Parabolisch–singuläre Dualität

für Kategorie $\mathcal{O}$

by

Wolfgang Soergel

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

MPI/89 – 68

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR MATHEMATIK
DER DIREKTOR

Max-Planck-Institut für Mathematik · Gottfried-Claren-Straße 26, 5300 Bonn 3

Gottfried-Claren-Straße 26
5300 Bonn 3
Telefon (02 28) 402243-244

Bonn, October 13, 1989

To all Mathematicians in the Max-Planck-Institut,

Professor Dr. Klaus Matthes , Director of the Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik of the Academy of Sciences of the DDR, is visiting the Max-Planck-Institut from October 16 to October 19, 1989. His visit is important for the exchange of mathematicians of both institutes.

Professor Matthes is lecturing in the

Oberseminar Harder/Hirzebruch/Zagier

which takes place on

Wednesday, October 18, 1989 at 3.00 pm. in the Seminarraum.

Title:

"Equilibrium distributions of recurrent and transient type
in branching models with infinitely many individuals".

All Mathematicians of the MPI are invited.

F. Hirzebruch

Professor F. Hirzebruch

Parabolisch-singuläre Dualität für Kategorie $\mathcal{O}$

Wolfgang Soergel*
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Strasse 26
D-53 Bonn 3
Germany
UNM60E at DBNRHRZ1.BITNET (subject Soergel)

October 12, 1989

Abstract

We prove a generalization of the duality conjectures of Beilinson and Ginsburg [BGi].

Contents

*Ausgedacht im Rahmen eines Stipendiums der Deutschen Forschungsgemeindschaft und in der anschließenden Zeit am MPI in Bonn

1 Einleitung

1.1 Parabolisch-singuläre Dualität für Algebren

Seien $\mathbf{g} \supset \mathbf{b} \supset \mathbf{h}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, eine Borelsche und eine Cartansche. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbf{g}, \mathbf{b})$ die Kategorie aller endlich erzeugten g-Moduln, die als b-Moduln lokal endlich sind und als h-Moduln halbeinfach. Sei $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{g})$ die universelle Einhüllende von g. Für $\lambda \in \mathbf{h}^*$ betrachtet man in $\mathcal{O}$ den Verma-Modul $M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathbf{g}) \otimes_{\mathbf{b}} \mathbf{C}_\lambda$, seinen einfachen Quotienten $L(\lambda)$ und dessen projektive Decke $P(\lambda)$ in $\mathcal{O}$.

Sei $\rho \in \mathbf{h}^*$ charakterisiert dadurch, daß 2ρ der Charakter des h-Moduls $\bigwedge^{max} \mathbf{b}$ ist, also $\bigwedge^{max} \mathbf{b} \cong \mathbf{C}_{2\rho}$. Sei $\mathcal{W} \subset GL(\mathbf{h}^*)$ die Weylgruppe, $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ die durch b bestimmte Menge von einfachen Spiegelungen, $w_\circ \in \mathcal{W}$ das längste Element. Ich setze $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho \forall w \in \mathcal{W}, \lambda \in \mathbf{h}^*$.

Für jede Teilmenge $\mathcal{S}_\iota \subset \mathcal{S}$ - hier steht ι für einen variablen Index - bezeichne $\mathcal{W}_\iota \subset \mathcal{W}$ die von $\mathcal{S}_\iota$ erzeugte Untergruppe, $w_\iota \in \mathcal{W}_\iota$ deren längstes Element und $\mathcal{W}^\iota \subset \mathcal{W}$ die Menge der kürzesten Repräsentanten für die Nebenklassen $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\iota$.

Zu $\lambda \in \mathbf{h}^*$ ganz und dominant definiere ich die Kategorie $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}$ aller Objekte, deren (verallgemeinerter) zentraler Charakter mit dem von $L(\lambda)$ übereinstimmt. Mit $\mathcal{S}_\lambda = \{s \in \mathcal{S} | s \cdot \lambda = \lambda\}$ wird $\{L(x \cdot \lambda)\}_{x \in \mathcal{W}^\lambda}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher Objekte aus $\mathcal{O}_\lambda$. Auch in $\mathcal{O}_\lambda$ sind die $P(x \cdot \lambda)$ projektive Decken der $L(x \cdot \lambda)$.

Zu $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ einer Parabolischen über $\mathfrak{b}$ definiere ich die Kategorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{O}_0$ aller Objekte, die lokal endlich sind als $\mathfrak{q}$-Moduln. Mit der zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Menge $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{S}$ von einfachen Spiegelungen wird $\{L(x^{-1} \cdot 0)\}_{x \in \mathcal{W}^{\mathfrak{q}}}$ ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher Objekte aus $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$. Wir parametrisieren sie um und setzen $L_x^{\mathfrak{q}} = L(w_{\mathfrak{q}} x^{-1} w_\circ \cdot 0) \in \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$. Jedes $L_x^{\mathfrak{q}}$ hat eine projektive Decke $P_x^{\mathfrak{q}}$ in $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$. Wir werden zeigen:

Theorem 1 *Seien $\lambda, \mathfrak{q}$ wie eben und sei $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$. So gibt es Isomorphismen von $\mathbb{C}$-Algebren $End_{\mathcal{O}_\lambda}(\bigoplus_x P(x \cdot \lambda)) \cong Ext^*_{\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}}(\bigoplus_x L_x^{\mathfrak{q}}, \bigoplus_x L_x^{\mathfrak{q}})$ und $End_{\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}}(\bigoplus_x P_x^{\mathfrak{q}}) \cong Ext^*_{\mathcal{O}_\lambda}(\bigoplus_x L(x \cdot \lambda), \bigoplus_x L(x \cdot \lambda))$.*

Bemerkungen:

1. Ich kann mit den gegebenen Daten obige Isomorphismen nur bis auf Konjugation mit Einheiten angeben.
2. Seien 1_x die offensichtlichen paarweise orthogonalen Idempotenten in unseren vier Algebren. Die Isomorphismen können so gewählt werden, daß sich die 1_x entsprechen.
3. Eine kombinatorische Beschreibung obiger Algebren wird in der Bemerkung nach Definition 1 bzw. der Bemerkung nach Theorem 8 gegeben.
4. Auf der rechten Seite unserer Isomorphismen steht jeweils eine graduierte Algebra. Wir werden zeigen, daß diese graduierten Algebren zueinander duale Koszul-Algebren sind. (Die Terminologie wird in Abschnitt 2.6 erklärt.)
5. Im Fall $\lambda = 0$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{b}$ ist $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$ und das Theorem spezialisiert zu "Beilinson-Ginsburg-Dualität", wie sie in [BGi] vermutet und in [So2] bewiesen wird.

1.2 Parabolisch-singuläre Dualität für Kategorien

Für einen Ring R bezeichne ich mit $R-mod$ die Kategorie aller endlich erzeugten R-Moduln. Für einen graduierten Ring $R = \bigoplus R_i$ bezeichne ich mit $R - Mod$ die Kategorie aller endlich erzeugten graduierten R-Moduln $M = \bigoplus M_i$. Ich erkläre $M(n)$ durch $M(n)_i = M_{i-n}$.

Seien $G \supset Q \supset B \supset H$ eine komplexe zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe, eine Parabolische, eine Borelsche und ein maximaler Torus. Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ das zugehörige Coxeter-System, $\mathcal{S}_Q \subset \mathcal{S}$ die Menge der einfachen Spiegelungen aus Q.

Wir werden zunächst graduierte C-Algebren endlicher Dimension $A_Q = \bigoplus_{i\geq 0} A_Q^i$ und $A^Q = \bigoplus_{i\geq 0} A_i^Q$ konstruieren, die für $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_Q = \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ (unkanonisch) isomorph sind zu den graduierten Algebren von eben. Dann setzen wir $\tilde{\mathcal{O}}_Q = Mod - A_Q$ sowie $\tilde{\mathcal{O}}^Q = Mod - A^Q$ und erklären Objekte $L_Q^x, M_Q^x, P_Q^x \in \tilde{\mathcal{O}}_Q$ sowie $L_x^Q, M_x^Q, P_x^Q \in \tilde{\mathcal{O}}^Q$ für alle $x \in \mathcal{W}^Q$. Die L sind jeweils einfach, eindimensional und konzentriert im Grad Null, die P sind ihre projektiven Decken, und die M gewisse "Verma-Moduln". Weiter erklären wir Dualitäten d auf $\tilde{\mathcal{O}}_Q$ und $\tilde{\mathcal{O}}^Q$. Schließlich zeigen wir die "parabolisch-singuläre Dualität":

Theorem 2 *Es gibt eine Äquivalenz triangulierter Kategorien*

$$\kappa : D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q) \longrightarrow D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)$$

so daß $\kappa(X[n]) = (\kappa X)[n], \kappa(X(n)) = (\kappa X)[-n](-n)$ *und* $\kappa d L_x^Q \cong P_Q^x, \kappa d M_x^Q \cong M_Q^x, \kappa d P_x^Q \cong L_Q^x$ *für alle* $x \in \mathcal{W}^Q$.

Bemerkungen:

1. Stärker als im Theorem formuliert werden wir sogar einen Funktor κ mit den versprochenen Eigenschaften konstruieren.

2. Für $\lambda \in \mathbf{h}^*$ ganz und dominant mit $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_Q$ werden wir eine (bis auf natürliche Äquivalenz wohlbestimmte) Äquivalenz von Kategorien $mod - A_Q \cong \mathcal{O}_\lambda$ angeben derart, daß das Vergessen der Graduierung

$$F : \tilde{\mathcal{O}}_Q = Mod - A_Q \longrightarrow mod - A_Q \cong \mathcal{O}_\lambda$$

unsere Objekte $L_Q^x, M_Q^x, P_Q^x \in \tilde{\mathcal{O}}_Q$ zu $L(x \cdot \lambda), M(x \cdot \lambda), P(x \cdot \lambda) \in \mathcal{O}_\lambda$ macht. Dies F kommutiert auch mit den Dualitäten, d.h. es gibt eine natürliche Äquivalenz $dF \cong Fd$ von Kofunktoren $\tilde{\mathcal{O}}_Q \to \mathcal{O}_\lambda$.

3. Für $\mathfrak{q} = LieQ$ werden wir eine Äquivalenz von Kategorien $mod - A^Q = \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$ angeben derart, daß das Vergessen der Graduierung

$$F : \tilde{\mathcal{O}}^Q = Mod - A^Q \longrightarrow mod - A^Q = \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$$

unsere Objekte $L_x^Q, P_x^Q \in \tilde{\mathcal{O}}^Q$ zu $L_x^{\mathfrak{q}}, P_x^{\mathfrak{q}} \in \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$ macht. Jedes $L_x^{\mathfrak{q}}$ ist Quotient eines "parabolischen Verma-Moduls" $M_x^{\mathfrak{q}}$ der Form $\mathbf{U} \otimes_{\mathfrak{q}} E$ für eine wohlbestimmte irreduzible endlichdimensionale Darstellung E von $\mathfrak{q}$. Es ist $FM_x^Q \cong M_x^{\mathfrak{q}}$. Schließlich kommutiert F auch mit den Dualitäten, $dF = Fd$.

4. Ich will nun die geometrische Bedeutung von $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ erklären. Sei $\mathcal{P}_B(G/Q)$ die Kategorie aller perversen Garben auf G/Q mit komplexen Koeffizienten, die glatt sind längs der Bruhat-Zellen. Für $x \in \mathcal{W}^Q$ bezeichne $\mathcal{L}_x^Q \in \mathcal{P}_B(G/Q)$ den Schnittkohomologie-Komplex der Schubert-Varietät $\overline{BxQ/Q}$ und $\mathcal{M}_x^Q \in \mathcal{P}_B(G/Q)$ den Standard-Modul mit $\mathcal{M}_x^Q \twoheadrightarrow \mathcal{L}_x^Q$.

   Wir werden eine Äquivalenz von Kategorien $mod{-}A^Q = \mathcal{P}_B(G/Q)$ angeben derart, daß das Vergessen der Graduierung

$$F : \tilde{\mathcal{O}}^Q = Mod - A^Q \longrightarrow mod - A^Q = \mathcal{P}_B(G/Q)$$

   unsere Objekte $L_x^Q, M_x^Q \in \tilde{\mathcal{O}}^Q$ zu $\mathcal{L}_x^Q, \mathcal{M}_x^Q \in \mathcal{P}_B(G/Q)$ macht. Genauer werden wir sogar $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ selbst mit Hilfe von gemischten Hodge-Moduln auf G/Q realisieren - das ist der Schlüssel zu allen Resultaten.

5. Das Theorem liefert uns insbesondere Isomorphismen

$$Hom_{D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q)}(L_x^Q, L_y^Q[n](i)) \to Hom_{D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)}(P_Q^x, P_Q^y[n-i](-i)).$$

   Mit der rechten Seite muss auch die linke Seite verschwinden für $i \neq n$ - "Erweiterungen einfacher Objekte sind rein" (mit Gewicht gleich Grad.) Es folgt der erste Isomorphismus von Theorem 1. Analog folgt auch der zweite.

6. Die Multiplizitäten einfacher Moduln in den Subquotienten der Gewichtsfiltrierung von $P_x^{\mathfrak{q}}$ sind bekannt. Mit κ erhält man Formeln für $dimExt^i_{\mathcal{O}}(L(x \cdot \lambda), L(y \cdot \lambda))$. Ähnlich ergeben sich auch Formeln für $dimExt^i_{\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}}(L_x^{\mathfrak{q}}, L_y^{\mathfrak{q}})$ und ein neuer Beweis der Formeln aus [Sol] für $dimExt^i_{\mathcal{O}}(M(x \cdot \lambda), L(y \cdot \lambda))$.

7. Für eine beliebige Koszul-Algebra endlicher Dimension konstruieren Beilinson und Ginsburg [BGi] die "Koszul-Dualität", eine Äquivalenz triangulierter Kategorien

$$K : D^b(Mod - A) \to D^b(Mod - A^!).$$

   Wir zeigen, daß A_Q und A^Q duale Koszul-Algebren sind, und geben sogar einen Isomorphismus $(A^Q)^! = A_Q$ an. Damit ergibt sich der Funktor κ des Theorems. Alle behaupteten Eigenschaften von κ bis auf $\kappa d M_x^Q \cong M_Q^x$ folgen dann rasch aus den Definitionen.

Vorliegende Arbeit baut auf [So2] und [BGi] auf. Die logische Abhängigkeit von [So2] ist so stark, daß man fast von einer Fortsetzung sprechen kann. Die logische Abhängigkeit von [BGi] beschränkt sich auf Abschnitt 2.6 und die Berechnung von Erweiterungen einfacher Objekte im nicht-singulären Fall dort. Meine philosophische Abhängigkeit von Beilinson und Ginsburg ist desto größer.

Ich will auch den Bezug zur "filtrierten Kategorie $\mathcal{O}$" von Irving [Ir] erwähnen. In gewisser Weise untersuchen wir hier die "graduierte Kategorie $\mathcal{O}$".

Schließlich arbeite ich viel mit den "gemischten Hodge-Moduln" von M. Saito. Das ist jedoch Bequemlichkeit und nicht Notwendigkeit. Alle Definitionen, Resultate und Beweise haben offensichtliche Analoga in der Sprache von [BBD].

2 Geometrie von Fahnenmannigfaltigkeiten

2.1 Notationen aus der algebraischen Geometrie

Sei X eine algebraische Varietät über $\mathbf{C}$. Bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Kategorie der perversen Garben auf X (mit komplexen Koeffizienten) und $\mathcal{D}(X) = D^b(\mathcal{P}(X))$ die zugehörige beschränkte derivierte Kategorie. Es ist auch $\mathcal{D}(X) = D^b_{const}(Sh(X_{an}))$ die derivierte Kategorie mit (algebraisch) konstruktibler beschränkter Kohomologie zur Kategorie $Sh(X_{an})$ aller Garben komplexer Vektorräume auf X_{an}. Wir haben zu unserer Verfügung Verdier-Dualität $d : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X), d : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ und die (perversen) Kohomologiefunktoren $H^i : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ sowie die Shifts $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}[n] \forall \mathcal{F} \in \mathcal{D}(X), n \in \mathbf{Z}$. Bezeichne $\underline{X} \in \mathcal{D}(X)$ die konstante Garbe $\mathbf{C}$ im Grad Null. Zu $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{D}(X)$ können wir die "Hom-Garbe" $\mathcal{RH}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{D}(X)$ bilden. Es ist $d\mathcal{F} = \mathcal{RH}om(\underline{X}, \mathcal{F})$. Jeder Morphismus $f : X \rightarrow Y$ führt zu zwei unter Verdier-Dualität konjugierten Paaren adjungierter Funktoren (f^*, f_*) und $(f_!, f^!)$ zwischen $\mathcal{D}(X)$ und $\mathcal{D}(Y)$.

Nun ordnet M. Saito [Sa1,Sa2,Sa3] feiner jeder algebraischen Varietät X über $\mathbf{C}$ die abelsche Kategorie $P(X)$ aller gemischten Hodge-Moduln mit komplexen Koeffizienten zu, samt ihrer beschränkten derivierten Kategorie $D^b(X) = D^b(P(X))$ und "vergesslichen Funktoren" $P(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $D(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)$. Wir bezeichnen weiter mit

$H^i : D(X) \to P(X)$ die perversen Kohomologiegruppen. Jeder Morphismus $f : X \to Y$ führt zu zwei unter Verdier-Dualität d konjugierten Paaren adjungierter Funktoren (f^*, f_*) und $(f_!, f^!)$ zwischen $D(X)$ und $D(Y)$. Sei $\underline{pt} \in P(pt) \subset D(pt)$ die gemischte Hodge-Struktur $\mathbf{R}$ vom Typ $(0,0)$. Für beliebiges X bezeichne ich mit $p = p_X : X \to pt$ die konstante Abbildung und setze $\underline{X} = p^*\underline{pt} \in D(X)$. Anders als üblich bezeichne ich für $\mathcal{F} \in D(X)$ mit $\mathcal{F}(2)$ das einmal Tate-getwistete Objekt: Ist $\mathcal{F}$ rein vom Gewicht w, so ist $\mathcal{F}(2)$ rein vom Gewicht $w-2$.

2.2 Erweiterungen einfacher Objekte

Sei V eine komplexe Darstellung von $\mathcal{W}$ als Spiegelungsgruppe. Bezeichne $S = S(V)$ die symmetrische Algebra über V, $S^+ \subset S$ das Ideal aller Ausdrücke ohne konstanten Term und $C = C(V, \mathcal{W}) = S/(S^+)^{\mathcal{W}}S$ die Koinvariantenalgebra. Wir graduieren C so, daß $degV = 2$. Für eine Teilmenge $\mathcal{S}_\iota \subset \mathcal{S}$ setzen wir $C^\iota = C^{\mathcal{W}_\iota}$.

Ich betrachte allgemein für $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{D}(X)$ den graduierten Vektorraum $Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ mit $Hom^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i])$. Insbesondere wird $End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{X})$ der Kohomologiering von X. In unserer Situation liefert das Borel-Bild einen Isomorphismus graduierter $\mathbf{C}$-Algebren $C = C(\mathrm{h}^*, \mathcal{W}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{G/B})$. Ist $\pi : G/B \to G/Q$ die Projektion, so wird $\pi^* : End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{G/B}) \to End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{G/Q})$ eine Inklusion, und unter dem Borel-Isomorphismus fällt ihr Bild mit $C^Q \subset C$ zusammen. Folglich haben wir kanonisch $C^Q = End^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{G/Q})$.

Nun betrachten wir zu $x \in \mathcal{W}^Q$ den Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{L}^Q_x = \mathcal{IC}(\overline{BxQ/Q}) \in \mathcal{P}(G/Q)$ der zugehörigen Schubert-Varietät. Je nach Bedarf betrachten wir $\mathcal{L}^Q_x$ auch als Objekt von $P(G/Q)$, rein vom Gewicht $l(x)$.

Jetzt haben wir zu unserer Verfügung den "Hyperkohomologie-Funktor"

$$\mathbf{H} = Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\underline{G/Q},\ ) : \mathcal{D}(G/Q) \to C^Q - Mod.$$

Erweiterungssatz 3 *Seien $x, y \in \mathcal{W}^Q$. So induziert* $\mathbf{H}$ *einen Isomorphismus graduierter Vektorräume*

$$Hom^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}^Q_x, \mathcal{L}^Q_y) \to Hom_{C^Q}(\mathbf{H}\mathcal{L}^Q_x, \mathbf{H}\mathcal{L}^Q_y).$$

Bemerkung: Im Fall $Q = B$ wird das schon in [So2] gezeigt.
Beweis: Injektivität folgt wie in [So2] mit Gewichten und einem Spektralsequenz-Argument. Wir brauchen somit nur noch zu zeigen, daß die Dimensionen unserer Räume übereinstimmen. Dazu zunächst ein

Lemma 1 *Für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(G/Q)$ gilt: $\pi_*\pi^*\mathcal{F} \cong \bigoplus_{x \in \mathcal{W}_Q} \mathcal{F}[-2l(x)]$.*

Beweis[Lemma]: Nach dem Zerlegungssatz von Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber ist $\pi_*\underline{G/B} = \pi_!\underline{G/B} \cong \bigoplus_{x \in \mathcal{W}_Q} \underline{G/Q}[-2l(x)]$. Nun zeigen wir unser Lemma bequemer für $d\mathcal{F}$ statt für $\mathcal{F}$. Es ist

$$\begin{aligned} \pi_*\pi^* d\mathcal{F} &= \pi_*\mathcal{RH}om(\underline{G/B}, \pi^!\mathcal{F}) \\ &= \mathcal{RH}om(\pi_!\underline{G/B}, \mathcal{F}) \\ &\cong \textstyle\bigoplus_{x \in \mathcal{W}_Q} d\mathcal{F}[-2l(x)], \end{aligned}$$

die zweite Gleichheit nach Verdier-Dualität. *q.e.d.[Lemma]*

Man betrachte nun $\pi_* : \mathcal{D}(G/B) \to \mathcal{D}(G/Q)$ und die Restriktion der Skalare $Res^Q : C - Mod \to C^Q - Mod$. Die Adjunktion (π^*, π_*) führt zu einer natürlichen Äquivalenz $Res^Q \mathbf{H} = \mathbf{H}\pi_*$ von Funktoren $\mathcal{D}(G/B) \to C^Q - Mod$.

Andererseits geben wir in [So2] eine natürliche Äquivalenz $C \otimes_{C^Q} \mathbf{H} = \mathbf{H}\pi^*$ von Funktoren $\mathcal{D}(G/Q) \to C - Mod$ an. Weiter ist $\pi^*\mathcal{L}_x^Q \cong \mathcal{L}_{xw_Q}^B[-d]$ mit $d = d_Q = l(w_Q)$ der Faserdimension von π.

Damit können wir nun berechnen:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_Q| dim Hom_{\mathcal{D}}^\bullet(\mathcal{L}_x^Q, \mathcal{L}_y^Q) &= dim Hom_{\mathcal{D}}^\bullet(\pi^*\mathcal{L}_x^Q, \pi^*\mathcal{L}_y^Q) \\ &= dim Hom_{\mathcal{D}}^\bullet(\mathcal{L}_{xw_Q}^B, \mathcal{L}_{yw_Q}^B) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_Q| dim Hom_{C^Q}(\mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q, \mathbf{H}\mathcal{L}_y^Q) &= dim Hom_{C^Q}(\mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q, \mathbf{H}\pi_*\pi^*\mathcal{L}_y^Q) \\ &= dim Hom_{C^Q}(\mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q, Res^Q \mathbf{H}\mathcal{L}_{yw_Q}^B) \\ &= dim Hom_C(\mathbf{H}\mathcal{L}_{xw_Q}^B, \mathbf{H}\mathcal{L}_{yw_Q}^B). \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir uns auf den bekannten Fall $Q = B$ zurückziehen. *q.e.d.*

Definition 1 *Wir setzen $A_Q = End_{\mathcal{D}}^\bullet(\bigoplus \mathcal{L}_x^Q) = End_{C^Q}(\bigoplus \mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q)$. Das ist eine graduierte $\mathbf{C}$-Algebra.*

Bemerkung: Diese Algebra kann man auch "kombinatorisch" beschreiben: Man geht dazu aus von einem kristallographischen Coxeter-System

$(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ und einer Teilmenge $\mathcal{S}_Q \subset \mathcal{S}$, bildet die Koinvariantenalgebra C, konstruiert wie in [So2] die $D_x \in C-Mod$, und erklärt für $x \in \mathcal{W}^Q$ die $D_x^Q \in C^Q-Mod$ durch den Isomorphismus $\bigoplus_{y\in\mathcal{W}_Q} D_x^Q[d-2l(y)] \cong Res^Q D_{xw_Q}$ mit $d = l(w_Q)$. Dann ist $A_Q \cong End_{C^Q}(\bigoplus D_x^Q)$.

Wir werden in den nächsten Abschnitten zeigen, daß A_Q eine Koszul-Algebra ist.

2.3 Gemischte Hodge-Moduln auf Fahnenmannigfaltigkeiten

Erinnern wir uns an die $\mathcal{L}_x^Q \in P(G/Q)$. Ich definiere $D_B(G/Q) \subset D(G/Q)$ als die von $\{\mathcal{L}_x^Q\}$ erzeugte triangulierte Unterkategorie und setze $P_B(G/Q) = P(G/Q) \cap D_B(G/Q)$. In anderen Worten ist $P_B(G/Q) \subset P(G/Q)$ die Unterkategorie aller Objekte, deren Kompositionsfaktoren sämtlich die Form $\mathcal{L}_x^Q$ haben, und $\mathcal{F} \in D_B(G/Q) \Leftrightarrow H^i\mathcal{F} \in P_B(G/Q) \forall i$.

Proposition 1 *Folgende Bedingungen an $\mathcal{F} \in D(G/Q)$ sind gleichbedeutend:*

i.) $\mathcal{F} \in D_B(G/Q)$.

ii.) *Für jede Inklusion $j : C \hookrightarrow G/Q$ einer Bruhat-Zelle ist $j^*\mathcal{F}$ eine Summe von Objekten der Form $\underline{\mathbb{C}}[n](2i)$.*

Beweis: Sei $\mathcal{F} \in D_B(G/Q)$. Ich schreibe kurz $ii.)\mathcal{F}$ statt "$\mathcal{F}$ erfüllt Bedingung ii.)". Eine direkte Summe erfüllt i.)(bzw. ii.)) genau dann, wenn beide Summanden i.)(bzw. ii.)) erfüllen. Gilt i.) (bzw. ii.)) für zwei Ecken eines ausgezeichneten Dreiecks, so auch für die dritte.

i.) $\Rightarrow$ *ii.)*. Es reicht, für alle Q und $x \in \mathcal{W}^Q$ zu zeigen, daß $\mathcal{L}_x^Q$ Bedingung ii.) erfüllt. Sei $P \supset B$ eine minimale Parabolische, $\pi : G/B \to G/P$ die Projektion. So gilt $ii.)\mathcal{F} \Rightarrow ii.)\pi^*\pi_*\mathcal{F}$. In der Tat können wir uns mit Basiswechsel bis auf einen affinen Faktor in eine SL_2-Situation zurückziehen, in der die Behauptung offensichtlich ist. Aus $ii.)\mathcal{L}_e^B$ folgt nun induktiv $ii.)\mathcal{L}_x^B \forall x \in \mathcal{W}$.

Sei schließlich $Q \supset B$ beliebig, $\pi : G/B \to G/Q$. Da $\pi^*\mathcal{L}_x^Q \cong \mathcal{L}_{xw_Q}^B[-d]$ Bedingung ii.) erfüllt, gilt auch $ii.)\mathcal{L}_x^Q$.

ii.) $\Rightarrow$ *i.)* Wir nummerieren $\mathcal{W}$, so daß $x_n < x_m \Rightarrow n < m$. Durch Induktion zeigen wir dann für alle $\mathcal{F}$ mit Träger in $T_m = \bigcap_{n\leq m} Bx_nQ/Q$, daß $ii.)\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \in D_B(G/Q)$. Sei $x = x_m$. Offensichtlich gilt $ii.)\mathcal{M}_x^Q$, und $ii.)\mathcal{L}_x^Q$ haben wir gerade gezeigt. Wir betrachten das ausgezeichnete Dreieck $(\mathcal{M}_x^Q, \mathcal{L}_x^Q, \mathcal{R})$ und folgern $ii.)\mathcal{R}$.

Mit Induktion ist dann $\mathcal{R} \in D_B(G/Q)$, und da $\mathcal{L}_x^Q \in D_B(G/Q)$ per definitionem folgt $\mathcal{M}_x^Q \in D_B(G/Q)$.

Wir betrachten die Einbettung $j : C_x^Q = BxQ/Q \hookrightarrow G/Q$ und bilden $\mathcal{N}_x^Q = j_* \underline{C_x^Q}$. Es ist auch $\mathcal{N}_x^Q = (d\mathcal{M}_x^Q)(2l(x)) \in D_B(G/Q)$. Insbesondere gilt $ii.)\mathcal{N}_x^Q$.

Nun betrachten wir das Dreieck $(\mathcal{F}, j_*j^*\mathcal{F}, \mathcal{G})$ über der kanonischen Abbildung $\mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F}$. Aus $ii.)\mathcal{F}$ folgt $ii.)j_*j^*\mathcal{F}$ und damit $ii.)\mathcal{G}$. Hat $\mathcal{F}$ zusätzlich Träger in T_m, so hat $\mathcal{G}$ Träger in T_{m-1}. Mit Induktion folgt $\mathcal{G} \in D_B(G/Q)$, mit $\mathcal{N}_x^Q$ ist auch $j_*j^*\mathcal{F} \in D_B(G/Q)$ und so folgt schließlich $\mathcal{F} \in D_B(G/Q)$. *q.e.d.*

Korollar 1 **a.)** $\mathcal{M}_x^Q, \mathcal{N}_x^Q \in P_B(G/Q)\ \forall x \in \mathcal{W}^Q$.

b.) *Sei $R \supset Q$ eine andere Parabolische, $\pi : G/Q \to G/R$ die Projektion. So gilt $\mathcal{F} \in D_B(G/Q) \Rightarrow \pi_*\mathcal{F} \in D_B(G/R)$ und $\mathcal{G} \in D_B(G/R) \Rightarrow \pi^*\mathcal{G} \in D_B(G/Q)$.*

Beweis: Klar.

Korollar 2 *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D_B(G/Q)$. So ist $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bigoplus_i Hom_D(\mathcal{F}(2i), \mathcal{G})$.*

Beweis: Mit ausgezeichneten Dreiecken können wir uns auf den offensichtlichen Fall $\mathcal{F} = \mathcal{M}_x^Q(2j)[n], \mathcal{G} = \mathcal{N}_y^Q$ zurückziehen. *q.e.d.*

2.4 Projektive Objekte in $P_B(G/Q)$

Wir wollen zeigen:

Theorem 4 **i.)** *Für alle $x \in \mathcal{W}^Q$ hat $\mathcal{L}_x^Q$ eine projektive Decke $\mathcal{P}_x^Q$ in $P_B(G/Q)$.*

ii.) *Alle $\mathcal{P}_x^Q$ haben eine "gute Filtrierung", d.h. eine Filtrierung mit Subquotienten $\mathcal{M}_y^Q$.*

iii.) *Der offensichtliche Funktor $D^b(P_B(G/Q)) \to D_B(G/Q)$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Wir werden den Beweis in einem sehr abstrakten Kontext führen. Seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ zwei abelsche **C**-Kategorien. Wir nehmen an:

1. $\mathcal{A}$ ist eine volle Unterkategorie von $\mathcal{B}$.
2. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Erweiterungen in $\mathcal{B}$.
3. Alle Objekte von $\mathcal{A}$ sind von endlicher Länge.

4. Die Endomorphismen von einfachen Objekten sind $\mathbf{C}id$.

Wir nehmen weiter an, daß eine kommutative Gruppe $(I, +)$ auf $\mathcal{A}$ operiere und schreiben $i(L) = L(i) \forall i \in I, L \in \mathcal{A}$. Die einfachen Objekte von $\mathcal{A}$ sollen dann bis auf Twist durch eine endliche teilgeordnete Menge $(\mathcal{W}, \geq)$ parametrisiert sein: $\{L^x(i) | x \in \mathcal{W}, i \in I\}$ bilde ein Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen einfacher Objekte in $\mathcal{A}$. Wir versehen $\mathcal{W}$ mit der Ordnungs-Topologie, d.h. abgeschlossene Teilmengen $T \subset \mathcal{W}$ sind charakterisiert durch die Bedingung $x \in T, y \leq x \Rightarrow y \in T$.

Für eine beliebige abgeschlossene Teilmenge $T \subset \mathcal{W}$ sei $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}$ die Unterkategorie aller Objekte "mit Träger in T", d.h. aller Objekte, deren Kompositionsfaktoren sämtlich von der Form $L^x(i)$ sind mit $x \in T$. Wir wollen nun weiter annehmen, daß wir für alle $x \in \mathcal{W}$ Morphismen $M^x \rightarrow L^x$ in $\mathcal{A}$ zu unserer Verfügung haben, so daß

5. Ist $T \subset \mathcal{W}$ abgeschlossen und $x \in T$ ein maximales Element, so ist $M^x \rightarrow L^x$ eine projektive Decke in $\mathcal{A}_T$.

6. $ker(M^x \rightarrow L^x) \in \mathcal{A}_{<x}$.

Wir wollen schließlich annehmen, daß es auf $\mathcal{A}$ eine Dualität d gibt derart daß $dL^x(i) \cong L^x(-i)$ und es möge gelten:

7. $Ext^2_{\mathcal{B}}(M^x(i), dM^y(j)) = 0 \forall x, y, i, j$.

Wir nennen die $M^x(i)$ die Standard-Moduln und bezeichnen mit R^x den Kern von $M^x \rightarrow L^x$.

Proposition 2 *Seien alle vorhergehenden Annahmen erfüllt und sei $T \subset \mathcal{W}$ eine abgeschlossene Teilmenge. So gilt:*

i.)$_T$ *Die Kategorie $\mathcal{A}_T$ hat genügend projektive Objekte. Jeder Projektive in $\mathcal{A}_T$ hat eine Filtrierung mit Subquotienten der Form $M^x(i)$.*

ii.)$_T$ *Ist $P \in \mathcal{A}_T$ projektiv und $N \in \mathcal{A}_T$ beliebig, so ist $Ext^2_{\mathcal{B}}(P, N) = 0$.*

iii.)$_T$ *Sei P^x_T die projektive Decke in $\mathcal{A}_T$ von L^x. So ist $[P^x_T; M^y(i)] = [M^y : L^x(i)]$.*

Beweis: Zunächst einmal folgern wir weitere Eigenschaften von $\mathcal{A}$.

8. $Hom(M^x, M^x) = \mathbf{C}id$ folgt aus 4.), 5.) und 6.).

9. $Hom(M^x, dM^y(i)) = \mathbf{C}$ falls $x = y$ und $i = 0$. Sonst gibt es nur die Null-Abbildung. Falls nicht $x < y$ folgt das aus 4.), 5.) und 6.). Aus dem Fall $x < y$ retten wir uns mit der Dualität.
10. $Ext^1(M^x, M^x(i)) = 0$ folgt aus 5.).
11. $Ext^1(M^x, dM^y(i)) = 0$ folgt aus 5.), wenn nicht $x < y$. Aus diesem Fall retten wir uns mit Dualität.
12. Alle $Hom_{\mathcal{A}}$ sind von endlicher Dimension. Das folgt aus 3.) und 4.).

Wir zeigen nun i.$)_T$ $\Rightarrow$ ii.$)_T$. In der Tat folgt aus i.$)_T$ und 7.) daß $Ext^2_{\mathcal{B}}(P, I) = 0$ für $P, I \in \mathcal{A}_T$ ein projektives und ein injektives Objekt. Nun läßt sich für $M, N \in \mathcal{A}_T$ die Gruppe $Ext^2_{\mathcal{A}_T}(M, N)$ durch eine injektive Auflösung $I^\bullet$ von N in $\mathcal{A}_T$ berechnen. Ist $P \in \mathcal{A}_T$ projektiv, so ist $Ext^2_{\mathcal{A}_T}(P, N) = 0$. Andererseits berechnet $Hom(P, I^\bullet)$ auch $Ext^2_{\mathcal{B}}(P, N)$ - das folgt mit einem Spektralsequenz-Argument aus $Ext^1_{\mathcal{B}}(P, I) = Ext^2_{\mathcal{B}}(P, I) = 0$ für $P, I \in \mathcal{A}_T$ projektiv und injektiv wie eben. Damit ist tatsächlich $Ext^2_{\mathcal{B}}(P, N) = Ext^2_{\mathcal{A}_T}(P, N) = 0$ und wir haben i.$)_T$ $\Rightarrow$ ii.$)_T$ gezeigt.

Wir brauchen weiter

Lemma 2 *Sei $T \subset \mathcal{W}$ abgeschlossen und sei $s \in \mathcal{W} - T$ gegeben, so daß $T \cup \{s\}$ auch abgeschlossen ist. Es gelte i.$)_T$ und ii.$)_T$. Für alle $t \in T$ hat $Ext^1(P^t_T, M^s(i)) = Ext^1(P^t_T, L^s(i)) = Hom(P^t_T, (dR^s)(i))$ die Dimension $[(dM^s)(i) : L^t]$.*

Beweis[Lemma]: Die kurze exakte Sequenz $R^s \hookrightarrow M^s \twoheadrightarrow L^s$ liefert

$$Ext^1(P^t_T, R^s(i)) \to Ext^1(P^t_T, M^s(i)) \to Ext^1(P^t_T, L^s(i)) \to Ext^2_{\mathcal{B}}(P^t_T, R^s(i)).$$

Hier verschwindet der erste und der letzte Term, der letzte nach ii.$)_T$. Das gibt die erste Gleichheit.

Die kurze exakte Sequenz $L^s \hookrightarrow dM^s \twoheadrightarrow dR^s$. liefert

$$Hom(P^t_T, (dM^s)(i)) \to Hom(P^t_T, (dR^s)(i)) \to Ext^1(P^t_T, L^s(i)) \to Ext^1(P^t_T, (dM^s)(i)).$$

Der erste Term verschwindet nach i.$)_T$ und 9.), der letzte nach i.$)_T$ und 11.). Das gibt die zweite Gleichheit. *q.e.d.[Lemma]*

Wir wollen nun die Proposition beweisen. Natürlich machen wir eine Induktion über $|T|$. Sei also $T \subset \mathcal{W}$ abgeschlossen und sei $s \in \mathcal{W} - T$ so daß $T' = T \cup \{s\}$ auch abgeschlossen ist. Wir müssen zeigen, daß i.$)_{T'}$–iii.$)_{T'}$ aus i.$)_T$–iii.$)_T$ folgt. Wir wissen schon, daß i.$)_{T'}$ $\Rightarrow$

ii.)$_{T'}$, und iii.)$_{T'}$ wird aus dem Beweis von i.)$_{T'}$ folgen. Es gilt also, für alle $t \in T'$ eine projektive Decke P^t von L^t in $\mathcal{A}_{T'}$ zu konstruieren.

Fall I: $t = s$. Dann ist $M^s \twoheadrightarrow L^s$ die gesuchte projektive Decke nach 5.).

Fall II: $t \in T$. So gibt es zumindest eine projektive Decke P_T^t von L^t in $\mathcal{A}_T$. Nun ist $[dM^s : L^t(i)] \neq 0$ nur für endlich viele i, also $E_i = Ext^1(P_T^t, M^s(i)) \neq 0$ nur für endlich viele i.

Allgemein können wir ja für jede **C**-Kategorie $\mathcal{C}$ einen Bi-Funktor

$$(\mathbf{C} - mod) \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad (E, M) \mapsto E \otimes M$$

erklären, das "formale Tensorprodukt". Jetzt liefert das kanonische Element in $E_i^* \otimes E_i = Ext^1(P_T^t, E_i^* \otimes M^s(i))$ eine Erweiterung $E_i^* \otimes M^s(i) \hookrightarrow K \twoheadrightarrow P_T^t$ derart, daß mit den offensichtlichen Abbildungen die Komposition $E_i \to Hom(E_i^* \otimes M^s(i), M^s(i)) \xrightarrow{d} Ext^1(P_T^t, M^s(i))$ die Identität ist. Nach 9.) ist die erste Abbildung ein Isomorphismus, folglich muss auch die Randabbildung d ein Isomorphismus sein.

Da $M^s(i)$ und $M^s(j)$ untereinander nicht erweitern, können wir diese Konstruktionen aufeinandertürmen, und erhalten eine kurze exakte Sequenz $\bigoplus_i(E_i^* \otimes M^s(i)) \hookrightarrow P^t \twoheadrightarrow P_T^t$ derart, daß die erste Randabbildung zur langen exakten Sequenz von $Hom(\ \ , M^s(i))$ ein Isomorphismus ist, $\forall i$. Ich behaupte, daß P^t die gesuchte Projektive Decke $P_{T'}^t$ von L^t in $\mathcal{A}_{T'}$ ist. Ich muss also zeigen für alle $x \in T'$:

$$Hom(P^t, L^x(i)) = \begin{cases} \mathbf{C} & x = t, i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Ext^1(P^t, L^x(i)) = 0 \ \forall x, i.$$

An die Arbeit! Ich kürze die kurze exakte Sequenz von eben mit $E^* \otimes M \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P_T$ ab. Sei zunächst $x \in T$. Wir haben eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \to & Hom(P_T, L^x(i)) & \to & Hom(P, L^x(i)) & \to & Hom(E^* \otimes M, L^x(i)) & \to \\ & \to & Ext^1(P_T, L^x(i)) & \to & Ext^1(P, L^x(i)) & \to & Ext^1(E^* \otimes M, L^x(i)) & \to \end{array}$$

und beide Terme ganz rechts verschwinden nach 5.). Damit ist dieser Fall erledigt und wir müssen nur noch $Hom(P, L^s(i)) = Ext^1(P, L^s(i)) = 0$ zeigen, $\forall i$. Ich kürze $R^s(i) \hookrightarrow M^s(i) \twoheadrightarrow L^s(i)$ mit $R \hookrightarrow M \twoheadrightarrow L$ ab. Zusammen mit $E^* \otimes M \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P_T$ ergibt sich ein grosses *Ext*-Diagramm, von dem wir einen Teil aufschreiben.

$$
\begin{array}{ccccccc}
Hom(P_T,R) & \rightarrow & Hom(P_T,M) & \rightarrow & Hom(P_T,L) & \rightarrow & Ext^1(P_T,R) \\
\downarrow & 1 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(P,R) & \rightarrow & Hom(P,M) & \rightarrow & Hom(P,L) & \rightarrow & Ext^1(P,R) \\
\downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(E^*\otimes M,R) & \rightarrow & Hom(E^*\otimes M,M) & \rightarrow & Hom(E^*\otimes M,L) & \rightarrow & Ext^1(E^*\otimes M,R) \\
\downarrow & & \downarrow & 2 & \downarrow & & \downarrow \\
Ext^1(P_T,R) & \rightarrow & Ext^1(P_T,M) & \rightarrow & Ext^1(P_T,L) & \rightarrow & Ext^2_B(P_T,R) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & \rightarrow & Ext^1(P,L) & \rightarrow & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & \rightarrow & Ext^1(E^*\otimes M,L) & \rightarrow &
\end{array}
$$

Die mit 0 bezeichnete Abblidung im Zentrum des Diagramms verschwindet, da die auf sie folgende Abbildung nach Konstruktion ein Isomorphismus ist. Aus elementaren Gründen verschwinden die beiden letzten Einträge der ersten Zeile wie auch der ersten Spalte. Folglich besteht das mit 1 markierte Viereck aus Isomorphismen.

Aus elementaren Gründen verschwindet die letzte Spalte. Folglich ist $Hom(P,L) = 0$. Dann muss auch das mit 2 markierte Viereck aus Isomorphismen bestehen. Aus elementaren Gründen verschwindet $Ext^1(E^*\otimes M,L)$. Folglich ist $Ext^1(P,L) = 0$. *q.e.d.*

Beweis[Theorem]: Wir zeigen zunächst i.) und ii.). Dazu wollen wir die Proposition anwenden mit $\mathcal{A} = P_B(G/Q), \mathcal{B} = P(G/Q), I = 2\mathbf{Z}, L^x = \mathcal{L}_x^Q, M^x = \mathcal{M}_x^Q, \mathcal{W} = \mathcal{W}^Q$. Die Bedingungen 1.)-4.) sind offensichtlich erfüllt. Um 5.) zu zeigen, bemerken wir, daß $\mathcal{A}_T$ in unserem Fall tatsächlich die Kategorie aller Objekte aus $P(G/Q)$ mit Träger in BTQ/Q ist. Für $x \in T$ maximal können wir $j : C_x^Q \hookrightarrow G/Q$ faktorisieren in $C_x^Q \hookrightarrow U \hookrightarrow G/Q$ eine abgeschlossene Immersion gefolgt von einer offenen Immersion, so daß $C_x^Q = U \cap BTQ/Q$. Folglich ist mit dem Satz von Kashiwara $M \rightarrow j^!M$ ein exakter Funktor $\mathcal{A}_T \rightarrow P(C_x^Q)$. Mit der Adjunktion $(j_!, i^!)$ folgt, daß $j_!\underline{C_x^Q}[l(x)] = \mathcal{M}_x^Q$ tatsächlich eine projektive Decke von $\mathcal{L}_x^Q$ in der gestutzten Kategorie $\mathcal{A}_T$ ist.

6.) ist wieder offensichtlich und 7.) folgt mit Basiswechsel. Im Fall $x = y$ benutzt man dazu, daß die zweiten Kohomologiegruppen der Bruhat-Zellen verschwinden.

Ich will eine kleine Ungenauigkeit nicht verschweigen: Unter der Verdier-Dualität d ist $\mathcal{L}_x^Q$ nicht selbstdual, sondern nur selbstdual bis auf einen Twist mit $2l(x)$. Die Selbstdualität von L^x wird jedoch nur beim Beweis der letzten Behauptung iii.) der Proposition benötigt.

Ich zeige nun die letzte Behauptung iii.) des Theorems. Mit Basiswechsel erhalten wir allgemein: $Hom_D(\mathcal{M}_x^Q, d\mathcal{M}_y^Q(2i)[n]) = 0 \forall x, y, i$ und $n \neq 0$. Im Fall $x = y$ benutzt man dazu, daß alle höheren Kohomologiegruppen der Bruhat-Zellen verschwinden. Mit ii.) folgt $Hom_D(P, I[n]) = 0$ für $P, I \in P_B(G/Q)$ projektiv und injektiv sowie $n \neq 1$. Daraus folgt schließlich iii.) mit homologischer Algebra. *q.e.d.*

Bemerkung: Derselbe Beweis liefert auch "BGG-Reziprozität für perverse Garben", also Theorem 1.1 aus [MV].

2.5 Die gemischte Kategorie $\tilde{\mathcal{O}}^Q$

Im Folgenden sind alle Kategorien $\mathbf{C}$-Kategorien und alle Funktoren $\mathbf{C}$-linear. Ich wiederhole [BGi].

Definition 2 *Eine "gemischte artinsche Kategorie" ist eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ samt*

i.) *einem "Twist", d.h. einer Äquivalenz $(1) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, M \mapsto M(1)$*

ii.) *einer funktoriellen "Gewichtsfiltrierung" $M \supset \ldots \supset W_j M \supset W_{j-1} M \supset$ auf jedem Objekt $M \in \mathcal{A}$*

iii.) *einem kanonischen Isomorphismus $(W_j M)(1) = W_{j-1}(M(1)) \forall j \in \mathbf{Z}$.*

Es werden folgende Axiome gefordert:

1. *$M = W_j M$ für $j \gg 0$, $0 = W_j M$ für $j \ll 0$.*
2. *Für jeden Morphismus $f : M \to N$ ist $f(W_j M) = W_j N \cap f(M)$.*
3. *Alle Objekte sind von endlicher Länge. Bis auf Twist gibt es nur endlich viele einfache Isomorphieklassen. Die Endomorphismen einfacher Objekte sind $\mathbf{C}$id.*
4. *Aus $W_j M = M$, $W_{j-1} M = 0$ folgt, daß M halbeinfach ist.*

Beispiel: Sei $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ eine graduierte $\mathbf{C}$-Algebra endlicher Dimension. Ist A^0 halbeinfach, so ist $Mod - A$ eine gemischte artinsche Kategorie. Hier definieren wir $M(1)$ wie in Abschnitt 1.2 und setzen $W_j M = \bigoplus_{i \geq -j} M^i$.

Sei allgemein $\mathcal{A}$ eine artinsche gemischte Kategorie mit genügend Projektiven. Sei $\{L_x\}_{x \in \mathcal{W}}$ ein Repräsentantensystem für die einfachen

Isomorphieklassen vom Gewicht Null und seien $P_x \to L_x$ projektive Decken. Wir setzen $P = \bigoplus P_x$ und definieren die graduierte Algebra $A(\mathcal{A}) = A = \bigoplus_{i\geq 0} A^i$ durch $A^i = Hom_{\mathcal{A}}(P(i), P)$, also in offensichtlicher Notation $A = End^{\bullet}_{\mathcal{A}}(P)$.

So ist $Hom^{\bullet}_{\mathcal{A}}(P, \ ) : \mathcal{A} \to Mod - A$ eine Äquivalenz gemischter artinscher Kategorien. Bezeichnen wir mit $1_x \in A^0$ die Projektion von P auf P_x, so liefert die Abbildung $P_x \to L_x$ einen Isomorphismus $Hom^{\bullet}_{\mathcal{A}}(P, L_x) = 1_x A^0$.

Nun ist $P_B(G/Q)$ beinahe eine gemischte Kategorie - es fehlt nur eine Wurzel des Tate-Twist (2). Die erzwingen wir nun formal und definieren die Kategorie $\tilde{\mathcal{O}}^Q = P_B(G/Q) \oplus P_B(G/Q)$, mit Twist $(M, N)(1) = (N(2), M)$ und Gewichtsfiltrierung $W_j(M, N) = (W_j M, W_{j+1} N)$. Man prüft, daß $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ eine gemischte artinsche Kategorie ist. Wir betten $P_B(G/Q)$ in $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ ein vermittels $M \mapsto (M, 0)$. In $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ betrachten wir insbesondere die Objekte $L^Q_x = \mathcal{L}^Q_x(l(x))$. Sie sind rein vom Gewicht null, selbstdual unter der Dualität $d(M, N) = (dM, (dN)(-2))$, und die einzigen irreduziblen Quotienten der Verma-Moduln $M^Q_x = \mathcal{M}^Q_x(l(x))$.

Nach Theorem 4 gibt es genügend Projektive in $\tilde{\mathcal{O}}^Q$. Die projektiven Decken $P^Q_x \to L^Q_x$ sind sogar wohlbestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Definition 3 *Wir setzen* $A^Q = End^{\bullet}_{\tilde{\mathcal{O}}^Q}(\bigoplus P^Q_x)$. *Das ist eine graduierte* $\mathbb{C}$-*Algebra.*

In offensichtlicher Weise hat A^Q_0 eine Basis aus paarweise orthogonalen Idempotenten 1_x und wir haben eine Äquivalenz $\tilde{\mathcal{O}}^Q = Mod - A^Q$, unter der $L^Q_x = 1_x A^Q_0$. So erhalten wir eine graduierte Algebra $A^Q = End^{\bullet}_{\tilde{\mathcal{O}}^Q}(\bigoplus P^Q_x)$ samt Idempotenten $1_x \in A^Q_0$ und einer Äquivalenz $\tilde{\mathcal{O}}^Q = Mod - A^Q$, unter der $L^Q_x = 1_x A^Q_0$.

Nebenbei will ich auch noch erwähnen, daß aus Proposition 2 folgt: $[P^Q_x; M^Q_y(i)] = [M^Q_y : L^Q_x(i)] \forall x, y, i$.

2.6 Koszul-Algebren und Koszul-Dualität

Im Folgenden sind alle Algebren $\mathbb{C}$-Algebren. Sei A_0 eine halbeinfache Algebra endlicher Dimension und V ein A_0-Bimodul von ebenfalls endlicher Dimension. Wir können die Tensoralgebra $T_{A_0} V = A_0 \oplus V \oplus (V \otimes_{A_0} V) \oplus \ldots$ bilden. Sei $W \subset (V \otimes_{A_0} V)$ ein Unterbimodul und $(W) \subset T_{A_0} V$ das von W erzeugte zweiseitige Ideal. So erklären wir die Algebra $A = A(V; W) = T_{A_0}V/(W)$. Wir graduieren A durch die Vorschrift $degV = 1$. Es ist also $A_0(V; W) = A_0$, $A_1(V; W) = V$.

Definition 4 *Eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ heißt "quadratisch" genau dann, wenn*

i.) $dimA_0 < \infty$, $dimA_1 < \infty$.

ii.) A_0 *ist halbeinfach.*

iii.) *Sei $W \subset A_1 \otimes_{A_0} A_1$ der Kern der Multiplikation nach A_2. So ist die kanonische Abbildung $A(A_1; W) \to A$ ein Isomorphismus.*

Definition 5 *Zu jeder quadratischen Algebra $A = A(A_1; W)$ bilden wir die "duale quadratische Algebra" $A^! = A(A_1^*; W^\perp)$. Es ist also $A_0^! = A_0$.*

Für eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ bezeichne $C^b(\mathcal{A})$ die Kategorie der beschränkten Komplexe aus $\mathcal{A}$. Ein Objekt $X \in C^b(Mod - A)$ ist also ein Komplex $\ldots \to X^i \xrightarrow{\partial} X^{i+1} \to \ldots$ von graduierten A-Rechtsmoduln $X^i = \bigoplus X_j^i$.

Nehmen wir nun $dimA < \infty$ an, so können wir einen Funktor "Koszul-Komplex"

$$K : C^b(Mod - A) \longrightarrow C^b(Mod - A^!)$$

wie folgt definieren: Wir setzen $KX = X \otimes_{A_0} A^!$ mit dem Differential

$$d(x \otimes a) = \sum_\nu x v_\nu \otimes \phi_\nu a + (-1)^j \partial x \otimes a$$

wo $\{v_\nu\}$ und $\{\phi_\nu\}$ duale Basen von A_1 und A_1^* sind und $x \in X_j^i$. Schließlich erklären wir die Bigraduierung auf KX durch $x \in X_j^i$, $a \in A_k^! \Rightarrow x \otimes a \in (KX)_{k-j}^{i+j}$.

Offensichtlich ist $KA_0 = A^!$, sogar $K(pA_0) = pA^!$ für alle $p \in A_0$. Andererseits betrachten wir $A^* \in Mod{-}A$. Es ist $(KA^*)^i = 0$ für $i > 0$ und es gibt eine kanonische Abbildung $(KA^*)_0 = A^! \to A_0^! = A_0$.

Definition 6 *Sei A eine graduierte Algebra endlicher Dimension. A heißt "Koszul" genau dann, wenn A quadratisch ist und zusätzlich der "Koszul-Komplex" KA^* von A eine exakte Auflösung von A_0 ist.*

Theorem 5 *Ist A endlichdimensional und Koszul, so erklärt K eine Äquivalenz triangulierter Kategorien*

$$K : D^b(Mod - A) \to D^b(Mod - A^!).$$

Es ist kanonisch $K(X[n]) = (KX)[n]$ und $K(X(n)) = (KX)[-n](-n)$. Für alle $p \in A_0$ ist $K(pA_o) = pA^!$ und $K(pA^*) = pA_0$.

Beweis: Ist $A_0 = \mathbf{C}$ und A eine äussere Algebra, so findet man einen Beweis bei [BGG]. Im allgemeinen steht die Behauptung bei [BGi], ein Beweis läßt sich hoffentlich aus [BGS] extrahieren. *q.e.d.*

Theorem 6 *Ist A Koszul, so ist auch $A^!$ Koszul.*

Beweis: [BGi].

Bezeichne Hom_{D^b} Homomorphismen in unseren derivierten Kategorien. Koszul-Dualität liefert Isomorphismen

$$Hom_{D^b}(A_0, A_0[n](i)) \to Hom_{D^b}(A^!, A^![n-i](-i)).$$

Mit der rechten Seite muss auch die linke Seite verschwinden für $n \neq i$, d.h. Erweiterungen einfacher Objekte sind "rein", und Koszul-Dualität definiert einen Isomorphismus graduierter Algebren $Ext_A^*(A_0, A_0) \to A^!$. Hier bezeichnet Ext_A die Erweiterungen in der Kategorie $mod - A$ nicht-graduierter A-Rechtsmoduln.

Umgekehrt versprechen Beilinson und Ginsburg [BGi]:

Theorem 7 *Sei $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ eine graduierte Algebra endlicher Dimension. Sei A_0 halbeinfach und seien Erweiterungen einfacher Objekte rein, d.h. $Ext^n_{Mod-A}(A_0, A_0(i)) \neq 0 \Rightarrow i = n$. So ist A Koszul.*

2.7 Parabolisch-singuläre Dualität

Zunächst zeigen wir:

Proposition 3 $Ext^n_{\mathcal{O}^Q}(L^Q_x, L^Q_y(i)) \neq 0 \Rightarrow n = i$.

Beweis: Im Fall $Q = B$ steht das bei [BGi]. Wir wollen nun unseren Fall darauf zurückführen.

Sei $\pi : G/B \to G/Q$ die Projektion. Wie in Lemma 1 erhält man, daß $\pi_* \pi^* \mathcal{F} \cong \bigoplus_{y \in W_Q} \mathcal{F}[-2l(y)](-2l(y))$ für alle $\mathcal{F} \in D(G/Q)$. Weiter ist $\pi^* \mathcal{L}^Q_x \cong \mathcal{L}^B_{xw_Q}[-d](-d)$ mit $d = l(w_Q) = codim(\pi)$.

Nun definieren wir folgende Laurent-Polynome in zwei Veränderlichen:

$$E^Q_{x,y}(s,t) = \sum_{i,n} dim Ext^n_{\tilde{\mathcal{O}}^Q}(L^Q_x, L^Q_y(i))t^n s^i$$

$$K(s,t) = \sum_{y \in W_Q} (st)^{-2l(y)}.$$

Aus $Hom_D(\mathcal{L}^Q_x, \pi_*\pi^*\mathcal{L}^Q_y(i)[n]) = Hom_D(\pi^*\mathcal{L}^Q_x, \pi^*\mathcal{L}^Q_y(i)[n])$ folgt $E^B_{xw_Q,yw_Q} = E^Q_{x,y}K$. Mit E^B und K ist also auch E^Q ein Laurent-Polynom in (st). *q.e.d.*

Theorem 8 *Die graduierten Algebren A^Q und A_Q sind Koszul, und Koszul-Dualität definiert eine Isomorphismus $A_Q \to (A^Q)^!$.*

Bemerkung: Im Anschluß an die Definition haben wir A_Q kombinatorisch beschrieben. Das Theorem liefert unter anderem eine kombinatorische Beschreibung von A^Q via $A^Q = A^!_Q$.
Beweis: Das folgt aus Proposition 3, Theorem 7 und den Betrachtungen, die diesem Theorem vorangehen. *q.e.d.*

Wir setzen nun $\tilde{\mathcal{O}}_Q = Mod - A_Q$. Koszul-Dualität definiert uns eine Äquivalenz $\kappa : D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q) \to D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)$. Im Folgenden wollen wir diese Äquivalenz mit darstellungstheoretischem Inhalt füllen.

3 Beziehungen zur Darstellungstheorie

3.1 $\tilde{\mathcal{O}}^Q$ als gemischte Version einer parabolischen Kategorie $\mathcal{O}$

Seien $\mathbf{g} \supset \mathbf{q} \supset \mathbf{b} \supset \mathbf{h}$ die Lie-Algebren unserer Gruppen von eben. Ich will nun die in der Einleitung versprochenen Funktoren $F : \tilde{\mathcal{O}}^Q \to \mathcal{P}_B(G/Q) = \mathcal{O}^{\mathfrak{q}}$ angeben. Sei zunächst $F : P(G/Q) \to \mathcal{P}(G/Q)$ der vergessliche Funktor. Er führt in offensichtlicher Weise zu $F : \tilde{\mathcal{O}}^Q \to \mathcal{P}_B(G/Q)$. Nach Korollar 2 in Abschnitt 2.3 sind die FP^Q_x projektive Decken der $\mathcal{L}^Q_x$ in $\mathcal{P}_B(G/Q)$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{rccc} Hom^\bullet_{\tilde{\mathcal{O}}^Q}(\bigoplus P^Q_x, \ ): & \tilde{\mathcal{O}}^Q & \to & Mod - A^Q \\ & F \downarrow & & \downarrow \\ Hom_{\mathcal{P}_B(G/Q)}(FP^Q_x, \ ): & \mathcal{P}_B(G/Q) & \to & mod - A^Q. \end{array}$$

Es bleibt, eine Äquivalenz $\mathcal{P}_B(G/Q) = \mathcal{O}^\mathfrak{q}$ anzugeben. Sei dazu $\pi : G/B \rightarrow G/Q$ die Projektion, $d = codim(\pi)$. Sei $\mathcal{P}_{Q^{-1}}(G/B)$ die Kategorie aller perversen Garben auf G/B, die glatt sind längs der $\pi^{-1}(BxQ/Q) = BxQ/B$. Mit Lemma 1 zeigt man, daß $\pi^*[d] : \mathcal{P}_B(G/Q) \rightarrow \mathcal{P}_{Q^{-1}}(G/B)$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Sei weiter $\mathcal{P}_Q(G/B)$ die Kategorie aller perversen Garben auf G/B, die glatt sind längs der Bahnen von Q. Symmetrie (Lemma 6 in [So1]) liefert eine Äquivalenz $\mathcal{P}_{Q^{-1}}(G/B) \rightarrow \mathcal{P}_Q(G/B)$. Der Funktor der globalen Schnitte liefert schließlich $\mathcal{P}_Q(G/B) = \mathcal{O}^\mathfrak{q}$. Man prüft, daß die zusammengesetzte Äquivalenz $\mathcal{P}_B(G/Q) = \mathcal{O}^\mathfrak{q}$ die Objekte $\mathcal{L}_x^Q, \mathcal{M}_x^Q$ zu $L_x^\mathfrak{q}, M_x^\mathfrak{q}$ macht.

3.2 $\tilde{\mathcal{O}}_Q$ als gemischte Version einer singulären Kategorie $\mathcal{O}$

Für $\lambda \in \mathbf{h}^*$ ganz und dominant konstruieren wir in [So2] Funktoren $\mathbf{V} : \mathcal{O}_\lambda \rightarrow C^\lambda - mod$.

Lemma 3 *Sei $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_Q$. So gibt es Isomorphismen $\mathbf{V}P(x \cdot \lambda) \cong \mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q \cong D_x^Q$ in $C^Q - mod$, $\forall x \in \mathcal{W}^Q$.*

Beweis: Die Kategorien $\mathcal{O}_\lambda$ und $\mathcal{O}_0$ sind verknüpft durch ein adjungiertes Paar $(\theta^{out}, \theta_{on})$ von Verschiebungsfunktoren. Es ist $\theta^{out}P(x\cdot\lambda) \cong P(xw_\lambda \cdot 0)$ und $\theta_{on}\theta^{out}M \cong \bigoplus_{y\in\mathcal{W}_\lambda} M \quad \forall M \in \mathcal{O}_\lambda$.

Nun ist $\mathbf{V}P(x \cdot 0) \cong \mathbf{H}\mathcal{L}_x^B$ in $C - mod$ nach [So2]. Es folgt

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_\lambda|\mathbf{V}P(x \cdot \lambda) &\cong res^\lambda \mathbf{V}P(xw_\lambda \cdot 0) \\ &\cong res^Q \mathbf{H}\mathcal{L}^B_{xw_\lambda} \\ &\cong |\mathcal{W}_Q|\mathbf{H}\mathcal{L}_x^Q. \end{aligned}$$

Der letzte Isomorphismus im Lemma kam schon vor und ist im Wesentlichen eine Definition. *q.e.d.*

Die Wahl solcher Isomorphismen liefert uns einen Isomorphismus $End_\mathcal{O}(\bigoplus P(x \cdot \lambda)) \cong A_Q$ von C-Algebren und somit eine Äquivalenz von Kategorien

$$\alpha = Hom(\bigoplus P(x \cdot \lambda), \ \ ) : \mathcal{O}_\lambda \rightarrow mod - A_Q.$$

Sei nun $Z \subset \mathbf{U}$ das Zentrum der universellen Einhüllenden. Wir betrachten den Morphismus $\phi = \phi_\lambda = p \circ (+\lambda)^\sharp \circ \xi^\sharp : Z \rightarrow C^Q$ aus [So2].

Unter der Äquivalenz α geht die Operation von $z \in Z$ auf $M \in \mathcal{O}_\lambda$ über in die Operation von $\phi(z) \in C^Q$ auf $\alpha M \in mod-A_Q$. Umgekehrt zeigen wir:

Proposition 4 *Seien $\alpha, \alpha' : \mathcal{O}_\lambda \to mod - A_Q$ Äquivalenzen von Kategorien derart, daß die Operation von $z \in Z$ in die Operation von $\phi(z) \in C^Q$ übergeht. So sind α und α' natürlich äquivalent.*

Beweis: Es gilt zu zeigen, daß jede mit der Operation von Z verträgliche Äquivalenz $\beta : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda$ natürlich äquivalent ist zur Identität.

Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ bezeichne allgemein $p\mathcal{A}$ die additive Unterkategorie aller projektiven Objekte. Für eine additive Kategorie $\mathcal{B}$ bezeichne $K^b(\mathcal{B})$ die Homotopiekategorie beschränkter Komplexe. Wir haben $K^b(p\mathcal{O}_\lambda) = D^b(\mathcal{O}_\lambda) \supset \mathcal{O}_\lambda$ und brauchen nur zu zeigen, daß $\beta : p\mathcal{O}_\lambda \to p\mathcal{O}_\lambda$ natürlich äquivalent ist zur Identität.

Nun betrachten wir $\mathcal{D}_Q \subset C^Q - mod$ die Unterkategorie aller Objekte, die in eine direkte Summe von Moduln der Form D_x^Q, $x \in \mathcal{W}^Q$, zerfallen. Sei $P \in p\mathcal{O}_\lambda$ ein antidominanter Projektiver, $P \cong P(w_Q w_\circ \cdot \lambda)$. Nach dem Endomorphismensatz aus [So2] induziert die Operation von Z einen Isomorphismus $\phi_P : C^Q \to End_{\mathcal{O}} P$, und nach dem Struktursatz ist $\mathbf{V} = \mathbf{V}_P = Hom_{\mathcal{O}}(P, \ ) : p\mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{D}_Q$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Offensichtlich gibt es einen Isomorphismus $P \cong \beta P$ in $\mathcal{O}_\lambda$. Da wir angenommen hatten, daß β mit der Operation von Z verträglich ist, folgt $\phi_{\beta P} = \beta \circ \phi_P : C^Q \to End_{\mathcal{O}} \beta P$. Damit sind offensichtlich äquivalent als Funktoren von $p\mathcal{O}_\lambda$ nach $\mathcal{D}_Q : \mathbf{V}_P = \mathbf{V}_{\beta P} \circ \beta \cong \mathbf{V}_P \circ \beta$. Mithin ist β natürlich äquivalent zur Identität auf $p\mathcal{O}_\lambda$. *q.e.d.*

Wir haben also einen bis auf natürliche Äquivalenz wohlbestimmten Funktor $F : \tilde{\mathcal{O}}_Q \to \mathcal{O}_\lambda$ derart, daß

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{O}}_Q & = & Mod - A_Q \\ F \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_\lambda & \xrightarrow{\alpha} & mod - A_Q \end{array}$$

kommutiert, mit α wie in der Proposition.

Nun ist ja $A_Q^0 = A_0^Q = \bigoplus \mathbb{C} 1_x$, wo über $x \in \mathcal{W}^Q$ summiert wird. Wir setzen $L_Q^x = 1_x A_Q^0$ und $P_Q^x = 1_x A_Q$ in $\tilde{\mathcal{O}}_Q$. Offensichtlich ist $FL_Q^x \cong L(x \cdot \lambda)$ und $FP_Q^x \cong P(x \cdot \lambda)$.

3.3 Gemischte Verschiebungsfunktoren

Sei $R \supset Q$ eine andere Parabolische von G. Seien $\lambda, \mu \in \mathbf{h}^*$ ganz und dominant mit $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_Q$, $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_R$. So haben wir Verschiebungsfunktoren $\theta_{on} : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_\mu$ und $\theta^{out} : \mathcal{O}_\mu \to \mathcal{O}_\lambda$. Sie sind sowohl rechtsadjungiert als auch linksadjungiert.

Wir wollen nun adjungierte Paare (θ^*, θ_*) und $(\theta_!, \theta^!)$ zwischen $\tilde{\mathcal{O}}_Q$ und $\tilde{\mathcal{O}}_R$ erklären derart, daß $F\theta^* \cong \theta^{out}F \cong F\theta^!$, $F\theta_* \cong \theta_{on}F \cong F\theta_!$. Zusätzlich wird $\theta_* = \theta_!$ und $\theta^* = \theta^!(d)$ gelten, mit $d = dim(R/Q)$.

An die Arbeit! Sei $\tilde{\mathcal{D}}_Q \subset C^Q - Mod$ die Unterkategorie aller Objekte, die zerfallen in eine direkte Summe von Objekten der Form $D_x^Q(i)$, $x \in \mathcal{W}^Q$, $i \in \mathbf{Z}$. Sei $Res_Q^R : C^Q - Mod \to C^R - Mod$ der Restriktionsfunktor. Er hat einen Linksadjungierten $Coind_R^Q = C^Q \otimes_{C^R}$ und einen Rechtsadjungierten $Ind_R^Q = Hom_{C^R}(C^Q, \;)$. Nun gilt

Lemma 4 i.) $Res_Q^R(\tilde{\mathcal{D}}_Q) \subset \tilde{\mathcal{D}}_R$, $Ind_R^Q(\tilde{\mathcal{D}}_R) \subset \tilde{\mathcal{D}}_Q$, $Coind_R^Q(\tilde{\mathcal{D}}_R) \subset \tilde{\mathcal{D}}_Q$.

ii.) $Ind_R^Q(d) = Coind_R^Q$.

Beweis: Wir erinnern uns an den Hyperkohomologie-Funktor $\mathbf{H} : \mathcal{D}(G/Q) \to C^Q - Mod$. Ist $\pi : G/Q \to G/R$ die Projektion, so folgt wie in [So2]: $\mathbf{H}\pi_* = Res_Q^R\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\pi^* = Coind_R^Q\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\pi^! = Ind_R^Q\mathbf{H}$. Das Lemma folgt. *q.e.d.*

Mit $1_Q = 1_{w_\circ w_Q} \in A_Q^0$ ist offensichtlich $C^Q = 1_Q A_Q 1_Q$. Da dieser Ring kommutativ ist, unterscheiden wir nicht zwischen Rechts- und Links-Moduln.

Lemma 5 *Der Funktor* $(\;\cdot 1_Q) : \tilde{\mathcal{O}}_Q = Mod - A_Q \to C^Q - Mod$ *induziert eine Äquivalenz von Kategorien* $p\tilde{\mathcal{O}}_Q \to \tilde{\mathcal{D}}_Q$.

Beweis: Das folgt geradewegs aus den Definitionen. *q.e.d.*

Wir erhalten so Äquivalenzen von Kategorien $D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q) = K^b(p\tilde{\mathcal{O}}_Q) = K^b(\tilde{\mathcal{D}}_Q)$. Wir definieren $\theta_* = \theta_! : D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q) \to D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q) & = & K^b(\tilde{\mathcal{D}}_Q) \\ \theta_* \downarrow \theta_! & & \downarrow Res_Q^R \\ D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R) & = & K^b(\tilde{\mathcal{D}}_R). \end{array}$$

Analog definieren wir θ^* mit $Coind_R^Q$ und $\theta^!$ mit Ind_R^Q.

Proposition 5 $F\theta^* \cong \theta^{out}F \cong F\theta^!$, $F\theta_* \cong \theta_{on}F \cong F\theta_!$.

Korollar 3 $\theta^*(\tilde{\mathcal{O}}_R) \subset \tilde{\mathcal{O}}_Q \supset \theta^!(\tilde{\mathcal{O}}_R)$ *und* $\theta_*(\tilde{\mathcal{O}}_Q) \subset \tilde{\mathcal{O}}_R$.

Beweis[Korollar]: Klar.
Beweis[Proposition]: Ich zeige nur die zweite Aussage. Wir haben ja den (bis auf natürliche Äquivalenz wohlbestimmten) Funktor $\mathbf{V} : \mathcal{O}_\lambda \to C^Q - mod$ zu unserer Verfügung, und $\mathbf{V} : p\mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{D}_Q$ ist eine Äquivalenz von Kategorien nach dem Struktursatz. Nach [So2] ist $res_Q^R \mathbf{V} \cong \mathbf{V}\theta_{on}$, somit kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} D^b(\mathcal{O}_\lambda) & = & K^b(p\mathcal{O}_\lambda) & \xrightarrow{\mathbf{V}} & \mathcal{D}_Q \\ \theta_{on}\downarrow & & \theta_{on}\downarrow & & \downarrow res_Q^R \\ D^b(\mathcal{O}_\mu) & = & K^b(p\mathcal{O}_\mu) & \xrightarrow{\mathbf{V}} & \mathcal{D}_R. \end{array}$$

Schließlich folgt aus den Definitionen, daß

$$\begin{array}{ccc} p\tilde{\mathcal{O}}_Q & \xrightarrow{(\cdot 1_Q)} & \tilde{\mathcal{D}}_Q \\ F\downarrow & & \downarrow \\ p\mathcal{O}_\lambda & \xrightarrow{\mathbf{V}} & \mathcal{D}_Q \end{array}$$

kommutiert. Die Proposition folgt. *q.e.d.*

Proposition 6 *Sei* $\theta_* : \tilde{\mathcal{O}}_B \to \tilde{\mathcal{O}}_Q$ *der soeben konstruierte Verschiebungsfunktor. Es ist*

$$\theta_* L_B^{xw_Q} = \begin{cases} L_Q^x(-l(w_Q)) & x \in \mathcal{W}^Q \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Beweis: Für $x \notin \mathcal{W}^Q$ ist bekanntlich $F\theta_* L_B^{xw_Q} = \theta_{on} L(xw_Q \cdot 0) = 0$, also $\theta_* L_B^{xw_Q} = 0$. Andererseits folgt aus den Definitionen, daß $\theta_* P_B^e \cong P_Q^e$. Jetzt sind aber die Gewichtsfiltrierungen dieser dominanten Verma-Moduln bekannt. Die Proposition folgt. *q.e.d.*

3.4 Verschiebung und Dualität

Seien weiter $R \supset Q$ zwei Parabolische. Die Quotientenabbildung $\pi : G/Q \to G/R$ definiert Funktoren $\pi_* = \pi_! : D_B(G/Q) \to D_B(G/R)$ und $\pi^*, \pi^! : D_B(G/R) \to D_B(G/Q)$. Mithilfe von Theorem 4 iii.) erhalten wir Funktoren $\pi_* = \pi_! : D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q) \to D^b(\tilde{\mathcal{O}}^R)$ und $\pi^*, \pi^! : D^b(\tilde{\mathcal{O}}^R) \to D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q)$.

Theorem 9 *Folgende Funktoren sind natürlich äquivalent:* $\kappa\pi_*\kappa^{-1} = \theta_*$, $\kappa\pi^*\kappa^{-1} = \theta^*$, $\kappa\pi^!\kappa^{-1} = \theta^!$.

Der Beweis wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen.

Allgemein bezeichnen wir Kategorien mit einem Twist (1) als (1)-Kategorien. Funktoren zwischen (1)-Kategorien, die mit dem Twist kommutieren, heißen (1)-Funktoren. Wir erklären (1)-natürliche Transformationen und (1)-Adjunktionen zwischen (1)-Funktoren.

Jetzt betrachten wir die Kategorien $p\tilde{\mathcal{O}}_Q \subset \tilde{\mathcal{O}}_Q \subset D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)$ und $p\tilde{\mathcal{O}}_R \subset \tilde{\mathcal{O}}_R \subset D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R)$ zu zwei beliebigen Parabolischen Q und R über B. Sei $\xi : D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q) \to D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R)$ ein exakter (1)-Funktor.

Definition 7 *ξ heißt ein "p-Funktor" genau dann, wenn*

i.) *ξ hat einen (1)-Linksadjungierten ψ.*

ii.) $\xi(p\tilde{\mathcal{O}}_Q) \subset p\tilde{\mathcal{O}}_R$, $\psi(p\tilde{\mathcal{O}}_R) \subset p\tilde{\mathcal{O}}_Q$.

Beispiele: Im Fall $R \supset Q$ ist θ_* sicher ein p-Funktor. Aber auch $\kappa\pi_*\kappa^{-1}$ ist ein p-Funktor: Das folgt daraus, daß κ reine Komplexe vom Gewicht Null in $D^b(\tilde{\mathcal{O}}^Q)$ mit $p\tilde{\mathcal{O}}_Q \subset D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)$ identifiziert, und π_* macht aus reinen Komplexen vom Gewicht Null ebensolche.

Nun betrachten wir $A_Q \in A_Q - Mod - A_Q$. Sicher ist $A_Q \in p\tilde{\mathcal{O}}_Q$ und wir bilden für ξ einen p-Funktor $\xi A_Q \in p\tilde{\mathcal{O}}_R \subset Mod - A_R$. In kanonischer Weise ist sogar $\xi A_Q \in A_Q - Mod - A_R$ ein graduierter Bimodul. Wir bilden schleißlich $B(\xi) = 1_Q(\xi A_Q)1_R \in C^Q - Mod - C^R$ den "Bimodul von ξ".

Bezeichne andererseits $Hom(\xi, \xi')$ den Raum aller (1)-[1]-Transformationen von ξ nach ξ'.

Proposition 7 *Seien ξ, ξ' zwei p-Funktoren von $D^b(\tilde{\mathcal{O}}_Q)$ nach $D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R)$. Die offensichtliche Abbildung $Hom(\xi, \xi') \to Hom_{C^Q-Mod-C^R}(B(\xi), B(\xi'))$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Seien ψ, ψ' die (1)-Linksadjungierten von ξ, ξ'. Der Funktor $RHom^\bullet_{\tilde{\mathcal{O}}_R}(A_R, \ ) : D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R) \to D^b(Mod - A_R) = D^b(\tilde{\mathcal{O}}_R)$ ist die Identität. Es folgt mühelos $Hom(\xi, \xi') = Hom(\psi', \psi) \xrightarrow{\sim} Hom_{A_R-Mod-A_Q}(\psi' A_R, \psi A_R)$.

Nun sind $\psi' A_R, \psi A_R \in p\tilde{\mathcal{O}}_Q$. Sei $P_Q = 1_Q A_Q \in \tilde{\mathcal{O}}_Q$ der "antidominante Projektive". Es operiert $C^Q = 1_Q A_Q 1_Q$ von links auf P_Q. Nach dem Struktursatz ist

$$\begin{aligned}
Hom_{A_R-Mod-A_Q}(\psi' A_R, \psi A_R) &= Hom_{A_R-Mod-C_Q}(Hom_{\tilde{\mathcal{O}}_Q}(\psi A_R, P_Q), Hom_{\tilde{\mathcal{O}}_Q}(\psi' A_R, P_Q))\\
&= Hom_{A_R-Mod-C_Q}(Hom_{\tilde{\mathcal{O}}_Q}(A_R, \xi P_Q), Hom_{\tilde{\mathcal{O}}_Q}(A_R, \xi' P_Q))\\
&= Hom_{C^Q-\tilde{\mathcal{O}}_R}(\xi P_Q, \xi' P_Q)\\
&= Hom_{C^Q-Mod-C^R}((\xi P_Q)1_R, (\xi' P_Q)1_R)\\
&= Hom_{C^Q-Mod-C^R}(B(\xi), B(\xi'))
\end{aligned}$$

Hier benutzt die erste Gleichung, daß ψ, ψ' p-Funktoren sind, und die vorletzte, daß ξ, ξ' p-Funktoren sind. *q.e.d.*

Beweis[Theorem]: Wir müssen nur $\kappa\pi_*\kappa^{-1} = \theta_*$ zeigen - die anderen Relationen folgen dann über die Adjungiertheiten. Also gilt es, $B(\kappa\pi_*\kappa^{-1}) = B(\theta_*)$ in $C^Q - Mod - C_R$ zu zeigen. Diese sind aber beide isomorph zu $C^Q \in C^Q - Mod - C^R$. *q.e.d.*

3.5 Verma-Moduln und Dualität

Wir wollen nun die Existenz der gemischten (singulären) Verma-Moduln $M_Q^{\bar{x}}$ zeigen und $\kappa d M_x^Q \cong M_Q^{\bar{x}}$ nachweisen.

Proposition 8 *Für alle $x \in \mathcal{W}_Q$ gibt es (bis auf Isomorphismus eindeutige) Objekte $M_Q^{\bar{x}} \in \tilde{\mathcal{O}}_Q$, so daß $FM_Q^{\bar{x}} \cong M(x\cdot\lambda)$ und $Hom_{\tilde{\mathcal{O}}_Q}(M_Q^{\bar{x}}, L_Q^{\bar{x}}) \neq$* 0.

Beweis: Sei zunächst $Q = B$. Die $M_Q^{\bar{x}}$ lassen sich durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren. Da $\tilde{\mathcal{O}}_B \cong \tilde{\mathcal{O}}^B$, folgt die Existenz der $M_B^{\bar{x}}$ aus der Existenz der M_x^B. Im allgemeinen Fall nehme man $M_Q^{\bar{x}} = \theta_* M_B^{\overline{xw_Q}}(l(w_Q))$. *q.e.d.*

Theorem 10 $\kappa d M_x^Q \cong M_Q^{\bar{x}}$ $\forall x \in \mathcal{W}^Q$.

Beweis: Wir behandeln zunächst den Fall $Q = B$. Seien $x \in \mathcal{W}, s \in \mathcal{S}$ mit $xs > x$ und bezeichne $\pi : G/B \to G/P_s$ die Projektion.

Lemma 6 i.) *Die natürliche Transformation $id \to \pi^!\pi_!$ aus der Adjunktion führt zu einem ausgezeichneten Dreieck $dM_x^B \to \pi^!\pi_! dM_x^B \to (dM_{xs}^B)[1](1) \xrightarrow{[1]}$.*

ii.) *Die natürliche Transformation $id \to \theta^!\theta_!$ aus der Adjunktion führt zu einem ausgezeichneten Dreieck $M_B^{\bar{x}} \to \theta^!\theta_! M_B^{\bar{x}} \to M_B^{\overline{xs}}(-1) \xrightarrow{[1]}$*
.

Wir beenden zunächst den Beweis des Theorems und nehmen zunächst weiter $Q = B$ an. Im Fall $x = e$ ist die Aussage klar: Einfache Moduln gehen in Projektive über. Wenden wir κ auf das erste Dreieck des Lemmas an, und vergleichen das Resultat mit dem zweiten Dreieck des Lemmas, so ergibt sich mit Induktion über $l(x)$ die Behauptung für beliebiges $x \in \mathcal{W}$.

Schließlich ergibt sich die Aussage für Q beliebig, indem wir θ_* auf $\kappa d M^B_{xw_Q} \cong M_B^{xw_Q}$ anwenden. *q.e.d.*

Beweis[Lemma]: Ich zeige nur i.). Sei $i_x : C_x \to G/B$ die Einbettung der Bruhat-Zelle $C_x = BxB/B$. Sortieren wir unsere Definitionen aus, so erkennen wir, daß es ausreicht, in $D(G/B)$ ein ausgezeichnetes Dreieck $(i_{x*}C_x, \pi^!\pi_! i_{x*}C_x, i_{xs*}C_{xs}[2](2))$ zu etablieren, wobei die erste Abbildung durch die natürliche Transformation $id \to \pi^!\pi_!$ aus der Adjungiertheit gegeben ist.

Sei nun $\hat{\pi} : BxP_s/B \to BxP_s/P_s$ die eingeschränkte Projektion und $\hat{\imath}_x, \hat{\imath}_{xs}$ die Einbettungen von C_x und C_{xs} in BxP_s/B. Mit Basiswechsel sehen wir, daß es ausreicht, in $D(BxP_s/B)$ ein ausgezeichnetes Dreieck $(\hat{\imath}_{x*}C_x, \hat{\pi}^!\hat{\pi}_!\hat{\imath}_{x*}C_x, \hat{\imath}_{xs*}C_{xs}[2](2))$ zu etablieren, wobei die erste Abbildung durch die natürliche Transformation $id \to \hat{\pi}^!\hat{\pi}_!$ aus der Adjungiertheit gegeben ist.

Nun ist unsere Situation bis auf einen affinen Faktor schlicht

$$\begin{tikzcd} \infty \arrow[r, hook, "i"] & \mathbf{P}^1 \arrow[d, "p"'] & \mathbf{C} \arrow[l, hook', "u"'] \\ & pt & \end{tikzcd}$$

Es entsprechen sich i und $\hat{\imath}_x$, u und $\hat{\imath}_{xs}$, p und $\hat{\pi}$.

Mit den offensichtlichen Abbildungen kommutiert in $D(\mathbf{P}^1)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} i_! i^! \underline{\mathbf{P}}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathbf{P}}^1 \arrow[d] \\ i_*\underline{\infty}[-2](-2) \arrow[r] & p^! p_! i_* \underline{\infty}[-2](-2) \end{tikzcd}$$

und so liefert das Gysin-Dreieck $(i_! i^! \underline{\mathbf{P}}^1, \underline{\mathbf{P}}^1, u_* u^* \underline{\mathbf{P}}^1)$ schließlich das gewünschte ausgezeichnete Dreieck $(i_*\underline{\infty}, p^! p_! i_* \underline{\infty}, u_*\underline{\mathbf{C}}[2](2))$. *q.e.d.*

References

[BBD] A.A.Beilinson, J. Bernstein, P.Deligne, Faisceaux pervers, astérisque 100 (1982)

[BGG] I.N.Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand, Algebraic bundles over $\mathbf{P}^n$ and problems of linear Algebra, Functional Analysis and its App., 12, No. 3, (1978), 66-67

[BGi] A.A.Beilinson, V.A.Ginsburg, Mixed categories, Ext-duality and Representations (Results and conjectures), Preprint

[BGS] A.A.Beilinson, V.A.Ginsburg, V.V.Schechtman, Koszul duality, Preprint (1989)

[GJ] O.Gabber, A.Joseph, Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t. 14, (1981), 261-302

[Ir] R.S.Irving, A filtered categorie $\mathcal{O}_S$ and applications, Preprint

[MV] R.Mirollo, K.Vilonen, Bernstein-Gelfand-Gelfand reciprocity on perverse Sheaves, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t. 20, (1987) 311-324

[Sa1] M. Saito, Modules de Hodge polarisables, preprint RIMS 553 October 1986

[Sa2] M. Saito, Mixed Hodge Modules, preprint RIMS 585 July 1987

[Sa3] M. Saito, Introduction to mixed Hodge Modules, preprint RIMS 605 December 1987

[So1] W.Soergel, $\mathfrak{n}$-Cohomology of simple highest weight modules on walls and purity, erscheint in Invent. math. (1989)

[So2] W.Soergel, Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe, MPI-Preprint MPI/89-46 (1989)