relationen ( $\text{qf}(n)$  bezeichnet den quadratfreien Anteil von  $n$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_w \circ \alpha_{w'} &= \alpha_{\text{qf}(w \cdot w')} \quad \text{für alle } w, w' \mid D \text{ und} \\ \alpha_{\text{qf}(D)} &= \alpha_1 = \text{id}. \end{aligned}$$

Falls die Grundeinheit  $e_0$  von  $F$  positive Norm hat, ist die erweiterte Modulgruppe  $\Gamma_e(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  isomorph zu  $\Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b}) \cup \alpha_{w_0} \cdot \Gamma(\mathcal{O}, \mathfrak{b})$  mit  $w_0 := \text{qf}(N(e_0+1))$ .

4.4.3. Auf  $X_e(D, \mathfrak{b})$  operiert noch die Koordinatenvertauschung, die auf  $\mathbb{H}^2$  gegeben ist durch ( $B := N(\mathfrak{b})$ ):

$$\tau : (z_1, z_2) \longrightarrow (-1/(B \cdot z_2), -1/(B \cdot z_1)) .$$

Die Operationen von  $\alpha_w$  und  $\tau$  kommutieren und lassen sich auf  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$  und  $Y_e(D, B)$  fortsetzen, wir bezeichnen diese Operationen ebenfalls mit  $\alpha_w$  bzw.  $\tau$ .

**Lemma 4.11:**

Es sei  $\sigma$  das nicht-triviale Element von  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  und  $\mathfrak{b}$  der Repräsentant einer ambigen Idealklasse. Dann operiert  $\sigma$  auf der  $\mathfrak{b}$  entsprechenden Komponente  $X_e(D, \mathfrak{b})$  von  $S_{K_0}(\mathbb{C})$  als  $\alpha_w \circ \tau$ , dabei ist  $\mathfrak{p}_w$  ( $N(\mathfrak{p}_w) = w$ ) ein ambiges Ideal, das im engeren Sinne äquivalent zu  $\mathfrak{b}$  ist.

**Beweis:** Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 2.1 ist

$$G(A) = \bigcup_{c \in C_D} G(\mathbb{Q}) \cdot c \cdot K_0 \cdot G^0(\mathbb{R})$$

mit  $\mathfrak{b} = F \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \cdot (\prod \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2)$ . Nach Voraussetzung repräsentiert  $\mathfrak{b}$  eine ambige Idealklasse. Es gibt also eine totalpositive Zahl  $\alpha$  aus  $F^*$  mit  $\mathfrak{b}^{\sigma} = \alpha \cdot \mathfrak{b}$ . Da jede ambige Idealklasse durch ein Ideal  $\mathfrak{p}_w$  mit  $N(\mathfrak{p}_w) = w$  und  $w|D$  repräsentiert wird, gibt es außerdem eine total-positive Zahl  $\beta$  aus  $F^*$  mit  $\mathfrak{b} = \beta \cdot \mathfrak{p}_w$ . Es gilt also

$$\mathfrak{b}^{\sigma} = F \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}^{\sigma} \cdot (\prod \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2) = F \cap \alpha \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \cdot (\prod \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{R}^2) ,$$

d.h.  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}^{\sigma} = \alpha_{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} \cdot \mu$ , dabei ist  $\alpha_{\mathfrak{f}}$  der endliche Anteil von  $\alpha$  in  $A_{\mathfrak{f}}$  und  $\mu$  aus  $\prod U_{\mathfrak{p}}$ . Daraus folgt

$$c^{\sigma} = a_{\mathfrak{f}}^{-1} \cdot c \cdot u \quad \text{mit} \quad a := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u := \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für einen Repräsentanten  $g = \gamma \cdot c \cdot k_0 \cdot g_{\infty}$  mit  $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ ,  $k_0 \in K_0$  und  $g_{\infty} \in G^0(\mathbb{R})$ , ist dann

$$g^{\sigma} = \gamma^{\sigma} \cdot c^{\sigma} \cdot k_0^{\sigma} \cdot g_{\infty}^{\sigma} = \gamma^{\sigma} \cdot a_{\mathfrak{f}}^{-1} \cdot c \cdot u \cdot k_0^{\sigma} \cdot g_{\infty}^{\sigma} = (\gamma^{\sigma} \cdot a^{-1}) \cdot c \cdot (u \cdot k_0^{\sigma}) \cdot a_{\infty} \cdot g_{\infty}^{\sigma} .$$

Unter dem Isomorphismus (2.6) entspricht  $g$  dem durch  $(z_1, z_2)$  in  $\mathbb{H}^2$  repräsentierten Punkt in  $X_e(D, \mathfrak{b})$  und  $g^\sigma$  dem Punkt  $(\alpha \cdot z_2, \alpha' \cdot z_1)$  (siehe (2.5)).

Dann ist

$$(\alpha \cdot z_2, \alpha' \cdot z_1) = S \cdot (-1/(B \cdot z_2), -1/(B \cdot z_1)) \text{ mit}$$

$$S := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/B \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha/B \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Auf  $\mathbb{H}^2$  operiert  $S$  wie

$$\bar{S} := \begin{pmatrix} 0 & w \cdot \beta \cdot \alpha/B \\ -w \cdot \beta & \end{pmatrix}$$

und es ist  $w \cdot \beta \cdot \alpha/B$  aus  $\mathfrak{p}_w^2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{p}_w^{-1} \cdot \mathfrak{b}^\sigma \cdot \mathfrak{b}^{-1} \cdot (\mathfrak{b}^\sigma \cdot \mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{p}_w \cdot \mathfrak{b}^{-1}$  und  $-w \cdot \beta$  aus  $\mathfrak{p}_w \cdot \mathfrak{b}$ . Die Determinante von  $\bar{S}$  ist die totalpositive Zahl  $w^2 \cdot \beta^2 \cdot \alpha/B$ . Das Hauptideal  $(w \cdot \beta^2 \cdot \alpha/B)$  ist gleich  $\mathfrak{p}_w^2 \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot \mathfrak{p}_w^{-2} \cdot \mathfrak{b}^\sigma \cdot \mathfrak{b}^{-1} \cdot (\mathfrak{b}^\sigma \cdot \mathfrak{b})^{-1} = \mathcal{O}_F$ . Also ist  $w^2 \cdot \beta^2 \cdot \alpha/B = w$  modulo einer total-positiven Einheit und  $\sigma$  operiert als  $\alpha_w \circ \tau$  auf  $X_e(D, \mathfrak{b})$ .  $\square$

**Notation:**

Wir bezeichnen die minimalen Desingularisierungen von  $Y(D, B)/\mathfrak{r}$  und  $Y_e(D, B)/\mathfrak{r}$  mit  $Y_r(D, B)$  bzw.  $Y_{e\mathfrak{r}}(D, B)$ .

4.4.4. Wir wollen nun die relative Lie-Algebren Kohomologie  $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi^K)$  und insbesondere die Aktion der Homomorphismen  $T_\eta$  (siehe Abschnitt 4.1.) und der Galoisinvolution  $\sigma$  beschreiben. Es wird sich zeigen, daß das Whittakermodell für diesen Zweck die geeignete Realisierung der automorphe Darstellung  $\pi$  von  $G(A)$  ist. Nach [Ge], 5.5. bestimmt die cuspidale automorphe Darstellung  $\pi$  eindeutig eine irreduzible Darstellung  $\pi'$  der Hecke-Algebra  $\mathfrak{H}(G(A))$  ([Ge], 4.1. und p.61) auf dem Raum der  $K_{\mathfrak{O}} \cdot K_{\mathfrak{O}}$ -endlichen Funktionen in  $L^2_0(G(\mathbb{Q}) \backslash G(A), \psi)$ . Für einen nicht-trivialen Charakter  $\iota$  von  $A_F/F$  definieren wir für jedes  $\phi$  aus  $H_\pi$ , (dem Darstellungsraum von  $\pi'$ ) den ersten Fourierkoeffizienten:

$$W_\phi(g) := \int_{A_F/F} \phi \left[ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \right] \cdot \overline{\iota(x)} \, dx .$$

Die Abbildung  $\phi \longrightarrow W_\phi$  bildet  $\dot{H}_\pi$  auf den Raum  $W(\pi, \iota)$  der komplexwertigen Funktionen  $W$ , für die gilt:

$$(4.14) \quad (i) \quad W\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right) = \iota(t) \cdot W(g) \quad \text{für alle } t \text{ aus } A_F$$

$$(ii) \quad W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot g\right) = \psi(x) \cdot W(g) \quad \text{für alle } x \text{ aus } I_F$$

(iii)  $W$  ist  $K_0 \cdot K_\infty$ -endlich,  $C^\infty$  an den unendlichen Stellen und erfüllt gewisse Wachstumsbedingungen (siehe [Ge], Lemma 5.6.)

(iv) Die Darstellung von  $\mathfrak{X}(G(A))$  durch Rechtskonvolution auf  $W(\pi, \iota)$  ist äquivalent zu  $\pi'$ .

Es gilt:

**Lemma 4.12:** ([Ge], 6.8)

Das Whittakermodell  $W(\pi, \iota)$  ist eindeutig bestimmt.

Wir wählen nun einen geeigneten Charakter  $\iota$  wie folgt:

**Lemma 4.13:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$ , dann gibt es einen  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ -invarianten Charakter  $\iota$  von  $A_F/F$  mit den folgenden Eigenschaften:

(i) an den unendlichen Stellen  $v$  ist  $\iota_v(x) = \exp(2\pi ix)$  und

(ii) an den endlichen Stellen  $\mathfrak{p} | p$  ist  $\iota_{\mathfrak{p}}$  genau auf  $\mathfrak{p}^{-d}$  trivial, dabei ist  $p^d$  die höchste Potenz von  $p$  die  $D$  teilt.

**Beweis:** Wir wählen einen Charakter  $\iota_{\mathbb{Q}}$  von  $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$  wie in [Ge], Remark 3.5, dann ist  $(\iota_{\mathbb{Q}})_\infty(x) = \exp(2\pi ix)$  und  $(\iota_{\mathbb{Q}})_p$  ist genau auf  $\mathcal{O}_p$  trivial. Der Lift  $\iota := \iota_{\mathbb{Q}} \circ \text{tr}_{F/\mathbb{Q}}$  ist dann  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ -invariant und erfüllt (i). Nach [Se], III, Prop. 6 und 7, ist  $\text{tr}(x)$  genau dann in  $\mathcal{O}_p$ , wenn die Norm  $N(x^{-1})$  die Diskriminante teilt. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Es sei  $\eta$  ein unverzweigter Größencharakter von  $F$ , der trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist. Dann ist die Darstellung  $\pi \otimes \eta$  von  $G(A)$  äquivalent zu der rechtsregulären

Darstellung von  $G(A)$  auf  $H_{\pi} \otimes \eta$ , d.h. dem Raum der Funktionen  $(f \otimes \eta)(g) := f(g) \cdot \eta(\det(g))$  mit  $f$  aus  $H_{\pi}$ . Da mit  $W$  aus  $W(\pi, \iota)$  die Funktion  $W \otimes \eta$  ebenfalls die Bedingungen (4.14), (i)-(iii) erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit des Whittakermodells, daß die Abbildung  $W \rightarrow W \otimes \eta$  einen Homomorphismus von  $W(\pi, \iota)$  nach  $W(\pi \otimes \eta, \iota)$  liefert. Desgleichen ist, für  $\sigma$  aus  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ , die Darstellung  $\pi^{\sigma}$  äquivalent zu der rechtsregulären Darstellung von  $G(A)$  auf  $(H_{\pi})^{\sigma}$ , dem Raum der Funktionen  $f^{\sigma}(g) := f(g^{\sigma})$  mit  $f$  aus  $H_{\pi}$ . In diesem Fall erfüllt, wenn wir  $\iota$  wie in Lemma 4.13 gewählt haben, mit  $W(g)$  auch  $W^{\sigma}(g)$  die Bedingungen (4.14), (i)-(iii). Auch in diesem Fall ist  $W(g) \rightarrow W^{\sigma}(g)$  ein Homomorphismus von  $W(\pi, \iota)$  nach  $W(\pi^{\sigma}, \iota)$ .

4.4.5. Es sei nun  $\pi$  eine unverzweigte automorphe Darstellung aus  $\text{Coh}_0$  und  $K := K_0$ . Mit  $\bar{\mathfrak{g}}$  und  $\bar{\mathfrak{k}}$  bezeichnen wir die komplexifizierten Lie-Algebren von  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$  und  $L_{\infty}$  (siehe 2.4.1). Mit diesen Bezeichnungen schreiben wir die Künneth-Formel ([BW], I, 1.3) als

$$H^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{k}; \pi_{\infty}) \cong H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{k}}; \pi_{\infty, 1}) \otimes H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{k}}; \pi_{\infty, 2}) .$$

Dann bilden  $P^+ := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  und  $P^- := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $\bar{\mathfrak{g}}/\bar{\mathfrak{k}}$ . Es sei  $D_2$  der  $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{k}})$ -Modul der  $L_{\infty}$ -endlichen Vektoren in  $H_{\pi_{\infty, j}}$  für  $j = 1, 2$ , dann zerfällt  $D_2$  über  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  in

$$D_2 = \bigoplus_{\substack{n=0(2) \\ n \neq 0}} \mathbb{C} \cdot \varphi_n .$$

mit  $\varphi_n \left[ \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix} \cdot g \right] = e^{in\Omega} \cdot \varphi(g)$  (siehe [Cu], 2.1. und [Ge], §4). Nach [Cu], 2.1. ist nun

$$\begin{aligned} H^1(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{k}}; D_2) &= \text{Hom}_{\text{SO}_2}(\mathbb{C} \cdot P^+ \oplus \mathbb{C} \cdot P^-, D_2) \\ &= \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} P^+ \longrightarrow \varphi_2 \\ P^- \longrightarrow 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} P^+ \longrightarrow 0 \\ P^- \longrightarrow \varphi_{-2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Realisierung von  $\pi$  im Whittakermodell  $W(\pi, \iota)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K) &= H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)_\infty) \otimes W(\pi, \iota)_F^K \\ &\cong \left( \left( \mathbb{C} \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_1 \oplus \mathbb{C} \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_1 \right) \otimes \left( \mathbb{C} \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_2 \oplus \mathbb{C} \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_2 \right) \right) \otimes W(\pi, \iota)_F^K \end{aligned}$$

Dabei sind  $\phi_2$  und  $\phi_{-2}$  die  $\varphi_2$  und  $\varphi_{-2}$  in den lokalen Whittakermodellen der unendlichen Stellen entsprechenden Funktionen. Nach [Cu], 2.3. (siehe auch [Go], 2.20.) haben  $\phi_2$  und  $\phi_{-2}$  ihren Träger in  $Gl_2(\mathbb{R})^+$  bzw.  $Gl_2(\mathbb{R})^-$ . Wir wählen nun eine Basis von  $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)_\infty)$  durch:

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_2 \\ \omega_2 &:= \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_2 \\ \omega_3 &:= \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & \phi_2 \\ P^- & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}_2 \\ \omega_4 &:= \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_1 \otimes \begin{bmatrix} P^+ & \longrightarrow & 0 \\ P^- & \longrightarrow & \phi_{-2} \end{bmatrix}_2 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun  $W(\pi, \iota)_\mathfrak{p}$ , das lokale Whittakermodell an der endlichen Primstelle  $\mathfrak{p} | p$ . Da wir  $\pi_\mathfrak{p}$  als unverzweigt vorausgesetzt haben, können wir nach [Go], 1, Th. 11 und Gleichung (268), eine Funktion  $h_\mathfrak{p}$  aus  $W(\pi_\mathfrak{p}, \iota_\mathfrak{p})$  wählen, die  $K_\mathfrak{p}$ -invariant ist und durch die Normierung

$$h_\mathfrak{p} \left( \begin{bmatrix} \omega^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1,$$

( für eine lokale Uniformisierende  $\omega$  von  $\mathfrak{p}$  und  $d$  wie in Lemma 4.13, (ii) )  
eindeutig bestimmt ist. Wir definieren nun  $h$  als das Produkt der  $h_\mathfrak{p}$  über alle Primstellen  $\mathfrak{p}$  von  $F$ . Dann ist  $h$  aus  $W(\pi, \iota)_F^K$ . Außerdem definieren wir

$$\omega_i(\pi) := \omega_i \otimes h \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4.$$

Die Hodgezerlegung von  $H^2(\pi) := H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K)$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} H^{2,0}(\pi) &= \mathbb{C} \cdot \omega_1(\pi) \\ H^{1,1}(\pi) &= \mathbb{C} \cdot \omega_2(\pi) \oplus \mathbb{C} \cdot \omega_3(\pi) \\ H^{0,2}(\pi) &= \mathbb{C} \cdot \omega_4(\pi) \end{aligned}$$

Wie wir bereits in (4.11) gesehen haben, definiert ein unverzweigter Größencharakter  $\lambda$ , der trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist, einen Homomorphismus

$$T_\lambda: H^2(\pi) \longrightarrow H^2(\pi \otimes \lambda)$$

Die Operation von  $\sigma$  auf  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  definiert ebenfalls einen Homomorphismus auf  $\text{IH}^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ , der auf der Zerlegung (4.10) wie folgt operiert:

$$\sigma: H^2(\pi) \longrightarrow H^2(\pi^\sigma)$$

**Lemma 4.14:**

Es sei  $\pi$  eine ausgezeichnete automorphe Darstellung aus  $\text{Coh}_0^K$  mit  $\pi^\sigma \cong \pi \otimes \lambda$  für einen unverzweigten Größencharakter  $\lambda$ , der trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  ist. Wir setzen  $\text{sgn}(\lambda) := 1$ , falls  $\lambda$  trivial auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist, und  $\text{sgn}(\lambda) := -1$  sonst.

Dann gilt

$$\omega_i(\pi)^\sigma = T_\lambda(\omega_i(\pi)) \cdot \begin{cases} -\text{sgn}(\lambda) & \text{für } i=1,4 \\ +1 & \text{für } i=3 \\ -1 & \text{für } i=2 \end{cases}$$

**Beweis:** Betrachten wir zunächst die endlichen Stellen  $\mathfrak{p} | p$ . Es sei wieder  $\mathfrak{p}^d$  die höchste Potenz von  $\mathfrak{p}$ , die  $D$  teilt,  $w$  eine lokale Uniformisierende von  $\mathfrak{p}$  und  $\iota$  wie in Lemma 4.13. Wie wir gesehen haben, ist  $h_{\mathfrak{p}}$  invariant unter Rechtstranslation mit Elementen von  $K_{\mathfrak{p}}$ . Es gilt also

$$h_{\mathfrak{p}}^\sigma \left( \begin{bmatrix} w^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = h_{\mathfrak{p}} \left( \begin{bmatrix} w^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (w^\sigma/w)^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = h_{\mathfrak{p}} \left( \begin{bmatrix} w^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1$$

Außerdem gilt

$$(h_{\mathfrak{p}} \otimes \lambda_{\mathfrak{p}}) \left( \begin{bmatrix} w^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = h_{\mathfrak{p}} \left( \begin{bmatrix} w^{-d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \lambda_{\mathfrak{p}}(w)^{-d} = \lambda_{\mathfrak{p}}(w)^{-d}$$

Da  $h^\sigma$  und  $h \otimes \lambda_f$  jeweils den ein-dimensionalen Unterraum der  $K$ -invarianten Funktionen in  $W(\pi^\sigma, \iota)_f$  erzeugen, liefert die Multiplikation über alle endlichen Primstellen  $\mathfrak{p}$ :

$$h^\sigma = \lambda_f((\sqrt{D})_f) \cdot (h \otimes \lambda_f) = \text{sgn}(\lambda) \cdot (h \otimes \lambda_f) .$$

Da  $\phi_2$  und  $\phi_{-2}$  ihre Träger in  $Gl_2(\mathbb{R})^+$  bzw.  $Gl_2(\mathbb{R})^-$  haben, gilt an den unendlichen Stellen

$$(T_\lambda)_\infty(\omega_i) = \omega_i \cdot \begin{cases} +1 & \text{für } i=1,4 \\ \text{sgn}(\lambda) & \text{für } i=2,3 \end{cases} .$$

Aus

$$\omega_i^\sigma = \omega_i \cdot \begin{cases} -1 & \text{für } i=1,2,4 \\ +1 & \text{für } i=3 \end{cases} .$$

folgt die Behauptung. □

Die Kohomologie  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C})/\sigma, \mathbb{C})$  ist isomorph zu dem  $\sigma$ -invarianten Teil von  $IH^2(S_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Sie wird erzeugt von Elementen  $x + x^\sigma$  für  $x$  aus  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Für eine unverzweigte automorphe Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  bezeichnen wir mit  $M_\pi$  die Menge Darstellungen

$$M_\pi := ( \pi \otimes \lambda \mid \lambda \text{ unverzweigt, } \lambda|_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} = 1 )$$

Falls  $\pi$  keine CM-Form ist, hat  $M_\pi$  die Mächtigkeit  $\tilde{h}(D)$ .

Notation:

Wir bezeichnen mit  $CM$  die Menge der CM-Formen in  $\text{Coh}_0^K$  und mit  $S$  ihr Komplement.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: Wenn  $\pi$  aus  $S$  nicht ausgezeichnet ist, dann wird  $M_\pi$  nach Lemma 3.14 von  $\sigma$  auf  $M_{(\pi^\sigma)} = M_\pi$  abgebildet und die  $(2,0)$ -Formen  $\omega_1(\pi') + \omega_1(\pi')^\sigma$  für  $\pi'$  aus  $M_\pi$  erzeugen einen  $\tilde{h}(D)$ -dimensionalen  $\sigma$ -invarianten Unterraum von  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ .

Wenn wir  $\omega_1(\pi)$  nach den Komponenten von  $\bar{S}_K(\mathbb{C})$  zerlegen in

$$\omega_1(\pi) = \sum_{c \in C_D} x_c$$

(siehe (4.6)), wird dieser Unterraum von  $(x_c + x_c^\sigma \mid c \text{ aus } C_D)$  erzeugt. Aus Dimensionsgründen gilt dann  $x_c + x_c^\sigma \neq 0$  für alle  $c$  aus  $C_D$ . Auch für eine nicht ausgezeichnete CM-Form wird die Menge  $M_\pi$  durch  $\sigma$  bijektiv auf die Menge  $M_{(\pi^\sigma)}$  abgebildet. Beide Mengen enthalten genau  $\bar{h}(D)/2$  Elemente und die  $(2,0)$ -Formen  $\omega_1(\pi') + \omega_1(\pi')^\sigma$  für  $\pi'$  aus  $M_\pi$  erzeugen einen  $\bar{h}(D)/2$ -dimensionalen  $\sigma$ -invarianten Unterraum von  $IH^2(\bar{S}_K(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Es sei wieder  $x_c$  die Projektion von  $\omega_1(\pi)$  auf  $IH^2(\bar{X}_e(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$ , dann ist nach Lemma 4.3, (2)  $x_c + x_c^\sigma$  genau dann null, wenn  $c$  aus  $C(\pi)$  ist.

Fall 2: Wenn  $\pi$  aus  $S$  ausgezeichnet mit  $\pi^\sigma \cong \pi \otimes \lambda$  ist, erzeugt  $\omega_1(\pi') + \omega_1(\pi')^\sigma$  für  $\pi'$  aus  $M_\pi$  einen  $\sigma$ -invarianten Unterraum von  $IH^2(\bar{S}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ . Nach Lemma 4.14 ist

$$\omega_1(\pi) + \omega_1(\pi)^\sigma = \omega_1(\pi) - \text{sgn}(\lambda) \cdot T_\lambda(\omega_1(\pi)) .$$

Wenn wir  $\omega_1(\pi)$  wieder in  $\sum x_c$  zerlegen, dann ist nach (4.9)

$$\omega_1(\pi) + \omega_1(\pi)^\sigma = \sum_{c \in C_D} x_c - \text{sgn}(\lambda) \cdot \lambda(\det(c)) \cdot x_c$$

und damit ist die Projektion von  $\omega_1(\pi) + \omega_1(\pi)^\sigma$  auf  $IH^2(\bar{X}_e(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$  genau dann null, wenn  $\text{sgn}(\lambda) \cdot \lambda(\det(c)) = 1$  gilt. Insbesondere ist die Projektion auf  $IH^2(\bar{X}_e(D, \mathcal{O}), \mathbb{C})$  genau dann null, wenn  $\text{sgn}(\lambda) = +1$  ist. Daraus folgt:

Lemma 4.15:

Es seien  $p_g$  und  $p_g^*$  das geometrische Geschlecht der Hilbertschen Modulfläche  $Y_e(D, 1)$  bzw. der symmetrischen Modulfläche  $Y_{e\tau}(D, 1)$ , dann gilt

$$\bar{h}(D) \cdot (p_g - 2 \cdot p_g^*) = \sum_{\substack{\pi \in S \\ \pi^\sigma \cong \pi \otimes \lambda}} \text{sgn}(\lambda) .$$

Beweis: Die CM-Formen tragen, nach Lemma 4.3, (2) nicht zu  $p_g$  bei. Also gilt

$$\bar{h}(D) \cdot p_g = |S| .$$

Nach den obigen Überlegungen gilt für  $p_g^*$

$$\begin{aligned} \bar{h}(D) \cdot p_g^* &= |(\pi \text{ aus } S \mid \pi \text{ nicht ausgezeichnet})| \cdot \frac{1}{2} \\ &+ |(\pi \text{ aus } S \mid \pi^\sigma \cong \pi \otimes \lambda \text{ und } \text{sgn}(\lambda) = -1)| \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

#### Satz 4.16:

Es sei  $F$  ein reellquadratischer Zahlkörper, der eine Grundeinheit  $e_0$  negativer Norm enthält, und  $p_g$  und  $p_g^*$  die geometrischen Geschlechter der Hilbertschen Modulfläche  $Y(D, 1)$  bzw. der symmetrischen Modulfläche  $Y_r(D, 1)$ . Dann ist die Anzahl der unverzweigten ausgezeichneten automorphen Darstellung  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0$  gleich

$$\bar{h}(D) \cdot (p_g - 2 \cdot p_g^*)$$

Die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel von  $Y(D, B)$  ist in diesem Fall

$$(p_g - 2 \cdot p_g^*) + 1$$

und die Picardzahl

$$(p_g - 2 \cdot p_g^*) + 2 + l(\mathfrak{b}) .$$

Dabei ist  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}(D, \mathfrak{b})$ .

Beweis: In diesem Fall ist  $Y_e(D, B) = Y(D, B)$ ,  $Y_{e_r}(D, B) = Y_r(D, B)$  und es gilt für alle unverzweigten Größencharaktere  $\lambda$

$$\text{sgn}(\lambda) = \lambda_\infty(e_0, e_0') = \lambda(e_0) = 1 .$$

Nach Lemma 3.10 gibt es in diesem Fall in  $\text{Coh}_0^K$  keine CM-Formen, die Anzahl der ausgezeichneten automorphen Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  folgt daher aus Lemma 4.15. Die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel ist dann nach Korollar 2.11 und Lemma 4.3 und 3.17

$$\bar{h}(D)^{-1} \cdot ((p_g - 2 \cdot p_g^*) \cdot \bar{h}(D) + \bar{h}(D)) = p_g - 2 \cdot p_g^* + 1 .$$

Die Picardzahl bestimmen wir dann mit Hilfe der Zerlegung (4.1). □

**Satz 4.17:**

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.16 ist die Lefschetzzahl der Hilbertschen Modulflächen  $Y(D, B)$  gleich

$$\lambda(Y(D, B)) = p_g + 2 \cdot p_g^* .$$

**Beweis:** Wie wir in Abschnitt 4.3. gesehen haben ist

$$\lambda(Y(D, B)) = \bar{h}(D)^{-1} \cdot \sum_{\pi \in \text{Coh}_0^K} \lambda(H^{1,1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K))$$

wobei  $\lambda(H^{1,1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K))$  die Kodimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $H^{1,1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K)$  ist. Also ist, da es in diesem Fall keine CM-Formen gibt,

$$\lambda(H^{1,1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; W(\pi, \iota)^K)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi \text{ ausgezeichnet ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt (wir summieren immer über  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$ )

$$\begin{aligned} \lambda(Y(D, B)) &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left( \sum_{\pi \text{ ausg.}} 1 + \sum_{\pi \text{ nicht ausg.}} 2 \right) \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot \left( \sum_{\pi} 2 - \sum_{\pi \text{ ausg.}} 1 \right) \\ &= \bar{h}(D)^{-1} \cdot ( 2 \cdot p_g \cdot \bar{h}(D) - \bar{h}(D) \cdot (p_g - 2 \cdot p_g^*) ) \end{aligned} \quad \square$$

## Satz 4.18:

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 4.16 gilt für die Lefschetzzahl der symmetrischen Hilbertschen Modulfläche  $Y_r(D,1)$

$$\lambda(Y_r(D,1)) = 2 \cdot p_g^* .$$

**Beweis:** Da  $F$  eine Einheit negativer Norm enthält, ist in diesem Fall  $\text{sgn}(\lambda) = 1$  für alle unverzweigten Größencharaktere  $\lambda$ , die trivial auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind. Wie wir gesehen haben, liefern nur die nicht-ausgezeichneten automorphen Darstellungen  $\pi$  einen Beitrag zu  $p_g^*$ . Es gilt also

$$p_g^* := (2 \cdot \bar{h}(D))^{-1} \cdot | \{ \pi \text{ aus } \text{Coh}_0^K \mid \pi \text{ nicht ausgezeichnet} \} | .$$

Der  $(1,1)$ -Anteil von  $\text{IH}^2(\bar{X}(D,1)/r, \mathbb{C})$  wird erzeugt von den Projektionen von  $\omega_2(\pi) + \omega_2(\pi)^\sigma$  und  $\omega_3(\pi) + \omega_3(\pi)^\sigma$  auf  $\text{IH}^2(\bar{X}(D,1)/r, \mathbb{C})$  für alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$ . Nach Lemma 4.14 verschwindet  $\omega_2(\pi) + \omega_2(\pi)^\sigma$  auf  $\text{IH}^2(\bar{X}(D,1)/r, \mathbb{C})$  genau dann, wenn  $\pi$  ausgezeichnet ist. In diesem Fall wissen wir, daß ein ein-dimensionaler Unterraum von  $H^{1,1}(\mathcal{G}, K; W(\pi, \iota)^K)$  aus Hirzebruch-Zagier-Zykeln besteht. Nun steht  $\omega_2(\pi)$ , bezüglich der in [HLR], (3.2) definierten Paarung, senkrecht auf  $\omega_3(\pi)$ . Wie in [HLR] bezeichnen wir mit  $\omega_2(\pi)^H$  die durch die Diagonaleinbettung (2.15) zurückgeholte  $(1,1)$ -Form. Da  $\omega_2(\pi)^H$  verschwindet, steht  $\omega_2(\pi)$  nach Hilfssatz 3.5 in [HLR] senkrecht auf dem Raum der Hirzebruch-Zagier-Zykel. Also besteht  $\omega_3(\pi)$  und damit auch  $\omega_3(\pi) + \omega_3(\pi)^\sigma$  in diesem Fall aus Hirzebruch-Zagier-Zykeln. Die ausgezeichneten Darstellungen tragen damit nicht zur Lefschetzzahl von  $Y_r(D,1)$  bei. Daher gilt

$$\lambda(Y_r(D,1)) = (2 \cdot \bar{h}(D))^{-1} \cdot | \{ \pi \text{ aus } \text{Coh}_0^K \mid \pi \text{ nicht ausgezeichnet} \} | \cdot 2 .$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir geben in der Tabelle am Ende dieser Arbeit die Dimension der Hirzebruch-Zagier-Zykel und die Picardzahl der Hilbertschen Modulflächen  $Y_e(D, B)$  für alle Diskriminanten  $13 \leq D < 300$  an. Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 4.19:**

Es sei  $F$  der reellquadratische Zahlkörper der Diskriminante  $D$ . Wir setzen voraus, daß die Grundeinheit  $e_0$  von  $F$  positive Norm hat. Wir bezeichnen mit  $p_g^*$  das geometrische Geschlecht der symmetrischen Modulfläche  $Y_{e_r}(D, 1)$  und mit  $p_{g-}^*$  das der symmetrischen Modulfläche  $Y_{e_r}(D, B_1)$ , wobei  $B_1 := N(\mathfrak{b}_1)$  und  $\mathfrak{b}_1$  im engeren Sinne äquivalent zu dem Ideal  $(\sqrt{D})$  ist. Dann gilt:

- (1)  $p_{g-}^* = 0 \iff$  alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  sind ausgezeichnet und
- (2)  $p_g^* = 0 \Rightarrow$  alle nicht CM-Formen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  sind ausgezeichnet.

**Beweis:** Es sei  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  nicht ausgezeichnet. Wir bezeichnen mit  $x_c$  die Projektion von  $\omega_1(\pi)$  auf  $\text{IH}^2(\bar{X}(D, \mathfrak{b}_c), \mathbb{C})$ , dann ist  $x_c + x_c^\sigma$  nach Fall 1 (siehe oben) genau dann nicht null, wenn  $x_c$  nicht null ist. Nach Lemma 4.3 ist dies, falls  $\pi$  keine CM-Form ist, für alle  $c$  aus  $C_D$  der Fall. Daraus folgt (2). Falls  $\pi$  eine CM-Form ist mit  $\pi \cong \pi \otimes \lambda$ , ist  $x_c$  nach Lemma 4.3 genau dann nicht null, wenn  $\lambda(\det(c)) = -1$  gilt. Für das dem Ideal  $\mathfrak{b}_1$  entsprechende  $c_1$  (zur Notation siehe 4.1.) gilt:

$$\lambda(\det(c_1)) = \lambda_\omega(\sqrt{D}, -\sqrt{D}) = \text{sgn}(\lambda) = -1,$$

da  $\lambda = \epsilon_{L/F}$  für eine imaginärquadratische Erweiterung  $L$  von  $F$  ist. Also ist  $x_{c_1} + x_{c_1}^\sigma$  für alle nicht ausgezeichneten Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  nicht null. Damit ist " $\Rightarrow$ " in (1) bewiesen.

Nehmen wir nun an, daß alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  ausgezeichnet sind. Für  $\pi^\sigma \cong \pi \otimes \lambda$  und  $x_c$  wie oben, ist

$$x_{c_1} + x_{c_1}^\sigma = x_{c_1} - \text{sgn}(\lambda) \cdot \lambda(\det(c_1)) \cdot x_{c_1} = 0$$

da  $\text{sgn}(\lambda) = \lambda(\det(c_1))$  für alle  $\lambda$  ist. Daraus folgt die Behauptung. □

**Korollar 4.20:**

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten von diedralen CM-Formen ist  $p_{g^-}^* > 0$ . Falls  $p_{g^-}^* = 0$  erfüllt ist, ist diese Bedingung auch hinreichend. Die ersten diedralen CM-Formen gibt es damit, wie in [HLR] vermutet, für die Diskriminante  $D = 161$ .

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 4.19. Das Beispiel ergibt sich dann aus der Tabelle am Ende dieser Arbeit.  $\square$

**Bemerkung:**

Wir können nun die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel (Hzz) und die Picardzahl (Pic) der Hilbertschen Modulflächen  $Y_e(D, B)$  in den folgenden Fällen berechnen:

(1) Falls der reellquadratische Zahlkörper  $F$  der Diskriminante  $D$  eine Einheit negativer Norm enthält, mit Hilfe von Satz 4.16.

(2) Falls  $F$  keine Einheit negativer Norm enthält, aber (mit den Bezeichnungen von Lemma 4.19)  $p_{g^-}^* = 0$  ist, mit Hilfe von Lemma 4.19. Denn in diesem Fall sind alle Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  ausgezeichnet und die Lefschetzzahl der Flächen  $Y_e(D, B)$  ( mit  $B = N(\mathfrak{b})$  ) ist dann nach Lemma 4.3 gleich  $p_g$ . Damit können wir die Picardzahl berechnen und, da alle  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^K$  ausgezeichnet sind, ist die Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel gleich

$$\text{Hzz} = \text{Pic} - 1 - l(\mathfrak{b}),$$

wobei wieder  $l(\mathfrak{b})$  die Anzahl der Auflösungskurven auf  $Y_e(D, B)$  ist.

(3) In Einzelfällen können auch noch weitere Fälle behandelt werden. In den Erläuterungen der Tabelle wird dies in zwei Beispielen durchgeführt.

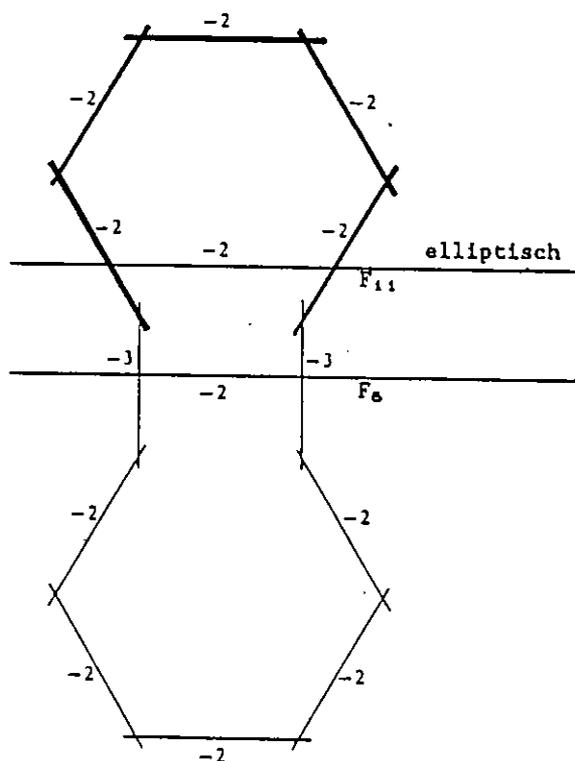
5. Die Hilbertsche Modulfläche  $Y(60,11)$

In Korollar 4.9 haben wir gesehen, daß die Fläche  $Y := Y(60,11)$  die einzige Hilbertsche Modulfläche vom allgemeinen Typ mit maximaler Picardzahl ist. Wir werden zeigen, daß  $Y$  eine Horikawa-Fläche ist, und die Fläche  $Y$  als verzweigte doppelte Überlagerung von  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  darstellen. Dazu beweisen wir zunächst die Minimalität der Fläche  $Y$  mit Hilfe der Methoden von Hirzebruch aus [Hi<sub>2</sub>].

Lemma 5.1:

Die Hilbertsche Modulfläche  $Y := Y(60,11)$  ist minimal.

Beweis: Wir benutzen die Konfiguration der Auflösungskurven einer der beiden Spitzen von  $\bar{X}(60,11)$  und die Modulkurven  $F_6$  und  $F_{11}$  um die Konfiguration III'



Wir definieren den Divisor  $L$  als die formale Summe der irreduziblen Kurven dieser Konfiguration. Dabei zählen wir die fett gezeichneten Kurven mit Multiplizität zwei und die anderen mit Multiplizität eins. Wir bezeichnen mit  $K$  den kanonischen Divisor von  $Y$ . Dann ist

$$L^2 - L \cdot K - K^2 = 4$$

und nach der Proposition in [Hi<sub>2</sub>] müßte jede Ausnahmekurve auf  $Y$  in  $L$  enthalten sein. □

(Die Kurven sind, falls nicht anders vermerkt, rational. Sie sind durch ihre Selbstschnittzahl gekennzeichnet)

**Definition:**

Eine *Horikawa-Fläche*  $Y$  ist eine minimale Fläche vom allgemeinen Typ, deren Invarianten  $\chi$  (arithmetisches Geschlecht) und  $K^2$  (Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors  $K$  von  $Y$ ) die folgende Gleichung erfüllen:

$$K^2 = 2 \cdot \chi - 6 .$$

**Lemma 5.2:**

Die Hilbertsche Modulfläche  $Y := Y(60, 11)$  ist eine Horikawa-Fläche.

**Beweis:** Die Invarianten von  $Y$  sind  $K^2 = 4$ ,  $\chi = 5$  und die Eulerzahl  $e(Y) = 56$ .

Die Behauptung folgt dann aus Lemma 5.1.  $\square$

Wegen  $\chi = 5$  ist nach [Ho], Th.1.6 die Fläche  $Y$  die minimale Desingularisierung einer doppelten Überlagerung des  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , verzweigt entlang einer (eventuell reduziblen) Kurve vom Typ  $(6, 6)$ . Persson konstruiert in [P] Horikawa-Flächen mit maximaler Picardzahl, indem er doppelte Überlagerungen

$$\pi : Y' \longrightarrow X$$

betrachtet, die entlang einer singulären Kurve  $B$  auf  $X$  verzweigt sind. Es seien  $E_1, \dots, E_n$  numerisch unabhängige, rationale Kurven, disjunkt von der Verzweigungskurve  $B$ , so daß die Schnittform auf dem von ihnen aufgespannten Unterraum von  $H^2(X, \mathbb{C})$  negativ-definit ist. Es sei  $Y$  die minimale Desingularisierung von  $Y'$  und  $\sigma(B)$  die Summe der Indizes der einfachen Singularitäten von  $B$  (zur Definition und Bezeichnung der einfachen Singularitäten siehe [P], 1.1 und 1.2). Dann gilt

$$\text{Pic}(Y) \geq \text{Pic}(X) + \sigma(B) + n .$$

Persson nennt eine Verzweigungskurve  $B$  maximierend, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sigma(B) = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(Y, \mathbb{C}) - n - \text{Pic}(X) .$$

In diesem Fall hat  $Y$  maximale Picardzahl. Wir werden sehen, daß  $Y := Y(60,11)$  die minimale Desingularisierung einer doppelten Überlagerung

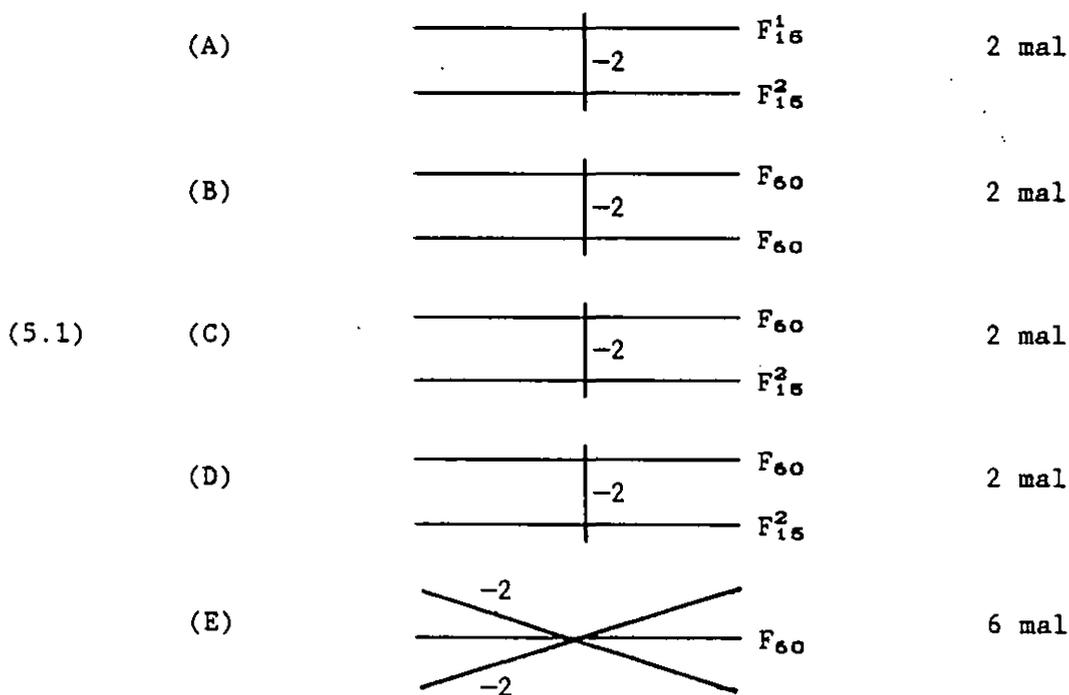
$$\pi: Y' \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

verzweigt entlang einer nicht-maximierenden Kurve  $B$  vom Typ  $(6,6)$  auf  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ist.

Dazu betrachten wir die Operation der Koordinatenvertauschung

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow (-1/(11 \cdot z_2), -1/(11 \cdot z_1)) \end{aligned}$$

auf der Fläche  $Y$ . Die Fixpunktmenge dieser Operation besteht aus den Modulkurven  $F_{15}$  und  $F_{60}$ . Die Kurve  $F_{60}$  ist irreduzibel und  $F_{15}$  hat zwei irreduzible Komponenten, wir bezeichnen sie mit  $F_{15}^1$  und  $F_{15}^2$ . Die Fixkurven bilden mit den Auflösungskurven der Singularitäten von  $X(60,11)$  die folgenden Konfigurationen



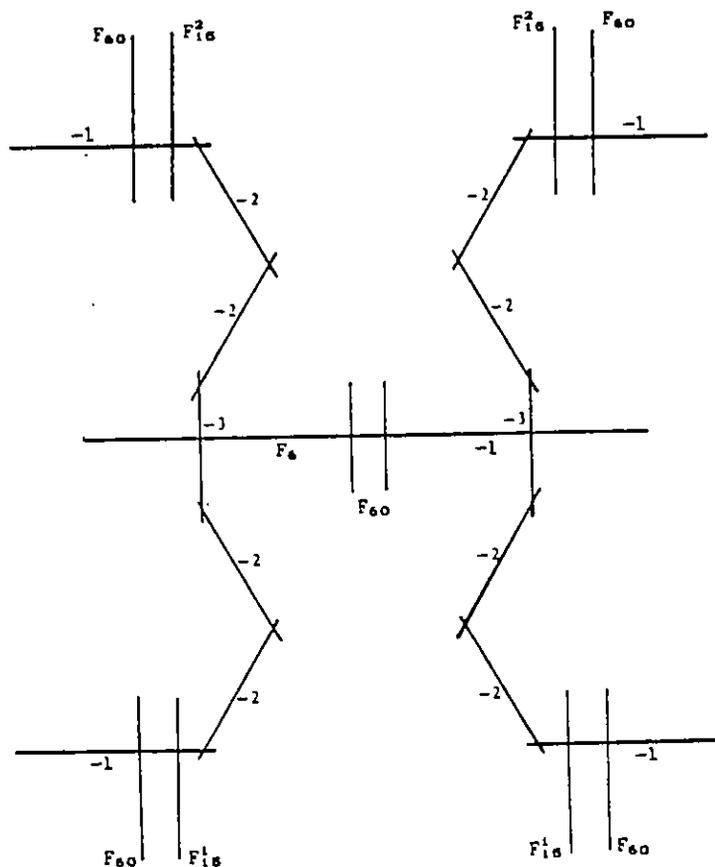
Die Involution  $\tau$  führt in den Fällen (A)-(D) die  $(-2)$ -Kurven in sich über, im Fall (E) werden die beiden  $(-2)$ -Kurven vertauscht. Die Invarianten der Fixkurven von  $\tau$  sind:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} K \cdot F_{15}^1 &= 2, & e(F_{15}^1) &= 2 & \text{für } i \text{ aus } (1,2) \\ K \cdot F_{60} &= 8, & e(F_{60}) &= 2. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit  $Y_\tau$  den Quotienten  $Y/\tau$ . Da die Involution  $\tau$  keine isolierten Fixpunkte auf  $Y$  hat, ist  $Y_\tau$  glatt. Die Invarianten  $\chi(Y_\tau)$  und  $e(Y_\tau)$ , d.h. das arithmetische Geschlecht und die Eulerzahl von  $Y_\tau$ , sind gegeben durch ([Ko], Satz 3)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \chi(Y_\tau) &= \frac{1}{2} \cdot (\chi(Y) - \frac{1}{4} \cdot (K \cdot F_{15}^1 + K \cdot F_{15}^2 + K \cdot F_{60})) - 1 \\ e(Y_\tau) &= \frac{1}{2} \cdot (e(Y) + e(F_{15}^1) + e(F_{15}^2) + e(F_{60})) - 31. \end{aligned}$$

Auf  $Y_\tau$  finden wir die folgende Kurvenkonfiguration:



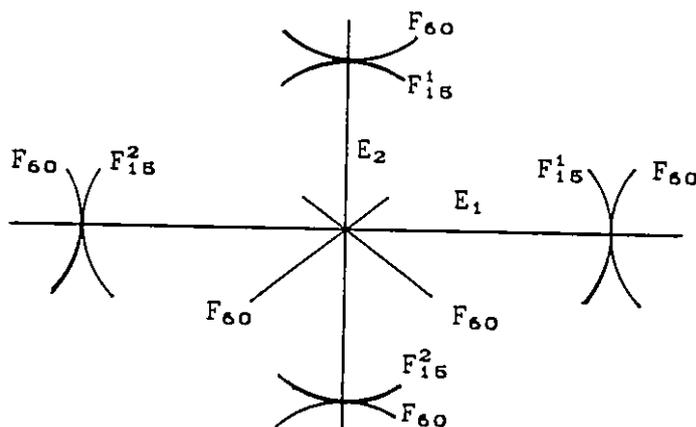
Wir blasen  $F_6$  und nacheinander 12 Kurven der Spitzenauflösungen auf  $Y_r$  nieder. Außerdem ergeben die Konfigurationen (A)-(E) 14 Ausnahmekurven auf  $Y_r$ , die wir ebenfalls niederblasen. Mit  $Y_r^*$  bezeichnen wir die Fläche die wir auf diese Weise erhalten. Die Eulerzahl von  $Y_r^*$  ist dann

$$e(Y_r^*) = e(Y_r) - 27 = 4 .$$

Wir bezeichnen mit  $p: Y \longrightarrow Y_r$  die doppelte Überlagerung, mit  $\pi_1: Y_r \longrightarrow Y_r^*$  die birationale Abbildung, die durch Niederblasen der 21 Ausnahmekurven entsteht, und mit  $B := \pi_{1*}p(F_{15}^1 \cup F_{15}^2 \cup F_{60})$  die Verzweigungskurve auf  $Y_r^*$ . Die Verzweigungskurve  $B$  hat dann die folgenden Singularitäten:

- 4  $a_3$  (Niederblasen von jeweils 3 Kurven der Spitzenauflösungen)
- 1  $a_1$  (Niederblasen von  $\pi_{1*}p(F_6)$ )
- 6  $a_2$  (Niederblasen der durch (E) gegebenen Ausnahmekurven)
- 8  $a_2$  (Niederblasen der durch (A)-(D) gegebenen Ausnahmekurven)

Die 4  $(-3)$ -Kurven in den Spitzenauflösungen von  $Y$  werden durch  $\pi_{1*}p$  auf zwei rationale Kurven  $E_1$  und  $E_2$  mit  $E_1^2 - E_2^2 = 0$  und  $E_1 \cdot E_2 = 1$  abgebildet. Wir sehen also, daß  $Y_r^*$  isomorph zu  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ist. Die beiden irreduziblen Kurven  $E_1$  und  $E_2$  sind Erzeugende der Picardgruppe von  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Die Verzweigungskurve  $B$  hat mit  $E_1$  und  $E_2$  das folgende Schnittverhalten:



Wir sehen insbesondere, daß  $B$  vom Typ  $(6,6)$  ist. In unserem Fall ist  $\sigma(B)$ :

$$\sigma(B) = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 41$$

Wegen  $n = 0$  gilt

$$h^{1,1}(Y) = 46 > \sigma(B) + \text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 43 .$$

Die Verzweigungskurve  $B$  ist also nicht maximierend im Sinne von Persson. Die Differenz

$$\text{Pic}(Y) - \sigma(B) - \text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 3$$

ist folgendermaßen zu erklären:

- 1.) Die Urbilder von  $E_1$  und  $E_2$  unter  $\pi_{1 \circ p}$  erzeugen einen 4-dimensionalen Unterraum der algebraischen Zykel in  $H^2(Y, \mathbb{C})$ .
- 2.) Die Volumenformen  $\omega_1 = (dx_1 \wedge dy_1)/y_1^2$  und  $\omega_2 = (dx_2 \wedge dy_2)/y_2^2$  erzeugen einen 2-dimensionalen Unterraum der algebraischen Zykel, doch nur der von  $\omega_1 + \omega_2$  erzeugte Unterraum (er wird von dem Poincarédualen der Kurve  $F_6$  erzeugt) wird in Perssons Konstruktion erfaßt.

**Bemerkung:**

Auf  $Y_r^* \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  operiert das Element  $\alpha_2$  der Hurwitz-Maaß-Erweiterung. Die Fixpunktmenge dieser Operation ist die Kurve  $\pi_{1 \circ p}(F_{20})$ . Der Quotient  $Y_r^*/\alpha_2$  ist isomorph zu  $\mathbb{P}^2$ . Wir bezeichnen mit  $\pi_2$  die doppelte Überlagerung

$$\pi_2 : Y_r^* \longrightarrow Y_r^*/\alpha_2 .$$

Dann ist  $S := \pi_2 \circ \pi_1 \circ p(F_{60})$  die Steinersche Quartik mit ihren 3  $a_2$ -Singularitäten. Die Kurve  $C_1 := \pi_2 \circ \pi_1 \circ p(F_{15})$  ist ein glatter Kegelschnitt, der  $S$  in zwei Punkten transversal und in zwei weiteren Punkten mit der Ordnung 3 schneidet. Die Kurve  $C_2 := \pi_2 \circ \pi_1 \circ p(F_{30})$ , d.h. die Verzweigungskurve von  $\pi_2$ , ist ebenfalls ein glatter Kegelschnitt. Sie schneidet  $S$  in 2 Punkten transversal und in 3 weiteren Punkten mit der Ordnung 2. Die Kegelschnitte  $C_1$  und  $C_2$  schneiden sich in 2 Punkten mit der Ordnung 2.

## Erläuterung der Tabelle

- D : Diskriminante eines reellquadratischen Zahlkörpers mit  $13 \leq D < 300$
- $N(e)$  : Vorzeichen der Norm der Grundeinheit  $e_0$  des reellquadratischen Zahlkörpers  $F$  der Diskriminante  $D$ .
- B : Norm eines ganzen Ideals  $\mathfrak{b}$  von  $F$ .
- Ges : Vorzeichenfolge der Hilbertsymbole  $(D, B)_p$  für alle Primteiler  $p$  von  $D$ .
- Eu : Eulerzahl von  $Y(D, B)$ .
- Ch : Arithmetisches Geschlecht  $\chi$  von  $Y(D, B)$ .
- Eu-e : Eulerzahl von  $Y_e(D, B)$  ( nur für  $N(e) = 1$  )
- Ch-e : Arithmetisches Geschlecht  $\chi$  von  $Y_e(D, B)$  ( nur für  $N(e) = 1$  )
- Ch\* : Arithmetisches Geschlecht von  $Y_{er}(D, B)$  ( nur für  $B = 1$  oder  $\mathfrak{b}$  äquivalent im engeren Sinne zu  $(\sqrt{D})$  )
- Hzz : Dimension des Raumes der Hirzebruch-Zagier-Zykel in  $I\mathbb{H}^2(\bar{X}_e(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$
- Alg : Dimension des Raumes der algebraischen Zykel in  $I\mathbb{H}^2(\bar{X}_e(D, \mathfrak{b}), \mathbb{C})$ .
- L : Anzahl der Auflösungskurven der Singularitäten von  $\bar{X}_e(D, \mathfrak{b})$ .
- Pic : Picardzahl von  $Y_e(D, B)$ .
- Lef : Lefschetzzahl von  $Y_e(D, B)$ .

**Bemerkung:**

(1) Für  $N(e_0) = -1$  wurde Hzz und Alg mit Hilfe von Satz 4.16 bestimmt. Für  $N(e_0) = +1$  folgen die Ergebnisse aus Lemma 4.19. Dabei müssen die Fälle  $D = 209$  und  $D = 217$  gesondert behandelt werden. In diesen Fällen ist  $\bar{h}(D) = 2$  und nach Korollar 3.15,(2) sind alle ausgezeichneten CM-Formen aus  $\text{Coh}_0^{K_0}$  unverzweigt geliftet. Wir können ihre Anzahl also mit Hilfe von Satz 3.12 bestimmen. Es gibt daher für  $D = 209$  eine und für  $D = 217$  drei ausgezeichnete CM-Formen aus  $\text{Coh}_0^{K_0}$ . Dies sind in beiden Fällen bereits alle CM-Formen aus  $\text{Coh}_0^{K_0}$ . Die nicht-ausgezeichneten Darstellungen  $\pi$  aus  $\text{Coh}_0^{K_0}$ , die nach Lemma 4.19,(2) existieren, sind demnach nicht vom CM-Typ und wir können auch in diesen Fällen Hzz und Pic. bestimmen.

(2) Die Invarianten der Hilbertschen Modulflächen wurden mit den Methoden berechnet, die im wesentlichen bereits von Hirzebruch in [Hi<sub>1</sub>] benutzt wurden. Für die Flächen  $Y(D,B)$  und  $Y_e(D,B)$  findet man die Formeln für die Eulerzahl und das arithmetische Geschlecht in [Ko], 1.1, 2.3 und 2.4. Für die Flächen  $Y_r(D,B)$  und  $Y_{er}(D,B)$  wurden sie mit Spurformeln berechnet, die bereits für die Hurwitz-Maaß-Erweiterung in [Ko], Kapitel 2 benutzt wurden. Ähnliche Rechnungen hat auch Bassendowski in [Ba] durchgeführt. Wichtig ist in allen Fällen die genaue Kenntnis der Fixpunkte der Elemente der Hurwitz-Maaß-Erweiterung und der Koordinatenvertauschung  $\tau$ . Diese Informationen findet man in den Arbeiten von Hausmann [Hau<sub>1</sub>] und [Hau<sub>2</sub>].

D	N(e)	B	Ges	Eu	Ch	Eu-e	Ch-e	Ch*	Hzz	Alg	L	Pic	Lef
13	-	1	+	15	1			1	1	2	11	13	0
17	-	1	+	16	1			1	1	2	12	14	0
21	+	1	++	18	1	15	1	1	1	2	11	13	0
21	+	5	--	25	2	15	1	1	1	2	11	13	0
24	+	1	++	19	1	19	1	1	3	4	13	17	0
24	+	5	--	26	2	26	2	1	1	2	20	22	0
28	+	1	++	20	1	18	1	1	3	4	12	16	0
28	+	3	--	26	2	25	2	1	1	2	19	21	0
29	-	1	+	28	2			1	2	3	20	23	1
33	+	1	++	21	1	19	1	1	3	4	13	17	0
33	+	2	--	28	2	26	2	1	1	2	20	22	0
37	-	1	+	29	2			1	2	3	21	24	1
40	-	1	++	32	2			1	2	3	24	27	1
40	-	3	--	28	2				2	3	20	23	1
41	-	1	+	30	2			1	2	3	22	25	1
44	+	1	++	32	2	29	2	1	2	3	21	24	1
44	+	7	--	38	3	28	2	1	2	3	20	23	1
53	-	1	+	40	3			1	3	4	28	32	2
56	+	1	++	34	2	31	2	1	4	5	21	26	1
56	+	5	--	46	4	37	3	1	2	3	27	30	1
57	+	1	++	34	2	29	2	1	2	3	21	24	1
57	+	2	--	41	3	29	2	1	2	3	21	24	1
60	+	1	+++	30	1	21	1	1	5	6	13	19	0
60	+	11	---+	56	5	34	3	1	1	2	26	28	0
60	+	7	---	38	3	25	2		3	4	17	21	0
60	+	17	+++	40	3	26	2		3	4	18	22	0
61	-	1	+	41	3			1	3	4	29	33	2
65	-	1	++	44	3			1	3	4	32	36	2
65	-	2	--	40	3				3	4	28	32	2
69	+	1	++	35	2	25	1	1	7	8	15	23	0
69	+	5	--	56	5	46	4	1	1	2	36	38	0
73	-	1	+	43	3			1	3	4	31	35	2
76	+	1	++	44	3	41	3	1	3	4	29	33	2
76	+	3	--	50	4	40	3	1	3	4	28	32	2
77	+	1	++	44	3	28	2	1	4	5	18	23	1
77	+	6	--	56	5	34	3	1	2	3	24	27	1

D	N(e)	B	Ges	Eu	Ch	Eu-e	Ch-e	Ch*	Hzz	Alg	L	Pic	Lef
85	-	1	++	56	4			1	4	5	40	45	3
85	-	3	--	48	4				4	5	32	37	3
88	+	1	++	46	3	42	3	1	5	6	28	34	2
88	+	7	--	58	5	48	4	1	3	4	34	38	2
89	-	1	+	52	4			1	4	5	36	41	3
92	+	1	++	46	3	35	2	1	8	9	21	30	1
92	+	7	--	64	6	56	5	1	2	3	42	45	1
93	+	1	++	46	3	41	3	1	3	4	29	33	2
93	+	11	--	67	6	41	3	1	3	4	29	33	2
97	-	1	+	53	4			1	4	5	37	42	3
101	-	1	+	60	5			1	5	6	40	46	4
104	-	1	++	64	5			1	5	6	44	50	4
104	-	5	--	56	5				5	6	36	42	4
105	+	1	+++	46	2	35	2	1	8	9	21	30	1
105	+	2	---	56	4	40	3		6	7	26	33	1
105	+	26	+-	84	8	54	5	1	2	3	40	43	1
105	+	13	+-	66	6	45	4		4	5	31	36	1
109	-	1	+	61	5			1	5	6	41	47	4
113	-	1	+	60	5			1	5	6	40	46	4
120	+	1	+++	56	3	46	3	1	9	10	28	38	2
120	+	29	---	94	9	65	6	1	3	4	47	51	2
120	+	7	+-	72	7	54	5		5	6	36	42	2
120	+	17	+-	62	5	49	4		7	8	31	39	2
124	+	1	++	56	4	46	3	1	9	10	28	38	2
124	+	3	--	74	7	67	6	1	3	4	49	53	2
129	+	1	++	74	6	49	4	1	4	5	33	38	3
129	+	2	--	81	7	49	4	1	4	5	33	38	3
133	+	1	++	64	5	38	3	1	5	6	24	30	2
133	+	3	--	76	7	44	4	1	3	4	30	34	2
136	+	1	++	74	6	63	5	1	5	6	43	49	4
136	+	3	--	62	6	57	5		5	6	37	43	4
137	-	1	+	68	6			1	6	7	44	51	5
140	+	1	+++	64	4	44	3	1	9	10	26	36	2
140	+	23	---	68	6	46	4		7	8	28	36	2
140	+	19	+-	100	10	62	6	1	3	4	44	48	2
140	+	13	+-	80	8	52	5		5	6	34	40	2
141	+	1	++	57	4	41	2	1	12	13	23	36	1
141	+	5	--	92	9	76	7	1	2	3	58	61	1

D	N(e)	B	Ges	Eu	Ch	Eu-e	Ch-e	Ch*	Hzz	Alg	L	Pic	Lef
145	-	1	++	82	7			1	7	8	54	62	6
145	-	2	--	78	7				7	8	50	58	6
149	-	1	+	78	7			1	7	8	50	58	6
152	+	1	++	70	6	62	5	1	7	8	40	48	4
152	+	13	--	82	8	68	6	1	5	6	46	52	4
156	+	1	+++	76	5	56	4	1	8	9	36	45	3
156	+	23	---	114	11	68	6	1	4	5	48	53	3
156	+	7	+-	88	9	62	6		4	5	42	47	3
156	+	5	+-	78	7	50	4		8	9	30	39	3
157	-	1	+	77	7			1	7	8	49	57	6
161	+	1	++	68	5	52	4	1	6	11	30	41	3
161	+	5	--	104	11	70	7	2	4	5	48	53	3
165	+	1	+++	68	4	46	3	1	11	12	26	38	2
165	+	23	---	84	8	54	5		7	8	34	42	2
165	+	29	+-	120	12	72	7	1	3	4	52	56	2
165	+	7	+-	80	8	52	5		7	8	32	40	2
168	+	1	+++	64	4	54	3	1	15	16	30	46	2
168	+	11	---	84	8	78	7		7	8	54	62	2
168	+	13	+-	80	8	62	5		11	12	38	50	2
168	+	17	+-	116	12	94	9	1	3	4	70	74	2
172	+	1	++	88	8	69	6	1	6	7	45	52	5
172	+	3	--	94	9	68	6	1	6	7	44	51	5
173	-	1	+	86	8			1	8	9	54	63	7
177	+	1	++	79	7	65	5	2	11	12	39	51	4
177	+	2	--	100	10	86	8	1	5	6	60	66	4
181	-	1	+	85	8			1	8	9	53	62	7
184	+	1	++	76	6	64	5	1	11	12	38	50	4
184	+	5	--	112	12	82	8	1	5	6	56	62	4
185	-	1	++	96	9			1	9	10	60	70	8
185	-	2	--	88	9				9	10	52	62	8
188	+	1	++	70	6	57	4	1	14	15	31	46	3
188	+	11	--	100	11	92	9	1	4	5	66	71	3
193	-	1	+	103	10			2	8	9	63	72	11
197	-	1	+	94	9			1	9	10	58	68	8
201	+	1	++	102	10	63	6	1	6	7	39	46	5
201	+	2	--	109	11	63	6	1	6	7	39	46	5
204	+	1	+++	104	8	78	6	1	10	11	50	61	5
204	+	35	---	144	14	90	8	1	6	7	62	69	5
204	+	7	+-	96	10	66	6		10	11	38	49	5
204	+	5	+-	112	12	82	8		6	7	54	61	5

D	N(e)	B	Ges	Eu	Ch	Eu-e	Ch-e	Ch*	Hzz	Alg	L	Pic	Lef
205	+	1	++	110	10	79	7	1	7	8	51	59	6
205	+	3	--	98	10	73	7		7	8	45	53	6
209	+	1	++	102	10	75	7	2	7	8	45	53	8
209	+	2	--	114	12	81	8	2	5	6	51	57	8
213	+	1	++	71	6	53	3	1	17	18	27	45	2
213	+	11	--	120	13	102	10	1	3	4	76	80	2
217	+	1	++	100	9	68	6	2	10	11	38	49	7
217	+	3	--	136	15	86	9	2	4	5	56	61	7
220	+	1	+++	88	7	74	6	1	14	15	42	57	5
220	+	3	---+	104	11	82	8		10	11	50	61	5
220	+	19	+-	136	15	98	10	1	6	7	66	73	5
220	+	13	+++	104	11	82	8		10	11	50	61	5
221	+	1	++	108	10	66	6	1	6	7	42	49	5
221	+	5	--	92	10	58	6		6	7	34	41	5
229	-	1	+	97	10			1	10	11	57	68	9
232	-	1	++	108	11			1	11	12	64	76	10
232	-	3	--	100	11				11	12	56	68	10
233	-	1	+	114	12			2	10	11	66	77	13
236	+	1	++	100	10	89	8	1	8	9	57	66	7
236	+	11	--	118	13	86	8	1	8	9	54	63	7
237	+	1	++	98	9	79	7	1	7	8	51	59	6
237	+	14	--	133	14	79	7	1	7	8	51	59	6
241	-	1	+	133	14			3	10	11	77	88	17
248	+	1	++	94	9	81	7	1	13	14	47	61	6
248	+	13	--	130	15	99	10	1	7	8	65	73	6
249	+	1	++	127	13	89	8	3	14	15	51	66	7
249	+	2	--	148	16	110	11	1	8	9	72	81	7
253	+	1	++	98	9	67	6	1	8	13	37	50	5
253	+	7	--	134	15	85	9	2	6	7	55	62	5
257	-	1	+	116	13			2	11	12	64	76	14
264	+	1	+++	124	11	96	8	1	14	15	58	73	7
264	+	5	---+	114	13	91	9		12	13	53	66	7
264	+	13	+-	124	15	96	10		10	11	58	69	7
264	+	17	+++	162	17	115	11	1	8	9	77	86	7
265	-	1	++	136	15			2	13	14	76	90	16
265	-	2	--	132	15				13	14	72	86	16
268	+	1	++	120	13	91	9	1	9	10	55	65	8
268	+	3	--	126	14	90	9	1	9	10	54	64	8

D	N(e)	B	Ges	Eu	Ch	Eu-e	Ch-e	Ch*	Hzz	Alg	L	Pic	Lef
269	-	1	+	112	12			1	12	13	64	77	11
273	+	1	+++	108	10	78	7	1	11	16	42	58	6
273	+	17	---+	170	20	102	11	2	7	8	66	74	6
273	+	2	+-	110	12	72	7		11	16	36	52	6
273	+	19	+++	144	18	96	11		7	8	60	68	6
277	-	1	+	133	14			2	12	13	77	90	15
280	+	1	+++	104	10	88	8	1	16	17	48	65	7
280	+	23	---+	120	14	96	10		12	13	56	69	7
280	+	31	+-	152	18	112	12	1	8	9	72	81	7
280	+	3	+++	120	14	96	10		12	13	56	69	7
281	-	1	+	142	16			3	12	13	78	91	19
284	+	1	++	110	11	75	6	1	20	21	37	58	5
284	+	7	--	152	18	124	13	1	6	7	86	93	5
285	+	1	+++	100	8	62	5	1	17	18	30	48	4
285	+	17	---+	140	16	82	9		9	10	50	60	4
285	+	14	+-	180	20	102	11	1	5	6	70	76	4
285	+	13	+++	108	12	66	7		13	14	34	48	4
293	-	1	+	120	13			1	13	14	68	82	12
296	-	1	++	152	16			2	14	15	88	103	17
296	-	5	--	140	16				14	15	76	91	17

## Literaturverzeichnis

- [Ba] Bassendowski, D.:  
" Klassifikation Hilbertscher Modulflächen zur symmetrischen Hurwitz-Maaß-Erweiterung ", Bonner math. Schriften 163, 1985.
- [BJ] Borel, A. - Jacquet, H.:  
" Automorphic forms and automorphic representations ", in Proc. Sympos. Pure Math. 33,1(1979), p.189-202.
- [BL] Brylinski, J.-L. - Labesse, J.-P.:  
" Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura ", Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 17(1984), p.361-442.
- [BW] Borel, A. - Wallach, N.:  
" Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups ", Ann. of Math. Stud. 94, Princeton University Press 1980.
- [Ca] Cartier, P.:  
" La conjecture locale de Langlands pour  $GL(2)$  et la démonstration de Ph. Kutzko ", Seminaire Bourbaki 550, Springer Lecture Notes 842 (1981), p.112-138.
- [CGM] Cheeger, J. - Goreski, M. - MacPherson, R.:  
"  $L^2$ -cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties ", in Seminar on Differential Geometry, Princeton University Press 1982, p.303-340.
- [CO] Cohn, H. - Oesterlé, J.:  
" Dimension des espaces de formes modulaires ", in Modular Forms of One Variable VI, Springer Lecture Notes 627, p.89 - 78.
- [Cu] Curio, G.:  
" Periodenvermutung für Modulformen vom Gewicht 2 ", Diplomarbeit, Bonn 1984 .
- [De<sub>1</sub>] Deligne, P:  
" Travaux de Shimura ", Seminaire Bourbaki 389, Springer Lecture Notes 627, p.123-165.

- [De<sub>2</sub>] Deligne, P:  
 " Variétés de Shimura: interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques ", in Proc. Sympos. Pure Math. 33,2(1979), p.247-290.
- [De<sub>3</sub>] Deligne, P:  
 " Hodge cycles on abelian varieties ", in Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Springer Lecture Notes 900, p.9-100.
- [De<sub>4</sub>] Deligne, P:  
 " Théorie de Hodge III ", Publ. Math. IHES 44(1974).
- [Ge] Gelbart, S.:  
 " Automorphic forms on adèle groups ", Ann. of Math. Stud. 83, Princeton University Press 1975.
- [GL] Gérardin, P. - Labesse, J.-P.:  
 " The solution of a base change problem for  $Gl(2)$  ", in Proc. Sympos. Pure Math. 33,2(1979), p.115-133.
- [Go] Godement, R.:  
 " Notes on Jacquet-Langlands' theory ", Institute for Advanced Study, Princeton 1970.
- [Ha] Harder, G.:  
 " Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case  $Gl_2$  ", MPI Preprint 84-22(1984), erscheint in Invent. Math. .
- [HLR] Harder, G. - Langlands, R. - P. - Rapoport, M.:  
 " Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen ", J. Reine Angew. Math. 366(1986), p.53-120.
- [Has] Hasse, H.:  
 " Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper ", Akademie-Verlag Berlin, 1952.
- [Hau<sub>1</sub>] Hausmann, W.:  
 " Kurven auf Hilbertschen Modulflächen ", Bonner Math. Schriften 123(1980).
- [Hau<sub>2</sub>] Hausmann, W.:  
 " The fixed points of the symmetric Hilbert modular group of a real quadratic field with arbitrary discriminant ", Math. Ann. 260 (1982), p.31-50.

- [Hi<sub>1</sub>] Hirzebruch, F.:  
" Hilbert modular surfaces ", Enseignement math. 19(1973), p.183-281.
- [Hi<sub>2</sub>] Hirzebruch, F.:  
" The canonical map for certain Hilbert modular surfaces ", in The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag New York-Berlin-Heidelberg 1980, p.75-95.
- [HZ<sub>1</sub>] Hirzebruch, F. - Zagier, D.:  
" Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of nebentypus ", Invent. Math. 36(1976), p.57-114.
- [HZ<sub>2</sub>] Hirzebruch, F. - Zagier, D.:  
" Classification of Hilbert modular surfaces ", in Complex Analysis and Algebraic Geometry, Cambridge 1977, p.43-77.
- [Ho] Horikawa, E.:  
" Algebraic surfaces of general type with small  $c_1^2$ , I ", Ann. of Math. 104(1976), p.357-387.
- [JL] Jacquet, H. - Langlands, R. - P.:  
" Automorphic Forms on  $Gl(2)$  ", Springer Lecture Notes 114(1970).
- [Kl] Klingenberg, C.:  
" Die Tate - Vermutung für Hilbert-Blumenthal-Flächen ", Dissertation 1986, erscheint in Invent. Math..
- [Ko] Koehl, J.:  
" Klassifikation Hilbertscher Modulflächen zu gewissen diskreten Erweiterungen der Hilbertschen Modulgruppe ", Diplomarbeit, Bonn 1983, als Anhang in dem vorliegenden Preprint .
- [Kol] Koll, F. - J.:  
" Die elliptischen Fixpunkte und die Spitzen der diskreten Erweiterungen der Hilbertschen Modulgruppe ", Bonner Math. Schriften 84(1976).
- [L] Langlands, R. - P.:  
" Base change for  $Gl(2)$  ", Ann. of Math. Studies 96, Princeton University Press 1980.
- [LL] Labesse, J-P. - Langlands, R. - P.:  
" L-indistinguishability for  $Sl(2)$  ", Canad. J. Math. 31(1979), p.726-785.

- [MR] Murty, V.-K. - Ramakrishnan, D.:  
" Period relations and the Tate conjecture for Hilbert modular surfaces ", Preprint.
- [N] Neukirch, J.:  
" Klassenkörpertheorie ", Bonner Math. Schriften 26(1967).
- [No] Nobs, A.:  
" Les représentations exceptionnelles de  $GL_2(\mathbb{Q}_2)$  et  $PGL_2(\mathbb{Q}_2)$  ", C.R. Acad. Sc. Paris, 286(1978), p.767-769.
- [P] Persson, U.:  
" Horikawa surfaces with maximal Picard numbers ", Math. Ann. 259(1982), p. 287-312.
- [R] Ramakrishnan, D.:  
" Arithmetic of Hilbert-Blumenthal surfaces ", Preprint.
- [Sch] Schwermer, J.:  
" Kohomologie arithmetisch definierter Gruppen und Eisensteinreihen ", Springer Lecture Notes 988(1983).
- [Se] Serre, J.-P.:  
" Local fields ", Springer GTM 67, New York-Heidelberg-Berlin 1979.
- [Sh] Shintani, S.:  
" On liftings of holomorphic cusp forms ", in Proc. Sympos. Pure Math. 33,2(1979), p.97-110.
- [VdG] Van der Geer, G.:  
" Hilbert modular surfaces ", erscheint in Grundlehren der math. Wiss., Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1987.
- [W] Weil, A.:  
" Adeles and algebraic groups ", Birkhäuser Verlag, Boston 1982.
- [Z] Zagier, D.:  
" Zetafunktionen und quadratische Körper ", Springer Verlag, Heidelberg-Berlin-New York 1981.

Anhang

Klassifikation Hilbertscher Modulflächen  
zu gewissen diskreten  
Erweiterungen der Modulgruppe

Diplomarbeit  
von  
Jürgen Koehl

Bonn 1983



## Vorwort

Ziel dieser Arbeit ist die vollständige Klassifikation der Hilbertschen Modulflächen zu den diskreten Erweiterungen der Hilbertschen Modulgruppe in  $(\text{PL}_2^+(\mathbb{R}))^2$ . Dazu werden im wesentlichen die schon in den Arbeiten von Hirzebruch, Zagier und Van de Ven ([13] und [14]) benutzten Methoden verwendet. Die Invarianten der Zwischenflächen werden mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Atiyah-Bott aus den Invarianten der "gewöhnlichen" Hilbertschen Modulflächen berechnet. Die grundlegende Referenz für diesen Abschnitt ist die Arbeit von Hirzebruch [12].

In Kapitel 5 werden die nicht einfach-zusammenhängenden Hilbertschen Modulflächen zu Untergruppen der maximalen diskontinuierlichen Erweiterung der symmetrischen Modulgruppe klassifiziert.

Anzahl und Typ der Fixpunkte der untersuchten Erweiterungen werden in den Arbeiten von Hausmann ([6] und [7]) beschrieben.

Im letzten Kapitel werden die kanonischen Divisoren von  $Y(65)$  und  $Y_m(65)$  eingehender untersucht. Mit der Arbeit von Hermann [9] lassen sich in diesen Fällen die Schnittpunkte der kanonischen Divisoren mit den Kurven der Spitzenauflösungen bestimmen.

Die Invarianten der Modulkurven bezüglich der Hurwitz-Maaß Erweiterung werden aus den Tabellen von Bassendowski in [2] und [3] entnommen. Alle anderen Berechnungen wurden mit einem Tischcomputer durchgeführt.

Herrn Professor Hirzebruch und Herrn Dipl. Math. Bassendowski, die mich zu dieser Arbeit anregten und mich bei ihrer Durchführung unterstützten, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

<u>Kapitel 0</u> : Grundlagen	
0.1 Die Flächen $Y(D, B)$ .....	1
0.2 Die Flächen $Y_m(D, B)$ .....	3
<u>Kapitel 1</u> : Klassifikation der $Y(D, B)$	
1.1 Die Invarianten der Flächen $Y(D, B)$ .....	5
1.2 Die Kurven $F_N$ auf $Y(D, B)$ .....	8
1.2 Die Ausnahmekurven auf $Y(D, B)$ in den Nebengeschlechtern .....	11
1.4 Klassifikation der $Y(D, B)$ .....	12
<u>Kapitel 2</u> : Spurformel für $\alpha_\omega^*$ auf $H^0(Y(D, B), \Omega^2)$	
2.1 Die Fixpunkte der $\alpha_\omega$ .....	17
2.2 Die Spurformel für $\alpha_\omega^*$ auf $H^0(Y(D, B), \Omega^2)$ .....	19
2.3 $\chi(Y_\Gamma(D, B))$ für $G(\sigma, \ell) < \Gamma \leq G_m(\sigma, \ell)$ .....	23
2.4 $c_1^2(Y_\Gamma(D, B))$ für $G(\sigma, \ell) < \Gamma \leq G_m(\sigma, \ell)$ .....	25
2.5 Die Kurven $F_N$ auf $Y_m(D, B)$ .....	27
<u>Kapitel 3</u> : Klassifikation der $Y_\Gamma(D, B)$ für $G(\sigma, \ell) < \Gamma \leq G_m(\sigma, \ell)$	
3.1 Die Kodaira - Dimension der $Y_\Gamma(D, B)$ .....	28
3.2 Klassifikation durch elliptische Konfiguration Konfigurationen .....	33
<u>Kapitel 4</u> : Abschätzung von $c_1^2$ und $\chi$ für $Y_m(D, B)$ ..	42
<u>Kapitel 5</u> : Die nicht einfach-zusammenhängenden Hilbertschen Modulflächen	
5.1 Die Fundamentalgruppe der Hilbertschen Modulflächen .....	48
5.2 Klassifikation der nicht einfach-zusammen- hängenden Hilbertschen Modulflächen .....	53
<u>Kapitel 6</u> : Die kanonischen Divisoren auf $Y(65)$ und $Y_m(65)$ .....	55
Anhang: Legendre - und Hilbertsymbol .....	61
Tabellen .....	63
Literatur .....	73

Kapitel O: GrundlagenO.1 Die Flächen  $Y(D, B)$ . ([2], [4], [6], [11])

Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ein reeller quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $D$  und Maximalordnung  $\mathfrak{o}$ .

$x \mapsto x'$  sei der nichttriviale  $\mathbb{Q}$ -Automorphismus von  $K$  und  $N(x) := x \cdot x'$  die Norm von  $x \in K$ .

Ein Element  $x \in K$  heißt total positiv,  $x \gg 0$ , genau dann, wenn  $x > 0$  und  $x' > 0$  ist.

$U := \{ x \in \mathfrak{o} \mid N(x) = \pm 1 \}$  ist die Einheitengruppe von  $K$ .  $U^+ := \{ x \in U \mid x \gg 0 \}$  und  $U^2 := \{ x^2 \mid x \in U \}$  sind die totalpositiven Einheiten bzw. die Einheitenquadrate von  $\mathfrak{o}$ . Es gilt  $U \supseteq U^+ \supseteq U^2$ .

Sei  $\varepsilon$  die Grundeinheit von  $\mathfrak{o}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} [U^+ : U^2] &= 1 && \Leftrightarrow N(\varepsilon) = -1 \\ [U^+ : U^2] &= 2 && \Leftrightarrow N(\varepsilon) = +1 \end{aligned}$$

$$Sl_2(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) := \left\{ T \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{b}^{-1} \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \mid \det(T) = 1 \right\} \text{ für ein Ideal } \mathfrak{b} \text{ in } \mathfrak{o}.$$

Die Hilbertsche Modulgruppe  $G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) := Sl_2(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})_{\{\pm 1\}}$

operiert effektiv und eigentlich diskontinuierlich auf

$H^2$  unter:  $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  definiert eine Abbildung:

$$\begin{aligned} H^2 &\rightarrow H^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left( \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \frac{\alpha' z_2 + \beta'}{\gamma' z_2 + \delta'} \right). \end{aligned}$$

Der Quotient  $X(D, \mathfrak{b}) := H^2 / G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  ist eine nicht-kompakte komplexe Fläche mit endlich vielen Quotientensingularitäten.

Die parabolischen Punkte von  $G(\sigma, \mathcal{L})$  sind gerade die Punkte von  $\mathbb{P}_1(K)$ . Dabei wird  $\mathbb{P}_1(K)$  durch die Einbettung  $x \mapsto (x, x')$  als Teilmenge von  $(\mathbb{P}_1(\mathbb{R}))^2$  aufgefaßt.  $G(\sigma, \mathcal{L})$  operiert damit auf  $\mathbb{P}_1(K)$  und die Äquivalenzklassen  $[\bar{m}:n] \in \mathbb{P}_1(K)/G(\sigma, \mathcal{L})$  sind durch  $\mathcal{L}x = m\sigma + n\mathcal{L}^1$  eindeutig den Idealklassen von  $\sigma$  zugeordnet. Die Menge der Idealklassen wird mit  $C$  bezeichnet. Die Anzahl der Idealklassen ist die Divisorenklassenzahl  $h(D)$ .  $X(D, \mathcal{L})$  kann daher durch hinzufügen von  $h(D)$  Punkten, den Spitzen, kompaktifiziert werden. (siehe z.B.: [1] 3.7).

$Y(D, \mathcal{L}) := \frac{\hat{H}^2}{G(\sigma, \mathcal{L})}$  sei die Kompaktifizierung von  $X(D, \mathcal{L})$  mit den Quotienten- und Spitzensingularitäten aufgelöst.

Die Spitze  $[\bar{m}:n]$  ist vom Typ  $(\mathcal{L}^{-1}\bar{m}^{-2}, U^2)$  mit  $\mathcal{L}$  wie oben. (siehe [1] 2.1). Die Auflösung der Spitze besteht aus Zykeln rationaler Kurven  $S_0, \dots, S_{r-1}$  falls  $[U^+:U^2] = 1$  bzw. einer doppelten unverzweigten Überlagerung von  $S_0, \dots, S_{r-1}$  falls  $[U^+:U^2] = 2$ . Sei  $b_i := -S_i \cdot S_i$  die negative Selbstschnittzahl von  $S_i$  mit  $i = 0, \dots, r-1$ .  $((b_0, \dots, b_{r-1}))$  ist ein primitiver Zyklus und kommt mit Vielfachheit gezählt genau  $2^{t_D-1}$  mal als Zyklus einer Spitzenauflösung vor.

Nach [6] §1 ist  $Y(D, \mathcal{L}_1)$  isomorph zu  $Y(D, \mathcal{L}_2)$  wenn  $\mathcal{L}_1$  und  $\mathcal{L}_2$  aus dem gleichen Geschlecht sind, d.h. wenn

$$(1) \quad \left( \frac{N(\mathcal{L}_1), D}{p} \right) = \left( \frac{N(\mathcal{L}_2), D}{p} \right), \quad p \mid D, \quad p \text{ prim}$$

(siehe [4] Kap.3, §8).

Seien  $\mathcal{B}$  die Äquivalenzklassen der Ideale in  $\sigma$  unter der Relation (1). Dann werden im Folgenden die Flächen  $Y(D, \mathcal{L})$  auch als  $Y(D, B)$  mit  $B = N(\mathcal{L})$  oder als  $Y(D, \mathcal{B})$  bezeichnet.

Seien  $e_i := \left( \frac{N(\mathfrak{b}), D}{p_i} \right)$  mit  $p_1 \leq \dots \leq p_{t_D}$  den Primteilern von  $D$ . Nach [4] ist  $e_1 \cdot \dots \cdot e_{t_D} = 1$  und für alle  $e_1, \dots, e_{t_D} \in \{-1, +1\}$  mit dieser Eigenschaft gibt es ein  $D$ -Ideal  $\mathfrak{b}$  in  $\mathfrak{o}$  mit

$$e_i = \left( \frac{N(\mathfrak{b}), D}{p_i} \right) \quad \text{für } 1 \leq i \leq t_D .$$

Daher gibt es  $2^{t_D-1}$  Äquivalenzklassen unter (1). In den Tabellen im Anhang wird die Vorzeichenfolge der  $e_i$  mit  $\sigma$  bezeichnet.  $B$  wird hier immer als die kleinste natürliche Zahl mit  $(B, D) = 1$  gewählt, die Norm eines Ideals  $\mathfrak{b}$  aus einer Äquivalenzklasse  $\mathcal{B}$  ist.

## 0.2 Die Flächen $Y_m(D, B)$ .

$G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  läßt eine maximale diskrete Erweiterung in  $(\text{Pl}_2^+(\mathbb{R}))^2$ , die Hurwitz-Maaß Erweiterung  $G_m(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  zu. Sei

$$(2) \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \delta \in \mathfrak{o}, \beta \in \mathfrak{b}^{-1}, \gamma \in \mathfrak{b} \\ \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma = \omega \gg 0$$

und  $\alpha/\sqrt{\omega}$ ,  $\beta/\sqrt{\omega}$ ,  $\gamma/\sqrt{\omega}$ ,  $\delta/\sqrt{\omega}$  ganz algebraisch.

$G_m(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  ist die Gruppe der Matrizen vom Typ (2), geteilt durch das Zentrum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathfrak{o} \right\} \quad (\text{siehe [14] 3.1 und [6] §1}).$$

Für einen quadratfreien Teiler  $\omega$  von  $D$  sei  $G_\omega(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  die von den Matrizen  $T$  mit  $\det(T) = \omega$  erzeugte Erweiterung von  $G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$ . Es ist:

$$G_\omega(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})/G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{falls } \omega \neq 1, d \\ \text{und } G_\omega(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) \quad \text{falls } \omega = 1, d .$$

Ferner ist  $G_{\omega_1}(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = G_{\omega_2}(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) \iff \omega_1 = \omega_2$  oder  $\omega_1 = qf(D/\omega_2)$ .

Dabei ist  $qf(n)$  der quadratfreie Anteil von  $n$ .

$$\text{Nach [6] §1 ist: } G_m(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = \bigcup_{\substack{\omega \mid D \\ qf(\omega) = \omega}} G_\omega(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) .$$

$\Rightarrow G_m(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})/G(\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$  hat die Ordnung  $2^{t_D-1}$ .

$G_m(\sigma, b)/G(\sigma, b)$  operiert auf  $X(\sigma, b)$  und auch auf der Kompaktifizierung  $\overline{X(\sigma, b)}$ . Zwei Spitzen  $[m:n]$  und  $[m':n'] \in \mathcal{P}_1(K)$  werden genau dann aufeinander abgebildet, wenn sie vom gleichen Typ sind, d.h.  $b^{-1} \bar{m}^2$  und  $b'^{-1} \bar{m}'^2$  die gleiche engere Idealklasse in  $C^+$  repräsentieren. Dabei ist  $\mathcal{M} := m\sigma + n\bar{b}^{-1}$  und  $\mathcal{M}' := m'\sigma + n'\bar{b}'^{-1}$ .

Das erzeugende Element von  $G_\omega(\sigma, b)/G(\sigma, b)$  wird mit  $\alpha_\omega$  bezeichnet.  $\alpha_\omega$  operiert als holomorphe Involution auf  $Y(D, b)$ . Für beliebige Teiler  $\omega$  von  $D$  wird  $\alpha_\omega := \alpha_{\text{qf}(\omega)}$  gesetzt. Falls  $N(\varepsilon) = -1$  operiert  $\alpha_\omega$  frei auf den Zykeln der Spitzenauflösungen. Im Fall  $N(\varepsilon) = 1$  operiert  $\alpha_\omega$  mit  $\omega = N(1+\varepsilon)$  als fixpunktfreie Involution auf den Zykeln der Spitzenauflösungen. (siehe [17] Satz 2).

Für beliebige  $\Gamma$  mit  $G(\sigma, b) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, b)$  ist

$$Y_\Gamma(D, b) := \overline{H^2/\Gamma}.$$

Auch in diesem Fall gilt wieder  $Y_\Gamma(D, b_1) \approx Y_\Gamma(D, b_2)$  wenn  $b_1$  und  $b_2$  aus dem gleichen Geschlecht sind. Daher wird im Folgenden  $Y_\Gamma(D, b)$  auch als  $Y_\Gamma(D, B)$  mit  $B = N(b)$  bezeichnet.

Weiterhin definiert man:

$$Y_\omega(D, B) := Y_{G_\omega}(\sigma, b)(D, b)$$

$$Y_m(D, B) := Y_{G_m}(\sigma, b)(D, b).$$

Die von Hirzebruch und Zagier in [14] untersuchten Flächen  $Y(D)$  und  $Y_-(D)$  entsprechen in dieser Notation den Flächen  $Y(D, \sigma)$  bzw.  $Y(D, b)$  mit  $b = (\Delta)$  und  $\Delta \in \sigma$  mit negativer Norm.

Bemerkung: Im Folgenden wird  $t_D > 1$  und  $D > 12$  vorausgesetzt. Für  $D = 12$  gibt es zwei Geschlechter. Beide Flächen  $Y(12, B)$  sind in [14] als rational klassifiziert. Nach 3.1 sind deshalb die Flächen  $Y_m(12, B)$  ebenfalls rational.

## Kapitel 1: Klassifikation der $Y(D,B)$ .

### 1.1 Die Invarianten der Flächen $Y(D,B)$ .

Eine Fläche ist im Folgenden immer eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2. Nach [2], [14] und [21] ist  $Y(D,B)$  eine einfach-zusammenhängende algebraische Fläche.

Sei  $Y := Y(D,B)$  dann ist wie üblich :

$q := \dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$  die Irregularität von  $Y$   
und  $b_1 := \dim H^1(Y, \mathbb{Z})$  die erste Bettizahl.

Da  $Y$  einfach-zusammenhängend ist, also  $\pi_1(Y) = \{e\}$ , gilt  $b_1 = 0$  und damit  $q = b_1/2 = 0$ .

Das arithmetische Geschlecht  $\chi = 1 + p_g$ , wobei  $p_g := \dim H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = \dim H^0(Y, \Omega^2)$  das geometrische Geschlecht bezeichnet.

Sei  $c_i(Y) \in H^{2i}(Y, \mathbb{Z})$  mit  $i = 1, 2$  die  $i$ -te Chernklasse.  $c_1^2$  und  $c_2$  seien  $c_1^2(Y)$  bzw.  $c_2(Y)$  auf  $[Y]$ , dem durch die Orientierung gegebenen Erzeuger von  $H_4(Y, \mathbb{Z})$ , ausgewertet.

$K$  bezeichnet einen kanonischen Divisor auf  $Y$ . Durch ihn ist ein Element  $[K]$  aus  $H_2(Y, \mathbb{Z})$  bestimmt.  $[K]$  ist Poincaré-dual zu  $-c_1(Y)$ . Damit gilt:  $c_1^2 = K \cdot K$  und  $c_1(Y) \cdot [C] = -K \cdot C$  für eine irreduzible Kurve  $C \subset Y$ . Ferner ist  $c_2 = e$ , die Eulerzahl von  $Y$ .

Notation : Für  $c_1^2$ ,  $\chi$  und  $K$  von  $Y$  werden auch die Bezeichnungen  $c_1^2(Y)$ ,  $\chi(Y)$  und  $K_Y$  benutzt.

Die Noetherformel gibt den Zusammenhang zwischen  $\chi$ ,  $K^2$  und  $e$  an:

$$\chi = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = \frac{K^2 + e}{12}.$$

$\chi$  und  $c_1^2$  werden im Folgenden bestimmt.

Definition: Eine isolierte Singularität  $p \in \mathbb{H}^2 / G(\sigma, \mathcal{L})$

ist vom Typ  $(q; q_1, q_2)$  mit  $q, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ ,  
 $(q, q_i) = 1$  für  $i = 1, 2$ , wenn für geeignete  
 Koordinaten  $(z_1, z_2)$  mit  $p = (0, 0)$

$$G_p := \{g \in G(\sigma, \mathcal{L}) \mid g(p) = p\}$$

von  $(z_1, z_2) \mapsto (\xi^{q_1} z_1, \xi^{q_2} z_2)$ , für eine  
 primitive  $q$ -te Einheitswurzel  $\xi$ , erzeugt wird.

Für  $D > 12$  treten in  $\mathbb{H}^2 / G(\sigma, \mathcal{L})$  nur isolierte Singularitäten  
 des Typs  $(2; 1, 1)$ ,  $(3; 1, 1)$  und  $(3; 1, 2)$  auf. Ihre  
 Anzahl wird mit  $a_2$ ,  $a_3^+$  bzw.  $a_3^-$  bezeichnet.

Eine Liste der Singularitäten findet sich in [6] S.87-89:

	$D \equiv 1 (4)$	$D \equiv 0 (8)$	$D/4 \equiv 7 (8)$	$D/4 \equiv 3 (8)$
$a_2$	$h(-4D)$	$3h(-D)$	$4h(-D/4)$	$10h(-D/4)$

	$D \not\equiv 0 (3)$	$D/3 \equiv 1 (3)$ $B \equiv 1 (3)$	$D/3 \equiv 1 (3)$ $B \equiv 2 (3)$	$D/3 \equiv 2 (3)$ $B \equiv 1 (3)$	$D/3 \equiv 2 (3)$ $B \equiv 2 (3)$
$a_3^+$	$\frac{1}{2}h(-3D)$	$4h(-D/3)$	$h(-D/3)$	$3h(-D/3)$	-
$a_3^-$	$\frac{1}{2}h(-3D)$	$h(-D/3)$	$4h(-D/3)$	-	$3h(-D/3)$

Nun zur Bestimmung der Auflösungskurven der Spitzen-  
 singularitäten.

Nach [6] §3 gehört zu jeder Kurve  $S$  der Spitzenaufösungen  
 eine reduzierte quadratische Irrationalität

$$(3) \quad w = \frac{M + \sqrt{D}}{2 \cdot N} \quad \text{mit } 0 < w' < 1 < w \quad (M, N \in \mathbb{N}).$$

Durch diese Zuordnung erhält man alle reduzierten  
 quadratischen Irrationalitäten, für die  $(\mathbb{Z}w + \mathbb{Z} \cdot 1)^{-1} \in \mathcal{L}'$   
 im Geschlecht von  $\mathcal{L}$  liegt. Nun ist  $N(\mathcal{L}') = N$ , also  
 gehört eine reduzierte quadratische Irrationalität  
 genau dann zu einer Kurve  $S$  aus der Spitzenauflösung  
 von  $Y(D, \mathcal{B})$  wenn  $N$  Norm eines Ideals aus  $\mathcal{B}$  ist.

Bei dieser Zuordnung kommt jede reduzierte quadratische  
 Irrationalität genau  $2^{t_D-1}$  mal vor.

Für ein solches  $w$  gilt:

$$(4) \quad \frac{M + \sqrt{D}}{2 \cdot N} > 1 > \frac{M - \sqrt{D}}{2 \cdot N} > 0 \quad \text{mit } M^2 - D \equiv 0 \pmod{4N^2}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu:

$$N > 0, \quad (M - 2N)^2 < D, \quad M^2 - D \equiv 0 \pmod{4N^2}, \quad M > \sqrt{D}.$$

Mit  $k := M - 2N$  gilt dann:

$$(5) \quad N > 0, \quad k^2 < D, \quad k^2 \equiv D \pmod{4N^2}, \quad k + 2N > \sqrt{D}.$$

Daraus folgt:  $k^2 < D$  und  $N^2 < D/4$ .

Es gibt also nur endlich viele Zahlenpaare  $(N, k)$ , die (5) erfüllen und damit nur endlich viele reduzierte quadratische Irrationalitäten. Da  $k^2$  und  $N^2$  kleiner als  $D$  bzw.  $D/4$  sind, kann man mit endlich vielen Versuchen alle  $w$  mit (3) bestimmen und prüfen, ob  $N$  Norm eines Ideals aus  $\mathfrak{B}$  ist.

Die reduzierten quadratischen Irrationalitäten sind in Zykeln angeordnet mit:

$$w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}}.$$

-  $b_k = S_k \cdot S_k$  ist dabei die Selbstschnittzahl der rationalen Kurve  $S_k$  der Spitzenauflösung.

Jedem Zyklus  $w_0, \dots, w_{r-1}$  von reduzierten quadratischen Irrationalitäten zum Geschlecht  $\mathfrak{B}$  entsprechen  $2^{t_D-1}$  Zykeln  $S_0, \dots, S_{r-1}$  falls  $N(\varepsilon) = -1$  bzw.  $2^{t_D-2}$  Zykeln  $S_0, \dots, S_{r-1}, S_0, \dots, S_{r-1}$  falls  $N(\varepsilon) = +1$ .

Seien  $S_0, \dots, S_{l-1}$  die Kurven der Spitzenauflösung von  $Y(D, B)$ , dann ist ([23] 2.2) :

$$(6) \quad c_1^2 = 2 \text{vol}(H^2/G(\sigma, \mathfrak{b})) - \frac{1}{3} a_3^+ + \sum_{i=0}^{l-1} (2 - b_i)$$

$$c_2 = \text{vol}(H^2/G(\sigma, \mathfrak{b})) + \frac{3}{2} a_2 + \frac{5}{3} a_3^+ + \frac{8}{3} a_3^- + 1$$

und damit:

$$x = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = \frac{1}{4} \text{vol}(H^2/G(\sigma, \mathfrak{b})) + \frac{1}{8} a_2 + \frac{1}{9} a_3^+ + \frac{2}{9} a_3^- + \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{l-1} (3 - b_i)$$

In [8] wird gezeigt, daß  $G(\sigma, \mathfrak{b})$  und  $G(\sigma, \sigma)$  kommensurabel sind. Deshalb ist nach [11] 1.5 :

$$\text{vol}(H^2_{/G(\sigma, \mathcal{B})}) = \frac{[G(\sigma, \mathcal{B}) : G(\sigma, \mathcal{B}) \cap G(\sigma, \sigma)]}{[G(\sigma, \sigma) : G(\sigma, \mathcal{B}) \cap G(\sigma, \sigma)]} \cdot \text{vol}(H^2_{/G(\sigma, \sigma)}) .$$

$$\text{In [2] wird gezeigt : } \frac{[G(\sigma, \mathcal{B}) : G(\sigma, \mathcal{B}) \cap G(\sigma, \sigma)]}{[G(\sigma, \sigma) : G(\sigma, \mathcal{B}) \cap G(\sigma, \sigma)]} = 1 .$$

Damit ist also:

$$\text{vol}(H^2_{/G(\sigma, \mathcal{B})}) = \text{vol}(H^2_{/G(\sigma, \sigma)}) = 2\zeta_K(-1) .$$

Dabei ist die Zetafunktion des Körpers K

$$\zeta_K(-1) = \frac{1}{60} \sum_{\substack{k^2 < D \\ k^2 \equiv D(4)}} \sigma_1((D-k^2)/4)$$

$$\text{mit } \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d .$$

In [14] S.68-69 sind die Invarianten  $c_1^2$  und  $\chi$  für  $Y(D)$  und  $Y_-(D)$  aufgelistet für  $D \leq 1500$  und  $c_1^2 \leq 0$  oder  $\chi=1$ . Wie bereits bemerkt ist  $Y(D) = Y(D, \sigma)$  und  $Y_-(D) = Y(D, (\Delta))$  mit  $\Delta \in \sigma$  von negativer Norm, z.B.  $\Delta = \sqrt{D}$ .

In Tabelle I werden deshalb die Invarianten der  $Y(D, \mathcal{B})$  ausgedrückt, wenn gilt:

- 1.)  $\sigma \notin \mathcal{B}$  und  $(\Delta) \notin \mathcal{B}$ ,
- 2.)  $D \leq 1500$
- 3.)  $c_1^2 \leq 0$  oder  $\chi=1$ .

Das sind alle  $Y(D, \mathcal{B})$  die noch nicht in [14] untersucht wurden und die noch nicht durch  $c_1^2$  und  $\chi$  als Flächen von allgemeinem Typ klassifiziert sind.

## 1.2 Die Kurven $F_N$ auf $Y(D, \mathcal{B})$ .

Für das Hauptgeschlecht wurden die Kurven  $F_N$  in [11] §4 und für allgemeines Geschlecht in [6] untersucht.

Eine schiefermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a\sqrt{D} & \lambda \\ -\lambda' & \frac{b}{B}\sqrt{D} \end{pmatrix}$$

nennt man  $\mathcal{b}$ -ganz wenn  $a, b \in \mathcal{O}$  und  $\lambda \in \mathcal{b}^{-1}$  ist.

A heißt primitiv, wenn es keine natürliche Zahl  $n > 1$  gibt mit  $(a/n, b/n, \lambda/n) \in \mathbb{Z}^2 + \mathcal{b}^{-1}$ .

$S\text{-H}(\mathcal{b}, N)$  sei die Menge der primitiven  $\mathcal{b}$ -ganzen schiefermiteschen Matrizen der Determinante  $N/B$ .

$F_N$  sei die Menge der Punkte in  $X(\sigma, \mathcal{L})$  die einen Repräsentanten  $(z_1, z_2) \in H^2$  haben der mit  $A \in S-H(\mathcal{L}, N)$  die Gleichung:

$$(z_2, 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ erfüllt.}$$

Es gilt:

$$(7) \quad F_N \neq \emptyset \iff \forall p \mid D \quad \left( \frac{D(p)}{N \cdot B} \right) \neq -1 .$$

Die Fortsetzung dieser Kurve auf  $Y(D, \mathcal{L})$  wird ebenfalls mit  $F_N$  bezeichnet.

$F_N$  geht genau dann durch eine Spitze, wenn  $N = N(\mathcal{L}')$  Norm eines Ideals  $\mathcal{L}'$  aus  $\mathcal{B}$  ist. In diesem Fall gibt es ein  $k$  mit  $0 \leq k \leq l-1$  und  $p, q \in \mathbb{N}$ , so daß sich  $N$  als

$$(8) \quad N = p^2 N_{k-1} + pq M_k + q^2 N_k$$

schreiben läßt. Dabei ist  $w_k = \frac{M_k + \sqrt{D}}{2N_k}$  eine

reduzierte quadratische Irrationalität zum Geschlecht  $\mathcal{B}$ .

Man nennt dann  $\mathcal{L}'$  von Charakteristik  $(k \mid p, q)$ .

Nach [1] 2.3 gibt es lokale Koordinatensysteme  $(u_k, v_k)$  in  $U_k$ , so daß die offenen Mengen  $U_k$  eine Umgebung der Spitzenauflösungen überdecken. Der Koordinatenwechsel von  $(u_k, v_k)$  zu  $(z_1, z_2)$ -Koordinaten geschieht folgendermaßen:

$$2\pi iz_1 = A_{k-1} \log u_k + A_k \log v_k$$

$$2\pi iz_2 = A'_{k-1} \log u_k + A'_k \log v_k$$

Dabei ist  $A_k$  induktiv definiert durch:  $A_0 := 1$ ,  $A_{k+1} := w_{k+1}^{-1} A_k$ .

$S_k$  ist in  $U_k$  durch  $v_k = 0$  und in  $U_{k-1}$  durch  $u_{k-1} = 0$  gegeben. Die Kurve  $F_N$  mit  $N$  wie in (7) ist in  $U_k$  durch:

$$u_k^q / (p, q) = \xi v_k^p / (p, q)$$

für eine  $(p, q)$ -te primitive Einheitswurzel  $\xi$  gegeben.

$N$  heißt zulässig, wenn  $(p, q) = 1$  gilt.

Wenn  $N$  zulässig und nicht durch  $d = qf(D)$  teilbar ist, hat jede Komponente  $F$  von  $F_N$   $\overline{H/\Gamma_0(N)}$  als nichtsinguläres Modell. (siehe [14] 3.3 ).

Dabei ist  $\Gamma_0(N)$  die Klein-Fricke Gruppe die auf  $H$  operiert. (siehe [20] 1.6). Für die Fälle in denen  $\overline{H/\Gamma_0(N)}$  rational ist, sind die Anzahl der Fixpunkte von  $\Gamma_0(N)$  auf  $H$  und  $\sigma$ , die Anzahl der Spitzen von  $\overline{H/\Gamma_0(N)}$  in Tabelle II aufgeführt.

Nach [11] 4.3 ist:

$$c_1(Y(D, B)) [F] \geq c_1(N) := 2\text{vol}(H/\Gamma_0(N)) + \frac{1}{3}a_3 + \sigma .$$

Notation: Unter einer  $(-b)$  - Kurve wird im Folgenden eine glatte rationale Kurve der Selbstschnittzahl  $-b$  verstanden.

### 1.3 Die Ausnahmekurven auf $Y(D, B)$ in den Nebengeschlechtern.

Wie schon im Hauptgeschlecht kommen als Ausnahmekurven die Komponenten der Kurven  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_9$  und die Auflösungskurven gewisser Quotientensingularitäten, die diese Kurven schneiden in Frage.

Wegen (7) ist  $F_N = \emptyset \iff \exists p|D$  prim mit  $\left(\frac{D(p)}{N \cdot B}\right) = -1$ .

Sei  $N = q^2$ , dann ist für  $p|D$

$$\left(\frac{D(p)}{N \cdot B}\right) = \left(\frac{D(p)}{q}\right)^2 \cdot \left(\frac{D(p)}{B}\right) = \left(\frac{D(p)}{q}\right)^2 \cdot \left(\frac{B, D}{p}\right) \quad \text{da } p \nmid B.$$

$$\left(\frac{B, D}{p}\right) = -1 \text{ für mindestens zwei } p \text{ und } \left(\frac{D(p)}{q}\right)^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } p \neq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist  $\left(\frac{D(p)}{N \cdot B}\right) = -1$  für mindestens ein  $p$

$\Rightarrow$  für  $e \notin \mathfrak{B}$  ist  $F_1, F_4, F_9 = \emptyset$ .

(zu den Eigenschaften des Legendre- und Hilbertsymbols siehe Anhang 1).

Nach Korollar 2.11 in [6] haben  $F_2$  und  $F_3$

$$(10) \quad \frac{1}{2} \prod_{i=1}^t (1 + \left(\frac{D(p_i)}{2B}\right)) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{t_D} \left(1 + \left(\frac{D(p_i)}{3B}\right)\right)$$

Komponenten.

Jede Komponente von  $F_2$  wird von einer rationalen  $(-2)$ -Kurve geschnitten. Für  $N = 2, 3$  und  $F$  einer irreduzibelen Komponente von  $F_N$  ist  $c_1(Y(D, B))[\overline{F}] \geq 1$  und das nicht-singuläre Modell von  $F$  ist rational.

Wenn  $\chi > 1$  ist, also  $Y(D, B)$  nicht rational, dann ist

nach Korollar I in [1], 4.3  $F$  singularitätsfrei mit

$c_1(Y(D, B))[\overline{F}] = 1$ . In diesem Fall ist also jede Komponente von  $F_2$  und  $F_3$  eine Ausnahmekurve. Es gilt daher:

Lemma: Auf  $Y(D,B)$  mit  $\chi > 1$  und  $B \neq 1$  können mindestens

$$(11) \quad \tau = \prod_{i=1}^t D \left( 1 + \left( \frac{D(p_i)}{2 \cdot B} \right) \right) + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^t D \left( 1 + \left( \frac{D(p_i)}{3 \cdot B} \right) \right)$$

Kurven niedergeblasen werden.

In den in Tabelle I untersuchten Fällen wurde  $\tau$  berechnet und zusammen mit  $c_1^0 := c_1^2 + \tau$  ausgedruckt.

#### 1.4 Klassifikation der $Y(D,B)$ .

In diesem Abschnitt werden alle  $Y(D,B)$  klassifiziert, die noch nicht in den Arbeiten [13] und [14] untersucht wurden.

$Y(D,B)$  sind einfach-zusammenhängende, reguläre algebraische Flächen. Sie sind also entweder

(I) rational mit  $\chi = 1$

oder sie haben ein eindeutig bestimmtes minimales Modell (d.h. frei von Ausnahmekurven), das zu einer der folgenden Klassen gehört:

(II) K3 - Flächen ( $\chi = 2, c_1^2 = 0$ )

(III) echt elliptische Flächen ( $c_1^2 = 0$ )

(IV) Flächen von allgemeinem Typ ( $c_1^2 > 0$ ).

In der letzten Spalte von Tabelle I wurde  $c_1^2$  für  $Y(D,B)$  mit den bekannten Ausnahmekurve niedergeblasen angegeben.  $\chi \neq 1$  in allen Fällen. Deshalb existiert ein eindeutig bestimmtes minimales Modell  $Y^0(D,B)$  von  $Y(D,B)$  und es gilt:

$$c_1^2(Y^0(D,B)) \geq c_1^0 > 0$$

für  $Y(85,3)$  und  $Y(120,17)$ . Diese Flächen sind also von allgemeinem Typ.

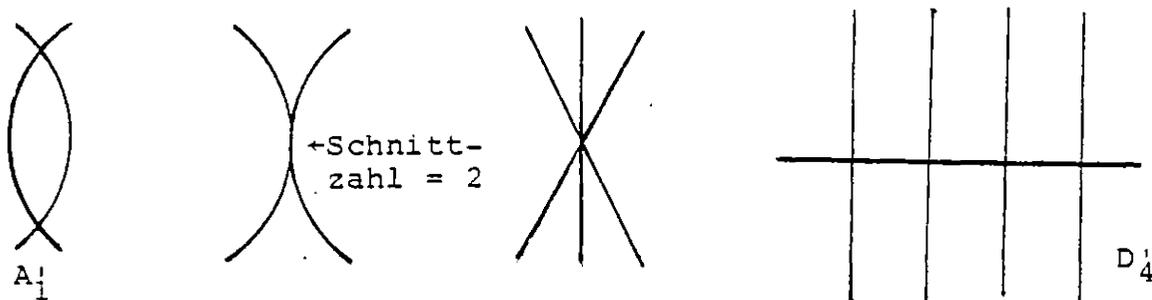
In den übrigen Fällen gilt  $\chi \geq 2$ . Diese Flächen werden mit Hilfe der Methoden aus [4] 5.1 klassifiziert.

Satz 1: ([14] 5.1) Sei  $Y$  eine einfach-zusammenhängende algebraische Fläche.  $Y$  sei nicht rational. Wenn  $Y$  eine elliptische Konfiguration enthält, dann ist das minimale Modell  $Y^\circ$  von  $Y$  entweder eine K3-Fläche oder eine echt elliptische Fläche. Wenn  $Y$  eine solche Konfiguration enthält, die von einer  $(-2)$ -Kurve geschnitten wird, die nicht dazu gehört, ist  $Y^\circ$  eine K3-Fläche. Wenn  $Y^\circ$  keine K3-Fläche und  $E$  eine irreduzible Kurve auf  $Y$  ist mit  $c_1[E] (:=c_1(Y)[E]) \geq 0$ , dann ist entweder

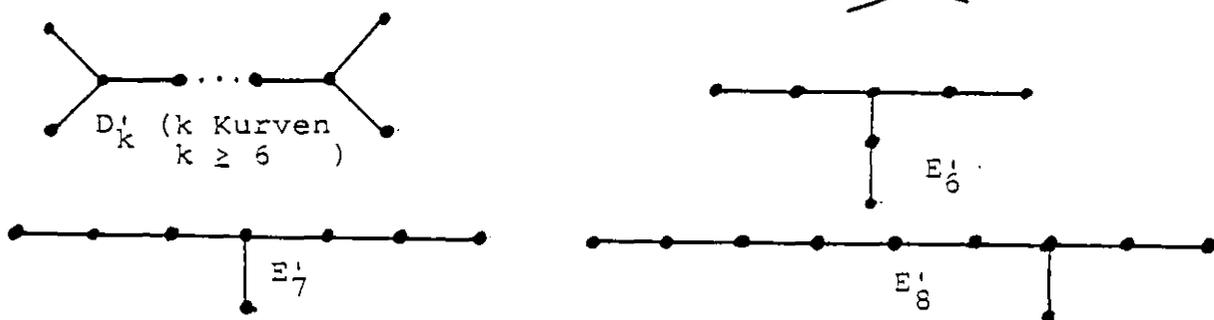
- (12) 1.)  $c_1[E] = 1$  und  $E$  ist Ausnahmekurve, oder  
 2.)  $c_1[E] = 0$  und  $E$  ist  $(-2)$ -Kurve, oder  
 3.)  $c_1[E] = 0$  und  $E \cdot E = 0$ ,  $e(E) = 0$ .

Eine elliptische Konfiguration ist entweder:

- (i) Eine nichtsinguläre Kurve  $E$  mit  $E \cdot E = 0$  und  $e(E) = 0$ ,  
 (ii) Eine rationale Kurve  $E$  mit genau einem singulären Punkt (Spitze oder Doppelpunkt) mit  $E \cdot E = 0$ , oder  
 (iii) Eine der folgenden Konfigurationen von  $(-2)$ -Kurven:



oder als dualer Graph geschrieben:

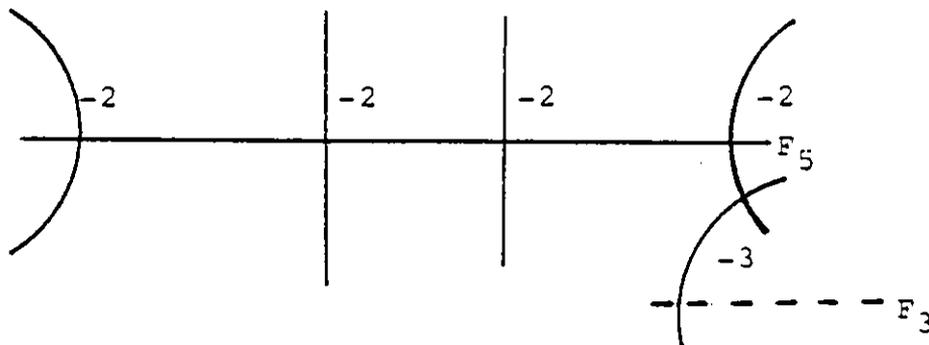


Auf den noch zu klassifizierenden Flächen  $Y(40,3)$ ,  $Y(60,7)$ ,  $Y(60,17)$ ,  $Y(65,2)$  und  $Y(105,2)$  werden nun elliptische Konfigurationen angegeben.

Die reduzierten quadratischen Irrationalitäten  $w_k = (M_k + \sqrt{D})/2N_k$  werden wie in 1.1 bestimmt und in Zykeln angeordnet.  $b_k$ ,  $M_k$ ,  $N_k$  sind in Tabelle III aufgeführt. Jeder Zyklus in Tabelle III kommt  $2^{t_D-1}$  mal vor. Mit  $M_k$  und  $N_k$  ist nach 1.2 auch das Schnittverhalten der Modulkurven  $F_N$  mit den Kurven der Spitzenauflösung bekannt. Für alle im Folgenden benutzten Kurven  $F_N$  ist  $N$  zulässig, und aus Tabelle II folgt dann  $c_1[F] \geq 0$  für alle Komponenten  $F$  von  $F_N$ .

Ausnahmekurven sind mit ---- gekennzeichnet.

Auf  $Y(40,3)$  hat man folgende Konfiguration:



( Hier und im Folgenden sind Modulkurven und Kurven der Quotientenauflösungen durch Geraden und Kurven der Spitzenauflösungen durch gekrümmte Kurven dargestellt . )

Angenommen  $Y^\circ(40,3)$  ist keine K3-Fläche, dann gilt nach Satz 1 entweder:

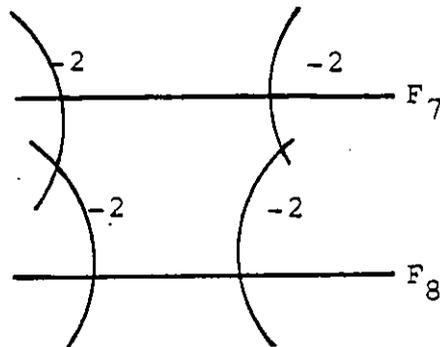
- 1.)  $c_1[F_5] = 1$  und  $F_5$  ist eine Ausnahmekurve, nach Niederblasen von  $F_5$  würden sich 4 Ausnahmekurven transversal schneiden. Nach Korollar III in [11] 4.4 wäre dann  $Y(40,3)$  rational im Widerspruch zu  $\chi = 2$ .
- 2.)  $F_5$  ist eine  $(-2)$ -Kurve. Nach Niederblasen von  $F_3$  hat man eine elliptische Konfiguration vom Typ  $D_4^1$  die von einer  $(-2)$ -Kurve geschnitten wird.  
 $\Rightarrow Y^\circ(40,3)$  ist eine K3-Fläche.

3.)  $F_5 \cdot F_5 = 0$  und  $e(F_5) = 0$ , also eine elliptische Konfiguration, die von einer  $(-2)$ -Kurve geschnitten wird.  $\Rightarrow Y^\circ(40,3)$  ist eine K3-Fläche.

$\Rightarrow Y^\circ(40,3)$  ist eine K3-Fläche.

In den übrigen Fällen gilt  $\chi > 2$ , also ist  $Y^\circ(D,B)$  keine K3-Fläche. In diesen Fällen wird nur noch die elliptische Konfiguration angegeben. Da die benutzten Komponenten der  $F_N$  tatsächlich  $(-2)$ -Kurven sind, folgt dann aus Satz 1 analog zu  $Y(40,3)$ .

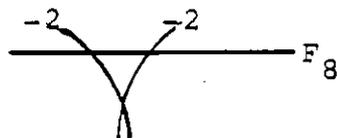
$Y(65,2)$ :



Diese Konfiguration kommt 2 mal vor.

$\Rightarrow Y^\circ(65,2)$  ist echt elliptisch.

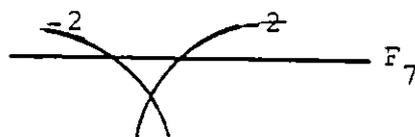
$Y(105,2)$ :



Diese Konfiguration kommt 4 mal vor.

$\Rightarrow Y^\circ(105,2)$  ist echt elliptisch.

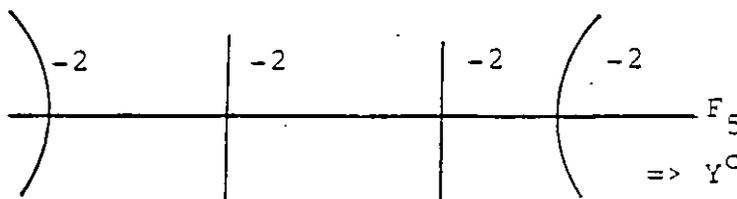
$Y(60,7)$ :



Diese Konfiguration kommt 4 mal vor.

$\Rightarrow Y^\circ(60,7)$  ist echt elliptisch.

$Y(60,17)$ :



Diese Konfiguration kommt 2 mal vor.

$\Rightarrow Y^\circ(60,17)$  ist echt elliptisch.

Damit sind alle  $Y(D,B)$  für  $D \leq 1500$  klassifiziert. Man muß nun noch zeigen, daß  $Y(D,B)$  vom allgemeinen Typ ist für  $D > 1500$ . In Kapitel 4 wird bewiesen, daß  $Y_m(D,B)$  vom allgemeinen Typ ist für  $D > 1500$ . Daraus folgt dann die Behauptung für  $Y(D,B)$ . (siehe dazu auch 3.1).

Wie in [14] 4.2 zeigt man:

**Lemma:**  $\chi(Y(D,B)) > 3$  für  $D > 350$  und  $c_1^2(Y(D,B)) > 0$ .

**Beweis:**  $\chi = \frac{c_1^2}{12} + \frac{c_2}{12}$

Nach 1.1 ist  $c_2 > \text{vol}(H^2/G(\sigma, A)) = \text{vol}(H^2/G(\sigma, \sigma))$   
 $= 2 \cdot \zeta_K(-1) > D^{3/2}/180$  ([14] 4.2).

Damit ist  $\chi > c_1^2/12 + D^{3/2}/2160$

Aus  $D^{3/2}/2160 > 3$  für  $D > 350$  folgt dann die Behauptung.

Mit den Ergebnissen von [14] gilt dann:

**Satz 2:** Die Flächen  $Y(D,B)$  sind rational  $\Leftrightarrow \chi = 1$

Ihr minimales Modell  $Y^0(D,B)$  ist:

K3-Fläche  $\Leftrightarrow \chi = 2$

echt elliptisch  $\Leftrightarrow \chi = 3$  oder  $\chi = 4$  und  $(D,B) \in A$

von allgemeinem Typ  $\Leftrightarrow \chi > 3$  und  $(D,B) \notin A$ .

Dabei ist  $A := \{(85,1), (105,2), (140,1), (165,1)\}$ .

**Bemerkung:** Die 4 Ausnahmen in  $A$  werden in Kapitel 4 noch einmal in einem anderen Zusammenhang auftauchen. Es sind genau die Flächen  $Y(D,B)$ , deren minimales Modell echt elliptisch ist, und auf denen es eine fixpunktfreie Involution gibt.

Kapitel 2: Spurformel für  $\alpha_\omega^*$  auf  $H^0(Y(D,B), \Omega^2)$ .

2.1 Die Fixpunkte der  $\alpha_\omega$ .

Die Fixpunktmenge der  $\alpha_\omega$  auf  $Y(D,B)$  besteht aus isolierten Punkten,  $(-2)$  und  $(-3)$ -Kurven. Anzahl und Typ der Fixpunktmenge wird in [6] beschrieben.

Sei  $a_2^{\text{neu}}(\omega)$  die Anzahl der Äquivalenzklassen der Fixpunkte von  $G_\omega(\sigma, \ell)$  auf  $H^2$ , die keine Fixpunkte von  $G(\sigma, \ell)$  sind. Sei  $D(-d)$  die Diskriminante des imaginär-quadratischen Zahlkörpers  $Q(\sqrt{-d})$ , dann ist nach [6] S.90 -96:

$$a_2^{\text{neu}}(\omega) = g_\omega(D) \cdot h(D(-\omega)) \cdot h(D(-\bar{\omega}))$$

mit  $\bar{\omega} := \text{qf}(D/\omega)$  und  $g_\omega(D)$  aus der folgenden Tabelle:

Bedingung an $\omega$ :	Zusatzbedingung:	Bedingung an $D$ :	$g_\omega(D)$
$\omega \equiv 3(4)$	$\omega \equiv 7(8)$	-	4
$\omega, \bar{\omega} \neq 3$	$\omega \equiv 3(8)$	$D \equiv 5(8)$	4
		$D \equiv 0(4)$	10
		$D \equiv 1(4)$	16
$\omega = 3$	-	$D \equiv 1(8)$	5
		$D \equiv 5(8)$	1
		$D \equiv 0(4)$	3
$\omega \equiv 1(4)$	-	$D \equiv 1(4)$	1
		$D \equiv 0(8)$	3
$\omega \equiv 2(4)$	-	$D \equiv 4(8)$	1

und  $g_\omega(D) = g_{\bar{\omega}}(D)$ .

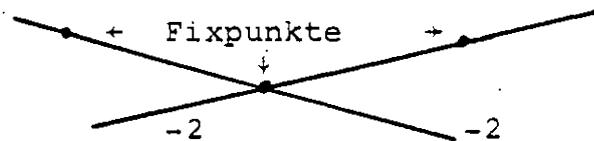
Nach Satz 4.11 in [6] operiert  $\alpha_\omega$  frei auf den Quotientensingularitäten von  $H^2/G(\sigma, \ell)$  falls  $\omega, \bar{\omega} \neq 2, 3$  und  $D > 12$  gilt.

Für  $\omega = 2$  hat  $H^2/G_\omega(\sigma, \ell)$  Singularitäten vom Typ  $(4; 1, 1)$  oder  $(4; 1, 3)$ . Ihre Anzahl wird mit  $a_4^+$  bzw.  $a_4^-$  bezeichnet. Im ersten Fall läßt  $\alpha_2$  auf  $Y(D, B)$  eine  $(-2)$ -Kurve der Auflösung punktweise fest, im zweiten Fall hat  $\alpha_2$  zwei isolierte Fixpunkte darauf.

Nach [6] ergibt sich die folgende Tabelle:

Bedingung an D :	Zusatzbedingung:	Bedingung an B :	$a_4^+$	$a_4^-$
$D \equiv 0(8)$	-	-	$h(-D)/2$	$h(-D)/2$
$D \equiv 4(8)$	$D/4 \equiv 7(8)$	$B \equiv 1(4)$ $B \equiv 3(4)$	$2h(-D/4)$ 0	0 $2h(-D/4)$
	$D/4 \equiv 3(8)$	$B \equiv 1(4)$ $B \equiv 3(4)$	$h(-D/4)$ $3h(-D/4)$	$3h(-D/4)$ $h(-D/4)$

Für  $\omega = 3$  hat  $H^2/G_\omega(\sigma, b)$  Quotientensingularitäten vom Typ  $(6; 1, 1)$  oder  $(6; 1, 5)$ . Ihre Anzahl wird mit  $a_6^+$  bzw.  $a_6^-$  bezeichnet. Im ersten Fall läßt  $\alpha_3$  eine  $(-3)$ -Kurve fest, im zweiten Fall hat  $\alpha_3$  drei isolierte Fixpunkte auf den Auflösungskurven einer Quotientensingularität vom Typ  $(3; 1, 2)$  :



Nach [6] ist ihre Anzahl :

Bedingung an D :	Bedingung an B :	$a_6^+$	$a_6^-$
$D/3 \equiv 1(3)$	$B \equiv 1(3)$	0	$h(-D/3)$
	$B \equiv 2(3)$	$h(-D/3)$	0
$D/3 \equiv 2(3)$	$B \equiv 1(3)$	$h(-D/3)$	0
	$B \equiv 2(3)$	0	$h(-D/3)$

Im Folgenden wird auch  $a_4^+(\omega)$ ,  $a_4^-(\omega)$ ,  $a_6^+(\omega)$  und  $a_6^-(\omega)$  benutzt, dabei ist:

$$a_4^\pm(\omega) := a_4^\pm \text{ für } \omega, \tilde{\omega} = 2 \text{ und } a_4^\pm(\omega) := 0 \text{ sonst,}$$

$$a_6^\pm(\omega) := a_6^\pm \text{ für } \omega, \tilde{\omega} = 3 \text{ und } a_6^\pm(\omega) := 0 \text{ sonst.}$$

Dann hat  $\alpha_\omega$  auf  $Y(D, B)$  für  $D > 12$  die Fixpunktmenge:

$$a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2 a_4^-(\omega) + 3 a_6^-(\omega) \quad \text{isolierte Fixpunkte,}$$

$$a_4^+(\omega) \quad (-2)\text{-Kurven,}$$

$$a_6^+(\omega) \quad (-3)\text{-Kurven.}$$

## 2.2 Die Spurformel für $\alpha_\omega^*$ auf $H^0(Y(D,B), \Omega^2)$

In diesem Abschnitt wird die Spur der linearen Abbildung:

$$\alpha_\omega^* : H^0(Y(D,B), \Omega^2) \rightarrow H^0(Y(D,B), \Omega^2)$$

untersucht. Die wichtigste Referenz für diesen Abschnitt ist die Arbeit von Hirzebruch [12].

Damit wird dann  $p_g(Y_\Gamma(D,B)) := \dim H^0(Y_\Gamma(D,B), \Omega^2)$  berechnet.

Dazu wird zunächst eine allgemeinere Situation betrachtet:

Sei  $Y$  eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Sei  $g$  eine holomorphe Abbildung auf  $Y$  von endlicher Ordnung, d.h. es gibt eine natürliche Zahl  $d$  mit  $g^d = \text{id}|_Y$ . Dabei ist  $g^d$  die  $d$ -fache Iteration von  $g$ .

$\Gamma E_{p,r}$  seien die Differentialformen auf  $Y$  mit lokaler Gestalt:

$$s = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1 \dots i_p} (d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}) (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)^r$$

$\bar{\partial} : \Gamma E_{p,r} \rightarrow \Gamma E_{p+1,r}$  sei wie üblich definiert.

Nach [12] §8 erhält man einen elliptischen Komplex:

$$(13) \quad 0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{0,r} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{1,r} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{n,r} \xrightarrow{\bar{\partial}} 0$$

Man definiert  $H^1(Y,r) := \frac{\text{Ker}(\bar{\partial} : \Gamma E_{i,r} \rightarrow \Gamma E_{i+1,r})}{\bar{\partial}(\Gamma E_{i-1,r})}$

Auf den Begriff des elliptischen Komplexes soll hier nicht näher eingegangen werden. Er ist z.B. in [12] §6 definiert. Wichtig ist in diesem Zusammenhang nur, daß für einen elliptischen Komplex (13)  $H^1(Y,r)$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum ist.

Durch  $g$  wird eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$g^* : H^i(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{C})$$

induziert. Da  $H^i(Y, \mathbb{C})$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum ist, macht es Sinn von der Spur der linearen Abbildung  $g^*$  auf  $H^i(Y, \mathbb{C})$  zu sprechen. Da  $Y$  kompakt ist, hat  $\text{Fix}(g)$ , die Fixpunktmenge von  $g$ , endlich viele Zusammenhangskomponenten  $\text{Fix}(g)_j$  mit  $1 \leq j \leq k$ . Da  $g$  endliche Ordnung hat, läßt sich in einer Umgebung eines Fixpunktes ein geeignetes Koordinatensystem wählen, so daß  $g$  linear operiert.  $\text{Fix}(g)_j$  ist daher eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit.

Jeder Zusammenhangskomponente  $\text{Fix}(g)_j$  wird von Atiyah und Bott eine komplexe Zahl  $\nu(\text{Fix}(g)_j)$  zugeordnet. Damit gilt:

$$(14) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Spur } g^* \Big|_{H^i(Y, \mathbb{C})} = \sum_{j=1}^k \nu(\text{Fix}(g)_j)$$

Für  $F = \text{Fix}(g)_j$  ist  $\nu(F)$  wie folgt definiert:

Sei  $y \in F$ , dann hat  $g'(y) : T_y \rightarrow T_y$  Eigenwerte  $\mu$ , die alle  $d$ -te Einheitswurzeln sind. Sie treten mit einer Vielfachheit  $n_\mu$  auf, die nicht von der Wahl von  $y \in F$  abhängt. Für alle  $d$ -ten Einheitswurzeln  $\mu$  ist so ein Vektorraumbündel  $E_\mu$  über  $F$  definiert, dessen Fasern  $E_{\mu, Y}$  gerade die Eigenräume von  $g'(y)$  zum Eigenwert  $\mu$  sind.  $E_1$  ist das komplexe Tangentialbündel zu  $F$ .

Sei  $\text{ch}(\Lambda^i E_\mu^*) \in H^*(F, \mathbb{C})$  der Chernsche Charakter der  $i$ -ten äußeren Potenz des dualen Bündels von  $E_\mu$ . (siehe [10] §10).

$$(15) \quad \text{ch}(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*)) := \sum_{i=0}^{n_\mu} (-\mu)^i \text{ch}(\Lambda^i E_\mu^*)$$

Sei weiterhin  $\text{td}(F) \in H^*(F, \mathbb{C})$  die totale Toddsche Klasse von  $F$  und  $c_1 \in H^2(F, \mathbb{C})$  die 1-te Chernklasse von  $Y$  eingeschränkt auf  $F$ .

Nach [12] §11 ist mit diesen Bezeichnungen:

$$(16) \quad v(F) = (\det g'(y))^r (\exp(-rc_1) \operatorname{td}(F) \prod_{\mu \neq 1} \frac{1}{\operatorname{ch}(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*))}) [F]$$

Sei nun  $Y$  eine Fläche, dann ist  $F = \{y\}$  mit einem isolierten Fixpunkt  $y$  oder  $F$  ist eine irreduzible Kurve. Im ersten Fall ist  $v(F)$  schon in [12] berechnet worden. Es ist

$$(17) \quad v(\{y\}) = \frac{(\det g'(y))^r}{\det(1 - g'(y))}$$

Für eine irreduzible Kurve  $F$  ist  $n_1 = 1$  und  $n_\mu = 1$  für eine  $d$ -te Einheitswurzel  $\mu$ .  $E_\mu$  ist in diesem Fall das Normalenbündel  $v_F$  von  $F$  in  $Y$ .

Nach [10] §10 ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*)) &= 1 - \mu \exp(c_1(v_F^*)) \\ &= 1 - \mu (1 + c_1(v_F^*)) \\ &= 1 - \mu - \mu c_1(v_F^*), \quad c_1(v_F^*) = -c_1(v_F) \\ \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch}(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*))} &= \frac{1}{1-\mu} \left( 1 - \frac{\mu}{1-\mu} c_1(v_F) \right) \\ \operatorname{td}(F) &= 1 + \frac{1}{2} c_1(F) \end{aligned}$$

Damit ist (16) :

$$\begin{aligned} v(F) &= \mu^r \left( (1 - rc_1) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} c_1(F) \right) \cdot \frac{1}{1-\mu} \left( 1 - \frac{\mu}{1-\mu} c_1(v_F) \right) [F] \right) \\ &= \frac{\mu^r}{1-\mu} \left( \frac{1}{2} c_1(F) - \frac{\mu}{1-\mu} c_1(v_F) - rc_1 \right) [F] \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} c_1(F) [F] &= e(F) \quad (\text{Gauß - Bonnet Formel}) \\ c_1(v_F) [F] &= F \cdot F \quad ([10] \text{ Th. 4.8.1.}) \\ c_1[F] &= -K \cdot F = F \cdot F + e(F) \quad (\text{Adjunktions-Formel}) \end{aligned}$$

und

$$(19) \quad v(F) = \frac{\mu^r}{1-\mu} \left( c_1[F] \left( \frac{1}{2} - r \right) - F \cdot F \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{1-\mu} \right) \right)$$

Damit gilt:

Lemma: Sei  $g$  eine holomorphe Abbildung der Ordnung  $d$  auf einer Fläche  $Y$ .  $F$  eine irreduzible Fixkurve von  $g$  und  $y \in F$ . Sei  $\mu := \det g'(y)$  und  $c_1$  die 1-te Chernklasse von  $Y$ , dann ist

$$v(F) = \frac{\mu^r}{1-\mu} \left( c_1[F] \left( \frac{1}{2} - r \right) - F \cdot F \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{1-\mu} \right) \right)$$

Die hier untersuchten Abbildungen  $\alpha_\omega$  haben die Ordnung 2. Da  $\dim H^0(Y(D,B), \Omega^2) = \dim H^0(Y(D,B), 1)$  (Dolbeault-Dualität) wird hier der Fall  $r = 1$  untersucht.

Für einen isolierten Fixpunkt  $y$  gilt dann

$$g'(y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich einer geeigneten Basis und damit nach (17)

$$v(\{y\}) = \frac{1}{4}$$

Für eine irreduzible Fixkurve  $F$  ist  $\mu = -1$  und damit

$$v(F) = \frac{1}{4} c_1[F]$$

Damit ist die rechte Seite von (14)

$$(20) \quad \sum_{j=1}^k v(\text{Fix}(\alpha_\omega^*)_j) = \frac{1}{4} (a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) - a_6^+(\omega))$$

Nun zur linken Seite von (14). Sei  $Y := Y(D,B)$  und  $r := 1$  wie oben.

$$H^i(Y, 1) \stackrel{(\text{Def.})}{=} H_{\bar{\sigma}}^{2,i}(Y) \stackrel{(\text{Dolbeault})}{=} H^i(Y, \Omega^2) \stackrel{(\text{Serre})}{=} H^{2-i}(Y, \sigma)^*$$

für  $i=0,1,2$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist : } H^1(Y, 1) &= H^1(Y, \sigma)^* = 0 && \text{da } Y \text{ regulär} \\ H^2(Y, 1) &= H^0(Y, \sigma)^* = \mathbb{C} && \text{da } Y \text{ kompakt,} \\ H^0(Y, 1) &= H^0(Y, \Omega^2) && \text{zusammenhängend} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt: } \text{Spur } \alpha_{\omega}^* \Big|_{H^1(Y, 1)} &= 0 \\ \text{Spur } \alpha_{\omega}^* \Big|_{H^2(Y, 1)} &= 1 \\ \text{Spur } \alpha_{\omega}^* \Big|_{H^0(Y, 1)} &= \text{Spur } \alpha_{\omega}^* \Big|_{H^0(Y, \Omega^2)} \end{aligned}$$

Mit (20) und (14) folgt :

Lemma: Sei  $Y := Y(D, B)$  und  $\alpha_{\omega} \in G_m(\sigma, \mathcal{L})/G(\sigma, \mathcal{L})$  dann ist:

$$(21) \quad \text{Spur } \alpha_{\omega}^* \Big|_{H^0(Y, \Omega^2)} = \frac{1}{4}(a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) - a_6^+(\omega)) - 1$$

### 2.3 $\chi(Y_{\Gamma}(D, B))$ für $G(\sigma, \mathcal{L}) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathcal{L})$ .

Mit Hilfe der Spurformel aus 2.1 wird nun  $p_G(Y_{\Gamma}(D, B)) = \dim H^0(Y_{\Gamma}(D, B), \Omega^2)$  bestimmt.

Sei  $\Gamma$  eine diskrete Erweiterung der Hilbertschen Modulgruppe.  $Y^*$  sei  $Y(D, B)$  in den isolierten Fixpunkten von  $\Gamma/G(\sigma, \mathcal{L})$  aufgeblasen. Dann ist

$$f: Y^* \rightarrow Y^*/\Gamma = Y_{\Gamma}(D, B) =: Y_{\Gamma}$$

eine verzweigte Überlagerung der Ordnung  $|\Gamma/G(\sigma, \mathcal{L})|$ . In einer Umgebung eines jeden Punktes  $z_0$  ist bezüglich lokaler Koordinatensysteme um  $z_0$  und  $f(z_0)$  durch  $\det f'(z) = 0$  der Verzweigungsdivisor  $D_f$  gegeben. Da jedes  $\alpha_{\omega}$  die Ordnung 2 hat, und verschiedene  $\alpha_{\omega}$  keine gemeinsamen Fixpunkte haben, haben alle Punkte  $z \in D_f$  die Verzweigungsordnung 2.

Lemma: Sei  $Y$ ,  $Y^*$  und  $\Gamma$  wie oben. Sei  $H^0(Y^*, \Omega^2)^{\Gamma}$  der Raum der unter  $\Gamma$  invarianten, holomorphen 2 - Formen auf  $Y^*$ , dann ist:

$$H^0(Y^*, \Omega^2)^{\Gamma} \cong H^0(Y_{\Gamma}, \Omega^2)$$

Beweis:  $f$  liefert einen Monomorphismus

$$f^* : H^0(Y_{\Gamma}, \Omega^2) \rightarrow H^0(Y^*, \Omega^2)^{\Gamma}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $f^*$  surjektiv ist.

Sei  $\eta \in H^0(Y^*, \Omega^2)^\Gamma$ . Für jeden Punkt  $z' \in Y^*/\Gamma$  wird nun in einer Umgebung  $U'$  von  $z'$  eine holomorphe 2-Form  $\tilde{\eta}|_{U'}$  definiert mit  $f^*(\tilde{\eta}|_{U'}) = \eta|_{f^{-1}(U')}$ .

Für  $z' \notin f(D_f)$  wird ein  $z \in f^{-1}(z')$  gewählt und isomorphe Umgebungen  $U'$  und  $U$  um  $z'$  bzw.  $z$ . Dann ist

$$\tilde{\eta}|_{U'} := ((f|_U)^{-1})^*(\eta|_U).$$

Da  $\eta$  invariant ist unter  $\Gamma$ , ist die Definition von  $\tilde{\eta}$  unabhängig von der Auswahl des Punktes  $z \in f^{-1}(z')$ .

Für  $z' \in f(D_f)$  sei wieder  $z \in f^{-1}(z')$ , dann gibt es eine Umgebung  $U'$  von  $z'$  mit lokalen Koordinaten  $(u', v')$  und eine Umgebung  $U$  von  $z$  mit lokalen Koordinaten  $(u, v)$ , so daß  $\Gamma_z/G$  in  $U$  als  $(u, v) \mapsto (-u, v)$  operiert und die Überlagerungsabbildung  $f$  durch  $f: (u, v) \mapsto (u^2, v)$  gegeben ist. Sei  $\eta$  in lokaler Darstellung:

$$\eta(u, v) = h(u, v) \, du \wedge dv$$

Da  $\eta(u, v) = g^*(\eta)(u, v) = -h(-u, v) \, du \wedge dv$  mit  $g \in \Gamma_z/G(\sigma, \mathcal{B})$ , ist  $h(u, v) = u \cdot h_1(u^2, v)$  für eine holomorphe Funktion  $h_1$ . Damit erfüllt

$$\tilde{\eta}|_{U'} := \frac{1}{2} h_1(u', v') \, du' \wedge dv'$$

die Bedingung. Auch in diesem Fall ist die Definition unabhängig von der Auswahl von  $z \in f^{-1}(z')$ ,

Dadurch ist eine globale holomorphe 2-Form  $\tilde{\eta}$  definiert, denn im ersten Fall läßt sich  $f$  als  $f(u, v) = (u, v) = (u_1', v_1')$  schreiben, im zweiten Fall als  $f(u, v) = (u^2, v) = (u_2', v_2')$ . Damit ist der Koordinatenwechsel von  $(u_1', v_1')$  zu  $(u_2', v_2')$  gerade  $(u_1'^2, v_1') = (u_2', v_2')$ . Und  $\tilde{\eta}$  transformiert sich entsprechend.

Q.E.D

Die Dimension von  $H^0(Y, \Omega^2)^\Gamma$  lässt sich mit Hilfe der Spurformel (21) bestimmen. Nach einem Theorem aus [15] 1.4 ist:

$$\dim H^0(Y, \Omega^2)^\Gamma = \frac{1}{|\Gamma/G|} \sum_{\alpha_\omega \in \Gamma/G} \text{Spur } \alpha_\omega^* |_{H^0(Y, \Omega^2)} .$$

Dabei ist  $G := G(\sigma, \mathcal{L})$  und  $\text{Spur id}^* = \dim H^0(Y, \Omega^2) = p_g$ .  
Und es gilt  $H^0(Y^*, \Omega^2) \cong H^0(Y, \Omega^2)$ .

Mit (21) gilt dann also:

Satz 3: Sei  $G(\sigma, \mathcal{L}) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathcal{L})$  dann ist mit  $G := G(\sigma, \mathcal{L})$ :

$$p_g(Y_\Gamma(D, B)) = \frac{1}{|\Gamma/G|} (p_g(Y(D, B)) + \sum_{\substack{\alpha_\omega \in \Gamma/G \\ \alpha_\omega \neq \text{id}}} \{ \frac{1}{4} (a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) - a_6^+(\omega)) - 1 \})$$

und

$$\chi(Y_\Gamma(D, B)) = \frac{1}{|\Gamma/G|} (\chi(Y(D, B)) + \sum_{\substack{\alpha_\omega \in \Gamma/G \\ \alpha_\omega \neq \text{id}}} \{ \frac{1}{4} (a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) - a_6^+(\omega)) \})$$

#### 2.4 $c_1^2(Y_\Gamma(D, B))$ für $G(\sigma, \mathcal{L}) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathcal{L})$ .

Eine ähnliche Formel wie in Satz 3 kann man auch für  $c_1^2(Y_\Gamma(D, B))$  herleiten. Sei  $Y^*$  wie in 2.3. Da sich  $c_1^2$  von  $Y(D, B)$  beim Aufblasen in einem Punkt um 1 verringert gilt:

$$(22) \quad c_1^2(Y^*) = c_1^2(Y) - \sum_{\substack{\alpha_\omega \in \Gamma/G \\ \alpha_\omega \neq \text{id}}} a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) .$$

Nach der Noetherformel ist:

$$(23) \quad \begin{aligned} c_1^2(Y^*) &= 12\chi(Y^*) - e(Y^*) \\ c_1^2(Y_\Gamma) &= 12\chi(Y_\Gamma) - e(Y_\Gamma) . \end{aligned}$$

Da jeder Verzweigungspunkt die Verzweigungsordnung 2 hat, ist mit  $n := |\Gamma/G|$ :

$$\begin{aligned}
 e(Y^*) &= ne(Y_\Gamma) - e(D_f) \\
 \Rightarrow e(Y_\Gamma) &= \frac{1}{n} (e(Y^*) + e(D_f)) \\
 &= \frac{1}{n} (e(Y^*) + 2 \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma/G \\ \alpha \neq \text{id}}} \{ a_2^{\text{neu}}(\omega) + a_4^+(\omega) + a_6^+(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) \})
 \end{aligned}$$

Mit (23) und Satz 3 ist dann:

$$c_1^2(Y_\Gamma) = \frac{1}{n} (c_1^2(Y^*) + \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma/G \\ \alpha \neq \text{id}}} \{ a_2^{\text{neu}}(\omega) - 2a_4^+(\omega) + 2a_4^-(\omega) - 5a_6^+(\omega) + 3a_6^-(\omega) \})$$

Aus (22) folgt dann:

Lemma: Mit den Voraussetzungen von Satz 3 ist:

$$(24) \quad c_1^2(Y_\Gamma) = \frac{1}{|\Gamma/G|} ( c_1^2(Y) - \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma/G \\ \alpha \neq \text{id}}} \{ 2a_4^+(\omega) + 5a_6^+(\omega) \} )$$

In Tabelle IV sind die Invarianten von  $Y_m(D, B)$  mit Hilfe von Satz 3 und (24) berechnet worden. Und zwar für  $D \leq 1500$ ,  $c_1^2 \leq 0$  oder  $\chi = 1$ .

Dabei ist:

$$S1 := \sum_{\substack{\alpha \in G_m/G \\ \alpha \neq \text{id}}} \{ \frac{1}{4} (a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^-(\omega) + 3a_6^-(\omega) - a_6^+(\omega)) \}$$

$$S2 := - \sum_{\substack{\alpha \in G_m/G \\ \alpha \neq \text{id}}} \{ 2a_4^+(\omega) + 5a_6^+(\omega) \}$$

### 2.5 Die Kurven $F_N$ auf $Y_m(D,B)$ .

In [2] und [3] werden die Invarianten der Modulkurven  $F_N$  auf  $Y_m(D,B)$  bestimmt. Eine Auswahl dieser Kurven ist für  $c_1(Y_m(D,B)) [F_N] \geq 1$  in Tabelle V,1 und für  $c_1(Y_m(D,B)) [F_N] \geq -1$  in Tabelle V,2 wiedergegeben.

Die Spalten 2-5 geben die Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, damit  $F_N$  von dem angegebenen Typ ist. Spalte 3 enthält unter  $\sigma$  die Vorzeichen von

$$\left( \frac{N \cdot B, D}{p_i} \right) \text{ für } p_i \mid (D, N) \text{ prim mit } p_1 < \dots < p_k .$$

In Tabelle V,1 bedeutet  $\tau$  die Anzahl der Kurven, die nacheinander niedergeblasen werden können, wenn die Komponenten der  $F_N$  Ausnahmekurven sind. Das ist z.B. der Fall, wenn  $\chi \neq 1$  ist.

In Tabelle IV bedeutet  $\tau$  die Gesamtzahl der Kurven, die auf diese Weise auf  $Y_m(D,B)$  niedergeblasen werden können. Damit ergibt sich die Abschätzung

$$c_1^2(Y_m^O(D,B)) \geq c_1^2(Y_m(D,B)) + \tau$$

In Tabelle IV wird  $c_1^2(Y_m(D,B))$  unter C1 und  $c_1^2(Y_m(D,B)) + \tau$  unter C10 aufgeführt.

Bemerkung: Bis auf  $Y_m(57,2)$  gilt in allen Fällen  $C10 \geq 0$ . Auf  $Y_m(57,2)$  wird nach Niedergeblasen der  $\tau$  bekannten Ausnahmekurven eine Kurve der Spitzenauflösung zur Ausnahmekurve und kann ebenfalls niedergeblasen werden.

Kapitel 3: Klassifikation der  $Y_\Gamma(D, B)$  für  $G(\sigma, \mathcal{L}) < \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathcal{L})$ .

3.1 Die Kodaira-Dimension der  $Y_\Gamma(D, B)$ .

Sei  $Y^*$ , wie in dem vorangegangenen Kapitel, die Fläche  $Y(D, B)$  in den isolierten Fixpunkten von  $\Gamma/G$  aufgeblasen.  $f$  sei die  $|\Gamma/G|$ -fache, verzweigte Überlagerung:

$$f : Y^* \rightarrow Y_\Gamma(D, B)$$

Nach [2] ist  $Y(D, B)$  einfach-zusammenhängend und alle  $\alpha_w \in \Gamma/G$  operieren mit Fixpunkten auf  $Y(D, B)$  (siehe 2.1). Nach dem folgenden Satz aus [1] ist dann  $Y_\Gamma(D, B)$  ebenfalls einfach-zusammenhängend.

Satz 4 (Armstrong):

Sei  $G$  eine Gruppe von Homöomorphismen, die diskontinuierlich auf einem weg-zusammenhängenden, einfach-zusammenhängenden, lokal kompakten, metrischen Raum  $X$  operiert. Sei  $H$  der Normalteiler von  $G$ , der von den Elementen aus  $G$  erzeugt wird, die Fixpunkte auf  $X$  haben. Dann ist die Fundamentalgruppe von  $X/G$  isomorph zu  $G/H$ .

Damit sind die Flächen  $Y_\Gamma(D, B)$  einfach-zusammenhängende, reguläre, algebraische Flächen.

Sei  $D \subseteq Y$  ein Divisor auf einer algebraischen Fläche  $Y$ .

Dann ist nach [22] die  $D$ -Dimension auf  $Y$  wie folgt definiert:

$$\kappa(D, Y) := \begin{cases} -1 & \text{falls } \dim H^0(Y, \mathcal{O}(mD)) = 0 \text{ für alle } m. \\ 0 & \text{falls } \dim H^0(Y, \mathcal{O}(mD)) \text{ beschränkt ist aber } \kappa(D, Y) \neq -1. \\ 1 & \text{falls } \dim H^0(Y, \mathcal{O}(mD))/m \text{ beschränkt ist aber } \kappa(D, Y) \neq 0. \\ 2 & \text{falls } \dim H^0(Y, \mathcal{O}(mD))/m \text{ unbeschränkt ist.} \end{cases}$$

Insbesondere ist die Kodaira-Dimension

$$\kappa(Y) := \kappa(K_Y, Y) .$$

Aus [22] Satz 5.13 und 6.10 folgt:

Satz 5: (Ueno)

Sei  $f: V \rightarrow W$  eine surjektive, holomorphe Abbildung algebraischer Flächen, dann gilt:

für einen Divisor  $D \subseteq W$  :

$$(25) \quad \kappa(f^*D, V) = \kappa(D, W) ,$$

und für die Kodaira-Dimension:

$$(26) \quad \begin{aligned} \kappa(V) &\geq \kappa(W) && \text{und} \\ \kappa(V) &= \kappa(W) && \text{falls } f \text{ unverzweigt oder} \\ &&& \text{Niederblasen einer Ausnahme-} \\ &&& \text{kurve ist.} \end{aligned}$$

Nach der Klassifikation von Kodaira-Enriques gilt für eine einfach-zusammenhängende, algebraische Fläche  $Y$ :

$$(27) \quad \begin{aligned} \kappa(Y) = -1 & \iff Y \text{ ist rational,} \\ \kappa(Y) = 0 & \iff Y^\circ \text{ ist eine K3-Fläche,} \\ \kappa(Y) = 1 & \iff Y^\circ \text{ ist eine echt elliptische Fläche,} \\ \kappa(Y) = 2 & \iff Y^\circ \text{ ist von allgemeinem Typ.} \end{aligned}$$

In Tabelle IV wurde in der 6. Spalte der Typ der Flächen  $Y(D, B)$  bzw.  $Y^\circ(D, B)$  aufgeführt. Einen großen Teil der Flächen  $Y_m(D, B)$  kann man nach (27), (26) und 1.4 mit den schon bekannten Informationen aus Tabelle IV klassifizieren:

- 1.)  $\chi \neq 1$  und  $c_1^2 + \tau > 0 \quad \Rightarrow Y_m(D, B)$  von allgemeinem Typ
- 2.)  $Y(D, B)$  rational  $\Rightarrow Y_m(D, B)$  rational
- 3.)  $Y^\circ(D, B)$  echt elliptisch  $\Rightarrow Y_m^\circ(D, B)$  echt elliptisch und  $\chi \geq 3$ .
- 4.)  $Y^\circ(D, B)$  K3-Fläche  $\Rightarrow \begin{cases} Y_m(D, B) \text{ rational} \iff \chi = 1 \\ Y_m^\circ(D, B) \text{ K3-Fläche} \iff \chi = 2 \end{cases}$

$\chi$  und  $c_1^2$  beziehen sich dabei auf  $Y_m(D, B)$ .

Die Flächen, die auf diese Weise klassifiziert werden können sind in Tabelle IV durch \* gekennzeichnet.

Im Fall 1.)-3.) sind alle Zwischenflächen vom gleichen Typ, im Fall 4.) ist der Typ der Zwischenflächen durch  $\chi$  eindeutig festgelegt.

Sei  $\Gamma := G_\omega(\sigma, \ell)$ , dann ist die Überlagerungsabbildung

$$f : Y^*(D, B) \rightarrow Y_\omega(D, B)$$

entlang der Fixkurven von  $\alpha_\omega$  auf  $Y^*(D, B)$  verzweigt. Wenn  $\alpha_\omega \neq \alpha_2, \alpha_3$  ist, sind alle irreduzibelen Komponenten der Fixkurven von  $\alpha_\omega$  Ausnahmekurven, d.h.  $\alpha_\omega$  hat auf  $Y(D, B)$  nur isolierte Fixpunkte. Das Gleiche ist der Fall, wenn

$$\alpha_\omega = \alpha_2 \text{ und } D/4 \equiv 7(8) \text{ und } B \equiv 3(4)$$

$$\text{oder } \alpha_\omega = \alpha_3 \text{ und } D/3 \equiv 1(3) \text{ und } B \equiv 1(3)$$

$$\text{oder } D/3 \equiv 2(3) \text{ und } B \equiv 2(3) \quad (\text{siehe 2.1}) .$$

Das folgende Lemma zeigt, daß  $Y_\omega(D, B)$  in diesen Fällen vom gleichen Typ ist wie  $Y(D, B)$ .

Lemma: Sei  $\alpha: Y \rightarrow Y$  eine holomorphe Involution auf einer algebraischen Fläche. Wenn die Fixpunktmenge von  $\alpha$  nur aus Ausnahmekurven besteht, dann ist

$$(28) \quad \kappa(Y/\alpha) = \kappa(Y) .$$

Beweis: Sei  $K_X$  ein kanonischer Divisor auf  $X := Y/\alpha$  und

$$f: Y \rightarrow X$$

die Überlagerungsabbildung. Dann ist

$$K_Y := f^*(K_X) + D_f$$

ein kanonischer Divisor auf  $Y$ . Da  $D_f$  die Fixpunktmenge einer holomorphen Involution ist, schneiden sich die irreduzibelen Komponenten von  $D_f$  nicht und können daher unabhängig voneinander niedergeblasen werden. Sei

$$\varepsilon : Y \rightarrow Y'$$

Niederblasen von  $D_f$ . Dann gibt es einen kanonischen Divisor  $K_{Y'}$  auf  $Y'$  mit :

$$K_Y = \varepsilon^*(K_{Y'}) + D_f$$

$$\Rightarrow \varepsilon^*(K_{Y'}) = f^*(K_X)$$

Nach Satz 5 ist dann

$$\begin{aligned} \kappa(Y) = \kappa(Y') &= \kappa(K_{Y'}, Y') = \kappa(\varepsilon^*(K_{Y'}, Y)) \\ &= \kappa(f^*(K_X), Y) = \kappa(K_X, X) = \kappa(X) . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Aus (27) folgt dann, daß  $Y(D, B)$  und  $Y_\omega(D, B)$  vom gleichen Typ sind.

In Tabelle VI sind für die Fälle, in denen die Flächen  $Y_m(D, B)$  nicht schon mit den Informationen aus Tabelle IV zu klassifizieren sind,  $a_2^{\text{neu}}$ ,  $a_4^+$ ,  $a_4^-$ ,  $a_6^+$ , und  $a_6^-$  für  $\omega \mid D$  aufgelistet. Die Fälle, in denen  $a_4^+(\omega) = a_6^+(\omega) = 0$  gilt, sind durch \* gekennzeichnet. In diesen Fällen sind  $Y(D, B)$  und  $Y_\omega(D, B)$  vom gleichen Typ.

Für  $Y(65, 1)$ ,  $Y(65, 2)$  und  $Y(77, 1)$  ist  $\Gamma_\omega = G_m(\sigma, \ell)$  für  $\omega = 5$  bzw.  $\omega = 7$ . In den letzten beiden Spalten von Tabelle VI sind

$$\begin{aligned} S1 &:= \text{Spur } \alpha_\omega^* + 1 && \text{und} \\ S2 &:= -(2a_4^+(\omega) + 5a_6^+(\omega)) && \text{aufgeführt.} \end{aligned}$$

In den drei oben erwähnten Fällen ist  $\chi = \frac{\chi(Y(D, B)) + S1}{2} = 2$ .  $Y^\circ(D, B)$  und damit  $Y_m^\circ(D, B)$  sind in allen drei Fällen echt elliptisch.

Bemerkung: Im Gegensatz zu den Flächen  $Y(D, B)$ , für die  $\chi = 2$  genau dann, wenn  $Y^\circ(D, B)$  eine K3-Fläche ist, gibt es also unter den Flächen  $Y_m^\circ(D, B)$  echt elliptische Flächen mit  $\chi = 2$ .

Die Frage ist nun, ob diese Flächen Homotopie K3-Flächen sind, d.h. von gleichem orientierten Homotopie-Typ einer K3-Fläche sind. (Alle K3-Flächen gehören dem gleichen orientierten Homotopie-Typ an.)

In [16] wird gezeigt, daß jede Homotopie-K3-Fläche entweder eine K3-Fläche ist oder eine reguläre echt elliptische Fläche mit  $\chi = 2$ . Nach Lemma 1 in [16] ist  $c_1(Y)[F] \equiv 0(2)$  für alle irreduziblen Kurven auf einer Homotopie-K3-Fläche  $Y$ .

Damit kann man beweisen, daß die hier vorliegenden Flächen keine Homotopie-K3-Flächen sind, denn es ist:

$$\begin{aligned} \text{auf } Y_m^O(65,1) & \text{ ist } c_1(Y_m^O)[F_{10}] = -1 \\ \text{auf } Y_m^O(65,2) & \text{ ist } c_1(Y_m^O)[F_{11}] = -1 \\ \text{auf } Y_m^O(77,1) & \text{ ist } c_1(Y_m^O)[F_{13}] = -1 . \end{aligned}$$

(siehe Tabelle V,2 , die  $F_N$  schneiden keine der Ausnahmekurven.)

### 3.2 Klassifikation durch elliptische Konfigurationen.

Nach Tabelle VI und den Ergebnissen von 3.1 sind noch folgende Flächen zu klassifizieren:

$Y_m(44,7)$ ,  $Y_m(57,2)$ ,  $Y_m(92,1)$ ,  $Y_m(141,1)$  mit  $\chi = 2$  und  $t_D = 2$

$Y_m(56,5)$ ,  $Y_m(76,3)$ ,  $Y_m(93,11)$ ,  $Y_m(104,1)$ ,  $Y_m(124,1)$ ,  $Y_m(213,1)$   
mit  $\chi \geq 3$  und  $t_D = 2$

$Y_m(60,7)$ ,  $Y_m(60,17)$  mit  $\chi = 2$  und  $t_D = 3$

$Y_m(120,17)$ ,  $Y_m(156,5)$ ,  $Y_m(156,1)$ ,  $Y_m(168,1)$  mit  $\chi \geq 3$  und  $t_D = 3$ .

In den Fällen mit  $t_D = 3$  müssen noch die Zwischenflächen klassifiziert werden.

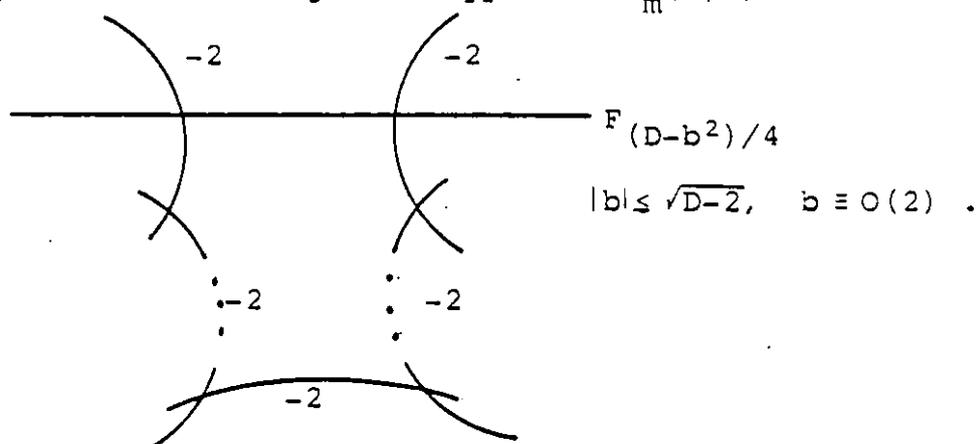
Diese Flächen werden mit den Methoden aus Satz 1 klassifiziert, d.h. es werden elliptische Konfigurationen auf diesen Flächen gesucht. Dafür benötigt man die folgenden Informationen:

1. Die Zyklen der Spitzenauflösungen. Sie sind in Tabelle III angegeben. In allen hier untersuchten Flächen hat  $Y_m(D,B)$  nur einen Spitzenzyklus.
2. Eine Abschätzung von  $c_1(Y_m(D,B)) [F_N]$ . Eine solche Abschätzung ist in [2] und [3] gegeben. Für die hier benutzten Kurven  $F_N$  ist sie in Tabelle V angegeben. Die Bezeichnung: " $F_N$  ist vom Typ  $(\sigma; N_1, N_2)$ " bezieht sich auf Tabelle V.
3. Das Schnittverhalten der  $F_N$ ; es läßt sich aus dem Schnittverhalten der  $T_N$  nach [6] 4.4 bestimmen.

$$T_N := \sum_{n^2 | N} F_N / n^2 .$$

Notation: "Nach Niederblasen von  $n \times F_N, (-2), (-3)$ " bedeutet, daß die Kurve  $F_N$   $n$  Komponenten hat, die alle Ausnahmekurven sind. Jede dieser Komponenten wird von je einer  $(-2)$ - und  $(-3)$ -Kurve der Auflösung der Quotientensingularitäten geschnitten und alle diese Kurven werden nacheinander niedergeblasen.

Auf  $Y_m(56,5)$ ,  $Y_m(76,3)$  und  $Y_m(104,1)$  ist  $F_{10}$  vom Typ  $(+;5,1)$ .  $F_{10}$  hat nach Tabelle V,2 eine Komponente und es gilt  $c_1(Y_m(D,B))[F_{10}] \geq 0$ . Die Bestimmung der Zykeln der Spitzenauflösung ist in diesen Fällen nicht notwendig, denn nach [14] 5.4 gibt es eine Konfiguration des folgenden Typs auf  $Y_m(D,B)$ :

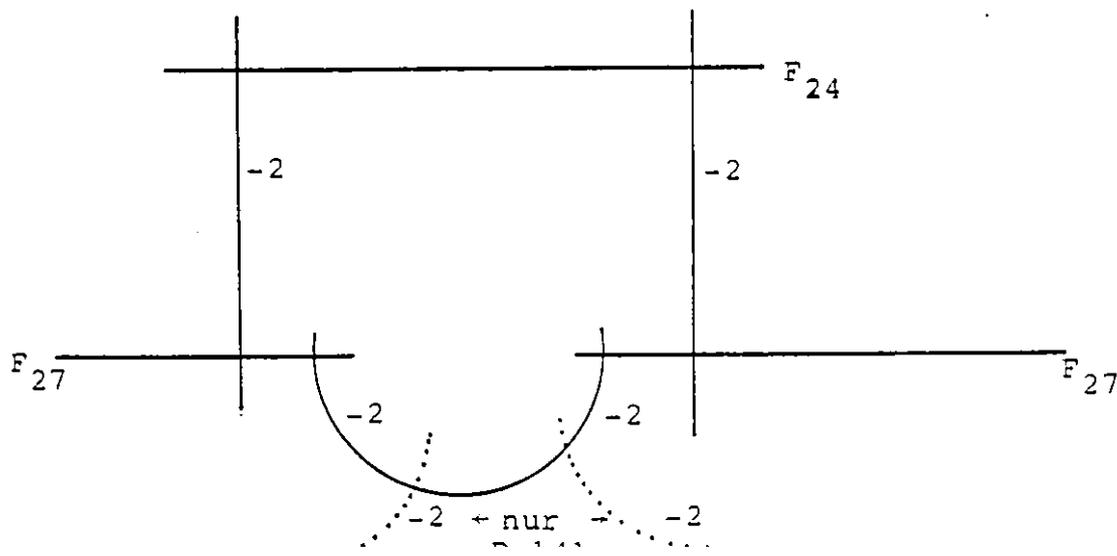


Es ist  $(56-16)/4 = (76-36)/4 = (104-64)/4 = 10$  und  $\chi \geq 3$  in allen Fällen.

=> In allen drei Fällen ist  $Y_m^O(D,B)$  eine echt elliptische Fläche.

Auf  $Y_m(93,11)$  bilden die Kurven der Spitzenauflösung nach Niederblasen von  $F_3, (-2)$  und  $F_{12}$  eine elliptische Konfiguration vom Typ  $A_8'$ .  $\chi = 3$   
=>  $Y_m^O(93,11)$  ist echt elliptisch.

Auf  $Y_m(213,1)$  und  $Y_m(141,1)$  ist  $F_{24}$  vom Typ  $(-;1,8)$  und  $F_{27}$  vom Typ  $(+;9,1)$ . In diesen Fällen hat man nach Niederblasen von  $F_3, (-2)$  und  $F_{12}$  die folgende elliptische Konfiguration:



$\Rightarrow Y_m^{\circ}(141,1)$  ist eine K3-Fläche.

$\chi(Y_m^{\circ}(213,1))=3 \Rightarrow Y_m^{\circ}(213,1)$  ist eine echt elliptische Fläche.

Auf  $Y_m(44,7)$  bilden nach Niederblasen von  $F_2, (-2)$  und  $F_8$  die Kurven  $S_0, \dots, S_5$  eine elliptische Konfiguration vom Typ  $A_5^1$ .  $F_7$  ist vom Typ  $( ;7,1)$  und schneidet diese Konfiguration.

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(44,7)$  ist eine K3-Fläche.

Auf  $Y_m(124,1)$  ist  $F_{10}$  vom Typ  $(+;5,1)$  und  $F_9$  vom Typ  $( ;9,1)$ . Es existiert eine elliptische Konfiguration vom Typ  $A_5^1$  bestehend aus:

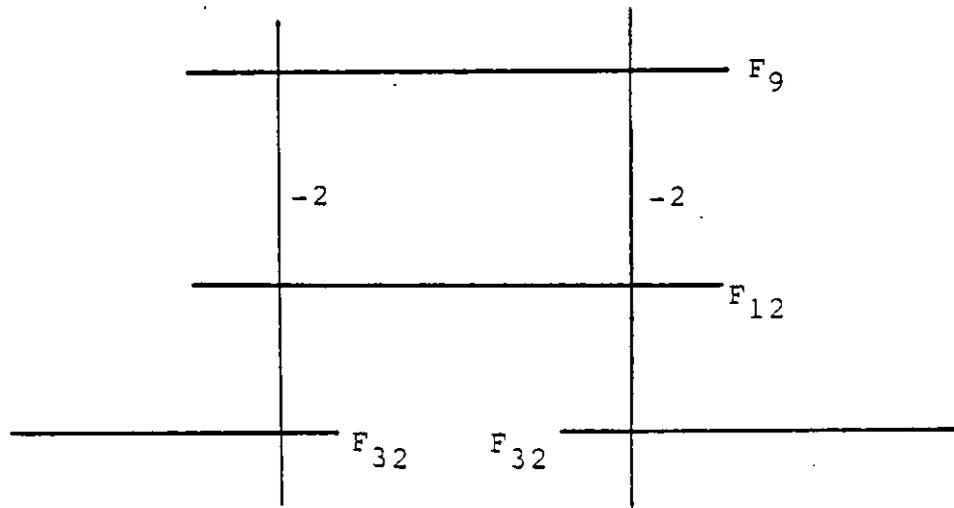
$F_{10}, S_2, S_3, F_9, S_5, S_6 \cdot \chi = 3$

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(124,1)$  ist echt elliptisch.

Auf  $Y_m(57,2)$  bilden  $F_8, S_2, \dots, S_7$  eine elliptische Konfiguration vom Typ  $A_6^1$ .  $F_8$  ist vom Typ  $( ;8,1)$ . Nach Niederblasen von  $F_2, (-2), F_3, (-2)$  und  $S_0$  wird diese Konfiguration von den  $(-2)$ -Kurven  $S_1$  und  $S_8$  geschnitten.

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(57,2)$  ist eine K3-Fläche.

Auf  $Y_m(92,1)$  ist  $F_9$  vom Typ  $( ;1,9)$ ,  $F_{12}$  vom Typ  $(-;1,3)$  und  $F_{32}$  vom Typ  $(+;8,1)$ . Diese Kurven bilden die folgende Konfiguration:

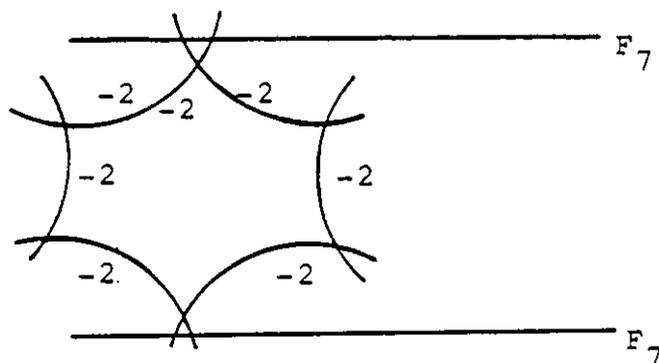


$\Rightarrow Y_m^{\circ}(92,1)$  ist eine K3-Fläche.

Nun zu den Fällen mit  $t_D=3$ . In diesen Fällen gibt es zwischen  $Y(D,B)$  und  $Y_m(D,B)$  jeweils 3 Zwischenflächen.

$Y^{\circ}(60,7)$  ist echt elliptisch, nach dem Lemma in 3.1 und Tabelle VI sind  $Y_2^{\circ}(60,7)$  und  $Y_6^{\circ}(60,7)$  ebenfalls echt elliptisch.

$\chi(Y_3(60,7))=2$  und  $c_1^2(Y_3(60,7))=-6$ .  $\alpha_3$  operiert frei auf den Spitzen und auf den Komponenten von  $F_7$ .  $F_7$  hat zwei Komponenten auf  $Y_3(60,7)$  die alle  $(-2)$ -Kurven sind. Nach Niederblasen von  $2 \times F_3, (-2)$  hat man die folgende Konfiguration auf  $Y_3(60,7)$ :

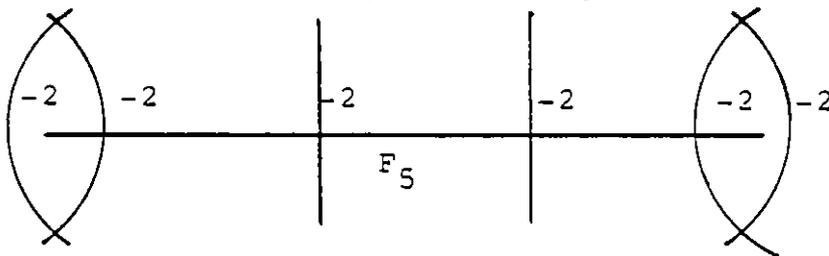


$\Rightarrow Y_3^{\circ}(60,7)$  ist eine K3-Fläche.

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(60,7)$  ist eine K3-Fläche. ( $\chi = 2$ )

$Y^{\circ}(60,17)$  ist eine echt elliptische Fläche, nach Tabelle VI ist deshalb auch  $Y_3^{\circ}(60,17)$  und  $Y_6^{\circ}(60,17)$  echt elliptisch.

$\alpha_2$  operiert frei auf den beiden elliptischen Konfigurationen vom Typ  $D_4'$  die in 1.4 benutzt wurden. Nach Niederblasen von  $2 \times F_2, (-2)$  und  $2 \times F_8$  ergibt sich die folgende Konfiguration von  $(-2)$ -Kurven:



$\Rightarrow Y_2^{\circ}(60,17)$  ist eine K3-Fläche.

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(60,17)$  ist eine K3-Fläche. ( $\chi = 2$ )

$Y(120,17)$  ist vom allgemeinen Typ. Nach Tabelle VI ist  $Y_6(120,17)$  ebenfalls vom allgemeinen Typ.  
 $c_1^2(Y_2(120,17)) = -3$  und  $c_1^2(Y_3(120,17)) = -6$ .  
 Ausnahmekurven auf  $Y(120,17)$  sind  $2 \times F_2, (-2)$  und  $2 \times F_3$ .

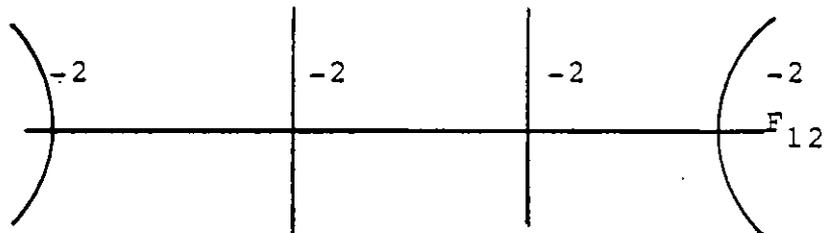
Darauf operieren:

	$\alpha_2$	$\alpha_3$
auf $F_2$	trivial	frei
auf $F_3$	frei	trivial .

Damit können auf  $Y_2(120,17)$ ,  $2 \times F_2, (-2)$  und  $F_3$  also 5 Kurven, auf  $Y_3(120,17)$   $F_2, (-2)$  und  $2 \times F_3, (-2)$  also 6 Kurven niedergeblasen werden.

Damit ist  $c_1^2(Y_2^O(120,17)) \geq 2$  und  $c_1^2(Y_3^O(120,17)) \geq 0$ .  
 $\Rightarrow Y_2(120,17)$  ist von allgemeinem Typ.

Auf  $Y(120,17)$  ist  $F_{12}$  eine rationale Kurve von Charakteristik  $(1|0,2)$ . Nach [1] (34) in 4.5 ist  $c_1(Y)[F_{12}] \geq c_1(12) + 2 = 0$ .  
 $\alpha_3$  hat 2 isolierte Fixpunkte auf  $F_{12}$ . Damit ist  $c_1(Y_3(120,17))[F_{12}] \geq 0$  (siehe [1] 5.1). Damit liegt auf  $Y_3(120,17)$  nach Niederblasen von  $2 \times F_3, (-2)$  die folgende elliptische Konfiguration vor:



$\Rightarrow Y_2^O(120,17)$  ist echt elliptisch. ( $\chi = 3$ )

$\Rightarrow Y_m^O(120,17)$  ist echt elliptisch. ( $\chi = 3$ )

$Y(156,5)$  ist vom allgemeinen Typ.  $Y_6(156,5)$  ist dann ebenfalls vom allgemeinen Typ.

Auf  $Y_2(156,5)$  können  $2 \times F_2, (-2)$ ,  $2 \times F_8$ , und  $F_6$ , also 7 Kurven niedergeblasen werden.

$\Rightarrow c_1^2(Y_2^O(156,5)) \geq -5 + 7 = 2$

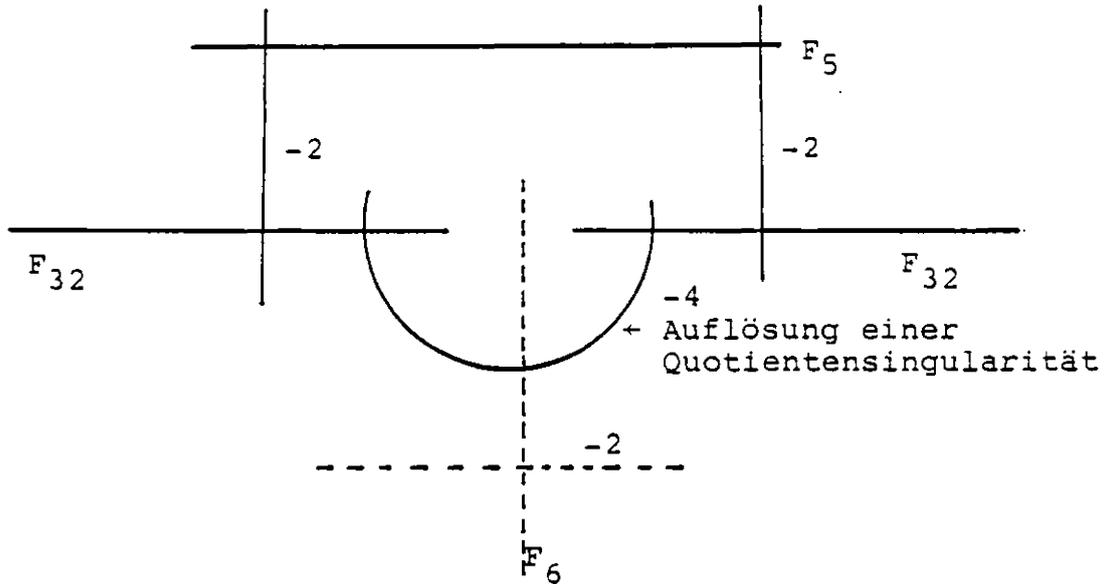
$\Rightarrow Y_2(156,5)$  ist vom allgemeinen Typ. ( $\chi = 4$ )

Auf  $Y_3(156,5)$  können  $F_2, (-2)$ , und  $F_6, (-2)$ , also 4 Kurven niedergeblasen werden.

$\Rightarrow c_1^2(Y_3^O(156,5)) \geq -2 + 4 = 2$

$\Rightarrow Y_3(156,5)$  ist vom allgemeinen Typ. ( $\chi = 4$ )

Auf  $Y_m(156,5)$  ist  $F_{32}$  vom Typ  $(+;8,1)$ , und  $F_5$  vom Typ  $(-;5,1)$ . Damit hat man die folgende Konfiguration auf  $Y_m(156,5)$ :



Nach Niederblasen von  $F_6, (-2)$  entsteht eine elliptische Konfiguration.

$\Rightarrow Y_m^O(156,5)$  ist echt elliptisch.  $(\chi = 3)$

$Y(156,1)$  ist vom allgemeinen Typ. Damit sind nach Tabelle VI auch  $Y_3(156,1)$  und  $Y_6(156,1)$  vom allgemeinen Typ.  $F_{10}$  ist vom Typ  $(+;5,1)$  auf  $Y_m(156,1)$  und  $\alpha_3$  operiert frei auf den Komponenten von  $F_{10}$ . Deshalb hat  $F_{10}$  zwei Komponenten auf  $Y_2(156,1)$  und für jede Komponente  $F$  gilt  $c_1(Y_2(156,1)) [F] \geq 0$ . Deshalb findet man auf  $Y_2(156,1)$  eine elliptische Konfiguration vom Typ  $A_7^1$  bestehend aus  $F_{10}, S_1, S_2, S_3, F_{10}, S_5, S_6, S_7$ ,

$\Rightarrow Y_2^O(156,1)$  ist echt elliptisch.  $(\chi = 3)$

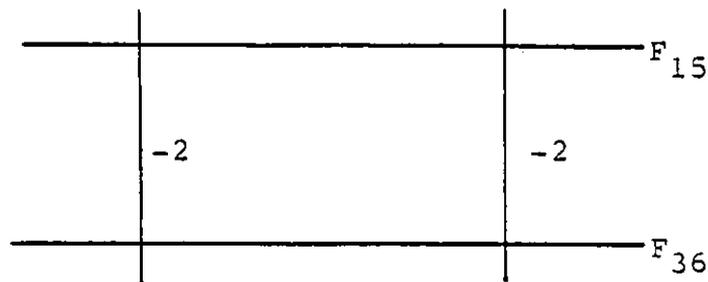
$\Rightarrow Y_m^O(156,1)$  ist echt elliptisch.  $(\chi = 3)$

$Y(168,1)$  und damit  $Y_6(168,1)$  sind vom allgemeinen Typ. Auf  $Y_2(168,1)$  können  $2 \times F_2, (-2), (-3), 2 \times F_4, (-2)$  und  $2 \times F_9$ , also 12 Kurven niedergeblasen werden. Damit ist nach Tabelle VI

$$c_1^2(Y_2^{\circ}(168,1)) \geq c_1^2(Y_2(168,1)) + 12 = -10 + 12 = 2.$$

$\Rightarrow Y_2(168,1)$  ist vom allgemeinen Typ.

Auf  $Y_m(168,1)$  ist  $F_{15}$  vom Typ  $(-;1,5)$  und  $F_{36}$  vom Typ  $(++;3,1)$ .  $\alpha_2$  operiert frei auf den Komponenten von  $F_{15}$  und  $F_{36}$ . Deshalb hat man auf  $Y_2(168,1)$  zwei mal die folgende elliptische Konfiguration:



$\Rightarrow Y_3^{\circ}(168,1)$  ist echt elliptisch. ( $\chi = 4$ )

$\Rightarrow Y_m^{\circ}(168,1)$  ist echt elliptisch. ( $\chi = 3$ )

Die Flächen  $Y_m(D,B)$  mit  $D \leq 1500$ , die vom allgemeinen Typ sind und für die  $\chi < 4$  gilt, sind im zweiten Teil von Tabelle IV aufgeführt.

Damit ist für  $D \leq 1500$  bewiesen:

Satz 6: Sei  $\chi$  das arithmetische Geschlecht der Flächen  $Y_m(D, B)$ , dann gilt:

1.) Alle  $Y_m(D, B)$  mit  $\chi = 1$  sind rational.

2.) Die folgenden  $Y_m^\circ(D, B)$  sind echt elliptisch mit  $\chi = 2$ :

$$Y_m^\circ(65, 1) \quad , \quad Y_m^\circ(65, 2) \quad , \quad Y_m^\circ(77, 1)$$

Alle übrigen  $Y_m^\circ(D, B)$  mit  $\chi = 2$  sind K3-Flächen.

3.) Die folgenden  $Y_m(D, B)$  sind vom allgemeinen Typ mit  $\chi = 3$ :

$$\begin{array}{cccc} Y_m(60, 11) & Y_m(85, 3) & Y_m(133, 1) & Y_m(165, 3) \\ Y_m(77, 6) & Y_m(105, 13) & Y_m(140, 23) & Y_m(285, 1) \end{array}$$

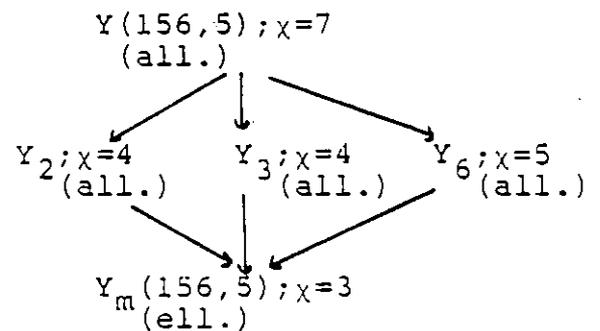
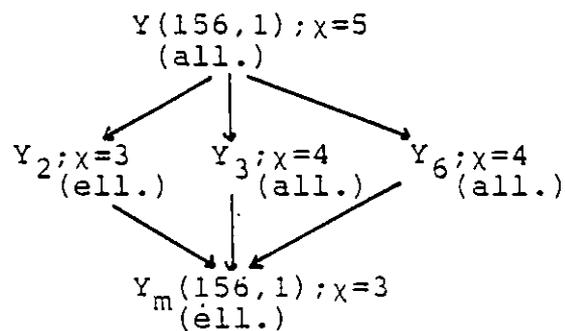
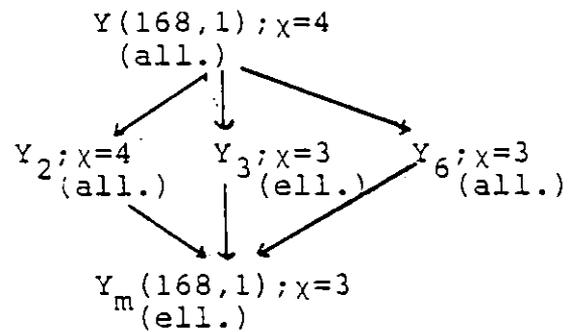
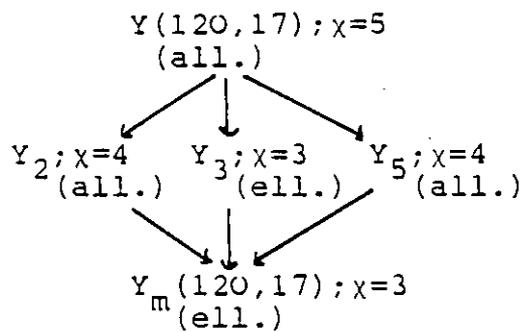
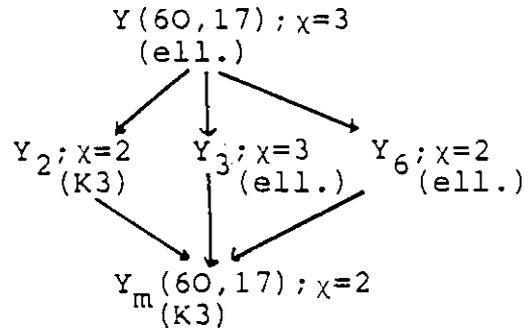
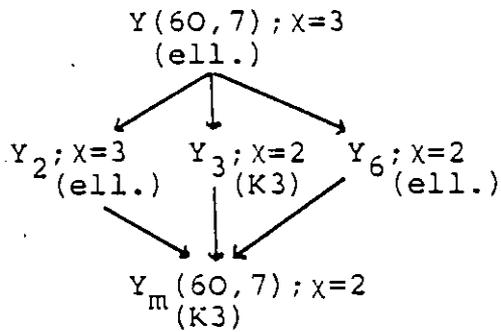
Alle übrigen  $Y_m^\circ(D, B)$  mit  $\chi = 3$  sind echt elliptisch.

4.) Die Fläche  $Y_m^\circ(104, 1)$  ist echt elliptisch mit  $\chi = 4$ .

Alle übrigen  $Y_m(D, B)$  mit  $\chi \geq 4$  sind vom allgemeinen Typ.

Aus den Ergebnissen von Kapitel 4 folgt, daß dieser Satz für beliebige  $D$  gilt.

Der Typ der Zwischenflächen wird hier noch einmal zusammengefaßt:



Alle anderen Zwischenflächen kann man nach 3.1 mit den Informationen aus Tabelle IV und Tabelle IV klassifizieren.

Kapitel 4: Abschätzung von  $c_1^2$  und  $\chi$  für  $Y_m(D, B)$ .

Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, daß für  $D > 1500$  gilt:  $c_1^2 > 0$  und  $\chi \geq 4$ .

Zu diesem Zweck wird zunächst gezeigt, daß für  $D > 1500$  und  $c_1^2 > 0$  gilt:  $\chi \geq 4$ .

Nach 2.4 ist:

$$e(Y_m(D, B)) = \frac{1}{n} (e(Y(D, B)) + \sum_{\substack{\alpha_\omega \in G_m/G \\ \alpha_\omega \neq \text{id}}} \{ 3a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^+(\omega) + 2a_6^+(\omega) + 6a_4^-(\omega) + 9a_6^-(\omega) \})$$

mit  $n := 2^{t_D-1}$ .

Aus 1.1 (6) folgt:

$$e(Y_m(D, B)) \geq \frac{1}{n} (2\zeta_K(-1) + \frac{3}{2}a_2 + \sum_{\substack{\alpha_\omega \in G_m/G \\ \alpha_\omega \neq \text{id}}} \{ 3a_2^{\text{neu}}(\omega) + 2a_4^+(\omega) + 6a_4^-(\omega) \})$$

Die  $\alpha_\omega$  operieren frei auf den Fixpunkten von  $G(\sigma, \ell)$  oder sie lassen sie fest. Im zweiten Fall entstehen auf  $H^2/G_m(\sigma, \ell)$  Quotientensingularitäten des Typs  $(4; 1, 1)$  oder  $(4; 1, 3)$ . Es gilt also:  $a_2 + a_4^+ + a_4^- \geq n = 2^{t_D-1}$ . Für  $\alpha_\omega \neq \alpha_{\omega'}$  operiert  $\alpha_\omega$  frei auf den isolierten Fixpunkten von  $\alpha_{\omega'}$ . Deshalb gilt  $a_2^{\text{neu}}(\omega) \geq 2^{t_D-2} = n/2$  für alle  $\alpha_\omega \neq \text{id}$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} e(Y_m(D, B)) &> \frac{1}{n} ( 2\zeta_K(-1) + \frac{3}{2}n + 3(n-1) \frac{n}{2} ) \\ &= \frac{1}{n} ( 2\zeta_K(-1) ) + \frac{3}{2}n. \end{aligned}$$

Nach der Noetherformel ist:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{c_1^2}{12} + \frac{e(Y_m(D, B))}{12} \\ &> c_1^2/12 + \zeta_K(-1)/(6 \cdot 2^{t_D-1}) + 2^{t_D-1}/8 \end{aligned}$$

Für  $t_D \geq 6$  ist  $2^{t_D-1}/8 \geq 4$ .

Für  $t_D = 5$  ist  $D \geq 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4620$  und nach der schon in 1.4 benutzten Abschätzung

$$\zeta_K(-1) > \frac{D^{3/2}}{360}$$

ist  $\zeta_K(-1)/(6 \cdot 2^4) > 9$ .

Für  $t_D \leq 4$  und  $D > 1500$  ist  $\zeta_K(-1)/(6 \cdot 2^{t_D-1}) > 3$ .

Damit ist bewiesen:

Lemma: Für die Flächen  $Y_m(D, B)$  mit  $D > 1500$  gilt:

$$(30) \quad c_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \chi > 3.$$

Nun wird gezeigt, daß  $c_1^2 > 0$  gilt für  $D > 1500$ .

Nach 1.1 (6) ist

$$c_1^2(Y(D, B)) = 4\zeta_K(-1) - \frac{1}{3} a_3^+ + \sum_{i=0}^{1-1} (2-b_i).$$

Mit den Bezeichnungen aus [14] 2.3 ist:

$$\sum_{i=0}^{1-1} (2-b_i) = \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{C}^+} 3\delta(\overline{bS}_q^1(\mathcal{M})) - 1(\overline{bS}_q^1(\mathcal{M}))$$

$$\text{nach [14] 2.3 (19):} = \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{C}^+} 1(\overline{bS}_q^1(\mathcal{M})) - 1(\gamma \overline{bS}_q^1(\mathcal{M})) - 1(\overline{bS}_q^1(\mathcal{M})).$$

$$= -\sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{C}^+} 1(\gamma \overline{bS}_q^1(\mathcal{M})) \quad \text{für ein } \gamma \in K \text{ mit } N(\gamma) < 0.$$

Also ist  $\sum_{i=0}^{1-1} (b_i - 2)$  die Anzahl der Auflösungskurven der Spitzensingularitäten von  $Y(D, \gamma^{-1}b)$ . Das ist  $2^{t_D-1}$  mal die Anzahl der reduzierten quadratischen Irrationalitäten  $w = \frac{M + \sqrt{D}}{2N}$  mit  $N$  Norm eines Ideals aus dem Geschlecht von  $\gamma$ . Sei  $l(D)$  die Anzahl aller reduzierten quadratische Irrationalitäten zur Diskriminante  $D$ . Dann ist:

$$\sum_{i=1}^{1-1} (2-b_i) > -2^{t_D-1} l(D)$$

Nach 2.4 (24) ist

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{1}{2} t_{D-1} (c_1^2(Y(D, B)) - 2a_4^+ - 5a_6^+) \\ &> \frac{1}{2} t_{D-1} (4\zeta_K(-1) - \frac{a_3^+}{3} - 2a_4^+ - 5a_6^+ - 2^{t_D-2} l(D)) \end{aligned}$$

Mit der bereits benutzten Abschätzung für  $\zeta_K(-1)$  ergibt sich:

$$(32) \quad c_1^2 > \frac{1}{2} t_{D-1} \left( \frac{D^{3/2}}{90} - \frac{a_3^+}{3} - 5a_6^+ - 2a_4^+ - 2^{t_{D-2}} 1(D) \right)$$

Aus den Tabellen in 1.1 und 2.1 entnimmt man:

$$(33) \quad \begin{array}{ll} a_3^+ = \frac{1}{2} h(-3D) & \text{für } D \not\equiv 0(3) \\ a_3^+ \leq 4 h(-D/3) & \text{für } D \equiv 0(3) \\ a_4^+ = 0 & \text{für } D \equiv 1(4) \\ a_4^+ = \frac{1}{2} h(-D) & \text{für } D \equiv 0(8) \\ a_4^+ \leq 3 h(-D/4) & \text{für } D \equiv 4(8) \\ a_6^+ = 0 & \text{für } D \not\equiv 0(3) \\ a_6^+ \leq h(-D/3) & \text{für } D \equiv 0(3) \end{array}$$

Nach Gut [5] gilt die folgende Abschätzung für  $h(-D)$ :  
(für  $D > 24$ )

$$(34) \quad \begin{array}{ll} h(-D) < \frac{D}{4} & \text{für } D \not\equiv 0(4) \\ h(-D) < \frac{D}{12} & \text{für } D \equiv 0(4) \end{array}$$

Zur Verminderung der Rechenzeit ist es sinnvoll, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

- (I)  $D \not\equiv 0(4)$  und  $D \not\equiv 0(3)$
- (II)  $D \not\equiv 0(4)$  und  $D \equiv 0(3)$
- (III)  $D \equiv 0(4)$  und  $D \not\equiv 0(3)$
- (IV)  $D \equiv 0(4)$  und  $D \equiv 0(3)$

Mit (33) und (34) gilt dann:

	$-\frac{a_3^+}{3} - 2a_4^+ - 5a_6^+$
(I) $a_3^+ < 3D/8$ , $a_4^+ = 0$ , $a_6^+ = 0$	$> -\frac{D}{8}$
(II) $a_3^+ < D/3$ , $a_4^+ = 0$ , $a_6^+ < D/12$	$> -\frac{19}{36} D$
(III) $a_3^+ < D/8$ , $a_4^+ < 3D/16$ , $a_6^+ = 0$	$> -\frac{10}{24} D$
(IV) $a_3^+ < D/9$ , $a_4^+ < 3D/16$ , $a_6^+ < D/36$	$> -\frac{119}{216} D$

$2^{t_{D-2}} 1(D)$  wird nach [14] 4.4 abgeschätzt durch:

$$2^{t_{D-2}} 1(D) < 2^{t_{D-2}} (\sqrt{D} + 1) \cdot A \left(\frac{D}{4}\right)^\varepsilon$$

mit  $\varepsilon = \log 2 / \log 11 = 0.28906\dots$  und  $A = 5.103978196\dots$

Damit ist hinreichend für  $c_1^2 > 0$

$$(35) \quad \frac{D^{3/2}}{90} - \alpha \cdot D - 2^{t_D-2} (\sqrt{D} + 1) \cdot A \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^\varepsilon > 0$$

$$\text{mit } \alpha = \begin{cases} 1/8 & \text{in Fall I} \\ 19/36 & \text{in Fall II} \\ 10/24 & \text{in Fall III} \\ 119/216 & \text{in Fall IV} \end{cases}$$

In allen Fällen ist  $\alpha < 0.6$ .

Für Diskriminanten  $D$  mit  $t_D \geq 7$  gilt:

$$D > 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 16^{(t_D-6)} = \frac{60060}{2^{16}} 2^{4(t_D-2)} \geq 960960.$$

Sei  $\beta := 60060/2^{16}$ , damit läßt sich die linke Seite von (35) von unten Abschätzen durch:

$$\begin{aligned} D \cdot 2^{t_D-2} \cdot \left( \frac{\sqrt{\beta} \cdot 2^5}{90} - \frac{0.6}{2^5} - \frac{A}{4^\varepsilon} \left( \frac{1}{960960^{0.5-\varepsilon}} + \frac{1}{960960^{1-\varepsilon}} \right) \right) \\ > D \cdot 2^{t_D-2} \cdot 0.13 > 0. \end{aligned}$$

Damit ist (35) für  $t_D \geq 7$  erfüllt.

$$\text{Sei } f_t(D) := \frac{D^{3/2}}{90} - \alpha \cdot D - 2^{t-2} (\sqrt{D} + 1) \cdot A \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^\varepsilon$$

dann ist die linke Seite von (35) gerade  $f_{t_D}(D)$ .

Für festes  $t$  ist  $\frac{\partial f}{\partial D} t$  monoton steigend für  $D > 0$ .

Damit folgt aus  $f_t(D'_t-1) > 0 > f_t(D'_t)$  für ein  $D'_t > 0$ ,

daß  $f_t(D) > 0$  für alle  $D \geq D'_t$  gilt.

Im Fall I (  $\alpha = 1/8$  ) zeigt man mit dieser Überlegung, daß (35) erfüllt ist für:

$$t_D \leq 2 \text{ und } D \geq 4220$$

$$t_D = 3 \text{ und } D \geq 10047$$

$$t_D = 4 \text{ und } D \geq 24872$$

$$t_D = 5 \text{ und } D \geq 63163$$

$$t_D = 6 \text{ und } D \geq 163028$$

$$t_D \geq 5 \Rightarrow D \geq 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 85085 > 63163$$

$$t_D \geq 6 \Rightarrow D \geq 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 1616615 > 163028$$

(35) ist deshalb erfüllt für  $D \geq 24872$ . Mit dem Computer überprüft man (35) für alle Diskriminanten  $D$  mit  $1500 \leq D \leq 24872$ . In den Fällen, in denen (35) nicht erfüllt ist berechnet man  $c_1^2(Y_m(D,B))$  für alle Geschlechter. In all diesen Fällen ist  $c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$ .  
 $\Rightarrow c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $D \geq 1500$  im Fall I.

Im Fall II (  $\alpha = 19/36$  ) ist (35) erfüllt für:

$$t_D \leq 2 \text{ und } D \geq 8719$$

$$t_D = 3 \text{ und } D \geq 16301$$

$$t_D = 4 \text{ und } D \geq 34027$$

$$t_D = 5 \text{ und } D \geq 77071$$

$$t_D = 6 \text{ und } D \geq 184696$$

$$t_D \geq 6 \Rightarrow D > 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 255255 > 184696$$

Man überprüft wieder (35) bzw.  $c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $1500 \leq D \leq 77071$ .

$\Rightarrow c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $D > 1500$  im Fall II.

Im Fall III (  $\alpha = 10/24$  ) ist (35) erfüllt für

$$t_D \leq 2 \text{ und } D \geq 7264$$

$$t_D = 3 \text{ und } D \geq 14371$$

$$t_D = 4 \text{ und } D \geq 31303$$

$$t_D = 5 \text{ und } D \geq 73041$$

$$t_D = 6 \text{ und } D \geq 178529$$

$$t_D \geq 6 \Rightarrow D > 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 340340 > 178529$$

Man überprüft wieder (35) bzw.  $c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $1500 \leq D \leq 73041$ .

$\Rightarrow c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $D > 1500$  im Fall III.

Im Fall IV (  $\alpha = 119/216$  ) ist (35) erfüllt für:

$$t_D \leq 2 \text{ und } D \geq 9044$$

$$t_D = 3 \text{ und } D \geq 16723$$

$$t_D = 4 \text{ und } D \geq 34614$$

$$t_D = 5 \text{ und } D \geq 77930$$

$$t_D = 6 \text{ und } D \geq 185999$$

In diesem Fall muß (35) bzw.  $c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für alle  $D$  mit  $1500 \leq D < 18599$  überprüft werden.

=> auch im Fall IV ist  $c_1^2(Y_m(D,B)) > 0$  für  $D \geq 1500$ .

Die Ergebnisse dieses Kapitels kann man wie folgt zusammenfassen:

Satz 7: Für die Invarianten der Flächen  $Y_m(D,B)$  gilt:

$$D > 1500 \quad \Rightarrow \quad c_1^2 > 0 \quad \text{und} \quad \chi > 3.$$

Korollar: Für  $D \geq 1500$  und  $G(\sigma, b) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, b)$  gilt:

$Y_\Gamma(D,B)$  ist vom allgemeinen Typ.

Beweis: Aus Satz 7 folgt, daß  $Y_m(D,B)$  vom allgemeinen Typ ist. Nach Satz 5 sind dann auch die Flächen  $Y_\Gamma(D,B)$  vom allgemeinen Typ.

Kapitel 5: Die nicht einfach-zusammenhängenden  
Hilbertschen Modulflächen.

5.1 Die Fundamentalgruppe der Hilbertschen Modulflächen.

Wie bereits in 3.1 erwähnt, sind die Flächen  $Y_\Gamma(D, B)$  für  $G(\sigma, \mathfrak{b}) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathfrak{b})$  einfach-zusammenhängend. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man zu Untergruppen der maximalen diskreten Erweiterung der symmetrischen Modulgruppe übergeht.

Die Abbildung:  $\tau: H^2 \rightarrow H^2$

$$(z_1, z_2) \mapsto \left( \frac{-1}{Bz_2}, \frac{-1}{Bz_1} \right)$$

kommutiert mit allen  $\alpha_\omega \in G_m(\sigma, \mathfrak{b})/G(\sigma, \mathfrak{b})$  und operiert als holomorphe Involution auf  $Y(D, B)$ .

Sei  $G_{\tau m}(\sigma, \mathfrak{b}) := G_m(\sigma, \mathfrak{b}) \cup \tau G_m(\sigma, \mathfrak{b})$ . Alle nicht-trivialen Elemente aus  $G_{\tau m}(\sigma, \mathfrak{b})/G(\sigma, \mathfrak{b})$  haben die Ordnung 2. Sie werden mit  $\alpha_\omega$  bzw.  $\alpha_\omega \tau$  für  $\omega | D$  bezeichnet.  $Y_{\tau m}(D, B) := \overline{H^2}/G_{\tau m}(\sigma, \mathfrak{b})$

Die Fixpunktmenge von  $\alpha_\omega \tau$  wird in [7] beschrieben.

Die eindimensionale Fixpunktmenge ist:

$$(36) \text{Fix}(\alpha_\omega \tau) = \begin{cases} F_\omega \cup F_{D/\omega} & \text{für } D \equiv 1(2) \text{ oder } (D \equiv 4(8) \text{ und } \omega \equiv 0(2)) \\ F_\omega \cup F_{4\omega} \cup F_{D/4\omega} \cup F_{D/\omega} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Anzahl der isolierten Fixpunkte von  $\alpha_\omega \tau$  auf  $X(\sigma, \mathfrak{b})$  ist:

$$(37) a_2(\alpha_\omega \tau) = \begin{cases} 2^{tD-1} & \text{falls } D \equiv 1(4) \text{ \& } Q(\omega, 1, 2B) \text{ erfüllt} \\ 2^{tD-2} & \text{falls } Q(\omega, 1, 2B) \text{ erfüllt und } (D \equiv 0(8) \\ & \text{oder } (\omega \cdot D \equiv 4(8) \text{ \& } \left\lfloor \frac{-d}{2B} \right\rfloor = 1) \\ & \text{oder } (D \equiv 4(8) \text{ \& } \omega \equiv 2(4) \text{ \& } B \equiv 1(4)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist die Bedingung  $Q(\omega, a, b)$  wie folgt definiert:

$Q(\omega, a, b)$  ist erfüllt :  $\Leftrightarrow$

$$\forall p | D/\omega, p \text{ prim, } p \neq 2 \quad \left( \frac{D(p)}{\omega} \right) = \left( \frac{D(p)}{b} \right)$$

$$\text{und } \forall p | \omega, p \text{ prim, } p \neq 2 \quad \left( \frac{D(p)}{aD/\omega} \right) = \left( \frac{D(p)}{b} \right)$$

Aus dem Theorem in 5.1 [7] folgt für  $\bar{a}_2(\alpha_\omega \tau)$ , die Anzahl der isolierten Fixpunkte auf der Spitzenauflösung auf  $Y(D, B)$ :

$$(38) \quad \text{Fix}(\alpha_\omega \tau) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_2(\alpha_\omega \tau) = 0$$

Bemerkung:  $\bar{a}_2(\alpha_\omega \tau)$  kann nach [7] bestimmt werden und damit, wie in Kapitel 2, die Spur von  $\alpha_\omega \tau^*$  auf  $H^0(Y(D, B), \Omega^2)$  berechnet werden:

$$\text{Spur}(\alpha_\omega \tau^*) \Big|_{H^0(Y(D, B), \Omega^2)} = \frac{1}{4}(a_2(\alpha_\omega \tau) + \bar{a}_2(\alpha_\omega \tau) + c_1[\text{Fix}(\alpha_\omega \tau)]) - 1$$

Mit diesen Ergebnissen kann dann wieder  $\chi(Y_\Gamma(D, B))$  und  $c_1^2(Y_\Gamma(D, B))$  für  $G(\sigma, \mathcal{B}) \leq \Gamma \leq G_{\text{tm}}(\sigma, \mathcal{B})$  bestimmt werden. Dieser Weg wird hier jedoch nicht weiter verfolgt. Ziel dieses Kapitels ist es, die nicht einfach-zusammenhängenden Flächen zu klassifizieren.

In Tabelle VII sind alle Tripel  $(D, B, \omega)$  aufgeführt, für die  $\alpha_\omega \tau$  fixpunktfrei auf  $Y(D, B)$  operiert und  $D \leq 500$  gilt. Es wird nun gezeigt, daß es unendlich viele Tripel mit dieser Eigenschaft gibt.

Lemma: Für alle Diskriminanten der Form:

$$(39) \quad D = 85 + k \cdot 200 \text{ operiert } \alpha_5 \tau \text{ fixpunktfrei auf } Y(D, 1) = Y(D) .$$

Beweis: (39) ist äquivalent zu  $D = 5 \cdot n$  mit  $n \equiv 1(8)$  und  $n \equiv 2(5)$ . Nach (36) ist  $\text{Fix}(\alpha_5 \tau) = F_5 \cup F_n$ . Sei  $N = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$  die Primzahlzerlegung von  $n$ , dann ist:

$$(i) \quad \left(\frac{D(p_1)}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{D(p_k)}{5}\right) = \left(\frac{n}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1 .$$

$$\Rightarrow \exists i, 1 \leq i \leq k \text{ mit } \left(\frac{D(p_i)}{5}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad F_5 = \emptyset$$

$$(ii) \quad \left(\frac{5}{n}\right) = \left(\frac{5}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad F_n = \emptyset$$

(iii)  $Q(5,1,2)$  ist nicht erfüllt, denn

$$\left(\frac{n}{5}\right) = -1 \neq 1 = \left(\frac{n}{2}\right)$$

Aus (i) - (iii) folgt nach (36), (37) und (38) daß  $\alpha_{5\tau}$  fixpunktfrei auf  $Y(D,1)$  operiert.

Weitere Beispiele fixpunktfreier Operationen sind:

$\alpha_{5\tau}$  auf  $Y(D)$  mit  $D = 165 + k \cdot 200$

$\alpha_{3\tau}$  auf  $Y(D)$  mit  $D = 204 + k \cdot 288$

$\alpha_{3\tau}$  auf  $Y(D)$  mit  $D = 168 + k \cdot 576$

Es bleibt zu zeigen:

Lemma: Es gibt unendlich viele Diskriminanten der Form:

$$D = 85 + k \cdot 200$$

Beweis:  $D = 85 + k \cdot 200$  ist äquivalent zu  $D = 5 \cdot n$  mit  $n \equiv 17(40)$ . Die Anzahl der natürlichen Zahlen  $n \equiv 17(40)$  kleiner oder gleich einer natürlichen Zahl  $N$  läßt sich abschätzen durch:

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq N; n \equiv 17(40)\} \geq N/40 - 1$$

Sei  $D$  nicht quadratfrei, also  $p^2 \mid D$ . Aus  $D \equiv 85(200)$

folgt:  $D \equiv 10(25) \Rightarrow p \neq 5 \Rightarrow p^2 \nmid n$

$D \equiv 1(4) \Rightarrow p \neq 2$

$\Rightarrow (p^2, 40) = 1$  und nach dem chinesischen Restklassensatz gibt es ein  $y \in \mathbb{N}$ ,  $y < 40p^2$ , so daß alle gemeinsamen Lösungen von  $n \equiv 17(40)$  und  $n \equiv 0(p^2)$  von der Form:

$$n = y + k \cdot 40 \cdot p^2 \quad \text{sind.}$$

Dann ist

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 17(40), n \equiv 0(p^2), n < N\} \leq N/(40p^2) + 1$$

Aus diesen Abschätzungen folgt:

$$A(N) := \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 17(40), n = qf(n), n \leq N\}$$

$$> N/40 - 1 - \sum_{3 < p < \sqrt{N}} (N/(40p^2) + 1)$$

$$> N/40 - 1 - N \cdot (\pi^2/6 - 1)/40 - \sqrt{N}$$

$$> N \cdot 0.35/40 - 1 - \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow A(N) \rightarrow \infty \text{ für } N \rightarrow \infty .$$

$\Rightarrow$  Es gibt unendlich viele quadratfreie, positive ganze Zahlen  $n$  mit  $n \equiv 17(40)$ .

$\Rightarrow$  Es gibt unendlich viele Diskriminanten der Form  $D = 85 + k \cdot 200$ .

Nun zu der Fundamentalgruppe von  $Y_\Gamma(D, B)$ .

Satz 7: (a) Die Hilbertschen Modulflächen  $Y_\Gamma(D, B)$  sind entweder einfach-zusammenhängend, oder ihre Fundamentalgruppe ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(b)  $Y_\Gamma(D, B)$  mit  $G(\sigma, \mathfrak{b}) \leq \Gamma \leq G_m(\sigma, \mathfrak{b})$  und  $Y_{\tau m}(D, B)$  sind einfach-zusammenhängend.

Beweis: (b) Der erste Teil der Behauptung wurde schon in 3.1 gezeigt.  $\tau$  operiert auf  $Y_m^*(D, B)$ , d.h. auf  $Y_m(D, B)$  in den isolierten Fixpunkten von  $\tau$  aufgeblasen, mit Fixpunkten, denn  $\tau$  läßt  $F_D$  fest.

$$\forall p \mid D \quad \left( \frac{D}{D} \right) = 0 \neq -1 \Rightarrow F_D \neq \emptyset .$$

Nach Satz 4 in 3.1 ist damit  $Y_{\tau m}(D, B)$  einfach-zusammenhängend.

(a) Sei nun  $\alpha_{\omega'} \tau \in \Gamma/G$ ,  $\Gamma' := \Gamma \cap G_m(\sigma, \mathfrak{b})$ . Dann ist  $\Gamma/G = \Gamma'/G \cup \alpha_{\omega'} \tau \cdot \Gamma/G$ , denn für  $\alpha_{\omega'} \tau \in \Gamma/G$  ist  $\alpha_{\omega'} \tau \cdot \alpha_{\omega'} \tau = \alpha_{\text{qf}(\omega \cdot \omega')} \in \Gamma/G$ . Also ist  $\alpha_{\omega'} \tau = \alpha_{\text{qf}(\omega \cdot \omega')} \cdot \alpha_{\omega'} \tau \in \alpha_{\omega'} \tau \cdot \Gamma'/G$ .

Sei  $H$  die Untergruppe von  $\Gamma/G$ , die von den Elementen, die mit Fixpunkten operieren, erzeugt wird. Dann gilt:

$$H = \Gamma/G \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha_{\omega'} \tau \in \Gamma/G \text{ das Fixpunkte hat}$$

$$H = \Gamma/G \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha_{\omega'} \tau \in \Gamma/G \text{ operieren fixpunktfrei.}$$

Im ersten Fall ist  $Y_\Gamma(D, B)$  nach Satz 4 einfach-zusammenhängend, im zweiten Fall ist, ebenfalls nach Satz 4, die Fundamentalgruppe von  $Y_\Gamma(D, B)$  isomorph zu

$$(\Gamma/G)_H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot$$

Q.E.D.

Korollar 1: Die Fundamentalgruppe von  $Y_\Gamma(D, B)$  ist genau dann isomorph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , wenn  $\Gamma - (\Gamma \cap G_m(\sigma, \ell)) \neq \emptyset$  gilt und alle  $\alpha_\omega \tau \in \Gamma/G$  fixpunktfrei operieren.

Korollar 2: Es gibt unendlich viele Hilbertsche Modulflächen  $Y_\Gamma(D, B)$  die nicht einfach-zusammenhängend sind.

## 5.2 Klassifikation der nicht einfach-zusammenhängenden Hilbertschen Modulflächen.

Sei wieder  $Y^*$  die Fläche  $Y(D, B)$  in den isolierten Fixpunkten von  $\Gamma/G$  aufgeblasen. Dann definiert die Überlagerungsabbildung  $f: Y^* \rightarrow Y_\Gamma(D, B)$  einen Monomorphismus

$$f^*: H^1(Y_\Gamma(D, B), \mathcal{O}_{Y_\Gamma(D, B)}) \rightarrow H^1(Y^*, \mathcal{O}_{Y^*}) .$$

Da  $Y^*$  regulär ist, ist  $Y_\Gamma(D, B)$  ebenfalls regulär. Der Zusammenhang zwischen dem Typ einer Fläche und ihrer Kodaira-Dimension, der in (27) für reguläre, einfach-zusammenhängende algebraische Flächen formuliert wurde, gilt mit einer Änderung auch für nicht einfach-zusammenhängende, reguläre algebraische Flächen. Und zwar ist hier

$$\kappa(Y) = 0 \Leftrightarrow Y^0 \text{ ist eine Enriques-Fläche } (\chi=1) .$$

Sei nun  $G(\sigma, \mathcal{L}) \trianglelefteq \Gamma \trianglelefteq G_{\Gamma m}(\sigma, \mathcal{L})$  und  $Y_\Gamma(D, B)$  nicht einfach-zusammenhängend, dann ist also  $\Gamma \not\subseteq G_m(\sigma, \mathcal{L})$ . Sei  $\alpha_{\omega, \Gamma}$  und  $\Gamma'$  wie in dem Beweis von Satz 7, so daß  $\Gamma/G = \Gamma'/G \cup \alpha_{\omega, \Gamma} \cdot \Gamma'/G$ . Dann ist  $f: Y_{\Gamma'}(D, B) \rightarrow Y_\Gamma(D, B)$  eine doppelte unverzweigte Überlagerung, und nach (28) ist  $\kappa(Y_{\Gamma'}(D, B)) = \kappa(Y_\Gamma(D, B))$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} Y_{\Gamma'}^0(D, B) \text{ K3-Fläche} &\Rightarrow Y_\Gamma^0(D, B) \text{ Enriques-Fläche} \\ Y_{\Gamma'}^0(D, B) \text{ echt ell.} &\Rightarrow Y_\Gamma^0(D, B) \text{ echt elliptisch} \\ Y_{\Gamma'}^0(D, B) \text{ allg. Typ} &\Rightarrow Y_\Gamma^0(D, B) \text{ ist vom allgemeinen Typ} . \end{aligned}$$

Also auch insbesondere  $Y_m(D, B)$  vom allgemeinen Typ  $\Rightarrow Y_{\Gamma'}(D, B)$  vom allgemeinen Typ  $\Rightarrow Y_\Gamma(D, B)$  vom allgemeinen Typ .

Ein Vergleich von Tabelle VII und Tabelle IV zeigt, daß es nur 6 Fälle gibt, in denen  $Y_m(D, B)$  nicht vom allgemeinen Typ ist und es ein  $\alpha_{\omega, \Gamma}$  gibt, das fixpunktfrei auf  $Y(D, B)$  operiert.

Es sind dies die Fälle:

D	B	$\sigma$	$\omega$	Typ( $Y^\circ(D,B)$ )
85	1	++	5	echt elliptisch
105	2	--+	5	echt elliptisch
105	1	+++	3	K3-Fläche
140	1	+++	5	echt elliptisch
165	1	+++	5	echt elliptisch
168	1	+++	3	allgemeinen Typ

Damit ist bewiesen:

Satz 8: Es gibt unendlich viele nicht einfach-zusammenhängende Hilbertsche Modulflächen. Davon haben 4 eine echt elliptische Fläche als minimales Modell, es sind dies:

$$Y_5(85,1), Y_5(105,2), Y_5(140,1) \text{ und } Y_5(165,1).$$

Eine Fläche hat eine Enriques-Fläche als minimales Modell, und zwar die Fläche

$$Y_3(105,1).$$

Alle anderen sind von allgemeinem Typ.

Bemerkung: Bis auf 4 Ausnahmen gilt  $\chi = 3$  für alle Flächen  $Y(D,B)$ , die eine echt elliptische Fläche als minimales Modell haben. Die 4 Ausnahmen sind genau die Aufblasungen echt elliptischer Flächen  $Y(D,B)$  auf denen ein  $\alpha_\omega$  fixpunktfrei operiert. Aus Satz 3 folgt dann, daß

$$\chi(Y_\omega(D,B)) = \chi(Y(D,B))/2.$$

Also muß  $\chi(Y(D,B))$  in diesen Fällen gerade sein.

Kapitel 6: Die kanonischen Divisoren auf  $Y(65)$  und  $Y_m(65)$ .

Nach den Ergebnissen von Kapitel 3 sind  $Y(65)$  und  $Y_m(65)$  Aufblasungen echt elliptischer Flächen mit  $p_g = 2$  bzw.  $p_g = 1$ . Auf  $Y_m(65)$  gibt es also einen eindeutig bestimmten kanonischen Divisor, d.h. einen bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig bestimmten globalen Schnitt  $\sigma \in H^0(Y_m(65), \Omega^2)$ . In diesem Kapitel werden die Schnittpunkte der kanonischen Divisoren auf  $Y(65)$  und  $Y_m(65)$  mit den Kurven der Spitzenauflösungen bestimmt. Da man die Darstellung der Modulkurven  $F_N$  in einer Umgebung der Auflösungskurven kennt, ergibt sich dadurch zum Beispiel, daß der kanonische Divisor auf  $Y_m(65)$  nicht durch die bekannten Kurven darstellbar ist. Die wichtigste Referenz für dieses Kapitel ist die Arbeit von Hermann [9]. Sei  $\sigma$  die Maximalordnung in  $\mathbb{Q}(\sqrt{65})$ .

Die Thetakonstanten

$$\theta_m(z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^2} \exp \pi i \left\{ \left(g + \frac{m'}{2}\right) \cdot z \cdot \left(g + \frac{m'}{2}\right) + \left(g + \frac{m'}{2}\right) \cdot m'' \right\}$$

sind auf der Siegelischen Halbebene  $H_2$  definiert.

$$m' = \begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix}, \quad m'' = \begin{pmatrix} m''_1 \\ m''_2 \end{pmatrix} \quad \text{sind zwei Spaltenvektoren mit}$$

Komponenten 0 oder 1.  $m = (m'_1, m'_2, m''_1, m''_2)$  heißt die Charakteristik von  $\theta_m$ .

Es gibt zwei Modulareinbettungen:

$$\psi_i: H^2 \rightarrow H_2 \quad \text{für } i=1,2$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow A_i \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} A_i$$

wobei  $A_i = \begin{pmatrix} \zeta_i & \bar{\zeta}_i \\ \bar{\zeta}_i & -\zeta_i \end{pmatrix}$ ,  $\zeta_i := \sqrt{\frac{u_i}{2\sqrt{65}} + \frac{1}{2}}$ ,  $\bar{\zeta}_i := \sqrt{\frac{-u_i}{2\sqrt{65}} + \frac{1}{2}}$

mit  $u_1 := 1$  und  $u_2 := 7$ .

Mit Hilfe der Modulareinbettungen lassen sich holomorphe Funktionen  $\theta_i((z_1, z_2)) := \theta_{(1,1,1,1)}(\psi_i(z_1, z_2))$  für  $i=1,2$  definieren.

$f: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph heißt Modulform vom Gewicht  $k$  zu  $G(\sigma, \mathcal{L})$ , wenn für alle

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma, \mathcal{L}) \text{ gilt:}$$

$$f(M(z_1, z_2)) = ((\gamma z_1 + \delta)(\bar{\gamma} z_2 + \bar{\delta}))^k f((z_1, z_2)).$$

Man nennt  $f$  eine Spitzenform, wenn  $f$  in den Spitzen verschwindet.

Den Spitzenformen vom Gewicht 2 entsprechen durch die Zuordnung  $f(z_1, z_2) \rightarrow f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$  die holomorphen 2-Formen.

Hermann zeigt in [9], daß sich jede Spitzenform vom Gewicht 2 zu  $G(\sigma, \sigma)$  als

$$(40) \quad f(z) = a\theta_1(z)\theta_2^3(z) + b\theta_1^3(z)\theta_2(z), \quad z=(z_1, z_2)$$

für komplexe Zahlen  $a$  und  $b$  schreiben läßt.

Das erzeugende Element von  $G_m(\sigma, \sigma)/G(\sigma, \sigma)$ ,  $\alpha_5$ , operiert auf  $X(65, \sigma)$  und bildet die beiden Spitzen von  $X(65, \sigma)$  aufeinander ab. ( $h(65)=2$ ,  $N(\epsilon)=-1$ ). Sei  $z=(z_1, z_2)$  ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung eines Repräsentanten  $z_0 \in H^2$  und  $z'=(z'_1, z'_2)$  ein lokales Koordinatensystem um  $\alpha_5(z_0)$ . Dann gilt nach Hilfssatz 3 in [9]:

$$(41) \quad \alpha_5^*(\theta_1(z')\theta_2^3(z') dz'_1 \wedge dz'_2) = \theta_1^3(z)\theta_2(z) dz_1 \wedge dz_2.$$

Die Auflösung der Spitze in  $\infty$  besteht aus 9 rationalen Kurven  $S_k$ . Sie entsprechen den reduzierten quadratischen Irrationalitäten  $w_k = (M_k + \sqrt{65})/2N_k$  :

k	$-b_k$	$M_k$	$N_k$
0	9	9	1
1	3	9	4
2	2	15	10
3	2	25	14
4	2	31	16
5	2	33	16
6	2	31	14
7	2	25	10
8	3	15	4

In den lokalen Koordinaten  $(u_k, v_k)$  in einer Umgebung  $U_k$  von  $S_k$  wird  $S_k$  durch  $v_k=0$  und  $S_{k-1}$  durch  $u_k=0$  beschrieben:

$$2\pi iz_1 = A_{k-1} \log u_k + A_k \log v_k$$

$$2\pi iz_2 = A'_{k-1} \log u_k + A'_k \log v_k$$

mit  $A_0 := 1$ ;  $A_{k+1} := w_{k+1}^{-1} A_k$ .

Nun wird  $\theta_i$  in  $(u_k, v_k)$ -Koordinaten transformiert:

Sei  $i = 1, 2$ ;  $k = 0, \dots, 8$ , dann ist

$$\tilde{\psi}_i(u_k, v_k) = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$$

in  $U_k$  mit

$$\begin{aligned} \alpha_{1,i} &:= A_{k-1} \zeta_i^2 + A'_{k-1} \bar{\zeta}_i^2 & \alpha_{2,i} &:= A_k \zeta_i^2 + A'_k \bar{\zeta}_i^2 \\ \beta_{1,i} &:= \zeta_i \bar{\zeta}_i (A_{k-1} - A'_{k-1}) & \beta_{2,i} &:= \zeta_i \bar{\zeta}_i (A_k - A'_k) \\ \delta_{1,i} &:= A_{k-1} \bar{\zeta}_i^2 + A'_{k-1} \zeta_i^2 & \delta_{2,i} &:= A_k \bar{\zeta}_i^2 + A'_k \zeta_i^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \alpha_{1,i} \log u_k + \alpha_{2,i} \log v_k \\ \beta_i &:= \beta_{1,i} \log u_k + \beta_{2,i} \log v_k \\ \delta_i &:= \delta_{1,i} \log u_k + \delta_{2,i} \log v_k \end{aligned}$$

$\theta_i$  schreibt sich dann in  $(u_k, v_k)$ -Koordinaten:

$$\tilde{\theta}_i(u_k, v_k) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i (\hat{g}_1 + \hat{g}_2)} u_k^{(\alpha_{1,i} \hat{g}_1^2 + 2\beta_{1,i} \hat{g}_1 \hat{g}_2 + \delta_{1,i} \hat{g}_2^2)/2} \cdot v_k^{(\alpha_{2,i} \hat{g}_1^2 + 2\beta_{2,i} \hat{g}_1 \hat{g}_2 + \delta_{2,i} \hat{g}_2^2)/2}$$

mit  $g = (g_1, g_2)$  und  $\hat{g}_1 := g_1 + \frac{1}{2}$ ,  $\hat{g}_2 := g_2 + \frac{1}{2}$ .

$$\text{für } k = 0 \text{ ist : } (\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}) = \begin{cases} (5,1) & \text{für } i=1 \\ (8,1) & \text{für } i=2 \end{cases}$$

$$(\beta_{1,i}, \beta_{2,i}) = \begin{cases} (4,0) & \text{für } i=1 \\ (2,0) & \text{für } i=2 \end{cases}$$

$$(\delta_{1,i}, \delta_{2,i}) = \begin{cases} (4,1) & \text{für } i=1 \\ (1,1) & \text{für } i=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit ist } & (\alpha_{2,i} (g_1 + \frac{1}{2})^2 + 2\beta_{2,i} (g_1 + \frac{1}{2}) (g_2 + \frac{1}{2}) + \delta_{2,i} (g_2 + \frac{1}{2})^2) / 2 \\ & = ((g_1 + \frac{1}{2})^2 + (g_2 + \frac{1}{2})^2) / 2 \\ & \geq \frac{1}{4} \quad , \quad " = " \quad \text{für } g_1, g_2 = 0, -1 . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta}_1(u_0, v_0) = 2v_0^{1/4} (u_0^{17/8} - u_0^{1/8}) + v_0^{5/4} \dots$$

$$\tilde{\theta}_2(u_0, v_0) = 2v_0^{1/4} (u_0^{13/8} - u_0^{5/8}) + v_0^{5/4} \dots$$

$$\Rightarrow (\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2^3)(u_0, v_0) = 16u_0^2 v_0 (u_0 - 1)^4 (u_0 + 1) + v_0^2 h_1(u_0, v_0)$$

$$(\tilde{\theta}_1^3 \tilde{\theta}_2)(u_0, v_0) = 16u_0 v_0 (u_0 - 1)^4 (u_0 + 1)^3 + v_0^2 h_2(u_0, v_0)$$

mit in  $U_0$  holomorphen Funktionen  $h_i(u_0, v_0)$ ,  $i=1, 2$ .

Nach (40) läßt sich jede holomorphe 2 - Form lokal als

$$(42) \quad \omega(z_1, z_2) = (a\theta_1\theta_2^3 + b\theta_1^3\theta_2)(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$$

schreiben.  $\omega$  transformiert sich dann in  $(u_0, v_0)$  - Koordinaten als

$$(43) \quad \tilde{\omega}(u_0, v_0) = (C_0(u_0 - 1)^4 (u_0 + 1) (au_0 + b(u_0 + 1)^2) + v_0 h_0^{a,b}(u_0, v_0)) du_0 \wedge dv_0$$

mit einer Konstanten  $C_0 \in \mathbb{C}$  und einer holomorphen Funktion  $h_0^{a,b}$ .

Analog berechnet man  $\tilde{\omega}(u_k, v_k)$  in  $U_k$  für  $1 \leq k \leq 8$ .

$$(44) \quad \tilde{\omega}(u_1, v_1) = (C_1(u_1 - 1) (av_1(u_1 - 1)^2 + b) + v_1 h_1^{a,b}(u_1, v_1)) du_1 \wedge dv_1$$

$$\tilde{\omega}(u_k, v_k) = (C_k(au_k v_k + b) + v_k h_k^{a,b}(u_k, v_k)) du_k \wedge dv_k, \quad 2 \leq k \leq 7$$

$$\tilde{\omega}(u_8, v_8) = (C_8(u_8 - 1) (av_8 u_8 (u_8 - 1)^2 + b) + v_8 h_8^{a,b}(u_8, v_8)) du_8 \wedge dv_8 .$$

mit Konstanten  $C_k$  und holomorphen Funktionen  $h_k^{a,b}(u_k, v_k)$ .

Seien nun  $(u'_k, v'_k)$  Koordinaten in einer Umgebung  $U'_k$  der Auflösungskurven  $S'_k$  der zweiten Spitze. Nach (41) ist

$$\alpha_5^* ((a\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2^3 + b\tilde{\theta}_1^3\tilde{\theta}_2)(u'_k, v'_k) du'_k \cdot dv'_k) = (b\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2^3 + a\tilde{\theta}_1^3\tilde{\theta}_2)(u'_k, v'_k) du'_k \cdot dv'_k$$

Damit folgt aus (43) und (44):

$$(45) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}(u'_0, v'_0) &= (C_0(u'_0-1)^4(u'_0+1)(bu'_0+a(u'_0+a)^2) + v'_0 h_0^{b,a}(u'_0, v'_0)) du'_0 \cdot dv'_0 \\ \tilde{\omega}(u'_1, v'_1) &= (C_1(u'_1-1)(bv'_1(u'_1-1)^2+a) + v'_1 h_1^{b,a}(u'_1, v'_1)) du'_1 \cdot dv'_1 \\ \tilde{\omega}(u'_k, v'_k) &= (C_k(bu'_k v'_k + a) + v'_k h_k^{b,a}(u'_k, v'_k)) du'_k \cdot dv'_k, \quad 2 \leq k \leq 7 \\ \tilde{\omega}(u'_8, v'_8) &= (C_8(u'_8-1)(bv'_8 u'_8 (u'_8-1)^2+a) + v'_8 h_8^{b,a}(u'_8, v'_8)) du'_8 \cdot dv'_8 \end{aligned}$$

Aus [9] Satz 1 folgt, daß für  $f(z) = \theta_1 \theta_2^3(z)$  und  $f(z) = \theta_1^3 \theta_2(z)$  auf  $X(65, \sigma)$  gilt:

$$(46) \quad f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in F_1 \cup F_4$$

$F_1$  und  $F_4$  haben je 2 Komponenten. Die Komponenten von  $F_1$  werden jeweils von einer (-2) und einer (-3)-Kurve der Auflösung der Quotientensingularitäten geschnitten.

In  $U_0$  ist  $F_1$  durch  $u_0=1$  und  $F_4$  durch  $u_0=-1$  gegeben.

In  $U_1$  und  $U_8$  ist  $F_4$  durch  $u_1=1$  bzw.  $u_8=1$  gegeben.

Desgleichen in  $U'_k$  für  $k=0, 1, 8$ . Sei  $F_4^1$  die Komponente von  $F_4$  die  $S_0$  schneidet,  $F_4^2$  diejenige, die  $S'_0$  schneidet.

( $\alpha_5$  operiert frei auf den Spitzen und den Komponenten von  $F_4$ ). In zwei Spezialfällen kann der Divisor von (42), also ein kanonischer Divisor auf  $Y(65)$  durch bekannte Kurven dargestellt werden. Es sind dies:

1.  $a=1, b=0$ , mit (43)-(46) gilt dann:

$$K_1 = 4F_1 + F_4^1 + 3F_4^2 + \sum_{i=1}^8 S_i + E$$

2.  $a=0, b=1$  :

$$K_2 = 4F_1 + 3F_4^1 + F_4^2 + \sum_{i=1}^8 S'_i + E$$

Dabei ist  $E$  eine Linearkombination der (-2)- und (-3)-Kurven die  $F_1$  schneiden.

Die holomorphe 2-Form  $\omega$  in (42) wird nach (41) genau dann von  $\alpha_5^*$  festgelassen, wenn  $a=b$  gilt. Der kanonische Divisor auf  $Y_m$  (65) wird daher von

$$(46) \quad \omega(z_1, z_2) = \theta_1^2 \theta_2^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) (z_1, z_2) dz_1 \cdot dz_2$$

bestimmt. Der Schnittpunkt des durch  $\omega$  bestimmten kanonischen Divisors  $K$  mit  $S_0$  ist nach (43) durch die Lösungen der Gleichung

$$(47) \quad u_0 + (u_0 + 1)^2 = u_0^2 + 3u_0 + 1$$

gegeben, d.h.  $u_0 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Von den Auflösungskurven wird  $S_0$  nur in  $u_0=0$  ( $S_8$ ) und in  $u_0=\infty$  ( $S_1$ ) geschnitten. Die Kurven  $F_N$  schneiden  $S_0$  in  $u_0=0, \infty$  oder in  $u_0 = \xi$  für eine Einheitswurzel  $\xi$ . Da die Lösungen von (47) keine Einheitswurzeln sind, gilt:

Satz 9: Der kanonische Divisor auf  $Y_m$  (65) kann nicht durch Kurven der Singularitätenauflösungen und Modulkurven dargestellt werden.

Anhang: Legendre- und Hilbertsymbol

Definition: Sei  $D$  die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers, dann ist für eine Primzahl  $p \nmid D$  die Primdiskriminante  $D_{(p)}$  definiert als

$$D_{(p)} := \begin{cases} p & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -p & p \equiv 3 \pmod{4} \\ -4 & p=2 \text{ und } D \equiv 4 \pmod{8} \\ 8 & \text{ " und } D \equiv 0 \pmod{8}, D/8 \equiv 1 \pmod{4} \\ -8 & \text{ " und " , } D/8 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Die Eigenschaften des Legendresymbols ( $\left[ \frac{\cdot}{\cdot} \right]$ ):

(i) Für  $a, m \in \mathbb{N}$  mit  $a, m$  ungerade und  $(a, m) = 1$  ist

$$\left[ \frac{a}{m} \right] = \left[ \frac{m}{a} \right]^{(m-1)(a-1)/4}$$

(ii) Für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  ungerade ist:  $\left[ \frac{-1}{m} \right] = (-1)^{(m-1)/2}$

$$\left[ \frac{2}{m} \right] = (-1)^{(m^2-1)/8}$$

(iii) Für  $a, a', m \in \mathbb{N}$ ,  $(a, m) = 1$  und  $a \equiv a' \pmod{m}$  gilt

$$\left[ \frac{a}{m} \right] = \left[ \frac{a'}{m} \right]$$

(iv) Für  $a, a', m \in \mathbb{N}$ ,  $(a, m) = 1$ ,  $(a', m) = 1$  gilt

$$\left[ \frac{a \cdot a'}{m} \right] = \left[ \frac{a}{m} \right] \cdot \left[ \frac{a'}{m} \right]$$

Definition des Hilbertsymbols:

(i)  $p$  prim,  $p \neq 2$   $a = p^\alpha u$ ,  $b = p^\beta v$ ,  $(u, p) = 1$ ,  $(v, p) = 1$

$$\text{dann ist } \left[ \frac{a, b}{p} \right] := (-1)^{\alpha\beta(p-1)/2} \left[ \frac{u}{p} \right]^\beta \left[ \frac{v}{p} \right]^\alpha$$

(ii)  $a = 2^\alpha u$ ,  $b = 2^\beta v$ ,  $(u, 2) = (v, 2) = 1$

$$\text{dann ist } \left[ \frac{a, b}{2} \right] := (-1)^{(u-1)(v-1)/4 + \alpha(v^2-1)/8 + \beta(u^2-1)/8}$$

Lemma: Sei  $p|D$ ,  $p$  prim und  $p \nmid N$ , dann ist

$$\left(\frac{N, D}{p}\right) = \left(\frac{D(p)}{N}\right)$$

Beweis: 1. Fall:  $p \neq 2$ , dann ist  $D = p \cdot D'$  mit  $(D', p) = 1$ .

Nach der Definition von  $D_{(p)}$  ist in diesem Fall

$$D_{(p)} = (-1)^{(p-1)/2} \cdot p.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{N, D}{p}\right) &= \left(\frac{N}{p}\right) = (-1)^{(N-1)(p-1)/4} \left(\frac{p}{N}\right) \\ &= \left(\frac{(-1)^{(p-1)/2}}{N}\right) \left(\frac{p}{N}\right) = \left(\frac{D(p)}{N}\right) \end{aligned}$$

2. Fall:  $p = 2$ , dann ist  $D = 2^\beta D'$  mit  $(2, D') = 1$ .

Nach Definition ist  $D_{(2)} = 2^\beta (-1)^{(D'-1)/2}$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{N, D}{p}\right) &= (-1)^{(N-1)(D'-1)/4 + \beta(N-1)/2} \\ &= \left(\frac{2}{N}\right)^\beta (-1)^{(N-1)(D'-1)/4} \\ &= \left(\frac{2}{N}\right)^\beta \left(\frac{(-1)^{(D'-1)/2}}{N}\right) = \left(\frac{D(2)}{N}\right) \end{aligned}$$

Q.E.D

Tabelle I: Die Flächen  $Y(D,B)$ 

D	B	$\sigma$	ZE	LA	LO	A2	A3+	A3-	x	C1	C10
40	3	--	7	-8	8	6	2	2	2	-4	0
60	7	-+-	12	-8	12	8	6	0	3	-2	0
60	17	+--	12	-12	8	8	0	6	3	-4	0
65	2	--	16	-14	14	8	2	2	3	-4	0
85	3	--	18	-10	10	4	6	6	4	0	2
105	2	--+	36	-32	16	8	0	6	4	-8	0
120	17	+--	34	-24	8	12	2	8	5	-2	4

Erklärung:  $\sigma :=$  Vorzeichenfolge von  $\left(\frac{B,D}{P_i}\right)$  mit  $p_i | D$ ,

$$LA := \sum_{i=0}^{l-1} (2-b_i)$$

$$LO := 1$$

$$ZE := 6 \cdot \zeta_K(-1)$$

$$C1 := c_1^2$$

$$C10 := c_1^2 + \tau \quad (\text{siehe S.12 (11)})$$

Tabelle II

## KLEIN-FRICKE-GRUPPEN

N	A2	A3	$\sigma$	E	C1
1	1	1	1	2	1
2	1	0	2	2	1
3	0	1	2	2	1
4	0	0	3	2	1
5	2	0	2	2	0
6	0	0	4	2	0
7	0	2	2	2	0
8	0	0	4	2	0
9	0	0	4	2	0
10	2	0	4	2	-2
12	0	0	6	2	-2
13	2	2	2	2	-2
16	0	0	6	2	-2
18	0	0	8	2	-4
25	2	0	6	2	-4

$\sigma :=$  Anzahl der Spitzen von  $\overline{H/\Gamma_{\circ}}(N)$

$E := e(\overline{H/\Gamma_{\circ}}(N))$

$C1 := c_1(N) = 2e(\overline{H/\Gamma_{\circ}}(N)) - A2 - A3 - \sigma$

Tabelle III: Spitzenaufösungen

$D = 40, B = 3, \sigma = --$	$k$	$-b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = -1$	0	4	8	2
	1	3	8	3
	2	2	10	5
	3	3	10	3
$D = 44, B = 7, \sigma = --$	$k$	$b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = 1$	0	5	10	2
	1	2	10	7
	2	2	18	10
	3	2	22	11
	4	2	22	10
	5	2	18	7
$D = 57, B = 2, \sigma = --$	$k$	$b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = 1$	0	3	9	3
	1	5	9	2
	2	2	11	8
	3	2	21	12
	4	2	27	14
	5	2	29	14
	6	2	27	12
	7	2	21	8
	8	5	11	2
$D = 60, B = 7, \sigma = -+-$	$k$	$b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = 1$	0	4	12	3
	1	2	12	7
	2	2	16	7
$D = 60, B = 17, \sigma = +--$	$k$	$b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = 1$	0	5	10	2
	1	2	10	5
$D = 65, B = 2, \sigma = --$	$k$	$b_k$	$M_k$	$N_k$
$N(\epsilon) = -1$	0	5	9	2
	1	2	11	7
	2	2	17	8
	3	3	15	5
	4	2	15	8
	5	2	17	7
	6	5	11	2

Tabelle III: Spitzenauflösungen

D = 93, B = 11, $\sigma = --$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	5	15	3
	1	2	15	11
	2	2	29	17
	3	2	39	21
	4	2	45	23
	5	2	47	23
	6	2	45	21
	7	2	39	17
	8	2	29	11
D = 105, B = 2, $\sigma = ---+$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	6	11	2
	1	2	13	8
	2	2	19	8
	3	6	13	2
D = 120, B = 17, $\sigma = +---$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	6	12	2
	1	4	12	3
D = 124, B = 1, $\sigma = ++$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	12	12	1
	1	3	12	5
	2	2	18	10
	3	2	22	9
	4	7	14	2
	5	2	14	9
	6	2	22	10
	7	3	18	5
D = 141, B = 1, $\sigma = ++++$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	13	13	1
	1	2	13	7
	2	5	15	3
	3	2	15	7
D = 156, B = 1, $\sigma = ++++$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	14	14	1
	1	2	14	10
	2	2	26	13
	3	2	26	10
D = 213, B = 1, $\sigma = +++$	k	$b_k$	$M_k$	$N_k$
N( $\epsilon$ ) = 1	0	15	15	1
	1	5	15	3

Tabelle IV: Die Flächen  $Y_m(D,B)$ (S1, S2 siehe S.26,  $\tau$  S.27 )

D	B	$\sigma$	Y:	x	C1	TYP	S1	S2	YM:	x	C1	$\tau$	C10	TYP
21	5	--		2	-1	K3	0	-5		1	-3	.	.	*RAT.
21	1	++		1	-6	RAT.	1	0		1	-3	.	.	*RAT.
24	5	--		2	-2	K3	2	-2		2	-2	2	0	*K3
24	1	++		1	-7	RAT.	1	-7		1	-7	.	.	*RAT.
28	3	--		2	-2	K3	2	0		2	-1	1	0	*K3
28	1	++		1	-8	RAT.	1	-4		1	-6	.	.	*RAT.
33	2	--		2	-4	K3	2	0		2	-2	2	0	*K3
33	1	++		1	-9	RAT.	1	-5		1	-7	.	.	*RAT.
40	3	--		2	-4	K3	2	-2		2	-3	3	0	*K3
40	1	++		2	-8	K3	2	-2		2	-5	5	0	*K3
44	7	--		3	-2	ELLIP.	1	-6		2	-4	4	0	K3
44	1	++		2	-8	K3	2	-2		2	-5	5	0	*K3
56	5	--		4	2	ALLG.	2	-4		3	-1	1	0	ELLIP.
56	1	++		2	-10	K3	2	-4		2	-7	7	0	*K3
57	2	--		3	-5	ELLIP.	1	-5		2	-5	4	-1	K3
57	1	++		2	-10	K3	2	0		2	-5	5	0	*K3
60	7	+-		3	-2	ELLIP.	5	-10		2	-3	3	0	K3
60	17	+-		3	-4	ELLIP.	5	-8		2	-3	3	0	K3
60	1	+++		1	-18	RAT.	3	-18		1	-18	.	.	*RAT.
65	2	--		3	-4	ELLIP.	1	0		2	-2	2	0	ELLIP.
65	1	++		3	-8	ELLIP.	1	0		2	-4	4	0	ELLIP.
69	1	++		2	-11	K3	0	-15		1	-13	.	.	*RAT.
76	3	--		4	-2	ALLG.	2	-6		3	-4	4	0	ELLIP.
76	1	++		3	-8	ELLIP.	3	-2		3	-5	5	0	*ELLIP.
77	1	++		3	-8	ELLIP.	1	0		2	-4	4	0	ELLIP.
85	3	--		4	0	ALLG.	2	0		3	0	1	1	*ALLG.
85	1	++		4	-8	ELLIP.	2	0		3	-4	4	0	*ELLIP.
88	7	--		5	2	ALLG.	3	-2		4	0	2	2	*ALLG.
88	1	++		3	-10	ELLIP.	3	-2		3	-6	6	0	*ELLIP.
92	1	++		3	-10	ELLIP.	1	-12		2	-11	11	0	K3
93	11	--		6	5	ALLG.	0	-15		3	-5	5	0	ELLIP.
93	1	++		3	-10	ELLIP.	3	0		3	-5	5	0	*ELLIP.
104	5	--		5	4	ALLG.	3	-6		4	-1	3	2	*ALLG.
104	1	++		5	-4	ALLG.	3	-6		4	-5	5	0	ELLIP.
105	2	+-		4	-8	ELLIP.	8	0		3	-2	2	0	*ELLIP.
105	13	+-		6	6	ALLG.	6	-10		3	-1	2	1	*ALLG.
105	1	+++		2	-22	K3	6	-10		2	-8	8	0	*K3
120	29	+-		9	14	ALLG.	7	-14		4	0	2	2	*ALLG.
120	17	+-		5	-2	ALLG.	7	-14		3	-4	4	0	ELLIP.
120	1	+++		3	-20	ELLIP.	9	-4		3	-6	6	0	*ELLIP.
124	1	++		4	-8	ALLG.	2	-12		3	-10	10	0	ELLIP.
129	2	--		7	3	ALLG.	1	-5		4	-1	4	3	*ALLG.
129	1	++		6	-2	ALLG.	2	0		4	-1	5	4	*ALLG.
133	1	++		5	-4	ALLG.	1	0		3	-2	4	2	*ALLG.
136	1	++		6	-2	ALLG.	4	-4		5	-3	7	4	*ALLG.
140	23	+-		6	4	ALLG.	6	-12		3	-2	3	1	*ALLG.
140	1	+++		4	-16	ELLIP.	8	-4		3	-5	5	0	*ELLIP.
141	1	++		4	-9	ALLG.	0	-25		2	-17	17	0	K3
152	1	++		6	2	ALLG.	4	-6		5	-2	6	4	*ALLG.
156	5	+-		7	6	ALLG.	5	-26		3	-5	5	0	ELLIP.
156	1	+++		5	-16	ALLG.	7	-16		3	-8	8	0	ELLIP.

Tabelle IV

D	B	σ	Y:	x	C1	TYP	S1	S2	YM:	x	C1	τ	C10	TYP
161	1	++		5	-8	ALLG.	3	0		4	-4	6	2	*ALLG.
165	23	---+		8	12	ALLG.	4	-20		3	-2	3	1	*ALLG.
165	1	+++		4	-20	ELLIP.	8	0		3	-5	5	0	*ELLIP.
168	13	+-		8	16	ALLG.	8	-24		4	-2	4	2	*ALLG.
168	1	+++		4	-16	ALLG.	8	-24		3	-10	10	0	ELLIP.
177	1	++		7	5	ALLG.	3	-15		5	-5	10	5	*ALLG.
184	1	++		6	-4	ALLG.	4	-4		5	-4	8	4	*ALLG.
198	1	++		6	2	ALLG.	2	-20		4	-9	11	2	*ALLG.
204	7	+-	10	24	ALLG.	6	-32		4	-2	4	2	*ALLG.	
204	1	+++		8	-8	ALLG.	8	-24		4	-8	10	2	*ALLG.
213	1	++		6	1	ALLG.	0	-35		3	-17	17	0	ELLIP.
220	1	+++		7	-4	ALLG.	9	-16		4	-5	7	2	*ALLG.
264	1	+++		11	8	ALLG.	13	-8		6	0	6	6	*ALLG.
284	1	++		11	22	ALLG.	1	-28		6	-3	11	8	*ALLG.
285	13	+-		12	36	ALLG.	4	-40		4	-1	5	4	*ALLG.
285	1	+++		8	-4	ALLG.	4	-40		3	-11	12	1	*ALLG.
312	1	+++		9	6	ALLG.	11	-34		5	-7	11	4	*ALLG.
348	1	+++		13	26	ALLG.	7	-54		5	-7	13	6	*ALLG.
357	1	+++		10	10	ALLG.	6	-50		4	-10	12	2	*ALLG.
429	1	+++		14	22	ALLG.	6	-50		5	-7	13	6	*ALLG.

YM(D,B) MIT x &lt; 4 VOM ALLG. TYP

D	B	σ	Y:	x	C1	TYP	S1	S2	YM:	x	C1	τ	C10	TYP
60	11	---+		5	4	ALLG.	7	0		3	1	0	1	*ALLG.
77	6	--		5	4	ALLG.	1	0		3	2	0	2	*ALLG.
95	3	--		4	0	ALLG.	2	0		3	0	1	1	*ALLG.
105	13	+-		6	6	ALLG.	6	-10		3	-1	2	1	*ALLG.
133	1	++		5	-4	ALLG.	1	0		3	-2	4	2	*ALLG.
140	23	---+		6	4	ALLG.	6	-12		3	-2	3	1	*ALLG.
165	23	---+		8	12	ALLG.	4	-20		3	-2	3	1	*ALLG.
285	1	+++		8	-4	ALLG.	4	-40		3	-11	12	1	*ALLG.

TABELLE V;1: AUSNAHMEKURVEN AUF YM

D = 1 (4)

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	KOMP.	$\tau$
1	1		1	1	1	1	1	3
2	1		2	1	1	0	1	2
3	1		3	1	0	1	1	1
3	3	+	1	1	1	0	1	2
4	1		1	4	0	2	1	1
4	1		4	1	0	0	1	1
6	3	-	1	2	1	0	1	2
9	3	+	1	3	0	1	1	1
9	3	+	3	1	2	0	2	4
12	3	+	1	4	0	0	1	1
18	3	-	3	2	0	2	2	2
36	3	+	3	4	0	0	2	2

D = 4 (8)

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	KOMP.	$\tau$
1	1		1	1	1	1	1	3
2	2	+	1	1	1	0	1	2
3	1		3	1	0	1	1	1
3	3	+	1	1	1	0	1	2
4	4	+	1	1	1	0	1	2
6	2	-	1	3	0	1	1	1
6	6	--	1	1	1	0	1	2
8	4	+	1	2	0	0	1	1
8	4	+	2	1	0	0	1	1
9	3	+	1	3	0	1	1	1
9	3	+	3	1	2	0	2	4
16	4	+	4	1	0	0	2	2
18	6	--	3	1	0	1	1	1

D = 0 (8)

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	KOMP.	$\tau$
1	1		1	1	1	1	1	3
2	2	+	1	1	1	0	1	2
3	1		3	1	0	1	1	1
3	3	+	1	1	1	0	1	2
4	4	+	1	1	1	0	1	2
6	2	-	1	3	0	1	1	1
6	6	--	1	1	1	0	1	2
9	3	+	1	3	0	1	1	1
9	3	+	3	1	2	0	2	4
18	6	--	3	1	0	1	1	1

Tabelle V;2 : Kurven  $F_N$  auf  $Y_m(D,B)$  $D \equiv 1 (4)$ 

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	Komp.	C1
8	1		8	1	0	0	1	0
10	5	+	2	1	3	0	1	-1
11	11	+	1	1	4	0	1	-1
13	13	+	1	1	3	1	1	-1
24	3	-	1	8	2	0	1	0
27	3	+	9	1	2	2	2	0

 $D \equiv 4 (8)$ 

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	Komp.	C1
5	1		5	1	2	0	1	0
7	1		7	1	0	2	1	0
9	1		1	9	2	0	1	0
9	1		9	1	0	0	1	0
10	2	+	5	1	0	0	1	0
12	4	-	1	3	2	0	1	0
32	4	+	8	1	1	0	2	0

 $D \equiv 0 (8)$ 

N	(N,D)	$\sigma$	N1	N2	A2	A3	Komp.	C1
8	8	+	1	1	3	0	1	0
10	2	+	5	1	0	0	1	0
15	3	-	1	5	2	0	1	0
30	30	-+-	1	1	3	0	1	0
36	12	++	3	1	2	0	1	0

Tabelle VI : Die Flächen  $Y_{\omega}(D,B)$  .

D	B	o	x	C1	ω	A2	A4+	A4-	A6+	A6-	S1	S2	x	C1
44	7	--	3	-2	2	2	3	1	0	0	1	-6	2	-4
56	5	--	4	2	2	4	2	2	0	0	2	-4	3	-1
57	2	--	3	-5	3	5	0	0	1	0	1	-5	2	-5
60	7	+-	3	-2	2	4	0	4	0	0	* 3	0	3	-1
					3	6	0	0	2	0	1	-10	2	-6
					6	4	0	0	0	0	* 1	0	2	-1
60	17	+-	3	-4	2	4	4	0	0	0	1	-8	2	-6
					3	6	0	0	0	2	* 3	0	3	-2
					6	4	0	0	0	0	* 1	0	2	-2
65	2	--	3	-4	5	4	0	0	0	0	* 1	0	2	-2
65	1	++	3	-8	5	4	0	0	0	0	* 1	0	2	-4
76	3	--	4	-2	2	6	3	1	0	0	2	-6	3	-4
77	1	++	3	-8	7	4	0	0	0	0	* 1	0	2	-4
92	1	++	3	-10	2	4	6	0	0	0	1	-12	2	-11
93	11	--	6	5	3	3	0	0	3	0	0	-15	3	-5
104	1	++	5	-4	2	6	3	3	0	0	3	-6	4	-5
120	17	+-	5	-2	2	8	2	2	0	0	3	-4	4	-3
					3	6	0	0	2	0	1	-10	3	-6
					5	12	0	0	0	0	* 3	0	4	-1
124	1	++	4	-8	2	8	6	0	0	0	2	-12	3	-10
141	1	++	4	-9	3	5	0	0	5	0	0	-25	2	-17
156	5	+-	7	6	2	4	8	0	0	0	1	-16	4	-5
					3	6	0	0	2	0	1	-10	4	-2
					6	12	0	0	0	0	* 3	0	5	3
156	1	+++	5	-16	2	4	8	0	0	0	1	-16	3	-16
					3	6	0	0	0	2	* 3	0	4	-8
					6	12	0	0	0	0	* 3	0	4	-8
168	1	+++	4	-16	2	12	2	2	0	0	4	-4	4	-10
					3	12	0	0	4	0	2	-20	3	-18
					6	8	0	0	0	0	* 2	0	3	-8
213	1	++	6	1	3	7	0	0	7	0	0	-35	3	-17

S1 und S2 siehe S. 31

Tabelle VII : Fixpunktfreie  $\alpha_{\omega} \tau$  auf  $Y(D, B)$ 

D	B	$\sigma$	$\omega$
95	1	++	5
105	2	---+	5
105	26	--+-	7
105	1	+++	3
140	23	---+	10
140	1	+++	5
165	29	--+-	5
165	1	+++	5
168	11	---+	6
168	1	+++	3
204	35	---+	6
204	1	+++	3
205	3	--	5
221	5	--	13
273	17	---+	7
273	2	--+-	3
273	1	+++	13
280	23	---+	5
280	1	+++	7
285	14	--+-	5
285	1	+++	5
345	2	---+	5
345	11	--+-	3
345	1	+++	15
357	26	---+	7
357	11	--+-	17
357	10	+---	17
357	1	+++	3
364	11	--+-	14
364	1	+++	7
365	1	++	5
385	3	---+	11
385	1	+++	5
			7
408	47	---+	3
408	1	+++	6
429	17	---+	13
429	1	+++	13
445	3	--	5
460	3	---+	10
460	1	+++	5
465	2	---+	15
465	11	--+-	5
465	1	+++	3
476	1	+++	7
			14
485	1	++	5
492	23	---+	6
492	1	+++	3
493	1	++	17

Literatur:

- [1] : Armstrong, M. A.: "The fundamental group of the orbit space of a discontinuous group." Proc. Camb. Phil. Soc. (1968), 64, 299.
- [2] : Bassendowski, D.: "Klassifikation Hilbertscher Modulflächen zur symmetrischen Hurwitz-Maaß-Erweiterung :  $D \cong 1(4)$ ." Dissertation, Bonn, (erscheint 1983).
- [3] : Bassendowski, D.: "Programme und Tabellen zu Hilbertschen Modulflächen. " Bonn, 1982 (unveröffentlicht).
- [4] : Borewicz - Safarevic: "Zahlentheorie", Basel, 1966.
- [5] : Gut, M.: "Abschätzungen für die Klassenzahlen der quadratischen Körper." Acta Arithmetica VIII, (1963).
- [6] : Hausmann, W.: "Kurven auf Hilbertschen Modulflächen." Dissertation, Bonn 1980.
- [7] : Hausmann, W.: "The Fixed Points of the Symmetric Hilbert Modular Group of a Real Quadratic Field with Arbitrary Discriminant." Math. Ann. 260, 31-50 (1982).
- [8] : Helling, H.: "Bestimmung der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe." Math. Zeitschr. 92, 269-280 (1966).
- [9] : Hermann, C.F.: "Thetafunktionen und symmetrische Modulformen zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{65})$  ." (unveröffentlicht).
- [10] : Hirzebruch, F.: "Topological Methods in Algebraic Geometry." Berlin 1966.
- [11] : Hirzebruch, F.: "Hilbert Modular Surfaces ." Enseignement math. 19, 183-281 (1973).
- [12] : Hirzebruch, F.: "Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten. " in: Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß.
- [13] : Hirzebruch-Van de Ven: "Hilbert Modular Surfaces and the Classification of Algebraic Surfaces." Inventiones math. 23, 1-29 (1974).
- [14] : Hirzebruch-Zagier: "Classification of Hilbert Modular Surfaces. " in: Complex Analysis and Algebraic Geometry. Cambridge 1977.

- [15] : Hirzebruch-Zagier: "The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory.", Boston 1974.
- [16] : Kodaira, K: "On Homotopy K3 Surfaces." in: Essays on Topology and Related Topics, Berlin 1970.
- [17] : Koll, F.J.: "Die elliptischen Fixpunkte und Spitzen der diskreten Erweiterungen der Hilbertschen Modulgruppe.", Dissertation, Bonn 1976.
- [18] : Maaß, H.: "Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe." Math. Zeitschr. 51, 255-261 (1948).
- [19] : Serre, J.-P.: "A course in Arithmetic." New York 1973.
- [20] : Shimura : "Introduction to the Theory of Automorphic Functions."
- [21] : Shvartsman, O.V.: "Simple-Connectivity of a Factor-Space of the Modular Hilbert Group." in: Functional Analysis and its Applications 8, (1974).
- [22] : Ueno, K.: "Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces." Berlin 1975.
- [23] : Van der Geer, G.: "General Theory of the Hilbert Modular Surfaces.", Montreal 1981.