

Einfache Kurvensingularitäten
und torsionsfreie Moduln

G.-M. Greuel und H. Knörrer

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 40

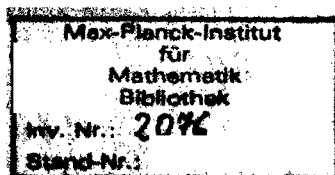
THEORETISCHE MATHEMATIK

UNIVERSITÄT BONN

UND

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BONN



**Einfache Kurvensingularitäten
und torsionsfreie Moduln**

G.-M. Greuel und H. Knörrer

**Gert-Martin Greuel
Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger-Straße
D-6750 Kaiserslautern**

**Horst Knörrer
Universität Bonn
Mathematisches Institut
Wegelerstraße 10
D-5300 Bonn**

**SFB 40 / Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3**

SFB/MPI 84-11

EINFACHE KURVENSINGULARITÄTEN UND TORSIONSFREIE MODULN

G.-M. Greuel, H. Knörrer

In der vorliegenden Arbeit werden diejenigen reduzierten Kurvensingularitäten klassifiziert, über deren lokalen Ring es nur endlich viele Isomorphieklassen von torsionsfreien unzerlegbaren Moduln gibt. Es stellt sich heraus, daß dies genau die Kurvensingularitäten sind, die eine einfache ebene Kurvensingularität dominieren.

Unsere Untersuchungen wurden teilweise motiviert durch die folgenden Ergebnisse über die kompaktifizierte Jacobivarietät einer reduzierten vollständigen algebraischen Kurve C : Nach D'Souza [12] gibt es einen feinen Modulraum für die Menge aller kohärenten torsionsfreien Garben F vom Rang 1 über C mit $c_1(F) = 0$. Auf diesem Modulraum - der "kompaktifizierten Jacobivarietät" $P(C)$ - operiert die verallgemeinerte Jacobivarietät $\text{Pic}^0(C)$ von C durch Tensorieren (vgl. auch [9] ch. 5, [10]). $P(C)$ besteht genau dann aus endlich vielen $\text{Pic}^0(C)$ -Orbits, wenn es für jeden singulären Punkt $p \in C$ über dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{C,p}$ nur endlich viele torsionsfreie Moduln vom Rang 1 gibt (siehe [10], p. 213 oben). Unser Hauptergebnis (Satz 1) impliziert, daß dies genau dann der Fall ist, wenn (C,p) eine einfache Kurvensingularität dominiert.

Im Fall einer ebenen Kurvensingularität bedeutet dies, daß (C,p) selbst einfach ist. Das heißt, in der semi-universellen Deformation von (C,p) treten bis auf Isomorphie nur endlich viele verschiedene Singularitäten auf. Die

einfachen ebenen Kurvensingularitäten wurden von Arnol'd
(siehe etwa [1]) klassifiziert; es ergibt sich die folgende
Liste:

$$A_k : x^2 + y^{k+1} = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$D_k : x^2 y + y^{k-1} = 0 \quad k = 4, 5, \dots$$

$$E_6 : x^3 + y^4 = 0$$

$$E_7 : x^3 + xy^3 = 0$$

$$E_8 : x^3 + y^5 = 0$$

Neben der angegebenen gibt es viele andere Charakterisierungen
dieser Singularitäten (vgl. z.B. [1], [4]); eine geometrische
Diskussion dieser Kurvensingularitäten findet man etwa in
[3] II.8.

Formulierung der Ergebnisse

R bzw. R' bezeichne den lokalen Ring einer reduzierten Kurvensingularität (C, O) bzw. (C', O) mit Restklassenkörper k , den wir algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik 0 voraussetzen. \tilde{R} sei die Normalisierung von R , d.h. der ganze Abschluß von R in seinem totalen Quotientenring K .

Wir sagen R' dominiert R oder (C', O) dominiert (C, O) , wenn es Inklusionen

$$R \subset R' \subset \tilde{R}$$

gibt. Das bedeutet, daß es einen endlichen, surjektiven und generisch bijektiven Morphismus $(C', O) \rightarrow (C, O)$ gibt. Ein R -Modul⁽¹⁾ M heißt unzerlegbar, wenn jede direkte Summenzerlegung $M = M_1 \oplus M_2$ trivial ist (d.h. $M_1 = 0$ oder $M_2 = 0$).

Satz 1:

Sei R der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) über R gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln.
- (ii) Für jedes $n \geq 1$ gibt es über R nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n ⁽²⁾.
- (iii) Es gibt ein $n \geq 1$, so daß es über R bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n gibt.
- (iv) R dominiert eine einfache ebene Kurvensingularität.

(1) Alle in dieser Arbeit betrachteten Moduln seien endlich erzeugt.

(2) Wir sagen, M habe den Rang n , wenn $K \otimes_R M$ frei über K vom Rang n ist.

Bemerkungen:

1.) Eine ähnliche Klassifikation wie in Satz 1, (i) und (iv) ist in der Arbeit von Jacobinsky [7]⁽³⁾ enthalten. Dort wird die Situation betrachtet, daß C ein reduziertes, endliches, 1-dimensionales Schema über dem Bewertungsring in einer p -adischen Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers ist. Der Beweis, daß in Satz 1 aus (iv) die Aussage (i) folgt, läßt sich nahezu wörtlich aus dieser Arbeit (p. 10 ff.) übertragen. Dabei erhält man auch die Klassifikation der unzerlegbaren Moduln über dem lokalen Ring einer ebenen einfachen Kurvensingularität. Wir geben diese Klassifikation im Anhang an.

Dagegen lassen sich die Argumente für die umgekehrte Richtung nicht ohne weiteres übertragen; und die Charakterisierungen (ii) und (iii) gelten in der p -adischen Situation sicher nicht. Denn nach dem Satz von Jordan-Zassenhaus gibt es bei vorgegebenem Rang n nur endlich viele Isomorphieklassen von Moduln vom Rang n . In unserer Situation treten dagegen stets kontinuierliche Familien nicht isomorpher R -Moduln auf.

2.) Nulldimensionale lokale Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen unzerlegbarer Cohen-Macaulay-Moduln wurden von Herzog [6], Satz 1.5 klassifiziert.

3.) Für normale Flächensingularitäten $(X,0)$ haben M. Artin und J.-L. Verdier [2] gezeigt, daß es über dem lokalen Ring $\hat{O}_{X,0}$ genau dann nur endlich viele unzerlegbare reflexive Moduln gibt, wenn $(X,0)$ eine Quotientensingularität ist.

4.) Das folgende Beispiel weist darauf hin, daß bei der Klassifikation von reduzierten Kurvensingularitäten, über deren lokalem Ring es nur endlich viele unzerlegbare reflexive Moduln gibt, kein so einfaches Ergebnis

(3)

Wir danken M. Auslander, der uns auf diese Arbeit hingewiesen hat.

wie Satz 1 zu erwarten ist:

Sei $R = k[[t^m, t^{m+1}, t^{m+2}, \dots]] \subset k[[t]] = \tilde{R}$. Da die Multiplizität einer einfachen ebenen Kurvensingularität höchstens 3 ist, gibt es nach Satz 1 für $m \geq 4$ über R unendlich viele nicht-isomorphe unzerlegbare torsionsfreie Moduln vom Rang n . Dagegen ist jeder unzerlegbare reflexive R -Modul isomorph zu R oder zu \tilde{R} :

Sei nämlich M ein reflexiver R -Modul vom Rang n . Da $M \otimes \tilde{R}$ ein freier \tilde{R} -Modul ist, können wir annehmen, daß $R^n \subset M \subset \tilde{R}^n$ und die Standardbasisvektoren $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ von \tilde{R}^n in M liegen. Der zu M duale Modul ist

$$M^* = \{x \in \tilde{R}^n \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ für alle } y \in M\},$$

wobei für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ die Klammer $\langle x, y \rangle$ das übliche Skalarprodukt $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ bezeichnet. Da das maximale Ideal \mathfrak{m} von R gleich dem Konduktor von R in \tilde{R} ist, gilt $\mathfrak{m} \cdot R^n \subset M^* \subset R^n$. Nach einem Basiswechsel in \tilde{R}^n mit einer Matrix in $GL(n, k)$ können wir daher annehmen, daß $M^* = \mathfrak{m} \cdot R^a \oplus R^b \subset R^n$ mit $a+b = n$ gilt. M^{**} ist dann gleich $\tilde{R}^a \oplus R^b$, und da M reflexiv ist, gilt $M \cong M^{**} \cong \tilde{R}^a \oplus R^b$.

Für Gorenstein-Singularitäten sind alle torsionsfreien Moduln bereits reflexiv. Die Aussage von Satz 1 kann in diesem Fall verbessert werden.

Korollar:

Sei R der lokale Ring einer reduzierten Gorenstein Kurvensingularität. Dann sind die Aussagen (i), (ii), (iii) von Satz 1 äquivalent zu

(iv') R ist isomorph zum lokalen Ring einer einfachen ebenen Kurvensingularität.

Beweis des Korollars:

Hat R die Einbettungsdimension 2 und dominiert R eine einfache ebene Kurvensingularität, so ist R selbst isomorph zum lokalen Ring einer einfachen ebenen Kurvensingularität (vgl. z.B. [3] II.8). Es genügt daher zu zeigen, daß Gorenstein Singularitäten, die der Bedingung (iv) von Satz 1 genügen, bereits eben sind. Da ebene einfache Kurvensingularitäten höchstens Multiplizität 3 haben, gilt dies auch für jeden dominierenden Ring R . Andererseits ist die Einbettungsdimension von R kleiner oder gleich der Multiplizität von R , also hat R höchstens Einbettungsdimension 3. Da R Gorensteinsch ist, folgt aus [11], prop. 5, daß R bereits vollständiger Durchschnitt ist. Die Multiplizität einer Kurvensingularität der Einbettungsdimension 3, die vollständiger Durchschnitt ist, ist aber mindestens 4. Deshalb hat R die Einbettungsdimension 2.

Bemerkung:

Die Tatsache, daß R Einbettungsdimension 2 hat, ergibt sich auch sofort aus [6], Satz 1.2.

Torsionsfreie Moduln vom Rang 1 über einem lokalen Ring R erhält man insbesondere, wenn man Ringe R' betrachtet, die zwischen R und seinem ganzen Abschluß \tilde{R} liegen: $R \subset R' \subset \tilde{R}$. Ähnlich wie in Satz 1 ergibt sich eine Charakterisierung der einfachen ebenen Kurvensingularitäten.

Satz 2:

Für den lokalen Ring R einer reduzierten ebenen Kurvensingularität sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt nur endlich viele Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$

(ii) R ist einfach

Bemerkung:

Dieses Resultat wurde unabhängig auch von D. Kirby und H. Tavallee [8] gefunden. Wie uns D. Kirby mitteilte, haben Tavallee, Sedighi und er in der Zwischenzeit alle eindimensionalen lokalen Cohen-Macaulay Ringe R klassifiziert, für die es nur endlich viele Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$ gibt.

Beweis von Satz 1 und Satz 2:

Es sei R der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität (C, O) und \tilde{R} der ganze Abschluß von R in seinem totalen Quotientenring K . Eine Beziehung zwischen torsionsfreien Moduln vom Rang 1 über R und Erweiterungsringen von R , die in \tilde{R} enthalten sind, wird durch die folgende Konstruktion gegeben:

Ein torsionsfreier Modul M vom Rang 1 über R kann stets in den totalen Quotientenring K eingebettet werden.

$\text{End}_R(M) = \{x \in K \mid x \cdot M \subset M\}$ ist dann ein Unterring von K mit $R \subset \text{End}_R(M) \subset R$.

Lemma 1:

- (i) Seien $M_1, M_2 \subset K$ zwei isomorphe torsionsfreie R -Moduln vom Rang 1. Dann gilt $\text{End}_R(M_1) = \text{End}_R(M_2)$.
- (ii) Seien R_1, R_2 Unterringe von \tilde{R} , die R enthalten. Falls R_1 und R_2 als R -Moduln isomorph sind, so gilt schon $R_1 = R_2$.

Beweis:

- (i) Jeder Isomorphismus $M_1 \rightarrow M_2$ wird durch Multiplikation mit einer Einheit $u \in K$ induziert. Aus $\text{End}_R(M_1) = \text{End}_R(u \cdot M_1)$ folgt (i).
- (ii) Offenbar ist $R_i = \text{End}_R(R_i)$ für $i = 1, 2$. Daraus und aus (i) folgt die Behauptung.

In Satz 1 sind die Implikationen (i) \implies (ii) und (ii) \implies (iii) offensichtlich. Wie bereits erwähnt, läßt sich der Beweis der Implikation (iv) \implies (i) nahezu wörtlich aus [7] übertragen. Es ist also nur noch zu zeigen, daß es für jedes n über R unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n gibt, falls R keine einfache ebene Kurvensingularität dominiert.

Bei Satz 2 ergibt sich die Implikation (i) \implies (ii) sofort aus Lemma 1 und (dem bereits behandelten Teil von) Satz 1. Für die umgekehrte Richtung sind für jede ebene nicht einfache Kurvensingularität unendlich viele verschiedene Ringe zwischen R und \tilde{R} zu konstruieren.

Wir führen zunächst einige Notationen ein, um dann (in Lemma 2 und Lemma 3) diejenigen Kurvensingularitäten zu charakterisieren, die keine einfache Kurvensingularität dominieren.

Der Zerlegung von $(C, 0) = (C_1, 0) \cup \dots \cup (C_r, 0)$ in irreduzible Komponenten entspricht eine Zerlegung $\tilde{R} = \bigoplus_{i=1}^r A_i$ in eine direkte Summe regulärer lokaler Ringe A_i . Wir bezeichnen mit

m_i das maximale Ideal von A_i und setzen für einen Multiindex $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$

$$J_{(\ell)} := m_1^{\ell_1} A_1 \otimes \dots \otimes m_r^{\ell_r} A_r \subset \tilde{R}$$

$J := J_{(1, \dots, 1)}$ ist das Jacobson-Radikal von \tilde{R} . Die Ringe A_i sind diskrete Bewertungsringe und v_i bezeichne die zugehörige normierte Bewertung.

$$\Gamma(C_i) := \{v_i(f) \mid f \in R_i\}$$

ist die Wertehalbgruppe des Zweigs $(C_i, 0)$, wobei R_i den lokalen Ring von $(C_i, 0)$ bezeichne; falls $r = 1$ schreiben wir auch $\Gamma(C)$ statt $\Gamma(C_1)$. Ferner bezeichne $m \subset R$ das maximale Ideal von R , $\text{mult}(C, 0)$ bzw. $\text{mult}(R)$ die Multiplizität des lokalen Rings R , und $\text{embdim}(R) := \dim_k m/m^2$ die Einbettungsdimension von $(C, 0)$.

Lemma 2:

$(C, 0) = (C_1, 0) \cup \dots \cup (C_r, 0)$ dominiere keine einfache ebene Kurvensingularität. Dann tritt nach eventueller Umnumerierung der Zweige einer der folgenden Fälle ein, die wir gesondert nach der Zahl r der Zweige unterscheiden:

(1) $r = 1$, (1.1): $1, 2, 3 \notin \Gamma(C)$

(1.2): $3 \in \Gamma(C)$ aber $4, 5 \notin \Gamma(C)$

(2) $r = 2$, (2.1): $(C_1, 0)$ und $(C_2, 0)$ sind beide singulär.

(2.2): $(C_1, 0)$ ist glatt, $\text{mult}(C_2, 0) \geq 3$

(2.3): $(C_1, 0)$ ist glatt, $\text{mult}(C_2, 0) = 2$, $3 \notin \Gamma(C_2)$

$(C_1, 0)$ und $(C_2, 0)$ haben die gleiche Tangente.

(3) $r = 3$, (3.1): $(C_3, 0)$ ist singulär

(3.2): Alle Zweige sind glatt und haben die gleiche Tangente

(4) $r \geq 4$

Beweis:

folgt aus [3], II. 8.

Die Bedingungen von Lemma 1 können so umformuliert werden, daß (C, O) von einer geeigneten Kurve (\hat{C}, O) dominiert wird. Dazu wählen wir Isomorphismen $A_i \cong k[[t]]$ (damit ist t lokaler Parameter in jedem A_i) und schreiben ein Element $f \in \tilde{R} = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ in der Form $f = (f_1, \dots, f_r)$ mit $f_i \in A_i$.

Lemma 3:

R sei der lokale Ring einer reduzierten Kurvensingularität $(C, O) = (C_1, O) \cup \dots \cup (C_r, O)$ mit r Zweigen. Dann gibt es eine Parametrisierung von (C, O) , so daß die folgende Aussage (i)' bzw. (i, j)' äquivalent zu der Aussage (i) bzw. (i, j) von Lemma 2 ist:

$$(1)' \quad r = 1, \quad (1.1)': \quad R \subset \hat{R} := k + J_{(4)}$$

$$(1.2)': \quad R \subset \hat{R} := k + k t^3 + J_{(6)}$$

$$(2)' \quad r = 2, \quad (2.1)': \quad R \subset \hat{R} := k + J_{(2,2)}$$

$$(2.2)': \quad R \subset \hat{R} := k + J_{(1,3)}$$

$$(2.3)': \quad R \subset \hat{R} := k + k(t, t^2) + J_{(2,4)} \quad \text{und} \quad R \not\subset k + J_{(2,4)}$$

$$(3)' \quad r = 3, \quad (3.1)': \quad R \subset \hat{R} := k + J_{(1,1,2)}$$

$$(3.2)': \quad R \subset \hat{R} := k + k(t, t, t) + J_{(2,2,2)} \quad \text{und} \quad R \not\subset k + J_{(2,2,2)}$$

$$(4)' \quad r \geq 4, \quad R \subset \hat{R} := k + J_{(1, \dots, 1)}$$

Hierbei ist k durch $\alpha \rightarrow (\alpha, \dots, \alpha)$ diagonal in \tilde{R} eingebettet.

Beweis:

Bis auf die Äquivalenzen von (2.3) mit (2.3)' und (3.2) mit (3.2)' ist die Behauptung offensichtlich.

Wir nehmen an, es gelte (2.3). Da $\text{mult}(C, O) = 3$, ist die Einbettungsdimension von (C, O) höchstens 3, und wir können Erzeugende x, y, z von m und lokale Parameter so finden, daß

$$\begin{aligned} x &= (t, \alpha t^2 + \alpha' t^3) \\ y &= (0, \beta t^2 + \beta' t^3) \\ z &= (0, \gamma t^2 + \gamma' t^3) \end{aligned} \quad \text{mod } J_{(2,4)}$$

mit $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in k$. Da die Tangenten von $(C_1, 0)$ und $(C_2, 0)$ übereinstimmen, folgt $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = 0$; da $3 \notin \Gamma(C_2)$ ist auch $\beta' = \gamma' = 0$ und somit $y, z \in J_{(2,4)}$. Parametrisieren wir den zweiten Zweig um durch $t' = \sqrt{\alpha + \alpha'} t$, so ist $x = (t, t'^2) \text{ mod } J_{(2,4)}$ und somit $R \subset k + (t, t'^2) + J_{(2,4)}$.

Gilt umgekehrt (2.3)', so folgt sofort, daß $(C_1, 0)$ glatt ist, $\text{mult}(C_2, 0) = 2$ und $3 \notin \Gamma(C_2)$. Außerdem können wir Erzeugende x, y, z von m so finden, daß $x = (t, t^2) \text{ mod } J_{(2,4)}$, $y, z \in J_{(2,4)}$. Daraus folgt, daß $(C_1, 0)$ und $(C_2, 0)$ die gleiche Tangente haben.

Die Äquivalenz von (3.2) und (3.2)' beweist man analog.

Wir notieren nun noch einige allgemeine Tatsachen, die für uns insbesondere zum Nachweis der Unzerlegbarkeit der später konstruierten Moduln nützlich sein werden.

Lemma 4:

(i) Ist M ein torsionsfreier R -Modul vom Rang n , so gibt es eine Einbettung $R^n \subset M \subset \tilde{R}^n$. Sind $M, N \subset \tilde{R}^n$ R -Moduln mit $R^n \subset M, N \subset \tilde{R}^n$, so ist

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{A \in \text{End}_R(\tilde{R}^n) \mid A(M) \subset N\}$$

(ii) Ein R -Modul M ist unzerlegbar genau dann, wenn jede R -lineare Projektion $\epsilon: M \rightarrow M$ trivial ist (d.h. $\epsilon = 0$ oder $\epsilon = \text{id}$)

(iii) Sei $R^n \subset M \subset \tilde{R}^n$ ein R -Modul, $\epsilon: M \rightarrow M$ eine Projektion. Nach (i) läßt sich ϵ auf eindeutige Weise fortsetzen zu einer \tilde{R} -linearen Projektion $\tilde{\epsilon}: \tilde{R}^n \rightarrow \tilde{R}^n$ und induziert somit eine Projektion $\bar{\epsilon}: R^n / \mathfrak{J}R^n \rightarrow \tilde{R}^n / \mathfrak{J}\tilde{R}^n$. Dann ist ϵ trivial genau dann, wenn $\bar{\epsilon}$ trivial ist.

(iv) Sei V ein endlich dimensionaler k -Vektorraum, $A \in \text{End}_k(V)$ irreduzibel und $\epsilon \in \text{End}_k(V)$ eine Projektion. Dann gilt $A \cdot \epsilon = \epsilon \cdot A$ genau dann, wenn ϵ trivial

Beweis:

- (i) Es gibt linear unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$ so, daß $R^n \cong Rx_1 \oplus \dots \oplus Rx_n \subset M$ und der Kokern dieser Inklusion $R^n \rightarrow M$ ein Torsionsmodul ist. Daher ist $M \otimes_R \tilde{R}$ isomorph zu \tilde{R}^n . Da M torsionsfrei ist, ist die kanonische Abbildung $M \rightarrow M \otimes \tilde{R}$ injektiv. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil ergibt sich daraus, daß sich jeder Homomorphismus $M \rightarrow N$ in eindeutiger Weise zu einer \tilde{R} -linearen Abbildung $\tilde{R}^n = M \otimes \tilde{R} \rightarrow N \otimes \tilde{R} = \tilde{R}^n$ fortsetzen läßt.
- (ii) folgt aus der Tatsache, daß jede Projektion $\epsilon: M \rightarrow M$ eine Zerlegung $M = \ker(\epsilon) \oplus \text{Im}(\epsilon)$ bewirkt.
- (iii) (vgl. [7] p. 6, lemma 3): Offenbar ist ϵ trivial genau dann, wenn $\tilde{\epsilon}$ trivial ist, und dann ist auch $\bar{\epsilon}$ trivial. Ist umgekehrt $\bar{\epsilon}$ trivial, so können wir annehmen, daß $\bar{\epsilon} = 0$ ist (ersetze sonst ϵ durch id). Dann ist $\tilde{\epsilon}(R^n) \subset JR^n$ und wegen $\tilde{\epsilon}^2 = \tilde{\epsilon}$ folgt $\tilde{\epsilon}(R^n) \subset \tilde{J}\tilde{\epsilon}(R^n)$, also $\tilde{\epsilon} = 0$ nach dem Nakayama-Lemma.
- (iv) Aus $\epsilon \cdot A = A \cdot \epsilon$ folgt, daß $\ker(\epsilon)$ und $\text{Im}(\epsilon)$ A -invariante Unterräume von V sind. Da $V = \ker(\epsilon) \oplus \text{Im}(\epsilon)$ und A irreduzibel ist, folgt $\ker(\epsilon) = V$ oder $\text{Im}(\epsilon) = V$, d.h. ϵ ist trivial.

Korollar:

R' dominiere R . Gibt es über R' unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n , so gilt das gleiche für R .

Beweis:

Aus (i)-(iii) von Lemma 4 folgt, daß jeder unzerlegbare torsionsfreie R' -Modul auch unzerlegbar über R ist.

Zum Beweis von Satz 1 genügt es also, über den in Lemma 3 aufgeführten Ringen \hat{R} für jedes n unendlich viele nicht isomorphe torsionsfreie unzerlegbare Moduln vom Rang n zu konstruieren. In vi dieser Fälle wird dies - und auch die Konstruktion unendlich viele dominierende Ringe - geliefert durch

Lemma 5:

Es gebe ein $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$, $\ell_i \geq 1$, so daß

$$\dim_k (J_{(2\ell)} / J_{(2\ell)} + m \cdot J_{(2\ell)} + m \cap J_{(2\ell)}) \geq 2.$$

Dann gilt:

- (i) Es gibt unendlich viele verschiedene Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$
- (ii) Für jedes n gibt es unendlich viele nicht isomorphe unzerlegbare torsionsfreie R -Moduln vom Rang n .

Beweis:

Wähle $f, g \in J_{(2\ell)}$, deren Restklassen modulo $J_{(2\ell)} + m \cdot J_{(2\ell)} + m \cap J_{(2\ell)}$ linear unabhängig sind. Für $\lambda \in k$ bezeichne A_λ die irreduzible $n \times n$ -Matrix, bestehend aus einem Jordanblock mit Eigenwert λ und es sei $M_\lambda := R^n + (f + \lambda g)R^n \subset \tilde{R}^n$. Wir bezeichnen mit R_λ den von R und $f + \lambda g$ erzeugten Unterring von \tilde{R} .

- (i) Es gilt $R_\lambda = R_\mu$ genau dann, wenn $\lambda = \mu$.

Beweis: Wegen $(f + \lambda g)^2 \in J_{(2\ell)}$ und $m \cdot (f + \lambda g) \in m \cdot J_{(2\ell)}$ ist das Bild von R_λ in $\tilde{R} / J_{(2\ell)} + m \cdot J_{(2\ell)}$ gleich dem vom Bild von R und der Restklasse von $f + \lambda g$ aufgespannten Vektorraum. Für $\lambda \neq \mu$ sind also schon die Bilder von R_λ und R_μ in $\tilde{R} / J_{(2\ell)} + m \cdot J_{(2\ell)}$ verschieden.

- (ii) M_λ ist irreduzibler R -Modul vom Rang n und es gilt $M_\lambda \cong M_\mu$ genau dann, wenn $\lambda = \mu$.

Beweis: Wie oben sei k diagonal in $\tilde{R} = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ eingebettet; und entsprechend haben wir eine Einbettung $k^n \subset \tilde{R}^n = A_1^n \oplus \dots \oplus A_r^n$ durch $x \mapsto (x, \dots, x)$. Sei nun $\varepsilon : \tilde{R}^n \rightarrow \tilde{R}^n$ eine \tilde{R} -lineare Abbildung mit $\varepsilon(M_\lambda) \subset M_\mu$. Wir können ε in der Form

$$\varepsilon = (\eta_1, \dots, \eta_r)$$

schreiben, wobei jedes η_i ein Endomorphismus von A_i^n ist. Zerlegen wir η_i in der Form $\eta_i = \eta_i^0 + \eta_i^1$, wobei

$\eta_i^0 \in \text{End}_k(k^n)$, $\text{Im}(\eta_i^1) \subset m_i \cdot A_i^n$, so erhalten wir eine

Zerlegung

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

mit $\varepsilon_0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_r^0)$ und $\text{Im}(\varepsilon_1) \subset J \cdot \tilde{\mathbb{R}}^n$.

Da für alle $x \in k^n \subset \mathbb{R}^n \subset \tilde{\mathbb{R}}^n$

$$\varepsilon(x) = (\eta_1^0(x), \dots, \eta_r^0(x)) + \varepsilon_1(x) \in M_\mu$$

folgt $\eta_1^0(x) = \dots = \eta_r^0(x)$ für alle $x \in k^n$, also $\eta_1^0 = \dots = \eta_r^0$. Diese Abbildung bezeichnen wir auch mit η^0 .

Wir nennen \mathcal{U}_λ die Abbildung $f + gA_\lambda: \tilde{\mathbb{R}}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^n$. Für $x \in k^n$ ist

$$\varepsilon(\mathcal{U}_\lambda x) = f\varepsilon_0(x) + g\varepsilon_0 A_\lambda(x) \pmod{(J_{(2\lambda)} + m \cdot J_{(\lambda)}) \cdot \tilde{\mathbb{R}}^n},$$

denn $\varepsilon_1(x)$ und $\varepsilon_1(A_\lambda x)$ liegen in $M_\mu \cap J \cdot \tilde{\mathbb{R}}^n \subset J_{(\lambda)} \cdot \tilde{\mathbb{R}}^n + m \cdot \tilde{\mathbb{R}}^n$ und $f, g \in J_{(\lambda)}$. Da f und g linear unabhängig in $\tilde{\mathbb{R}}/J_{(2\lambda)} + m \cdot J_{(\lambda)}$ sind und $\varepsilon(\mathcal{U}_\lambda x) \in M_\mu$, gibt es $y \in k^n$, so daß

$$f\varepsilon_0(x) + g\varepsilon_0 A_\lambda(x) = fy + gA_\mu(x).$$

Daraus folgt $\eta^0(x) = y$, $\eta^0 A_\lambda(x) = A_\mu(y)$ und somit

$$\eta^0 A_\lambda(x) = A_\mu \eta^0(x) \quad \text{für alle } x \in k^n.$$

Ist nun $\lambda = \mu$ und ε eine Projektion, so ist auch ε^0 eine Projektion. Nach Lemma 4 (iv) ist η^0 trivial. Also ist auch ε_0 trivial; und nach Lemma 4 (iii) ist ε trivial. Dies zeigt, daß M_λ unzerlegbar ist.

Ist ε ein Isomorphismus von M_λ auf M_μ , so ist auch η^0 ein Isomorphismus. Dann hat $A_\mu = \eta^0 \cdot A_\lambda \cdot (\eta^0)^{-1}$ den gleichen Eigenwert wie A_λ , also ist $\lambda = \mu$.

Lemma 6:

Falls $\text{mult}(R) \geq \text{embdim}(R) + 2$, so gibt es unendlich viele verschiedene Ringe R' mit $R \subset R' \subset \tilde{R}$ und für jedes n unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie R -Moduln vom Rang n .

Beweis:

Ist m_1 die Multiplizität von C_1 , so ist $\text{mult}(R) = m_1 + \dots + m_r$, und mit $m := (m_1, \dots, m_r)$ gilt $m \cdot \tilde{R} = J_{(m)}$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow m \cap J_{(2m)} / m^2 \rightarrow m / m^2 \rightarrow J_{(m)} / J_{(2m)} \rightarrow J_{(m)} / m + J_{(2m)} \rightarrow 0$$

folgt $\dim_k (J_{(m)} / J_{(2m)} + m) \geq m_1 + \dots + m_r - \text{embdim}(R) \geq 2$.

Wegen $m \subset J_{(m)}$ ist die Voraussetzung von Lemma 5 erfüllt, und daraus folgt die Behauptung.

Bei den in Lemma 3 diskutierten Fällen reduzierter Kurvensingularitäten, die keine einfache ebene Kurvensingularität dominieren, sind in den folgenden Fällen die Voraussetzungen von Lemma 5 für den Ring \hat{R} erfüllt:

- (1.1)' $\hat{R} = k + J_{(4)}$ mit $\ell = (2)$
- (1.2)' $\hat{R} = k + k \cdot t^3 + J_{(6)}$ mit $\ell = (3)$
- (2.1)' $\hat{R} = k + J_{(2,2)}$ mit $\ell = (1,1)$
- (2.3)' $\hat{R} = k + k \cdot (t, t^2) + J_{(2,4)}$ mit $\ell = (1,2)$
- (3.2)' $\hat{R} = k + k \cdot (t, t, t) + J_{(2,2,2)}$ mit $\ell = (1,1,1)$

In diesen Fällen gibt es also nach Lemma 5 und dem Korollar zu Lemma 4 für jedes n unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie R -Moduln vom Rang n , und ebenso gibt es unendlich viele Ringe zwischen R und seiner Normalisierung \tilde{R} .

In den verbleibenden Fällen (2.2), (3.1) und (4) ist $\text{mult}(R) \geq 4$. Ist nun $(C,0)$ eine ebene Singularität, so ist die Voraussetzung von Lemma 6 erfüllt, es gibt also wieder unendlich viele Ringe zwischen R und \tilde{R} . Damit ist der Beweis von Satz 2 bereits voll beendet.

Zum Beweis von Satz 1 ist noch zu zeigen, daß es in den Fällen (2.2)', (3.1)' und (4)' von Lemma 3 über dem Ring \hat{R} für jedes n unendlich viele unzerlegbare torsionsfreie

Moduln vom Rang n gibt. Für $\lambda \in k$ bezeichne A_λ wieder die irreduzible $n \times n$ -Matrix bestehend aus einem Jordanblock mit Eigenwert λ . Wir wählen Elemente f, g in der Normalisierung von \hat{R} folgendermaßen:

im Fall (2,2)', $\hat{R} = k + J_{(1,3)}$, $f := (1, t)$, $g := (0, t^2)$

im Fall (3.1)', $\hat{R} = k + J_{(1,1,2)}$, $f := (1, t, 0)$, $g := (0, 0, 1)$

im Fall (4)', $\hat{R} = k + J_{(1, \dots, 1)}$, $f := (1, 2, 0, \dots, 0)$, $g := (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$

und setzen $M_\lambda := \hat{R}^n + (f + gA_\lambda) \cdot \hat{R}^n$. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 5 (ii) prüft man nach, daß M_λ ein unzerlegbarer torsionsfreier \hat{R} -Modul vom Rang n ist, und daß für $\lambda \neq \mu$ die Moduln M_λ und M_μ nicht isomorph sind. Dies beendet auch den Beweis von Satz 1.

Anhang: Die unzerlegbaren torsionsfreien Moduln über dem
lokalen Ring einer einfachen ebenen Kurvensingularität

Aus der Arbeit von Jacobinsky [7] ergibt sich folgende Klassifikation: Sei (C, O) eine einfache ebene Kurvensingularität mit den Zweigen $(C_1, O), \dots, (C_r, O)$, R (bzw. R_i) der lokale Ring von (C, O) (bzw. von (C_i, O)), \tilde{R} die Normalisierung von R und $\tilde{R}^m = \tilde{R}e_1 \oplus \dots \oplus \tilde{R}e_m$ bezeichne den freien \tilde{R} -Modul vom Rang m . Ferner sei M ein unzerlegbarer torsionsfreier R -Modul. Mit $\rho_i(M)$ bezeichnen wir den Rang von $M \otimes_R R_i$ als R_i -Modul; falls C irreduzibel ist, schreiben wir $\rho(M)$ statt $\rho_1(M)$. Bis auf Isomorphie liegt dann einer der folgenden Fälle vor:

1.) $r = 1$:

(1.1): (C, O) ist vom Typ A_n , n gerade, $R = k[[t^2, t^{n+1}]]$

$$M = R + R \cdot t^i \subset \tilde{R}, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1, n+1$$

(1.2): (C, O) ist vom Typ E_6 , $R = k[[t^3, t^4]]$

(i) $\rho(M) = 1$:

$$M = R + R \cdot t^i \subset \tilde{R}, \quad i = 1, 2, 5 \quad \text{oder}$$

$$M = R \quad \text{oder} \quad M = \tilde{R}$$

(ii) $\rho(M) = 2$:

$$M = Re_1 + Re_2 + R(te_1 + t^2e_2) \subset \tilde{R}^2 \quad \text{oder}$$

$$M = Re_1 + Re_2 + R(te_1 + t^2e_2) + R \cdot t^2e_1 \subset \tilde{R}^2$$

(1.3): (C, O) ist vom Typ E_8 , $R = k[[t^3, t^5]]$

(i) $\rho(M) = 1$:

$$M = R + R \cdot t^i \subset \tilde{R}, \quad i = 1, 2, 4, 7 \quad \text{oder}$$

$$M = R + R \cdot t^2 + R \cdot t^4 \subset \tilde{R} \quad \text{oder}$$

$$M = R \quad \text{oder} \quad M = \tilde{R}$$

(ii) $\rho(M) = 2$:

$$a) M = L_1 := Re_1 + Re_2 + R(te_1 + t^2e_2) \subset \tilde{R}^2 \quad \text{oder}$$

$$M = L_1 + R \cdot t^2e_1, \quad M = L_1 + R \cdot t^4e_2,$$

$$M = L_1 + R \cdot t^2e_1 + R \cdot t^4e_2 \quad \text{oder}$$

$$b) M = L_2 := Re_1 + Re_2 + R(t^2e_1 + t^4e_2) \subset \tilde{R}^2 \text{ oder}$$

$$M = L_2 + R \cdot t^i e_1, \quad i = 1, 4$$

(iii) $\rho(M) = 3$:

$$a) M = L_3 := Re_1 + Re_2 + Re_3 + R(te_1 + t^2e_2) + R(t^2e_1 + t^4e_3) \subset \tilde{R}^3 \text{ oder}$$

$$M = L_3 + R \cdot t^4 e_2 \text{ oder}$$

$$b) M = L_4 := Re_1 + Re_2 + Re_3 + R(te_1 + t^2e_2) + R t^2 e_1 + R(te_2 + t^2e_3) \subset \tilde{R}^3$$

$$\text{oder } M = L_4 + R \cdot t^4 e_3$$

(iv) $\rho(M) = 4$:

$$M = L_5 := Re_1 + Re_2 + Re_3 + Re_4 + R(te_1 + t^2e_2) + R(t^2e_1 + t^4e_3) +$$

$$+ R(te_2 + t^2e_4) \subset \tilde{R}^4 \text{ oder}$$

$$M = L_5 + R \cdot t^4 e_4$$

2.) $r = 2$:

(2.0): $M = i_*(M')$, wobei $i : C_j \hookrightarrow C$ die Inklusion einer Komponente C_j von C bezeichnet und M' ein unzerlegbarer torsionsfreier R_j -Modul ist.

(2.1): (C, O) ist vom Typ A_n , n ungerade, $R = k[[t, t], (t^{\frac{n+1}{2}}, 0)]$

$$M = R + R \cdot (t^i, 0) \subset \tilde{R}, \quad i = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$$

(2.2): (C, O) ist vom Typ D_n , n ungerade, $R = k[[t^{n-2}, t], (t^2, 0)]$

(i) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 1$:

$$M = R + R(t^i, 0) \subset \tilde{R}, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n \text{ oder}$$

$$M = R \cdot (1, 0)e_1 + R((t^i, 0)e_1 + (0, 1)e_2) \subset \tilde{R}^2, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

(ii) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 2$:

$$M = Re_1 + R((t^i, 0)e_1 + (0, 1)e_2) \subset \tilde{R}^2, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

(2.3): (C, O) ist vom Typ E_7 , $R = k[[t^2, t], (t^3, 0)]$

(i) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 1$:

$$M = R + R \cdot (t^i, 0) \subset \tilde{R}, \quad i = 1, 2, 4, 5 \text{ oder}$$

$$M = R + R \cdot (t, 0) + R(t^2, 0) \subset \tilde{R} \text{ oder}$$

$$M = R \cdot (1, 0)e_1 + R((t, 0)e_1 + (0, 1)e_2) \subset \tilde{R}^2$$

(ii) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 2:$

$$M = L_1 := R e_1 + R((t,0)e_1 + (0,1)e_2) \subset \tilde{R}^2 \text{ oder}$$

$$M = L_1 + R \cdot (t^2, 0)e_1$$

(iii) $\rho_1(M) = 2, \rho_2(M) = 1:$

$$M = R \cdot (1,0)e_1 + R e_2 + R((t,0)e_1 + (t^2,0)e_2) \subset \tilde{R}^2$$

(iv) $\rho_1(M) = 2, \rho_2(M) = 2:$

$$M = L_2 := R e_1 + R e_2 + R((t,0)e_1 + (t^2,0)e_2) \subset \tilde{R}^2 \text{ oder}$$

$$M = L_2 + R \cdot (t^2, 0)e_1 \text{ oder}$$

$$M = R \cdot (1,0)e_1 + R e_2 + R((t,0)e_1 + (t^2,0)e_2) + R((t,0)e_2 + (0,1)e_3) \subset \tilde{R}^2$$

(v) $\rho_1(M) = 2, \rho_2(M) = 3:$

$$M = L_3 := R e_1 + R e_2 + R((t,0)e_1 + (t^2,0)e_2) + R((t,0)e_2 + (0,1)e_3) \subset \tilde{R}^3$$

$$\text{oder } M = L_3 + R \cdot (t^2, 0)e_1$$

3.) $r = 3:$

$(C,0)$ ist vom Typ D_n , n gerade, $R = k[[(t, t, 0), (t^{\frac{n-2}{2}}, 0, t)]]$

(i) $M = i_*(M')$, wobei $i: C' \hookrightarrow C$ die Inklusion einer Vereinigung von höchstens zwei Zweigen von C bezeichnet und M' ein unzerlegbarer torsionsfreier Modul über dem lokalen Ring von $(C',0)$ ist.

(ii) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 1, \rho_3(M) = 1:$

$$M = R + R \cdot (t^i, 0, 0) \subset \tilde{R}, \quad i = 1, \dots, \frac{n}{2} \text{ oder}$$

$$M = R \cdot (1, 1, 0)e_1 + R((t^i, 0, 0)e_1 + (0, 0, 1)e_2) \subset \tilde{R}^2, \quad i = 1, \dots, \frac{n-2}{2}$$

(iii) $\rho_1(M) = 1, \rho_2(M) = 1, \rho_3(M) = 2:$

$$M = R \cdot e_1 + R((t^i, 0, 0)e_1 + (0, 0, 1)e_2) \subset \tilde{R}^2, \quad i = 1, \dots, \frac{n-2}{2} .$$

REFERENZEN

- [1] ARNOL'D, V.I.: Critical points of smooth functions.
Proc. Int. Congress Math. Vancouver 1974, vol. 1,
19-39.

- [2] ARTIN, M., VERDIER, J.-L.: Reflexive modules over
rational double points. Erscheint in Math. Annalen.

- [3] BARTH, W., PETERS, Chr., VAN de VEN, A.:
Compact complex surfaces. Erscheint bei Springer.

- [4] DURFEE, A.: Fifteen characterizations of rational
double points and simple critical points.
L'Enseignement de Math. 25, 131-163 (1979).

- [5] GUISTI, M.: Classification des singularités isolées
d'intersections complètes. Proc. Symp. Pure Math. 40,
457-494 (1983).

- [6] HERZOG, J.: Ringe mit nur endlich vielen Isomorphie-
klassen von maximalen unzerlegbaren Cohen-Macaulay-
Moduln. Math. Ann. 233, 21-34 (1978).

- [7] JACOBINSKY, H.: Sur les ordres commutatifs avec un
nombre fini de réseaux indécomposables. Acta Math.
118, 1-31 (1967).

- [8] KIRBY, D., TAVALLEE, H.: On Cohen-Macaulay local rings
of dimension one and embedding dimension two.
Preprint, Southampton, Great Britain

- [9] NEWSTEAD, P.: Introduction to moduli problems and
orbit spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-
New York 1978.

- [10] REGO, C.: The compactified Jacobian.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 13, 211-223 (1980).

- [11] SERRE, J.-P.: Sur les modules projectifs.
Seminaire Dubreil-Pisot 1960/61, n^o 1.

- [12] D'SOUZA, C.: Compactification of generalized
Jacobians. Proc. Indian Acad. Science 88A,
419-457 (1979).

Gert-Martin Greuel
Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
Erwin-Schrödinger-Strasse
D-6750 Kaiserslautern

Horst Knörrer
Universität Bonn
Mathematisches Institut
Wegelerstrasse
D-5300 Bonn

Januar 1984