

Kleine Auflösungen
spezieller dreidimensionaler Varietäten

Jürgen Werner

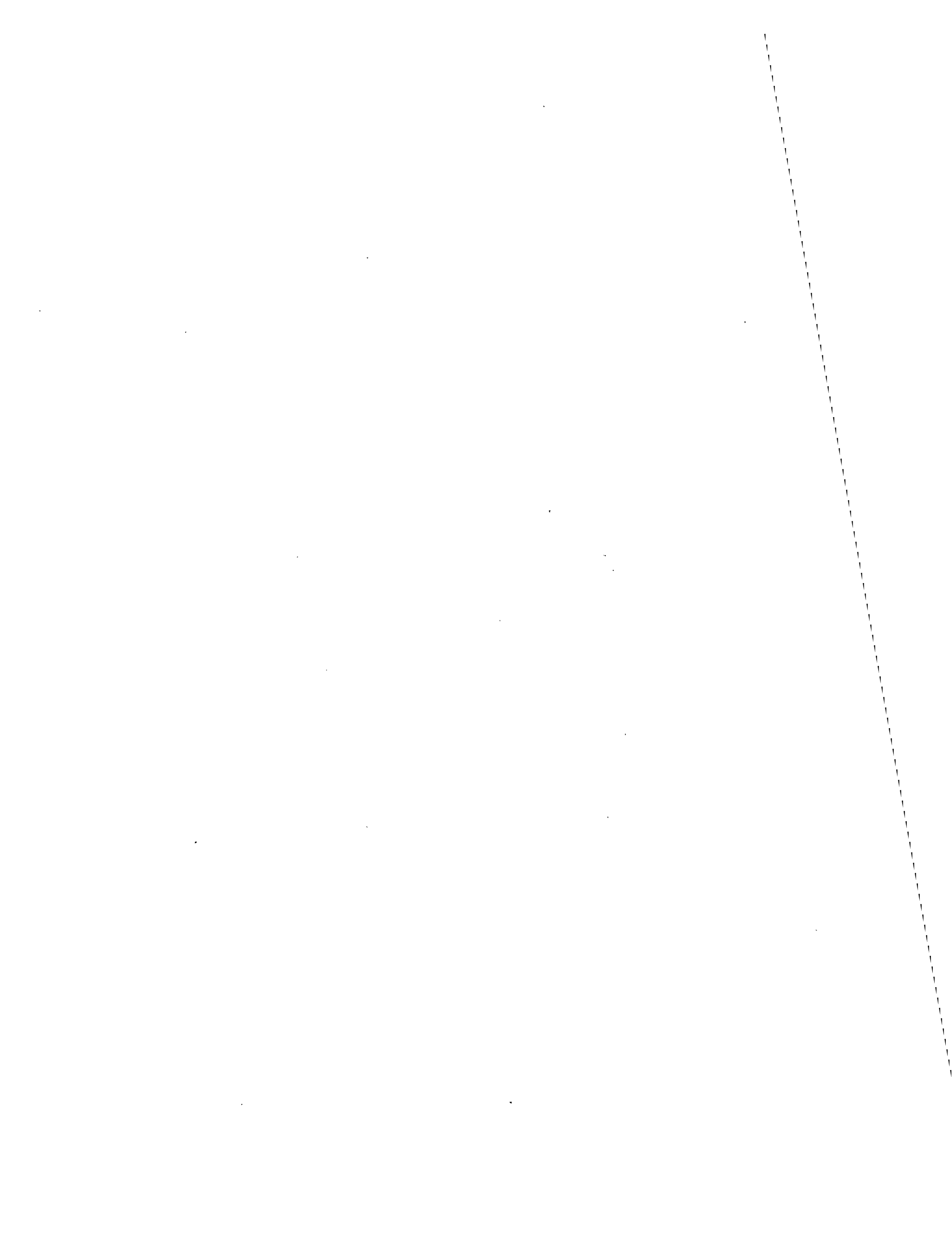
Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26

5300 Bonn 3

MPI/87-34

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
I Problemstellung	1
II Die Homologiegruppen der verschiedenen Varietäten	5
III Charakterisierung projektiv algebraischer kleiner Auflösungen	16
IV Defektberechnungen	26
V Čmutov-Threefolds (1)	33
VI Čmutov-Threefolds (2)	42
VII Abschätzungen für $\mu_n(d)$	60
VIII Kubiken in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	66
IX Quartiken in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	73
X Weitere Beispiele	84
XI Verallgemeinerungen	95
XII Beispiele mit höheren Singularitäten	105
Literaturverzeichnis	116



EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit behandelt spezielle komplex-dreidimensionale singuläre Varietäten und die verschiedenen Möglichkeiten, die Singularitäten aufzulösen. Das Hauptinteresse gilt den sogenannten "kleinen" Auflösungen: die Singularitäten werden nicht durch eine Fläche, sondern durch eine Kurve, also eine Menge von Kodimension 2 ersetzt. Das ist in Dimension 3 zum ersten Mal möglich.

Schon seit längerem beschäftigen sich Mathematiker vor allem mit lokalen Eigenschaften der kleinen Auflösung (vgl. die Artikel von Pinkham [28] und Laufer [23]). Auch Brieskorn beschreibt in seinen Artikeln [2] und [3] letztlich schon kleine Auflösungen dreidimensionaler Singularitäten.

In dieser Arbeit werden nun globale Eigenschaften kleiner Auflösungen untersucht, insbesondere geht es um die Frage der Projektivität.

Warum dieses Interesse an globalen Eigenschaften kleiner Auflösungen?

Seit einiger Zeit suchen Physiker wie E. Witten (Princeton) nach Beispielen komplex-dreidimensionaler Kählermannigfaltigkeiten mit $c_1^{\mathbb{R}} = 0$ und betragsmäßig kleiner Eulerzahl, die jedoch von 0 verschieden sein soll. Kanonische Beispiele mit $c_1^{\mathbb{R}} = 0$ sind vollständige Durchschnitte von k Hyperflächen vom Grad d_1, \dots, d_k in $\mathbb{P}^{3+k}(\mathbb{C})$ mit $\sum_{i=1}^k d_i = k+4$ sowie doppelte Überlagerungen von $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ mit Verzweigungsflächen vom Grad 8. Diese Beispiele haben nur den Nachteil, daß die Eulerzahl jeweils zwischen -300 und -100 liegt.

Eine Möglichkeit, zu Beispielen mit betragsmäßig kleinerer Eulerzahl zu kommen besteht darin, auf obigen Beispielen Gruppen transitiv operieren zu lassen und die Quotienten zu bilden (siehe [5] und [37]).

Eine andere Möglichkeit zur Änderung der Eulerzahl fand F. Hirzebruch: Er deformiert obige Beispiele zu singulären Varietäten und löst dann die Singularitäten auf (vgl. [15] und [16]). In einigen Fällen, in denen eine "große" Auflösung die erste Chernklasse verändern würde, muß man die Singularitäten durch Kurven auflösen.

Es stellt sich die Frage:

Sind diese kleinen Auflösungen kählersch?

Das war der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit, die sich jedoch natürlich nicht nur auf die Beispiele mit $c_1^{\mathbb{R}} = 0$ beschränkt, sondern vielmehr diese zum Anlaß nimmt, allgemein globale Eigenschaften kleiner Auflösungen zu untersuchen.

Weitere Beispiele mit $c_1^{\mathbb{R}} = 0$ findet man in [33] und [41].

Mathematische Basis meiner Überlegungen war die Arbeit "Double Solids" von H. Clemens, in der unter anderem die Homologiegruppen der verschiedenen Auflösungen von Double Solids beschrieben werden. Clemens' Ergebnisse lassen sich auch auf nodale Hyperflächen in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ übertragen (darüber hinaus teilweise auch auf beliebige nodale Threefolds und sogar auf Varietäten mit höheren Singularitäten).

Die Auswertung des Artikels von Clemens im Hinblick auf unsere Problemstellung (siehe Kapitel I) erfolgt in Kapitel II dieser Arbeit. Besonderes Interesse gilt dem von Clemens definierten "Defekt", der sich am besten als Differenz zwischen der vierten und der zweiten Bettizahl der singulären Varietät einführen läßt. Weiterhin wird herausgearbeitet, wie sich die Homologiegruppen bei einem Wechsel der kleinen Auflösung ändern. Insgesamt erlaubt eine nodale Varietät V genau 2^s verschiedene kleine Auflösungen. $s = \# V_{\text{sing}}$.

Das dritte Kapitel enthält die theoretischen Hauptergebnisse für Double Solids und nodale Hyperflächen in P^4 :

Die projektiv algebraischen kleinen Auflösungen werden charakterisiert, ferner wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz mindestens einer projektiv algebraischen kleinen Auflösung zu gegebener nodaler Varietät V hergeleitet. Es stellt sich heraus, daß projektiv algebraische kleine Auflösungen genau dann existieren, wenn alle irreduziblen exzeptionellen Kurven über Q nicht nullhomolog sind (diese Eigenschaft ist unabhängig von der speziellen kleinen Auflösung).

Hier gehen allgemeine Überlegungen von Moisëzon [26], Harvey-Lawson [14], Siu [34] und Peternell [27] ein. In verschiedenen Beweisvarianten wird versucht, immer weniger auf allgemeine Ergebnisse aufzubauen, sondern statt dessen aus unserer speziellen Situation heraus direkt zu schließen.

Im vierten Kapitel untersuchen wir, wie sich das gefundene notwendige und hinreichende Kriterium für die Existenz mindestens einer projektiv algebraischen kleinen Auflösung in konkreten Situationen anwenden läßt. Hier spielt der Defekt eine wichtige Rolle. Wie man leicht sieht, erlauben Threefolds mit Defekt 0 keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen (die Umkehrung ist leider falsch: es gibt Varietäten mit beliebig hohem Defekt ohne projektiv algebraische kleine Auflösungen, siehe Kapitel IX).

Eine Methode zur Berechnung des Defekts, wie sie Clemens für Double Solids angibt und wie sie in Kapitel IV für nodale Hyperflächen in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ hergeleitet wird, ist daher in diesem Zusammenhang erwähnenswert. Es zeigt sich: Im allgemeinen verschwindet der Defekt einer nodalen Varietät, wie wir sie betrachten; nur Double Solids und Hyperflächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten in ganz spezieller Lage haben positiven Defekt, nur in diesen Ausnahmefällen besteht die Chance, projektiv algebraische kleine Auflösungen zu erhalten.

Wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit herausstellt, existieren jedoch genügend viele dieser "Ausnahmefälle", um eine allgemeine Untersuchung zu rechtfertigen: es gibt unendlich viele Beispiele mit positivem Defekt, der Defekt kann beliebig groß werden.

Im Mittelpunkt der Kapitel V und VI steht eine große Klasse interessanter Beispiele: es geht um Čmutov-Hyperflächen in \mathbb{P}^4 und um Double Solids, die längs Čmutov-Flächen in \mathbb{P}^3 verzweigt sind.

In [40] beschreibt Varchenko, wie Čmutov mit Hilfe von Čebysev-Polynomen Hyperflächen in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten konstruiert. Diese Konstruktion läßt sich durch Vorzeichenänderungen weiter verallgemeinern; die Wahl der Vorzeichen ist im Fall der Double Solids entscheidend für die Beantwortung der Frage, ob projektiv algebraische kleine Auflösungen existieren.

In Kapitel V werden allgemein die verschiedenen Familien im Hinblick auf diese Frage hin untersucht, während Kapitel VI einige spezielle Fälle herausgreift. Die Defekte werden (zum Teil mit Hilfe eines Computers) berechnet, in verschiedenen Beispielen läßt sich bei Kenntnis des Defekts die Nicht-Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen zeigen.

Das siebte Kapitel hat nur indirekt mit kleinen Auflösungen zu tun, es enthält Untersuchungen der Maximalzahl $\mu_n(d)$ von Nodes einer Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Unter anderem beobachten wir das asymptotische Verhalten im Fall $d \longrightarrow \infty$ und $n \longrightarrow \infty$, außerdem wird eine aktuelle Liste der Abschätzungen von $\mu_n(d)$ für $n = 3, 4$ und kleine Werte von d angegeben (vgl. auch [11]).

Die Kapitel VIII, IX und X bringen weitere Beispiele nodaler Threefolds.

Im achten Kapitel geht es um Kubiken in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$, die Ergebnisse entstanden in Zusammenarbeit mit Mathematikern der Universität Leiden;

eine ausführliche Beschreibung der Kubiken (vor allem der geometrischen Eigenschaften) wird in einer gemeinsamen Arbeit mit Hans Finkelnberg enthalten sein.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Kubiken ist die assoziierte Kurve, an der man alles ablesen kann, was uns im Zusammenhang mit kleinen Auflösungen interessiert. Das neunte Kapitel schildert, inwieweit sich das Prinzip der assoziierten Kurve auch auf Quartiken und spezielle Hyperflächen von höherem Grad übertragen läßt.

Eine Quartik mit 45 Nodes, die schon von Todd in [39] ausführlich behandelt wurde, erlaubt projektiv algebraische kleine Auflösungen. In [9] findet sich ein Beweis der Gleichung $\mu_4(4) = 45$; 45 ist also die Maximalzahl von Nodes einer Quartik in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$, wie sich auch schon aus allgemeinen Überlegungen Varchenkos in [39] ergibt. Offen ist bis heute die Frage, ob es außer dem Beispiel von Todd weitere Quartiken mit 45 gewöhnlichen Doppelpunkten gibt.

Weitere Beispiele nodaler Hyperflächen und Double Solids' enthält Kapitel X. Besonders interessant ist, wie sich geometrische Eigenschaften einiger quartischer Flächen, die von Kummer vor über 100 Jahren untersucht wurden, in den dazugehörenden Double Solids bzw. den kleinen Auflösungen wiederfinden lassen. Zum Schluß wird der Frage nachgegangen, wie viele gewöhnliche Doppelpunkte eine Hyperfläche bzw. ein Double Solid mindestens haben muß, um einen positiven Defekt zu erreichen.

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit wird versucht, die bisherigen Ergebnisse weiter zu verallgemeinern. Es werden zuerst beliebige nodale Threefolds und dann auch Varietäten mit speziellen höheren Singularitäten zugelassen. Lokale Informationen über kleine Auflösungen, wie sie in den Arbeiten [2] und [3] von Brieskorn enthalten sind, werden zu globalen Informationen zusammengesetzt. Dabei geht es weniger darum, eine allumfassende Theorie aufzustellen. Es soll vielmehr ein Gefühl vermittelt werden, inwieweit der Doppelpunkt-Fall Ausdruck eines allgemeinen Prinzips ist.

Es zeigt sich, daß dieses Prinzip nicht so gut mit der Frage nach nullhomologen Kurven, sondern besser mit Hilfe glatter Divisoren, die gewisse Singularitäten enthalten, aufzuspüren ist. Diese Methode benutzt Schoen im Fall gewöhnlicher Doppelpunkte (siehe [32] und [33]). Die Überlegungen Brieskorns weisen den Weg zu einer Verallgemeinerung. Dabei wird auch der enge Zusammenhang mit nodalen Threefolds deutlich, die durch Deformation aus den Varietäten mit höheren Singularitäten entstehen.

Erste Beispiele sind wieder Kubiken in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Das allgemeine Prinzip läßt sich hier an der assoziierten Kurve ablesen, die wichtige Informationen über kleine Auflösungen enthält. Auch Kummer-Flächen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ mit D_4 -Singularitäten und die dazugehörenden Double Solids werden studiert.

Für die Anregung zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. F. Hirzebruch herzlich danken, ebenso für die Möglichkeit, am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn arbeiten zu können. Mein Dank gilt der Max-Planck-Gesellschaft für die finanzielle und vielen Gästen und Mitarbeitern des Instituts für fachliche Unterstützung, besonders Frau H. Konrad für ihre Hilfe bei den Berechnungen mit dem Computer. Von den gastfreundlichen Mathematikern der Universität Leiden konnte ich viel lernen, ich verdanke ihnen wichtige Hinweise. Ganz besonders herzlich möchte ich mich bei Herrn Prof. W. Meyer für sein Interesse an meiner Arbeit und die vielen wertvollen Gespräche bedanken. Ohne seine Hilfe wäre die Arbeit (zumindest in dieser Form) nicht entstanden.

I PROBLEMSTELLUNG

Im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen zwei Klassen komplexdreidimensionaler singulärer Varietäten:

1. Hyperflächen in $P^4(\mathbb{C})$
2. Double Solids, dies sind doppelte Überlagerungen von $P^3(\mathbb{C})$ mit singulären Verzweigungsflächen, wie sie von Clemens in [6] studiert werden.

Als Singularitäten sollen nur isolierte gewöhnliche Doppelpunkte vorkommen; die affine lokale Gleichung ist jeweils

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0 .$$

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit werden auch höhere Singularitäten zugelassen.

Sei V eine nodale Threefold von einem der beiden beschriebenen Typen, n bezeichne im ersten Fall den Grad von V und im zweiten Fall den Grad der nodalen Verzweigungsfläche $B \subset P^3(\mathbb{C})$, der gerade sein muß. Die Singularitäten von B werden lokal durch eine Gleichung der Gestalt

$$\sum_{i=1}^3 z_i^2 = 0$$

gegeben. Im Folgenden werden die Singularitäten von B mit denen des zugehörigen Double Solids identifiziert.

Die Menge der Singularitäten von V werde mit \mathcal{S} und ihre Anzahl mit s bezeichnet. Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Singularität $P \in \mathcal{S}$ aufzulösen. Die erste, in dieser Arbeit große Auflösung genannt, läßt sich wie folgt beschreiben:

1. Falls $P \in V \subset \mathbb{P}^4$, so blase \mathbb{P}^4 in P auf, die eigentliche Transformierte von V enthält statt P eine glatte Quadrik in \mathbb{P}^3 , diese ist isomorph zu $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

2. Falls $P \in B \subset \mathbb{P}^3$ Singularität eines Double Solids ist, so blase \mathbb{P}^3 in P auf; die doppelte Überlagerung dieses \mathbb{P}^3 , verzweigt längs der eigentlichen Transformierten von B enthält statt P eine doppelte Überlagerung des \mathbb{P}^2 , verzweigt längs eines glatten Kegelschnittes. Diese exzeptionelle Fläche ist wiederum isomorph zu $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

In beiden Fällen haben beide Rulings des $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit der exzeptionellen Fläche die Schnittzahl (-1) . Man kann also jede der beiden Faserungen von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ zur zugehörigen Basis niederblasen, ohne daß eine Singularität entsteht.

Ausgehend von der singulären Varietät erhält man diese kleinen Auflösungen - $P \in \mathcal{S}$ wird nur durch eine Kurve isomorph zu \mathbb{P}^1 ersetzt - so: Durch Koordinatenwechsel läßt sich die lokale Gleichung

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0$$

einer Singularität auf die Gestalt

$$\phi_1 \phi_2 = \phi_3 \phi_4$$

bringen.

Die lokale meromorphe Funktion

$$\frac{\phi_1}{\phi_3} = \frac{\phi_4}{\phi_2}$$

hat im Punkt $(0,0,0,0)$ eine Unbestimmtheitsstelle. Der Abschluß des Graphen ist glatt und enthält an Stelle des Punktes P einen P^1 . Der Graph der Funktion

$$\frac{\phi_1}{\phi_4} = \frac{\phi_3}{\phi_2}$$

liefert die andere kleine Auflösung, die durch Niederblasen der anderen Ruling des $P^1 \times P^1$ entsteht.

Pro Singularität hat man also genau zwei verschiedene Möglichkeiten der kleinen Auflösung. Ein Wechsel der kleinen Auflösung wird durch Vertauschung der Koordinaten ϕ_3 und ϕ_4 bewirkt. In den z -Koordinaten bedeutet das:

$$z_2 \longrightarrow -z_2$$

und z_1 ändert sich nicht für $i \neq 2$.

Das allgemeine Prinzip wird in Kapitel XI erläutert werden, siehe auch [2] und [15].

Eine Mannigfaltigkeit, die aus V durch simultanes kleines Auflösen aller Singularitäten $P \in \mathcal{S}$ entsteht, werde mit \hat{V} bezeichnet. Insgesamt gibt es 2^3 solcher kleinen Auflösungen von V . Unter einer partiellen Auflösung \check{V} von V verstehen wir eine Varietät, bei der nur die Singularitäten $P \in \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$ klein aufgelöst werden.

Die Mannigfaltigkeit, die man durch eine simultane große Auflösung aller Singularitäten von V erhält, heiße \tilde{V} . Von einer beliebigen kleinen Auflösung \hat{V} kommt man zur großen Auflösung \tilde{V} durch Aufblasen entlang aller exzeptionellen Kurven. Löst man alle $P \in \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ groß und alle anderen Nodes klein auf, so erhält man eine gemischte Auflösung \bar{V} .

Die singuläre Varietät V ist nach Voraussetzung in einen projektiven Raum einbettbar. Auch die große Auflösung \tilde{V} ist immer projektiv algebraisch. Interessant ist jedoch die Frage nach der Projektivität der kleinen Auflösungen \hat{V} . Wie sich herausstellen wird, ist diese Frage eng mit der nach der Projektivität spezieller partieller und gemischter Auflösungen verbunden.

Das zentrale Problem ist:

Finde ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, daß zu einer gegebenen singulären Varietät V mindestens eine projektiv algebraische kleine Auflösung \hat{V} existiert.

Die folgende Untersuchung der Homologiegruppen der verschiedenen V , \hat{V} , \bar{V} und \tilde{V} stellt einen ersten Schritt zu einem solchen Kriterium dar.

II DIE HOMOLOGIEGRUPPEN DER VERSCHIEDENEN VARIETÄTEN

Die in diesem Kapitel angestellten Überlegungen basieren im Wesentlichen auf den ersten Paragraphen der Arbeit "Double Solids" von H. Clemens. Seine Ergebnisse werden ohne Beweis übernommen.

Zur Bestimmung der Homologiegruppen von V erweist es sich als hilfreich, V als singuläres Element einer Familie von Threefolds $\{V_t\}$ aufzufassen ($|t| < \epsilon$), V_t glatt für $t \neq 0$, $\deg V_t = \deg V$ bzw. V_t Double Solid mit glatter Verzweigungsfläche B_t , $\deg B_t = \deg B$.

Der Übergang von V_t ($t \neq 0$) zu $V_0 = V$ entspricht in einer affinen Umgebung von $P \in \mathcal{S}$ der Kontraktion der reellen 3-Sphäre

$$\alpha(P, t) := \left\{ \sum_{i=1}^4 z_i^2 = t, \frac{z_i}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, 4 \right\} .$$

Clemens beschreibt diesen Übergang so:

Durch Anheften einer 4-Zelle entlang jedes der verschwindenden 3-Zykel $\alpha(P, t)$ erhält man aus V_t einen Raum X , dessen Homologiegruppen zu denen von V isomorph sind. Hieraus leitet Clemens die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_4(V_t, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_4(V, \mathbb{Z}) \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \longrightarrow H_3(V_t, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

sowie die Beziehung

$$H_2(V_t, \mathbb{Z}) \cong H_2(V, \mathbb{Z})$$

ab.

\mathcal{M} bezeichne den von \mathcal{P} erzeugten freien \mathbb{Z} -Modul, die Abbildung

$$\mathcal{M} \longrightarrow H_3(V_t, \mathbb{Z})$$

wird durch

$$P \longrightarrow \alpha(P, t)$$

gegeben.

Die Exaktheit obiger Sequenz bedeutet: Die 4-Zykel auf V , die nicht Bild eines 4-Zykels auf V_t sind, entsprechen genau den globalen linearen Relationen

$$\sum_{i=1}^s m_i \alpha(P_i, t) \simeq 0$$

zwischen den verschwindenden Zykeln auf V_t . Der von den s -Tupeln (m_1, \dots, m_s) aufgespannte Untermodul \mathcal{A} von \mathcal{M} ist Bild von $H_4(V, \mathbb{Z})$ unter der Abbildung k . Der Rang des Moduls \mathcal{A} sei d , diese Größe wird von Clemens als Defekt bezeichnet. Die Bettizahlen von V berechnen sich als

$$\beta_2(V) = 1$$

$$\beta_4(V) = 1+d$$

$$\beta_3(V) = \beta_3(V_t) - s + d \dots$$

wobei

$$\beta_3(V_t) = \begin{cases} n^4 - 5n^3 + 10n^2 - 10n + 4 & n = \deg V_t \\ n^3 - 4n^2 + 6n - 4 & n = \deg B_t \end{cases}$$

Für die Eulerzahl gilt:

$$e(V) = e(V_t) + s \dots$$

Geht man zu einer kleinen Auflösung \hat{V} über, so werden die singulären Punkte $P \in \mathcal{S}$ durch exzeptionelle Kurven L_P ersetzt, die isomorph zu \mathbb{P}_1 sind. Den dualen Prozeß beschreibt Clemens so:

Y entstehe aus \hat{V} durch Anheften je einer 3-Zelle entlang der Kurven L_P : dann ist Y homotopieäquivalent zu V , daher gilt für alle $q \geq 0$

$$H_q(Y, \mathbb{Z}) \cong H_q(V, \mathbb{Z})$$

Man erhält die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_3(\hat{V}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(V, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{k'} & \mathcal{M} & \longrightarrow & H_2(\hat{V}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(V, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & P & \longrightarrow & \{L_P\} & & & & \end{array}$$

sowie die Beziehung

$$H_4(\hat{V}, \mathbb{Z}) \cong H_4(V, \mathbb{Z}).$$

Auf \mathcal{M} wird durch $(P_i, P_j) := \delta_{ij}$ eine Bilinearform definiert, bezüglich der \mathcal{M} selbstdual ist. Für \hat{V} ergeben sich die folgenden Bettizahlen:

$$\begin{aligned} \beta_2(\hat{V}) &= 1+d \\ \beta_4(\hat{V}) &= 1+d \\ \beta_3(\hat{V}) &= \beta_3(V) - s + d \\ &= \beta_3(V_t) - 2s + 2d \end{aligned}$$

Die Eulerzahl von \hat{V} ist somit gleich

$$\begin{aligned} e(\hat{V}) &= e(V) + s \\ &= e(V_t) + 2s \end{aligned}$$

Zwischen den exceptionellen Kurven auf \hat{V} müssen $(s-d)$ lineare Relationen

$$\sum_{i=1}^s n_i L_{P_i} \simeq 0$$

bestehen. Definiere \mathfrak{B} als den von den s -Tupeln (n_1, \dots, n_s) aufgespannten Untermodul von \mathcal{M} vom Rang $(s-d)$.

Es stellen sich folgende Fragen:

Welcher Zusammenhang besteht zwischen \mathcal{A} und \mathfrak{B} ?

Wie hängen \mathcal{A} und \mathfrak{B} von der speziell gewählten kleinen Auflösung ab ?

Diese Fragen sollen jetzt beantwortet werden.

Wie Clemens beweist, kommt man von V_t direkt zu \hat{V} durch Chirurgie entlang der verschwindenden Zykeln $\alpha(P, t)$. Die spezielle kleine Auflösung in einem Punkt $P \in \mathcal{S}$ wird durch die Orientierung des verschwindenden Zyklus $\alpha(P, t)$ bestimmt. In den lokalen z -Koordinaten bewirkt eine Transformation

$$z_2 \longrightarrow -z_2$$

einen Wechsel sowohl der kleinen Auflösung im Punkt P als auch der Orientierung von $\alpha(P, t)$. Die Wahl der kleinen Auflösung in einem Punkt $P \in \mathcal{S}$ entspricht so eineindeutig der Wahl der Orientierung des zugehörigen verschwindenden Zyklus $\alpha(P, t)$ auf V_t .

Clemens folgert für die Schnittzahl eines $\gamma \in H_4(\hat{V}, \mathbb{Z})$ mit einer Kurve L_p

$$(\gamma \cdot L_p) = (k(\gamma) \cdot P) .$$

wobei

$$k: H_4(\hat{V}, \mathbb{Z}) \cong H_4(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{M}$$

die durch obige exakte Sequenz gegebene Abbildung und (...) die schon definierte Bilinearform auf \mathcal{M} ist. Für einen 4-Zykel γ mit

$$k(\gamma) = \sum_{i=1}^s m_i P_i$$

gilt

$$(\gamma \cdot L_{p_j}) = m_j .$$

Insbesondere hat man für alle s -Tupel $(n_1, \dots, n_s) \in \mathfrak{B}$:

$$0 = \gamma \cdot \left(\sum_{i=1}^s n_i L_{p_i} \right) = \sum_{i=1}^s m_i n_i .$$

Bezüglich der durch $(P_i, P_j) = \delta_{ij}$ auf \mathcal{M} induzierten Bilinearform stehen \mathcal{A} und \mathfrak{B} aufeinander senkrecht. Es ist $\text{rg } \mathcal{M} = \text{rg } \mathcal{A} + \text{rg } \mathfrak{B}$.

Im allgemeinen gibt es Elemente aus \mathcal{M} , die sich nicht als Linearkombination von Vektoren aus \mathcal{A} und \mathfrak{B} mit ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken lassen. Auch können über \mathbb{Z} eventuell Torsionsgruppen in der Homologie auftreten. Deshalb tensorieren wir \mathcal{A} und \mathfrak{B} mit \mathbb{Q} , der Einfachheit halber bezeichnen wir diese \mathbb{Q} -Vektorräume wieder mit \mathcal{A} und \mathfrak{B} . Man erhält

$$\mathbb{Q}^{\mathcal{M}} = \mathcal{A} \perp \mathfrak{B} .$$

Im Folgenden ist die Torsion für unsere Überlegungen völlig unerheblich. Jede Aussage über die Homologie - wie zum Beispiel $C \simeq 0$ für eine Kurve C - ist daher ab jetzt über \mathbb{Q} zu verstehen

Kehren wir zur kleinen Auflösung \hat{V} zurück und erinnern wir uns, daß ein Wechsel der kleinen Auflösung in einem Punkt $P_q \in \mathcal{S}$ einer Änderung der Orientierung des Zyklus $\alpha(P_q, t)$ auf V_t entspricht. In der Homologie heißt das:

$$\alpha(P_q, t) \longrightarrow -\alpha(P_q, t) .$$

also

$$m_q \longrightarrow -m_q$$

in allen Tupeln $(m_1, \dots, m_s) \in \mathcal{A}$.

Da

$$\sum_{i=1}^s m_i n_i = 0$$

für alle $(m_1, \dots, m_s) \in \mathcal{A}$ und alle $(n_1, \dots, n_s) \in \mathcal{B}$, folgt:

$$n_q \longrightarrow -n_q$$

in allen Tupeln $(n_1, \dots, n_s) \in \mathcal{B}$.

Die Zerlegung von \mathbb{Q}^s in \mathcal{A} und \mathcal{B} ist also im allgemeinen von der speziellen Wahl der kleinen Auflösung abhängig. Leider gibt es auch keine intrinsische, von der kleinen Auflösung unabhängige Beschreibung von \mathcal{A} und \mathcal{B} , so muß in den Beispielen die spezielle kleine Auflösung.

bezüglich der Q^s in \mathcal{A} und \mathcal{B} zerlegt wird, mit angegeben werden. Eine Änderung der kleinen Auflösung in einer Singularität bewirkt eine Änderung des Vorzeichens der zugehörigen Koeffizienten in allen Relationen

$$\sum_{i=1}^s m_i \alpha(P_i, t) \approx 0$$

und

$$\sum_{i=1}^s n_i L_{P_i} \approx 0 .$$

Wird allerdings eine Singularität P_q durch eine nullhomologe Kurve ersetzt, so ist dies unabhängig von der speziellen kleinen Auflösung; in diesem Fall ist $m_q = 0$ in allen s -Tupeln aus \mathcal{A} , und \mathcal{B} enthält die Vektoren t_{e_q} . Auch der Defekt und damit die Bettizahlen sind unabhängig von der speziellen kleinen Auflösung.

Zur großen Auflösung \tilde{V} kommt man von einer beliebigen kleinen Auflösung \hat{V} aus durch Aufblasen entlang aller Kurven L_p . Die in \tilde{V} über P liegende exzeptionelle Fläche heiße

$$Q_p \cong A_p \times B_p ;$$

A_p entspreche der Ruling, die beim Übergang zu \hat{V} auf einen Punkt zusammengeblasen und B_p derjenigen, die auf L_p abgebildet wird. Geht man von einer anderen kleinen Auflösung aus, so sind die betreffenden A_p und B_p entsprechend zu vertauschen.

Clemens beschreibt den Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen von \hat{V} und \tilde{V} durch folgende exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & H_2(\tilde{V}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(\hat{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \mathcal{P} & \longrightarrow & \{A_p\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & H_4(\tilde{V}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_4(\hat{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \mathcal{P} & \longrightarrow & \{Q_p\} & & \end{array}$$

$$H_3(\tilde{V}, \mathbb{Z}) \cong H_3(\hat{V}, \mathbb{Z}) .$$

Damit berechnen sich die Bettizahlen der großen Auflösung als

$$\beta_2(\tilde{V}) = 1+d+s$$

$$\beta_4(\tilde{V}) = 1+d+s$$

$$\beta_3(\tilde{V}) = \beta_3(\hat{V}) .$$

Die Eulerzahl der großen Auflösung ist gleich

$$\begin{aligned} e(\tilde{V}) &= e(\hat{V}) + 2s \\ &= e(V_t) + 4s . \end{aligned}$$

Zwischen den Kurven A_p und B_p (genauer: zwischen den zugehörigen Homologieklassen) bestehen wiederum $(s-d)$ lineare Relationen. Da

$$Q_{p_i} \cdot A_{p_j} = Q_{p_i} \cdot B_{p_j} = -\delta_{ij} .$$

haben diese Relationen die Gestalt

$$\sum_{i=1}^s n_i (B_{p_i} - A_{p_i}) \approx 0 .$$

wobei die Tupel (n_1, \dots, n_s) wieder ganz \mathfrak{B} durchlaufen.

Hier wird noch einmal deutlich: Ein Wechsel der kleinen Auflösung in einem Punkt $P_q \in \mathcal{S}$ - auf der großen Auflösung als Vertauschung von A_{P_q} und B_{P_q} sichtbar - bewirkt eine Vorzeichenänderung

$$n_q \longrightarrow -n_q$$

in allen Tupeln $(n_1, \dots, n_s) \in \mathcal{S}$. Eine Relation der Form

$$L_p \simeq 0$$

besteht auf einer kleinen Auflösung \hat{V} - und damit auf allen \hat{V} - genau dann, wenn auf \tilde{V}

$$A_p \simeq B_p .$$

Wie ordnen sich die partiellen und gemischten Auflösungen in dieses Schema ein?

Sei \mathcal{S}_1 eine Teilmenge von \mathcal{S} , $s_1 := \#(\mathcal{S}_1)$ und \bar{V} eine gemischte Auflösung, wobei die Singularitäten aus \mathcal{S}_1 groß und die restlichen klein aufgelöst werden. \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 seien die von \mathcal{S}_1 bzw. $\mathcal{S} - \mathcal{S}_1$ aufgespannten freien \mathbb{Z} -Moduln. Mit Hilfe der exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \longrightarrow H_2(\tilde{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\bar{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow H_2(\bar{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\hat{V}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

berechnen sich die Bettizahlen von \bar{V} als

$$\beta_2(\bar{V}) = 1+d+s_1$$

$$\beta_4(\bar{V}) = 1+d+s_1$$

$$\beta_3(\bar{V}) = \beta_3(\hat{V}).$$

Die Eulerzahl von \bar{V} ist gleich

$$\begin{aligned} e(\bar{V}) &= e(\hat{V}) + 2s_1 \\ &= e(V_t) + 2s + 2s_1. \end{aligned}$$

Die (s-d) Relationen zwischen den L_p , A_p und B_p lauten

$$\sum_{P_i \in \mathcal{G}_1} n_i (A_{P_i} - B_{P_i}) + \sum_{P_i \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1} n_i L_{P_i} \approx 0.$$

$$(n_1, \dots, n_g) \in \mathfrak{B}.$$

Die Bettizahlen einer partiellen Auflösung \check{V} lassen sich leider nicht alle so einfach berechnen; $\beta_2(\check{V})$ hängt im allgemeinen davon ab, welche Singularitäten aufgelöst werden. Indem man die induzierte Abbildung der natürlichen Abbildung

$$\hat{V} \longrightarrow \check{V}$$

auf der zweiten Homologie betrachtet, sieht man aber, daß zwischen den exzeptionellen Kurven auf \check{V} die Beziehungen

$$\sum_{P_i} n_i L_{P_i} \approx 0$$

herrschen, wobei nur über die $P_i \in \mathcal{G}$ summiert wird, die auf \check{V} aufgelöst sind. \hat{V} sei eine geeignete kleine Auflösung, $(n_1, \dots, n_g) \in \mathfrak{B}$.

Das bedeutet:

Wenn für $P \in \mathcal{S}$ auf \hat{V} die Relation $L_P \simeq 0$ gilt, so auch auf allen \check{V} , die P auflösen.

Aufbauend auf den Ergebnissen dieses Kapitels ist es möglich, die Frage nach einem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen zu beantworten. Darüber hinaus können generell projektiv algebraische kleine Auflösungen charakterisiert werden.

III CHARAKTERISIERUNG PROJEKTIV ALGEBRAISCHER KLEINER AUFLÖSUNGEN

Die Mannigfaltigkeiten \hat{V} , \bar{V} und \tilde{V} sind Moisézon-Mannigfaltigkeiten: der Transzendenzgrad des Funktionenkörpers ist maximal, in unserem Fall gleich drei. Nach Moisézon [26] sind für solche Mannigfaltigkeiten die Eigenschaften Kählersch und projektiv algebraisch äquivalent.

Die große Auflösung \tilde{V} ist in jedem Fall projektiv algebraisch. Welche Gründe sind dafür verantwortlich, daß kleine Auflösungen \hat{V} diese Eigenschaft eventuell nicht haben?

Eine Möglichkeit ist die Existenz einer effektiven nullhomologen Kurve auf \hat{V} . Auf Kählermannigfaltigkeiten kann es solche Kurven nicht geben, denn integriert man die Kählerform über eine geschlossene Kurve, muß das Ergebnis positiv sein.

Zu einer singulären Varietät V mit $d < s$ existiert immer eine kleine Auflösung, die nicht kählersch ist: man löse so auf, daß ein nicht-trivialer Vektor aus \mathfrak{H} keine negativen Komponenten hat; dieser Vektor beschreibt eine effektive nullhomologe Kurve auf einer speziellen kleinen Auflösung.

Wie später die Beispiele zeigen werden, ist im allgemeinen d im Vergleich zu s sehr klein und damit die Zahl der nicht-projektiven \hat{V} recht groß. Im Fall $d = 0$ sind alle exzeptionellen Kurven auf allen \hat{V} nullhomolog, es gibt keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen.

Dies ist sogar schon der Fall, wenn auch nur eine irreduzible exzeptionelle Kurve auf \hat{V} nullhomolog ist, das heißt eine Relation

$$L_p \approx 0$$

in $H_2(\hat{V}, \mathbb{Z})$ besteht. Wie erwähnt, ist dies unabhängig von der speziellen kleinen Auflösung.

Im Verlaufe des Kapitels wird gezeigt, daß dies aber auch das einzige Hindernis für die Existenz mindestens einer projektiv algebraischen kleinen Auflösung zu gegebenem V ist. Zuvor jedoch wird ein allgemeiner Satz bewiesen, der projektiv algebraische kleine Auflösungen charakterisiert.

Satz: Sei V eine nodale komplex dreidimensionale Varietät, und zwar entweder eine Hyperfläche in \mathbb{P}^4 oder ein Double Solid. Dann sind für eine kleine Auflösung \hat{V} die folgenden Aussagen äquivalent:

1. \hat{V} ist projektiv algebraisch.
2. Auf \hat{V} gibt es einen Divisor D mit

$$D \cdot L_p > 0$$

für alle $P \in \mathcal{G}$.

3. Es besteht auf \hat{V} keine nichttriviale Relation

$$\sum_{i=1}^s n_i L_{p_i} \approx 0,$$

so daß $n_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, s$.

Beweis: "1 \Rightarrow 2" : Ein ample Divisor erfüllt Bedingung 2.

"2 \Rightarrow 3" : Sei

$$m_i := D \cdot L_{P_i} > 0$$

die Schnittzahl der i-ten exceptionellen Kurve mit dem gegebenen Divisor

D. Dann gilt für alle $(n_1, \dots, n_s) \in \mathfrak{B}$:

$$\sum_{i=1}^s m_i n_i = 0 .$$

Da alle $m_i > 0$, kann es kein nichttriviales Element aus \mathfrak{B} mit $n_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, s$ geben. Daraus folgt unmittelbar Bedingung 3.

"3 \Rightarrow 1" : Diese Implikation läßt sich mit Hilfe eines Satzes von Peternell ([27], Theorem 2.5.) beweisen. Um seine Ergebnisse anwenden zu können, müssen zuvor einige neue Bezeichnungen eingeführt werden.

Definiere allgemein für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) := \{\mathcal{E}^{\infty}\text{-Formen auf } X \text{ vom Typ } (p,q)\}$$

$$\mathfrak{E}^{p,q}(X) := \mathcal{E}^{p,q}(X)'$$

$\mathfrak{E}^{p,q}(X)$ ist der Dualraum von $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ bezüglich der \mathcal{E}^{∞} -Topologie und heißt Raum der (p,q)-Currents. Diese Definition stimmt nicht mit der in [13] überein! Es ist $\mathfrak{E}^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} \mathfrak{E}^{p,q}(X)$.

$\varphi \in \mathcal{E}^{p,p}(X)$ heißt positiv, wenn für alle $x \in X$ der Vektor $\varphi(x)$ im durch $(iu_1 \wedge \bar{u}_1) \wedge \dots \wedge (iu_p \wedge \bar{u}_p)$ erzeugten Kegel liegt, $u_i \in \bigwedge^{1,0} T_x^*(X)$. $T \in \mathfrak{E}^{p,p}(X)$ heißt positiv, wenn $T(\varphi) \geq 0$ für alle positiven $\varphi \in \mathcal{E}^{p,p}(X)$.

Sei

$$\mathcal{D}_a^1(X) := \{ \text{positive (1,1)-Currents, die schwache Limiten der Form} \\ \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{ij} T_{C_{ij}} \text{ sind, } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, C_{ij} \text{ irreduzible Kurven auf } X \}.$$

Dabei ist $T_C(\varphi) = \int_C \varphi$. Definiere außerdem

$$\mathcal{D}^3(X) := \{dS, S \in \mathcal{D}^3(X)\}.$$

Peternells Theorem 2.5. besagt nun:

Eine Moisézon-Threefold X , auf der es keinen Current $T \in \mathcal{D}_a^1(X)$ und keine effektive Kurve C mit $C + T \simeq 0$ gibt, ist projektiv algebraisch.

Dies wollen wir auf unsere kleinen Auflösungen anwenden.

Sei \hat{V} eine kleine Auflösung, die Bedingung 3 unseres Satzes sei erfüllt; es gibt also auf \hat{V} keine effektiven nullhomologen Kurven. Nehmen wir an, es gäbe eine effektive Kurve C und einen positiven Current T , so daß $C + T \simeq 0$. Sei \mathcal{L} ein amples Geradenbündel auf V und $\pi^*\mathcal{L}$ das Pullback auf \hat{V} . Dann gilt

$$0 = (C + T) \cdot \pi^*\mathcal{L} = C \cdot \pi^*\mathcal{L} + T \cdot \pi^*\mathcal{L};$$

beide Terme $C \cdot \pi^*\mathcal{L}$ und $T \cdot \pi^*\mathcal{L}$ sind nicht negativ, also ist

$$T \cdot \pi^*\mathcal{L} = 0.$$

Damit muß der Träger von T in den Fasern der Abbildung $\pi: \hat{V} \longrightarrow V$ enthalten sein, daß heißt

$$\text{supp } T \subset \bigcup_{i=1}^s L_{P_i} .$$

Ein Satz von Siu ([34], Proposition 12.3) liefert:

$$T = \sum_{i=1}^s \lambda_i T_{L_{P_i}}$$

mit geeigneten $\lambda_i \geq 0$. Damit ist

$$C = - \sum_{i=1}^s \lambda_i T_{L_{P_i}}$$

im Widerspruch zur Effektivität der Kurve C . Also ist die Voraussetzung des Satzes von Peternell erfüllt. Damit ist \hat{V} projektiv algebraisch. \square

Der nun folgende Alternativbeweis soll zeigen, wie man auch ohne Verwendung des allgemeinen Satzes von Peternell zum Ziel kommt. Dabei gehen wir nicht direkt von 3 nach 1, sondern beweisen zuerst die Richtung "3 \Rightarrow 2". Übertragen auf den Vektorraum $\mathbb{Q}^s = \mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ lautet die

Behauptung: Falls

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \{0\} .$$

so gibt es in \mathcal{A} einen Vektor (m_1, \dots, m_s) mit $m_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, s$. Dabei sei

$$\mathcal{D} := \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s, x_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, s\}$$

Bemerkung: Aus technischen Gründen ist es notwendig, zuerst $\mathbb{R}^s = (\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}) \perp (\mathfrak{B} \otimes \mathbb{R})$ zu betrachten. Definiere weiterhin

$$\mathfrak{X} := \{x \in \mathfrak{B}, \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^s x_i \leq 2\}.$$

\mathfrak{X} ist kompakt. Nach Voraussetzung ist $(\mathfrak{B} \otimes \mathbb{R}) \cap \mathfrak{X} = \emptyset$. Der Satz von Hahn-Banach liefert die Existenz einer Hyperebene $\mathfrak{B}_0 \subset \mathbb{R}^s$ mit $\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B} \otimes \mathbb{R}$ und $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{X} = \emptyset$. Sei $H_i := \text{Re}_i$. Aus Dimensiongründen ist für $i \neq j$

$$\mathfrak{B}_0 \cap (H_i + H_j) \neq \emptyset.$$

Weiterhin liegen e_i und e_j in \mathfrak{X} , also nicht in \mathfrak{B}_0 ; daher ist für $i \neq j$

$$\dim(\mathfrak{B}_0 \cap (H_i + H_j)) = 1.$$

Für $i = 2, \dots, s$ gibt es in $\mathfrak{B}_0 \cap (H_1 + H_i)$ einen Vektor

$$y_i := a_i e_1 - e_i \quad \text{mit geeigneten } a_i > 0.$$

Die Vektoren y_2, \dots, y_s sind linear unabhängig und spannen daher \mathfrak{B}_0 auf. Der Vektor $(1, a_2, \dots, a_s)$ liegt in $\mathfrak{B}_0^\perp \subset (\mathfrak{B} \otimes \mathbb{R})^\perp = \mathcal{A} \otimes \mathbb{R}$. Dieser Vektor läßt sich in \mathcal{A} approximieren, also gibt es

$$(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s) \in \mathcal{A}, \quad \bar{m}_i > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, s.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner der \bar{m}_i führt zu einem Vektor $(m_1, \dots, m_s) \in \mathcal{A}$, $m_i > 0$ und $m_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i = 1, \dots, s$. Sei τ ein 4-Zykel auf \hat{V} mit $k(\tau) = (m_1, \dots, m_s)$. Da nach einer Bemerkung von Clemens in [6] ganz $H_4(\hat{V}, \mathbb{Z})$ algebraisch ist, läßt sich τ durch einen Divisor D repräsentieren, der die Bedingung

$$D \cdot L_p > 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P}$$

erfüllt. \square

Die Implikation "2 \Rightarrow 1" läßt sich wieder mit Hilfe eines Resultats von Peternell aus seinem Artikel [27] beweisen, diesmal benötigen wir jedoch nicht den allgemeinen Satz 2.5., sondern nur sein Korollar 2.3., eine Verallgemeinerung eines Resultats von Harvey-Lawson ([14], Theorem 38).

Peternells Ergebnis besagt:

Eine Moisézon-Mannigfaltigkeit X ist genau dann projektiv algebraisch, wenn die Bedingung

$$(*) \quad \mathcal{G}_a^1(X) \cap d\mathcal{G}^3(X) = \{0\}$$

erfüllt ist. Damit lautet in unserer Situation die

Behauptung: Eine kleine Auflösung \hat{V} , auf der es einen Divisor D gibt, so daß $D.L_P > 0$ für alle $P \in \mathcal{Y}$, erfüllt Bedingung (*).

Beweis: Sei \hat{V} eine kleine Auflösung, D ein Divisor mit $D.L_P > 0$ für alle $P \in \mathcal{Y}$ und $T \in \mathcal{G}_a^1(X) \cap d\mathcal{G}^3(X)$. Dann ist

$$T(c_1(\tau^*\mathcal{L})) = dS(c_1(\tau^*\mathcal{L})) = S(dc_1(\tau^*\mathcal{L})) = 0.$$

wieder sei \mathcal{L} ein amples Geradenbündel auf V . Wie oben zeigt man mit Hilfe des Satzes von Siu: es existieren $\lambda_i \geq 0$, so daß

$$T = \sum_{i=1}^s \lambda_i T_{L_{P_i}}.$$

Dann ist

$$0 = S(dc_1([D])) = T(c_1([D])) = \sum_{i=1}^s \lambda_i D.L_{P_i}.$$

Daher sind alle $\lambda_i = 0$, also ist auch $T = 0$. \square

Damit ist auch die Implikation "2 \Rightarrow 1" bewiesen, ohne den allgemeinen Satz von Peternell zu benutzen. Dieser Beweis hat nur den Nachteil, daß nicht klar wird, wie man von dem gegebenen Divisor D, der alle exzeptionellen Kurven positiv schneidet, zu einem amplen Divisor auf \hat{V} kommt. Der Beweis von Harvey-Lawson/Peternell ist an dieser Stelle nicht konstruktiv, er benutzt den Satz von Hahn-Banach.

Deshalb soll jetzt noch ein weiterer Beweis der Implikation "2 \Rightarrow 1" gegeben werden, der den Weg von einem Divisor D auf einer kleinen Auflösung \hat{V} mit $D \cdot L_P > 0$ für alle $P \in \mathcal{Y}$ zu einem amplen Divisor auf \hat{V} genauer zeigt.

Behauptung: Sei \hat{V} eine kleine Auflösung und D ein Divisor auf \hat{V} mit $D \cdot L_P > 0$ für alle $P \in \mathcal{Y}$. Sei weiterhin \mathcal{L} ein amples Geradenbündel auf V und H der zu $\pi^*\mathcal{L}$ gehörende Divisor auf \hat{V} . Dann ist $D + mH$ für $m \gg 0$ ein ample Divisor auf \hat{V} .

Beweis: Das Geradenbündel \mathcal{L} auf V trägt eine Metrik, deren Krümmungsform

$$\Xi_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \Omega_{\mathcal{L}}$$

ist, wobei $\Omega_{\mathcal{L}}$ eine positiv definite Bilinearform auf $T'(V_{\text{reg}})$ beschreibt. Sei

$$\Xi_{\pi^*\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \Omega_{\pi^*\mathcal{L}}$$

die Krümmungsform, die zur induzierten Metrik des Geradenbündels $\pi^*\mathcal{L}$ auf \hat{V} gehört, dann gilt

$$\Omega_{\pi^*\mathcal{L}} = \pi^*\Omega_{\mathcal{L}}$$

$\Omega_{\pi^* \mathcal{L}}$ ist daher positiv auf $\hat{V} = \bigcup_{P \in \mathcal{Y}} L_P$. Darüberhinaus gilt für jeden

Punkt $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{Y}} L_P$ und jeden Vektor $v \in T'_x(\hat{V})$:

$$\Omega_{\pi^* \mathcal{L}}(v, v) = \Omega_{\mathcal{L}}(\pi_* v, \pi_* v) \geq 0.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\pi_* v = 0$, das heißt wenn v tangential zu der exceptionellen Kurve L_x , die x enthält. Andererseits kann man nach Voraussetzung $\Omega_{[D]}$ so wählen, daß

$$\Omega_{[D]}(v, v) > 0$$

für $0 \neq v \in T'_x(L_x)$ und jeden Punkt $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{Y}} L_P$ gilt.

Daher gibt es zu jedem Punkt $x \in \hat{V}$ ein m_x , so daß $\Omega_{[D] + m_x \pi^* \mathcal{L}}$ positiv definit ist auf $T'_x(\hat{V})$. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Bilinearform noch positiv definit auf $T'_y(\hat{V})$, $y \in U_x$, U_x affine offene Umgebung von x . Die U_x bilden eine offene Überdeckung von \hat{V} . Da \hat{V} kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dies sichert die Existenz eines $m_1 > 0$, so daß $\Omega_{[D] + m \pi^* \mathcal{L}}$ positiv definit ist für alle $x \in \hat{V}$ und alle $m \geq m_1$.

Es folgt:

$D + mH$ ist ein ample Divisor auf \hat{V} für $m \gg 0$. \square

Nun ist es leicht, das angekündigte Kriterium für die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen anzugeben:

Satz: Sei V eine nodale komplex dreidimensionale Varietät, und zwar entweder eine Hyperfläche in \mathbb{P}^4 oder ein Double Solid. Es existiert eine projektiv algebraische kleine Auflösung genau dann, wenn keine der exceptionellen Kurven L_p in $H_2(\hat{V}, \mathbb{Q})$ nullhomolog ist.

Beweis: Sei diese Bedingung erfüllt. Dann gibt es zu jedem $P_i \in \mathcal{Y}$ einen Vektor $(m_1, \dots, m_s) \in \mathfrak{d}$ mit $m_{P_i} \neq 0$; andernfalls wäre der Einheitsvektor mit $n_{P_i} = 1$ im orthogonalen Komplement von \mathfrak{d} , also in \mathfrak{B} im Widerspruch zur Voraussetzung. Dann existiert in \mathfrak{d} auch ein Vektor (m_1, \dots, m_s) , so daß $m_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, s$. Wähle eine spezielle kleine Auflösung nun so, daß

$$m_i > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, s.$$

Auf dieser kleinen Auflösung \hat{V} gibt es einen Divisor D mit

$$D \cdot L_p > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, s.$$

Zumindest diese kleine Auflösung ist damit projektiv algebraisch. \square

IV DEFECTBERECHNUNGEN

In diesem Kapitel sollen mehrere Möglichkeiten beschrieben werden, das soeben bewiesene Kriterium in konkreten Beispielen zu testen. Wie schon erwähnt, haben Varietäten ohne Defekt kein projektiv algebraischen kleinen Auflösungen. So ist ein Berechnungsverfahren für den Defekt in diesem Zusammenhang sicher nützlich: uninteressante Varietäten mit $d = 0$ können dann von den weiteren Untersuchungen von vorneherein ausgeschlossen werden.

Ein solches Berechnungsverfahren wird von Clemens im Fall der Double Solids angegeben. Betrachte die homogenen Polynome vom Grad $(3n/2 - 4)$ in \mathbb{P}^3 , die auf ganz \mathcal{Y} verschwinden. Punkte in allgemeiner Lage implizieren s Bedingungen an die Polynome, es verschwinden also nur Polynome aus einem Teilraum der Dimension $\begin{bmatrix} 3n/2 - 1 \\ 3 \end{bmatrix} - s$ auf ganz \mathcal{Y} . Liegen die Singularitäten jedoch speziell, gibt es mehr auf \mathcal{Y} verschwindende Polynome.

Satz (Clemens): Sei V ein Double Solid mit Verzweigungsfläche $B \subset \mathbb{P}^3$, $\deg B = n \geq 4$. Die Dimension des Raumes der homogenen Polynome vom Grad $(3n/2 - 4)$ in \mathbb{P}^3 , die auf ganz $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^3$ verschwinden, ist gleich

$$\begin{bmatrix} 3n/2 - 1 \\ 3 \end{bmatrix} - s + d .$$

Andererseits läßt sich diese Dimension auch mit Hilfe des Ranges einer Matrix

$$\left[\begin{array}{c} f_i(P_j) \\ 1 \leq j \leq s \\ 1 \leq i \leq t \end{array} \right]$$

ausdrücken, wobei (f_i) eine Basis des Raumes der homogenen Polynome vom Grad $(3n/2 - 4)$ durchläuft, $t = \begin{bmatrix} 3n/2 & -1 \\ & 3 \end{bmatrix}$. Auf diese Weise ist es möglich, den Defekt als s - Rang obiger Matrix zu berechnen. Ein analoges Verfahren läßt sich ebenfalls für Hyperflächen in \mathbb{P}^4 herleiten.

Satz: Sei $V \subset \mathbb{P}^4$ eine nodale Hyperfläche, $\deg V = n \geq 3$. Betrachte die homogenen Polynome vom Grad $(2n-5)$ in \mathbb{P}^4 , die auf ganz $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^4$ verschwinden. Diese Polynome bilden einen Raum der Dimension

$$\begin{bmatrix} 2n-1 \\ 4 \end{bmatrix} - s + d .$$

Beweis: Tensoriere die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0$$

mit $\Omega_{\mathbb{P}^4}^4(2V) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2n-5)$. Die lange exakte Kohomologiesequenz lautet

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^4; \mathcal{I}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{O}(2n-5)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{Y}; \mathcal{O}(2n-5)|_{\mathcal{Y}}) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Es gilt

$$h^i(\mathcal{Y}; \mathcal{O}(2n-5)|_{\mathcal{Y}}) = \begin{cases} s & \text{für } i=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h^i(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) = 0 \quad \text{für } i > 0.$$

Also liefert obige Kohomologiesequenz

$$h^i(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) = 0 \quad \text{für alle } i > 1$$

sowie

$$h^0(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) = \binom{2n-1}{4} - s + h^1(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) .$$

Nach einem Ergebnis von Schoen ([31], Proposition 1.3.) ist

$$h^1(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2V)) = d .$$

Da (nach Griffiths [12])

$$H^0(\mathbb{P}^4; \mathcal{O}(2n-5)) = \left\{ \frac{f\Omega}{F^2}, \deg f = 2n-5, f|_{\mathcal{O}} \equiv 0 \right\} .$$

wobei $\Omega = \sum_{i=0}^4 (-1)^i x_i dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_4$, $V = \{F = 0\}$ und $\deg F = n$.

folgt die Behauptung. \square

Einen Spezialfall stellt die Quadrik

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0$$

mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt dar. Hier ist $\beta_3(V_t) = 0$, der verschwindende Zykel ist also global nullhomolog auf V_t . Damit ist $d = 1$, beide kleinen Auflösungen sind projektiv algebraisch. Sie werden global durch den Abschluß der Graphen der Funktionen

$$-\frac{x_1+ix_2}{x_3-ix_4} = \frac{x_3+ix_4}{x_1-ix_2}$$

bzw.

$$-\frac{x_1+ix_2}{x_3+ix_4} = \frac{x_3-ix_4}{x_1-ix_2}$$

gegeben. Dies ist das einzige Beispiel ohne nicht-projektive kleine Auflösung !

Satz: Sei $V \subset \mathbb{P}^4$, $\deg V \geq 3$ oder V Double Solid mit Verzweigungsfläche B , $\deg B \geq 4$. Dann existieren kleine Auflösungen, die nicht projektiv algebraisch sind.

Beweis: Da die singulären Punkte zumindest eine Bedingung auf den homogenen Polynomen vom Grad $(2n-5)$ in \mathbb{P}^4 bzw. $(3n/2 - 4)$ in \mathbb{P}^3 implizieren, gilt immer $d < s$. \square

Nach dem vorher Gezeigten ist es prinzipiell möglich, den Defekt einer gegebenen singulären Hyperfläche bzw. eines Double Solids zu berechnen, wenn dies auch in der Praxis nur für nicht zu große Werte von n durchführbar ist. Wie Beispiele später zeigen werden, ist die Bedingung " $d > 0$ " allein nicht hinreichend für die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen. Es gilt jedoch der folgende

Satz: Sei V eine nodale Threefold wie oben beschrieben mit $d > 0$, weiterhin existiere eine Gruppe von Automorphismen von V , die transitiv auf \mathcal{S} operiert. Dann werden alle Singularitäten $P \in \mathcal{S}$ durch Kurven aufgelöst, die in $H_2(\hat{V}, \mathbb{Q})$ nicht nullhomolog sind.

Beweis: Setze die Automorphismen von V zu Automorphismen der großen Auflösung \tilde{V} bzw. von $H_2(\tilde{V}, \mathbb{Q})$ fort. Falls $L_P \simeq 0$ für ein $P \in \mathcal{Y}$, so würde dies auf \tilde{V} bedeuten:

$$A_P \simeq B_P .$$

Wegen der transitiven Gruppenoperation müßte dies für alle $P \in \mathcal{Y}$ gelten im Widerspruch zur Voraussetzung $d > 0$. \square

Weitere Möglichkeiten, die Bedingung " $L_P \simeq 0$ " zu testen, bieten die partiellen und gemischten Auflösungen.

Satz: Sei V wie oben, $P \in \mathcal{Y}$.

- a) Falls eine projektive gemischte Auflösung \bar{V} existiert, die P klein auflöst, so ist L_P nicht nullhomolog auf \hat{V} .
- b) Falls eine projektive partielle Auflösung \check{V} existiert, die P auflöst, so ist L_P nicht nullhomolog auf \hat{V} .
- c) Falls eine partielle Auflösung \check{V} mit $\beta_2(\check{V}) = 1+d$ existiert, die P nicht auflöst, so ist L_P nullhomolog auf \hat{V} .

Beweis:

- a) Auf einer Kählermannigfaltigkeit kann es keine effektiven nullhomologen Kurven geben, also ist L_P nicht nullhomolog auf \bar{V} . Wie in Kapitel II gezeigt, ist dann L_P auch nicht nullhomolog auf \hat{V} .
- b) Auch auf einer singulären projektiven Varietät kann es keine effektiven nullhomologen Kurven geben. Fasse eine irreduzible Kurve C auf einer Threefold $X \subset \mathbb{P}^N$ als Kurve in \mathbb{P}^N auf. $[C] \in H_2(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z})$.

Sei H eine Hyperebene in \mathbb{P}^N in allgemeiner Lage bezüglich C und X .
 $[H] \in H_{2N-2}(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z})$. Dann gilt

$$[H].[C] > 0.$$

Der Durchschnitt $X \cap H$ vertritt eine Homologieklassse $\gamma \in H_4(X, \mathbb{Z})$. Es ist

$$\gamma.[C] = [H].[C] > 0.$$

Dies gilt allgemein für jede effektive Kurve. Damit ist L_p nicht nullhomolog auf \check{V} . Wie wir uns am Ende von Kapitel II überlegten, ist dann L_p auch nicht nullhomolog auf \hat{V} .

c) Da $\beta_2(\check{V}) = 1+d$, erhöht sich die zweite Bettizahl nicht mehr, wenn man zu einer kleinen Auflösung \hat{V} übergeht. Also werden alle dabei neu aufgelösten Singularitäten durch nullhomologe Kurven ersetzt. \square

Bemerkung: Es gibt zwei Möglichkeiten, auf natürliche Weise projektiv algebraische partielle Auflösungen zu erhalten, und zwar einmal als Abschluß des Graphen einer meromorphen Funktion auf V , die in $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$ Unbestimmtheitsstellen hat. Zum anderen erhält man solche partiellen Auflösungen durch Aufblasen entlang glatter Weil-Divisoren auf V , die gewisse Singularitäten von V enthalten.

Nehmen wir an, daß sich die definierende Gleichung von V als

$$AB + CD = 0$$

schreiben läßt, A, B, C und D glatt. Sei

$$\mathcal{S}_1 := \{ P \in V \mid 0 = A(P) = B(P) = C(P) = D(P) \} \subset \mathcal{S}.$$

Der Cartier-Divisor $\{A = 0\}$ zerfällt in die beiden Weil-Divisoren $\{A = 0, C = 0\}$ und $\{A = 0, D = 0\}$, die beide in allen Punkten aus \mathcal{S}_1 glatt sind. Aufblasen entlang dieser beiden Divisoren liefert in den Singularitäten aus \mathcal{S}_1 jeweils die beiden verschiedenen kleinen Auflösungen.

Allgemein führt jede Zerlegung der definierenden Gleichung von V in $AB + CD$ zu einem Vektor $(m_1, \dots, m_s) \in \mathcal{d}$ mit $m_i \neq 0$ genau für die $P_i \in \mathcal{S}$ mit $A = 0, B = 0, C = 0$ und $D = 0$.

Es folgt unmittelbar:

Falls es auf V einen globalen Weil-Divisor gibt, der in einem Punkt $P \in \mathcal{S}$ glatt ist, so ist L_P nicht nullhomolog auf \hat{V} .

V ČMUTOV-THREEFOLDS (1)

Ausgangspunkt aller Überlegungen waren die Čmutov-Hyperflächen in \mathbb{P}^4 und die Double Solids, die längs einer Čmutov-Fläche in \mathbb{P}^3 verzweigt sind. Beide Typen von dreidimensionalen Varietäten werden unter dem Oberbegriff Čmutov-Threefolds zusammengefaßt. Diese Klassen sollen als erste Beispiele besprochen werden; hier lassen sich die im letzten Kapitel entwickelten theoretischen Methoden zum Nachweis der Existenz bzw. Nicht-Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen direkt auf konkrete Beispiele anwenden.

Bezeichne \mathcal{T}_n das Čebysev-Polynom in einer Veränderlichen vom Grad n .

$$\mathcal{T}_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} x^{n-2j} (1-x^2)^j .$$

Die Čebysev-Polynome erfüllen die Gleichung

$$\mathcal{T}_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha) .$$

An den Punkten $\alpha_k := \cos(k\pi/n)$, $1 \leq k \leq n-1$, hat $\mathcal{T}'_n(x)$ einfache Nullstellen; sie sind Maxima (falls k gerade) bzw. Minima (falls k ungerade) von \mathcal{T}_n , aufgefaßt als Funktion in einer reellen Variablen.

Die Werte von \mathcal{T}_n an diesen Punkten sind

$$\mathcal{T}_n(\alpha_k) = \begin{cases} +1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Nützen wird uns später das folgende

Lemma: Betrachte die Kurven

$$C_1 := \{T_n(x) + T_n(y) = 0\} \quad \text{und} \quad C_2 := \{T_n(x) - T_n(y) = 0\}$$

in \mathbb{C}^2 . Falls n gerade ist, zerfällt C_1 in $n/2$ irreduzible Kegelschnitte und C_2 in $(n-2)/2$ irreduzible Kegelschnitte und zwei Geraden. Falls n ungerade ist, zerfallen C_1 und C_2 jeweils in $(n-1)/2$ irreduzible Kegelschnitte und eine Gerade.

Beweis: Die Kurve $C(\mu)$ mit $x = \cos \alpha$ und $y = \cos(\alpha + \mu\pi/n)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$,

liegt für $\mu = 1, 3, 5, \dots, 2[(n-1)/2] + 1$ ganz in C_1

und für $\mu = 0, 2, 4, \dots, 2[n/2]$ ganz in C_2 . Da

$$\cos(\alpha + \mu\pi/n) = \cos \alpha \cos(\mu\pi/n) - \sin \alpha \sin(\mu\pi/n),$$

kann $C(\mu)$ durch die Gleichung

$$y = x \cos(\mu\pi/n) - \sqrt{1-x^2} \sin(\mu\pi/n)$$

beschrieben werden. Das bedeutet:

$$C(0) = \{y = x\}$$

$$C(\mu) = \{y^2 + x^2 - 2[\cos(\mu\pi/n)]xy - [\sin(\mu\pi/n)]^2 = 0\} \quad \text{für } 0 < \mu < n$$

$$C(n) = \{y = -x\}.$$

Falls n gerade, zerfällt C_1 in die irreduziblen Kegelschnitte $C(1), C(3), \dots, C(n-1)$ und C_2 in die irreduziblen Kegelschnitte $C(2), C(4), \dots, C(n-2)$ und die Geraden $C(0)$ und $C(n)$. Falls n ungerade, zerfällt C_1 in die Kegelschnitte $C(1), C(3), \dots, C(n-2)$ sowie die Gerade $C(n)$ und C_2 in die Kegelschnitte $C(2), C(4), \dots, C(n-1)$ sowie die Gerade $C(0)$. \square

Definition und Satz: Die Čmutov-Hyperfläche vom Grad n in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ wird in m affinen Koordinaten durch die Gleichung

$$\sum_{j=1}^m \mathcal{F}_n(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ +1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

definiert. Singulär sind genau die Punkte $(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_m})$, $1 \leq k_i \leq n-1$, wobei $[m/2]$ der Indizes k_j ungerade und die restlichen gerade sind; alle Singularitäten sind gewöhnliche Doppelpunkte. Durch Homogenisieren obiger Gleichung entstehen keine neuen Singularitäten, alle Nodes der projektiven Čmutov-Hyperflächen liegen in dem beschriebenen affinen Teil. Im Folgenden reicht es daher aus, in affinen Koordinaten zu rechnen.

Definiere allgemeiner Hyperflächen durch die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{\beta_j} \mathcal{F}_n(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ (-1)^{\beta_0} & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m \in \{-1, +1\}$.

All diese Čmutov-Hyperflächen enthalten viele Doppelpunkte, die genaue Zahl richtet sich nach der Wahl der β_j .

Betrachten wir zunächst die dreidimensionalen Čmutov-Hyperflächen in \mathbb{P}^4 ;

im ersten Fall sei

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^4 \mathcal{F}_n(x_j) = 0 \right\}, \quad n \geq 3.$$

Die Singularitäten liegen in den Punkten $(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \alpha_{k_4})$, $1 \leq k_i \leq n-1$, wobei je zwei der Indizes gerade bzw. ungerade sind. Die Anzahl der Nodes ist gleich

$$\begin{aligned} 6 \left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 &= \frac{3}{8} n^2 (n-2)^2 && \text{falls } n \text{ gerade und} \\ 6 \left(\frac{n-1}{2}\right)^4 &= \frac{3}{8} (n-1)^4 && \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Sei $P \in \mathcal{S}$, ohne Einschränkung sei P vom Typ $(\alpha_{u_1}, \alpha_{u_2}, \alpha_{g_1}, \alpha_{g_2})$ mit u_1, u_2 ungerade und g_1, g_2 gerade. Sowohl $\mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_3)$ als auch $\mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_4)$ verschwinden in P . Nach dem Lemma gibt es Zerlegungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_3) &= \prod_i C_i \\ \mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_4) &= \prod_j D_j \end{aligned}$$

mit $C_1(P) = 0$, $C_2(P) = 0$, $D_1(P) = 0$ und $D_2(P) = 0$. Die Gleichung von V läßt sich umformen zu

$$\mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_3) = -[\mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_4)] .$$

Die globale meromorphe Funktion

$$\frac{C_1}{D_1} = - \frac{\prod_{j>1} D_j}{\prod_{i>1} C_i}$$

hat in P eine Unbestimmtheitsstelle; der Abschluß des Graphen dieser Funktion beschreibt eine projektive partielle Auflösung, die P auflöst. Damit ist auf \hat{V} die exzeptionelle Kurve L_P nicht nullhomolog. Zu jedem Punkt $P \in \mathcal{S}$ läßt sich eine solche meromorphe Funktion mit Unbestimmtheitsstelle finden, damit ist die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen gesichert.

Mit denselben Argumenten zum Ziel kommt man auch im allgemeinen Fall

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^4 (-1)^{\beta_j} \mathcal{T}_n(x_j) = 0 \right\}, \quad n \geq 3.$$

$\beta_j \in \{+1, -1\}$ für alle $j = 1, \dots, 4$. Wieder sind alle Singularitäten von der Form $(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \alpha_{k_4})$, $1 \leq k_1 \leq n-1$, die Aufteilung der Indizes in gerade und ungerade Zahlen muß allgemein so erfolgen, daß je zwei der Terme $(-1)^{\beta_j} \mathcal{T}_n(x_j)$ in einem Punkt $P \in \mathcal{V}$ den Wert $+1$ bzw. -1 annehmen.

Sei $P \in \mathcal{V}$, ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß in diesem Punkt

$$(-1)^{\beta_1} \mathcal{T}_n(x_1) = +1 = (-1)^{\beta_2} \mathcal{T}_n(x_2).$$

Dann haben die Polynome

$$\begin{aligned} & (-1)^{\beta_1} \mathcal{T}_n(x_1) + (-1)^{\beta_3} \mathcal{T}_n(x_3) \quad \text{und} \\ & (-1)^{\beta_2} \mathcal{T}_n(x_2) + (-1)^{\beta_4} \mathcal{T}_n(x_4) \end{aligned}$$

in P eine Nullstelle. Beide Terme zerfallen nach dem Lemma in nicht-singuläre Polynome vom Grad eins und zwei, von denen jeweils zwei in P eine Nullstelle haben. Wie im ersten Fall erhält man eine globale meromorphe Funktion, die in P eine Unbestimmtheitsstelle hat.

Damit ist für jede beliebige Wahl der β_j und für alle $n \geq 3$ die Existenz einer projektiv algebraischen kleinen Auflösung gesichert.

Interessanter ist die Situation bei den Čmutov Double Solids. Hier gibt es bis auf Isomorphie vier verschiedene Möglichkeiten der Vorzeichenwahl. Anders als bei den Čmutov-Hyperflächen hängt es bei den Čmutov Double Solids von der speziellen Wahl der β_i ab, ob projektiv algebraische kleine Auflösungen existieren oder nicht.

Betrachten wir zunächst die Familie der Double Solids mit Verzweigungsfläche

$$B = \{ \mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_3) + 1 = 0 \} , n \in \mathbb{Z} , n \geq 4 .$$

Singulär sind die Punkte $(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3})$, $1 \leq k_i \leq n-1$, wobei genau einer der Indizes k_i eine gerade Zahl ist. Die Nodes von V entsprechen denen von B . ihre Anzahl ist gleich $3/8 n^2(n-2)$. Sei $P \in \mathcal{V}$, ohne Einschränkung sei für diesen Punkt der Index k_1 eine gerade Zahl. Wir schreiben die Gleichung des Double Solids V als

$$\mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_2) = \omega^2 - [\mathcal{F}_n(x_3) + 1] .$$

Der Term auf der linken Seite zerfällt in $n/2$ nicht-singuläre Polynome $C_1, \dots, C_{n/2}$ vom Grad 2; von denen zwei in P eine Nullstelle haben. Diese seien C_1 und C_2 . Das Polynom $\mathcal{F}_n(x) + 1$ hat $n/2$ doppelte Nullstellen. daher gibt es ein Polynom $F_n(x)$ vom Grad $n/2$ mit

$$\mathcal{F}_n(x) + 1 = F_n^2(x) .$$

So zerfällt die rechte Seite der obigen Gleichung in

$$[\omega + F_n(x_3)] [\omega - F_n(x_3)] .$$

Die meromorphe Funktion

$$\frac{C_1}{\omega + F_n(x_3)} = \frac{\omega - F_n(x_3)}{\prod_{i=2}^{n/2} C_i}$$

auf V hat in P eine Unbestimmtheitsstelle. So ist auch in diesen Beispielen für alle n die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen gegeben.

Sei nun

$$B = \{ \mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_2) - \mathcal{F}_n(x_3) + 1 = 0 \} .$$

In diesem Fall liegen die Singularitäten in den Punkten $(\alpha_{u_1}, \alpha_{u_2}, \alpha_{u_3})$, $(\alpha_{u_4}, \alpha_{g_1}, \alpha_{g_2})$ und $(\alpha_{g_3}, \alpha_{u_5}, \alpha_{g_4})$, $1 \leq u_i, g_i \leq n-1$, $g_i \in 2\mathbb{Z}$, $u_i \in 2\mathbb{Z}$. Sei $P \in \mathcal{V}$, dann ist entweder der Index der ersten oder der zweiten Koordinate eine ungerade Zahl. Ohne Einschränkung gelte: Die zweite Koordinate hat einen ungeraden Index. Schreibe die Gleichung von V als

$$\mathcal{F}_n(x_2) - \mathcal{F}_n(x_3) = \omega^2 - [\mathcal{F}_n(x_1) + 1] .$$

Wie im ersten Fall zerfallen die Terme auf beiden Seiten in je zwei Polynome, die in P jeweils eine Nullstelle haben. Wiederum existiert eine meromorphe Funktion mit einer Unbestimmtheitsstelle in P , es gibt in jedem Fall projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Das gilt nicht für die Double Solids mit Verzweigungsfläche

$$B = \{\mathcal{F}_n(x_1) - \mathcal{F}_n(x_2) - \mathcal{F}_n(x_3) + 1 = 0\} ,$$

deren Singularitäten in den Punkten $(\alpha_{u_1}, \alpha_{g_1}, \alpha_{u_2})$, $(\alpha_{u_3}, \alpha_{u_4}, \alpha_{g_2})$ und $(\alpha_{g_3}, \alpha_{g_4}, \alpha_{g_5})$ liegen, $1 \leq u_i, g_i \leq n-1$, $g_i \in 2\mathbb{Z}$, $u_i \in 2\mathbb{Z}$. Die Singularitäten der ersten beiden Typen werden durch Kurven aufgelöst, die nicht nullhomolog sind: schreibe die Gleichung des Double Solids als

$$-\mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_3) = \omega^2 - [\mathcal{F}_n(x_1) + 1] ,$$

der Abschluß des Graphen der meromorphen Funktionen

$$\frac{\prod_{i=1}^j C_i}{\omega + \mathcal{F}_n(x_1)} = \frac{\omega - \mathcal{F}_n(x_1)}{\prod_{i=j+1}^{n/2} C_i} ,$$

$j = 1, \dots, n/2-1$, liefert eine projektiv algebraische partielle Auflösung \check{V} mit $\beta_2(\check{V}) \geq n/2$, die nur noch Singularitäten des dritten Typs enthält. Wie im nächsten Kapitel gezeigt werden wird, ist zumindest für $n \in \{4, 6, 8\}$ der Defekt gleich $n/2 - 1$. Daher ist in diesen Fällen

$$\beta_2(\check{V}) = \beta_2(\hat{V}) = n/2 .$$

also werden alle Singularitäten des dritten Typs nullhomolog aufgelöst. Trotz positiven Defektes gibt es keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen.

Vermutung: Dies gilt auch für alle $n \in 2\mathbb{Z}$, $n \geq 10$.

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir kurz noch die Double Solids mit Verzweigungsfläche

$$B = \{ \mathcal{F}_n(x_1) + \mathcal{F}_n(x_2) + \mathcal{F}_n(x_3) - 1 = 0 \} .$$

Die Anzahl der Singularitäten beträgt nur $\frac{3}{8} n(n-2)^2$. Im Fall $n \in \{4,6,8\}$ ist der Defekt gleich 0, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird; alle Nodes werden nullhomolog aufgelöst.

Vermutung : Auch für alle $n \geq 10$, $n \in 2\mathbb{Z}$, verschwindet der Defekt der zu B gehörenden Double Solids.

VI ČMUTOV-THREEFOLDS (2)

Nachdem im vorigen Kapitel allgemeine Eigenschaften der verschiedenen Familien von Čmutov-Threefolds im Vordergrund standen, sollen jetzt spezielle Beispiele genauer untersucht werden. Hauptsächlich geht es um die Berechnung des Defektes. In einigen Fällen benötigen wir die genaue Kenntnis des Defektes, um die Nicht-Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen zu beweisen.

Wie in Kapitel IV hergeleitet wurde, läßt sich der Defekt einer Hyperfläche bzw. eines Double Solids als

$$s - \text{Rang} (f_i(P_j))$$

berechnen, wobei f_1, \dots, f_N eine Basis der homogenen Polynome vom Grad $(2n-5)$ in \mathbb{P}^4 bzw. vom Grad $(3n/2 - 4)$ in \mathbb{P}^3 durchläuft und P_1, \dots, P_s die Singularitäten von $V \subset \mathbb{P}^4$ bzw. $B \subset \mathbb{P}^3$ bezeichnen.

In den Fällen $\text{deg } V = 3$ und $\text{deg } B = 4$ lassen sich diese Berechnungen problemlos durchführen.

Die Singularitäten der Čmutov-Kubik

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^4 \mathcal{F}_3(x_i) = 0 \right\}$$

liegen in den Punkten

$$P_{\rightarrow\rightarrow\rightarrow} := (-1/2, -1/2, +1/2, +1/2) ,$$

$$P_{\rightarrow\leftarrow\leftarrow} := (-1/2, +1/2, -1/2, +1/2)$$

usw.

Es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten der Vorzeichenanordnung (je 2 Plus- bzw. Minuszeichen), also ist $s = 6$. Alle Singularitäten liegen in der Hyperebene $\{\sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$, daher ist $d = 2$. Mit Hilfe von partiellen Auflösungen bestimmt man die linearen Relationen zwischen den exzeptionellen Kurven (bis auf die Vorzeichen) als

$$L_{++--} \simeq L_{--++} .$$

$$L_{+--+} \simeq L_{-+-+} .$$

$$L_{-+-+} \simeq L_{+--+} .$$

und $L_{++--} - L_{+--+} - L_{-+-+} \simeq 0 .$

Es gibt 6 projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Die allgemeinen Fälle

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^4 (-1)^{\beta_j} \mathcal{F}_3(x_j) = 0 \right\}$$

bringen nichts Neues; alle diese Hyperflächen sind isomorph, da $\mathcal{F}_n(x) = -\mathcal{F}_n(-x)$ für alle ungeraden natürlichen Zahlen n .

Im Falle der Double Solids mit Verzweigungsflächen vom Grad 4 kommt man zu folgenden Resultaten:

1. Es sei

$$B = \{\mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) + \mathcal{F}_4(x_3) + 1 = 0\} .$$

Singulär sind die Punkte

$$P_{\pm\pm 0} := (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0) .$$

$$P_{\pm 0\pm} := (\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}) .$$

und
$$P_{0\pm\pm} := (0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) .$$

Es ist $s = 12$. Da alle Singularitäten nur auf der Quadrik $\{\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ liegen, ist $d = 3$. Mit Hilfe dieser Quadrik läßt sich die definierende Gleichung von B als

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 1\right)^2 + (x_1 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

schreiben. Die 4 Ebenen $\{x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0\}$ schneiden sich paarweise in 6 Geraden, der Schnitt dieser 6 Geraden mit der Quadrik $\{\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ besteht genau aus den 12 Singularitäten von B.

Quartiken der Gestalt $\{q^2 + \prod_{i=1}^4 l_i = 0\}$, $\deg Q = 2$, $\deg l_i = 1$, und ihre Double Solids werden in Kapitel X allgemein untersucht. Diese Art der Darstellung liefert neue globale meromorphe Funktionen auf V:

$$\frac{\omega - q}{\prod_{i \in I} l_i} = \frac{\prod_{i \in I} l_i}{\omega + q} .$$

$\emptyset \neq I \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Die Unbestimmtheitsstellen liegen in \mathcal{V} , die Graphen dieser Funktionen beschreiben spezielle partielle Auflösungen.

Die linearen Relationen zwischen den exzeptionellen Kurven lauten auf einer speziellen kleinen Auflösung:

$$\begin{aligned}
 L_{+0+} &\cong L_{-0-} . \\
 L_{+0-} &\cong L_{-0+} . \\
 L_{++0} &\cong L_{-0} . \\
 L_{+-0} &\cong L_{-+0} . \\
 L_{0++} &\cong L_{0--} . \\
 L_{0+-} &\cong L_{0-+} . \\
 L_{+0+} - L_{0++} + L_{-+0} &\cong 0 . \\
 L_{+0+} - L_{0+-} - L_{++0} &\cong 0 \\
 \text{und} \quad L_{+0-} - L_{0++} + L_{++0} &\cong 0 .
 \end{aligned}$$

Es gibt 24 projektiv algebraische kleine Auflösungen.

2. Ähnlich sieht es im Fall

$$B = \{\mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) - \mathcal{F}_4(x_3) + 1 = 0\}$$

aus. Singulär sind die Punkte

$$\begin{aligned}
 P_{\pm\pm\pm} &:= (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) . \\
 P_{\pm 00} &:= (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0) \\
 \text{und} \quad P_{0\pm 0} &:= (0, \pm 1/\sqrt{2}, 0) .
 \end{aligned}$$

Es ist $s = 12$. Alle Singularitäten liegen auf der Quadrik

$$\{2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 = 1\} ,$$

es ist $d = 3$.

Die definierende Gleichung von B läßt sich als

$$(2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 1)^2 - 8(x_1 - x_3)(x_1 + x_3)(x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = 0.$$

schreiben, wieder handelt es sich um einen Spezialfall des Beispiels, das in Kapitel X genauer behandelt werden wird. Die linearen Relationen lauten

$$L_{+++} \approx L_{---} .$$

$$L_{+ \rightarrow} \approx L_{- \rightarrow} .$$

$$L_{+ \leftarrow} \approx L_{- \leftarrow} .$$

$$L_{++\leftarrow} \approx L_{--\rightarrow} .$$

$$L_{+00} \approx L_{-00} .$$

$$L_{0+0} \approx L_{0-0} .$$

$$L_{+++} - L_{+ \rightarrow} - L_{+00} \approx 0 .$$

$$L_{+++} - L_{0+0} - L_{+ \leftarrow} \approx 0$$

und
$$L_{+ \rightarrow} - L_{0+0} - L_{++\leftarrow} \approx 0 .$$

Genau 24 kleine Auflösungen sind projektiv algebraisch.

3. Besonders interessant ist der Fall

$$B = \{ \mathcal{F}_4(x_1) - \mathcal{F}_4(x_2) - \mathcal{F}_4(x_3) + 1 = 0 \}$$

mit $s = 9$; singularär sind die Punkte $(0,0,0)$, $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2})$ und $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$. Die Singularitätenmenge \mathcal{S} liegt auf den beiden Quadriken $\{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ und $\{x_2 x_3 = 0\}$; man überlegt sich, daß keine weitere Quadrik ganz \mathcal{S} enthält. Daher ist $d = 1$. Wie im letzten Kapitel gesehen, gibt es eine partielle Auflösung $\check{V} \subset \mathbb{P}^N$ der letzten 8 Singularitäten. Der neunte Doppelpunkt wird also nullhomolog aufgelöst.

4. Im Fall

$$B = \{ \mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) + \mathcal{F}_4(x_3) - 1 = 0 \}$$

liegen die Singularitäten in den Punkten $(0, 0, \pm 1/\sqrt{2})$, $(0, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$ und $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$. Genau die Quadriken $\{x_1x_2 = 0\}$, $\{x_1x_3 = 0\}$, $\{x_2x_3 = 0\}$ und $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/2\}$ verschwinden auf ganz \mathcal{V} , es ist $d = 0$. Alle Nodes werden durch nullhomologe Kurven aufgelöst.

Um einen positiven Defekt zu erreichen, müßten alle Singularitäten auf einem ebenen Kegelschnitt liegen. Später wird uns ein solches Beispiel mit $\deg B = 4$, $s = 6$ und $d = 1$ begegnen. Damit ist klar, daß der Defekt tatsächlich von der speziellen Lage der Singularitäten abhängt.

In den Fällen $\deg V = 4, 5$ und $\deg B = 6, 8$ muß der Computer zur Berechnung des Defektes zu Hilfe genommen werden. Die Koordinaten der Singularitäten und damit die Elemente der Matrix $(f_i(P_j))$ liegen jeweils in $\mathbb{Z}[\alpha]$, α ganz über \mathbb{Z} . Bis auf einen Sonderfall ($\deg B = 8$) ist α immer Quadratwurzel einer Primzahl.

Aus technischen Gründen war es nötig, bei den Rechnungen mit dem Computer alle Matrixelemente modulo einer Primzahl zu reduzieren. Ist diese Primzahl träge - das heißt ist $p\mathbb{Z}[\alpha]$ Primideal in $\mathbb{Z}[\alpha]$ - so ist $\mathbb{Z}[\alpha]/p\mathbb{Z}[\alpha]$ nullteilerfrei. Also ist der Rang der Matrix $(f_i(P_j) \bmod p)$ kleiner oder gleich dem Rang der Matrix $(f_i(P_j))$. Definiere

$$d'(p) := s - \text{Rang} (f_i(P_j) \bmod p) .$$

dann ist $d \leq d'(p)$ für alle trägen Primzahlen p .

Mit Hilfe der Divisoren auf V ist eine Abschätzung des Defektes nach unten möglich, so daß sein genauer Wert in allen hier behandelten Fällen angegeben werden kann.

Wie erhält man zur Reduktion geeignete Primzahlen?

Aus der Zahlentheorie wissen wir:

Eine Primzahl p ist träge in $\mathbb{Z}[\alpha]$ genau dann, wenn das Minimalpolynom von α über \mathbb{Z} auch irreduzibel über \mathbb{Z}_p ist.

Falls $\alpha = \sqrt{q}$, q Primzahl, bedeutet das:

Wenn $x^2 - q$ keine Nullstelle in \mathbb{Z}_p hat, so ist p eine zur Reduktion geeignete Primzahl.

Betrachte die Čmutov-Quartiken in \mathbb{P}^4 , die Koordinaten der Singularitäten liegen nach Homogenisierung und geeigneter Normierung in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Die Hyperfläche

$$V = \{ \mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) + \mathcal{F}_4(x_3) + \mathcal{F}_4(x_4) = 0 \}$$

hat 24 Singularitäten; wir teilen sie in 3 Klassen ein:

- Typ I : $(\pm, 0, \pm, 0)$ und $(0, \pm, 0, \pm)$
Typ II : $(\pm, 0, 0, \pm)$ und $(0, \pm, \pm, 0)$
Typ III : $(\pm, \pm, 0, 0)$ und $(0, 0, \pm, \pm)$.

Ein "+" bedeutet $1/\sqrt{2}$ und ein "-" $-1/\sqrt{2}$.

Mit dem Computer wurde berechnet: $d'(181) = 2$.

Die globalen Divisoren $\{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 1/2 = 0, x_3^2 + x_4^2 + x_3x_4 - 1/2 = 0\}$
und $\{x_1^2 + x_3^2 + x_1x_3 - 1/2 = 0, x_2^2 + x_4^2 + x_2x_4 - 1/2 = 0\}$ liefern zwei linear
unabhängige Vektoren in \mathcal{A} , es ist

$$d = 2.$$

Auf einer speziellen kleinen Auflösung hat man zwischen den
irreduziblen exceptionellen Kurven folgende Relationen: Alle Kurven zu
Singularitäten desselben Typs sind homolog, weiterhin ist

$$L_I - L_{II} + L_{III} \cong 0.$$

Es gibt 6 projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Die Quartik

$$V = \{\mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) - \mathcal{F}_4(x_3) - \mathcal{F}_4(x_4) = 0\}$$

hat 33 Nodes, abgekürzt geschrieben als $(0,0,0,0)$, (\pm,\pm,\pm,\pm) ,
 $(0,\pm,\pm,0)$, $(\pm,0,\pm,0)$, $(0,\pm,0,\pm)$ und $(\pm,0,0,\pm)$. Ein "+" bedeutet
wieder $1/\sqrt{2}$ und ein "-" $-1/\sqrt{2}$.

Der Computer berechnet $d'(181) = 7$.

Die Quartik enthält die 8 Ebenen $\{x_1 \pm x_i = 0, x_j \pm x_k = 0\}$, $(i,j,k) \in$
 $\{(3,2,4), (4,2,3)\}$, jede der Ebenen enthält 9 der Nodes. Die Vektoren
der Schnittzahlen der eigentlichen Transformierten dieser Ebenen mit den
exceptionellen Kurven auf einer kleinen Auflösung erzeugen einen
Untervektorraum der Dimension größer oder gleich 7.

Hiervon überzeugt man sich, indem man nacheinander 7 Ebenen E_i auswählt, die jeweils Nodes P_i enthalten, die durch die vorher gewählten Ebenen noch nicht erreicht wurden, zum Beispiel:

$E_1 = \{x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$	$P_1 = (+, +, +, +)$
$E_2 = \{x_1 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$	$P_2 = (+, -, -, -)$
$E_3 = \{x_1 - x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$	$P_3 = (+, +, +, -)$
$E_4 = \{x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$	$P_4 = (-, +, -, +)$
$E_5 = \{x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$	$P_5 = (0, +, -, 0)$
$E_6 = \{x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$	$P_6 = (0, +, +, 0)$
$E_7 = \{x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$	$P_7 = (+, 0, 0, +)$

Also ist der Defekt $d = 7$, die Zerlegung von Q^s in d und \mathcal{S} und damit auch die Anzahl der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen ließe sich theoretisch genau bestimmen, wäre allerdings mit einigem Rechenaufwand verbunden.

Wenden wir uns statt dessen lieber der Quartik

$$V = \{f_4(x_1) + f_4(x_2) + f_4(x_3) - f_4(x_4) = 0\}$$

mit $s = 30$ zu.

Der Computer berechnet $d'(181) = 8$.

Schreibe die Gleichung der Quartik als

$$f_4(x_1) + f_4(x_2) = f_4(x_4) - f_4(x_3).$$

Der Term auf der linken Seite der Gleichung zerfällt in die Faktoren $2(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 1)(2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 1)$, der Term auf der rechten Seite in $(x_4 + x_3)(x_4 - x_3)(x_3^2 + x_4^2 - 1)$. Man sieht, daß die Divisoren

$$D_1 := \{x_3 + x_4 = 0, 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 1 = 0\}$$

und $D_2 := \{x_3 - x_4 = 0, 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 1 = 0\}$

glatte Weil-Divisoren auf V sind. Durch Vertauschung von x_3 mit x_1 bzw. x_2 erhält man als weitere Divisoren

$$D_3 := \{x_2 + x_4 = 0, 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 1 = 0\}$$

$$D_4 := \{x_2 - x_4 = 0, 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 1 = 0\}$$

und $D_5 := \{x_1 + x_4 = 0, 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - 1 = 0\}$.

Zusätzliche Divisoren sieht man, indem man die Gleichung der Quartik als

$$\mathcal{F}_4(x_1) + \mathcal{F}_4(x_2) + \mathcal{F}_4(x_3) + 1 = \mathcal{F}_4(x_4) + 1$$

schreibt. Wie schon im Zusammenhang mit Double Solids gesehen, ist der Term auf der rechten Seite der Gleichung gleich $q_1^2 := 2(2x_4^2 - 1)^2$ und der Term auf der linken Seite gleich $q_2^2 + 4 \prod_{i=1}^4 \ell_i$, wobei ℓ_i die 4

linearen Polynome $x_1 \pm x_2 \pm x_3$ durchläuft und q_2 als $2(\sum_{i=1}^3 x_i^2 - 1)$

definiert ist. Die Gleichung der Quartik läßt sich zu

$$\prod_{i=1}^4 \ell_i = q_1^2 - q_2^2$$

umformen;

die Divisoren

$$D_6 := \{x_1 + x_2 + x_3 = 0, q_1 + q_2 = 0\},$$

$$D_7 := \{x_1 + x_2 - x_3 = 0, q_1 + q_2 = 0\}$$

und

$$D_8 := \{x_1 - x_2 + x_3 = 0, q_1 + q_2 = 0\}$$

sind wiederum glatte Weil-Divisoren auf V . Die zu den Divisoren D_1 bis D_8 gehörenden 33-Tupel $(m_1, \dots, m_{33}) \in \mathcal{A}$ sind linear unabhängig. Ich möchte den rechnerisch aufwendigen Beweis hier nicht vorführen; die Beweismethode wird später an einem wichtigeren Beispiel (dem Double Solid, verzweigt längs einer Čmutov-Oktik mit 144 Nodes) genauer erläutert werden.

Kommen wir nun zur Čmutov-Quintik

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^4 \mathcal{F}_5(x_i) = 0 \right\}$$

mit 96 Nodes. Die Koordinaten der Singularitäten liegen nach geeigneter Normierung in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, mit dem Computer wurde

$$d'(173) = 10$$

berechnet. Um den Defekt auch nach unten abzuschätzen, soll nun wieder eine Folge D_i von 10 globalen glatten Weil-Divisoren konstruiert werden, so daß jeder Divisor D_i mindestens einen Punkt $P_i \in \mathcal{V}$ enthält, $P_i \notin D_j$ für alle $j < i$.

Wie wir wissen, zerfällt $\mathcal{F}_5(x) + \mathcal{F}_5(y)$ in 3 Polynome vom Grad 1, 2 und

2. Die Zerlegung lautet

$$\mathcal{F}_5(x) + \mathcal{F}_5(y) = (x+y) f(x,y) g(x,y)$$

mit $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 2(\sqrt{5} - 1)xy - (5 + \sqrt{5})/2$

und $g(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - 2(\sqrt{5} + 1)xy - (5 - \sqrt{5})/2$.

Wähle nun:

$D_1 = \{x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$	$P_1 = (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_4)$
$D_2 = \{x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$	$P_2 = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_4)$
$D_3 = \{x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$	$P_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$
$D_4 = \{x_1 + x_2 = 0, g(x_3, x_4) = 0\}$	$P_4 = (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_2)$
$D_5 = \{x_1 + x_3 = 0, g(x_2, x_4) = 0\}$	$P_5 = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_2)$
$D_6 = \{x_1 + x_4 = 0, g(x_2, x_3) = 0\}$	$P_6 = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$
$D_7 = \{f(x_1, x_2) = 0, g(x_3, x_4) = 0\}$	$P_7 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$
$D_8 = \{f(x_1, x_3) = 0, g(x_2, x_4) = 0\}$	$P_8 = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$
$D_9 = \{f(x_1, x_2) = 0, x_3 + x_4 = 0\}$	$P_9 = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_1)$
$D_{10} = \{f(x_1, x_3) = 0, x_2 + x_4 = 0\}$	$P_{10} = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_1)$

Zur Erinnerung: Es ist

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = -\alpha_4$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = -\alpha_3$$

Damit hat der Vektorraum \mathcal{d} mindestens die Dimension 10, die Gleichung

$$d = 10$$

ist bewiesen!

Die projektiv algebraischen kleinen Auflösungen sind Kählermannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Bündel und Eulerzahl -8 . Interessante Hodgezahlen sind $h^{1,1}(\hat{V}) = 11$ und $h^{2,1}(\hat{V}) = 15$.

Kommen wir nun zu den restlichen Double Solids. Die Koordinaten der Singularitäten der Double Solids mit Čmutov-Sextiken als Verzweigungsflächen liegen in $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. hier ist 173 eine zur Reduktion geeignete Primzahl. Bei den Oktiken liegen die Koordinaten der Singularitäten in $\mathbb{Z}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$. Das Minimalpolynom von $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ über \mathbb{Z} ist $f = x^4 + x^2 + 2$. Für welche Primzahlen p ist dies Polynom irreduzibel über \mathbb{Z}_p ?

Nehmen wir an, daß f über \mathbb{Z}_p in zwei quadratische Terme zerfällt. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}_p$, so daß $\bar{f} = (x^2 - ax + b)(x^2 + ax + b)$. Es ist $b^2 \equiv 2(p)$. Falls $p \equiv 3(8)$ oder $5(8)$, ist das nicht möglich; in diesen Fällen ist 2 kein Quadrat modulo p . Eine Primzahl $p \equiv 5(8)$ mit $\bar{f}(a) \not\equiv 0(p)$ für alle $a \in \mathbb{Z}_p$ ist daher zur Reduktion geeignet; 181 ist eine solche Zahl.

Man erhält folgende Ergebnisse:

Verzweigungsfläche	Anzahl der Nodes	Defekt	Anzahl der null-homologen Kurven auf \hat{V}
$\mathcal{F}_6(x_1) + \mathcal{F}_6(x_2) + \mathcal{F}_6(x_3) + 1 = 0$	54	6	0
$\mathcal{F}_6(x_1) + \mathcal{F}_6(x_2) + \mathcal{F}_6(x_3) - 1 = 0$	36	0	36
$\mathcal{F}_6(x_1) + \mathcal{F}_6(x_2) - \mathcal{F}_6(x_3) + 1 = 0$	51	5	0
$\mathcal{F}_6(x_1) - \mathcal{F}_6(x_2) - \mathcal{F}_6(x_3) + 1 = 0$	44	2	8
$\mathcal{F}_8(x_1) + \mathcal{F}_8(x_2) + \mathcal{F}_8(x_3) + 1 = 0$	144	9	0
$\mathcal{F}_8(x_1) + \mathcal{F}_8(x_2) + \mathcal{F}_8(x_3) - 1 = 0$	108	0	108
$\mathcal{F}_8(x_1) + \mathcal{F}_8(x_2) - \mathcal{F}_8(x_3) + 1 = 0$	136	7	0
$\mathcal{F}_8(x_1) - \mathcal{F}_8(x_2) - \mathcal{F}_8(x_3) + 1 = 0$	123	3	27

Die Defekt-Abschätzungen nach oben liefert der Computer. Abschätzungen nach unten erhält man durch Angabe von d linear unabhängigen Vektoren in \mathcal{A} . Die einzige Schwierigkeit besteht darin, im Fall der Oktik mit 144 Doppelpunkten 9 globale Divisoren auf V anzugeben, deren zugehörige 144-Tupel in \mathcal{A} linear unabhängig sind!

Erinnern wir uns, daß $\mathcal{F}_8(x) + \mathcal{F}_8(y)$ in 4 irreduzible Polynome vom Grad 2 zerfällt. Diese sind (bis auf einen konstanten Faktor)

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} xy + \frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}} xy + \frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$f_3(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{2-\sqrt{2}} xy - \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

$$f_4(x,y) = x^2 + y^2 + \sqrt{2-\sqrt{2}} xy - \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Weiterhin benötigen wir, daß $\mathcal{F}_g(z) + 1$ Quadrat eines Polynoms $g(z)$ vom Grad 4 ist. Bis auf einen konstanten Faktor ist

$$g(z) = z^4 - z^2 + 1/8 .$$

Die Gleichung des Double Solids schreibt sich als

$$\prod_{i=1}^4 f_i(x_1, x_2) = [\omega - g(x_3)][\omega + g(x_3)] .$$

Wähle als spezielle Divisoren auf V

$$D_1 = \{\omega - g(x_3) = 0, f_1(x_1, x_2) = 0\}$$

$$D_2 = \{\omega - g(x_3) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0\}$$

$$D_3 = \{\omega - g(x_3) = 0, f_3(x_1, x_2) = 0\}$$

$$D_4 = \{\omega - g(x_2) = 0, f_1(x_1, x_3) = 0\}$$

$$D_5 = \{\omega - g(x_2) = 0, f_2(x_1, x_3) = 0\}$$

$$D_6 = \{\omega - g(x_2) = 0, f_3(x_1, x_3) = 0\}$$

$$D_7 = \{\omega - g(x_1) = 0, f_1(x_2, x_3) = 0\}$$

$$D_8 = \{\omega - g(x_1) = 0, f_2(x_2, x_3) = 0\}$$

$$D_9 = \{\omega - g(x_1) = 0, f_3(x_2, x_3) = 0\}$$

Es ist

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = -\alpha_7$$

und

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = -\alpha_5 .$$

Wir untersuchen nun, wie sich diese Divisoren in einer Umgebung spezieller Singularitäten verhalten.

Sei $P_1 := (\alpha_3, 0, \alpha_3)$. Die Divisoren D_1 , D_2 , D_7 und D_8 gehen durch diesen Punkt: D_1 und D_2 repräsentieren die beiden lokalen Divisoren in P_1 , ebenso D_7 und D_8 . Die Koordinatentransformation $x_3 \longleftrightarrow x_1$ läßt P_1 invariant und vertauscht D_1 und D_7 . Lokal vertauscht diese Koordinatentransformation die beiden kleinen Auflösungen, also sind D_1 und D_7 lokal in P_1 verschieden. Wir schreiben das so:

$$D_1(1) \cdot D_2(-1) \cdot D_7(-1) \cdot D_8(1) .$$

In Klammern stehen die Schnittzahlen mit der exzeptionellen Kurve einer kleinen Auflösung von P_1 .

Sei $P_2 := (\alpha_1, 0, \alpha_1)$. Hier haben wir $D_3(1)$ und $D_9(-1)$.

Wähle $P_3 := (\alpha_3, 0, \alpha_3)$. Die Koordinatentransformation $x_3 \longleftrightarrow -x_1$ läßt P_3 fest und bildet D_1 auf $\{\omega + g(x_1) = 0 \cdot f_1(x_2, x_3) = 0\}$ ab. Also gilt hier:

$$D_1(1) \cdot D_2(-1) \cdot D_7(1) \cdot D_8(-1) .$$

Analog erhält man

$$\begin{array}{ll} P_4 := (0, \alpha_3, \alpha_3) : & D_1(1) \cdot D_2(-1) \cdot D_4(-1) \cdot D_5(1) \\ P_5 := (0, \alpha_1, \alpha_1) : & D_3(1) \cdot D_6(-1) \\ P_6 := (\alpha_3, -1/\sqrt{2}, \alpha_3) : & D_1(1) \cdot D_3(-1) \cdot D_7(-1) \cdot D_9(1) \\ P_7 := (-1/\sqrt{2}, \alpha_3, \alpha_3) : & D_1(1) \cdot D_3(-1) \cdot D_4(-1) \cdot D_6(1) \\ P_8 := (\alpha_3, 1/\sqrt{2}, -\alpha_3) : & D_2(1) \cdot D_7(-1) \cdot D_9(1) \end{array}$$

Wähle als letzten Punkt $P_9 := (\alpha_1, 1/\sqrt{2}, \alpha_3)$. Die Divisoren D_2 , D_3 und D_8 enthalten P_9 . D_2 und D_3 repräsentieren die beiden lokalen Divisoren in P_9 . Mit welchem von diesen beiden Divisoren stimmt nun D_8 lokal überein?

Betrachte die lokalen meromorphen Funktionen

$$F_1 := \frac{g(x_3)}{f_2(x_1, x_2)} \quad , \quad F_2 := \frac{g(x_3)}{f_3(x_1, x_2)} \quad \text{und} \quad F_3 := \frac{g(x_1)}{f_2(x_2, x_3)}$$

in einer kleinen affinen Umgebung von P_1 . Wähle Folgen $0 < \epsilon_n \rightarrow 0$ und $0 < \delta_n \rightarrow 0$, so daß $(\alpha_1 + \epsilon_n, 1/\sqrt{2} + \delta_n, \alpha_3 + \epsilon_n)$ auf B liegt. Es ist

$$F_1(\alpha_1 + \epsilon_n, 1/\sqrt{2} + \delta_n, \alpha_3 + \epsilon_n) > 0 \quad .$$

$$F_2(\alpha_1 + \epsilon_n, 1/\sqrt{2} + \delta_n, \alpha_3 + \epsilon_n) < 0 \quad .$$

und

$$F_3(\alpha_1 + \epsilon_n, 1/\sqrt{2} + \delta_n, \alpha_3 + \epsilon_n) > 0 \quad .$$

Also stimmt D_8 lokal mit D_2 überein, das heißt: $D_2(1) \cdot D_3(-1) \cdot D_8(1)$.

Fasse die berechneten Schnittzahlen auf einer speziellen kleinen Auflösung in folgender Matrix $(\hat{D}_i \cdot L_{P_j})_{\substack{1 \leq i \leq 9 \\ 1 \leq j \leq 9}}$ zusammen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat den Rang 9, also sind die zu den Divisoren D_1, \dots, D_9 gehörenden 144-Tupel in \mathcal{A} linear unabhängig. Der Defekt ist gleich 9, die projektiv algebraischen kleinen Auflösungen sind Kählermannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Bündel und Eulerzahl -8 . Die interessanten Hodgezahlen sind $h^{1,1}(\hat{V}) = 10$ und $h^{2,1}(\hat{V}) = 14$.

VII ABSCHÄTZUNGEN FÜR $\mu_n(d)$

In diesem Kapitel wollen wir die kleinen Auflösungen kurz verlassen und uns mit der Frage beschäftigen, wie viele gewöhnliche Doppelpunkte eine Hyperfläche vom Grad d im \mathbb{P}^n haben kann. Da die Chance, zu gegebener nodaler Threefold eine projektiv algebraische kleine Auflösung zu finden, mit wachsender Zahl von Singularitäten größer wird, ist eine solche Frage in diesem Zusammenhang durchaus interessant.

Zur Notation:

In Übereinstimmung mit Varchenko wird in diesem Kapitel die Dimension des projektiven Raumes mit n und der Grad der Hyperfläche mit d bezeichnet. Da Defekte erst wieder im nächsten Kapitel auftreten, ist eine Verwechslung ausgeschlossen. Die maximale Zahl von Nodes einer Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ werde mit $\mu_n(d)$ bezeichnet.

Eine allgemeine Abschätzung für $\mu_n(d)$ stammt von Bruce [4]. Er zeigt:

$$\mu_n(d) \leq ((d-1)^n(d+1)+d-1)/2d \quad \text{falls } n \text{ gerade.}$$

$$\mu_n(d) \leq (d-1)^n/2 \quad \text{falls } d \text{ und } n \text{ ungerade,}$$

$$\mu_n(d) \leq ((d-1)^n(d+1)+1)/2d \quad \text{falls } d \text{ gerade und } n \text{ ungerade.}$$

Schärfer ist die Abschätzung von Varchenko [39]:

$$\mu_n(d) \leq A_n(d) .$$

dabei ist $A_n(d)$ definiert als die Anzahl der ganzzahligen Punkte

(k_1, \dots, k_n) innerhalb des Würfels $(0, d)^n$, so daß

$$(n-2)d/2 + 1 < \sum_{i=1}^n k_i \leq nd/2 .$$

Kalker zeigt in seiner Dissertation [18]:

$$\mu_n(3) = A_n(3) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

für Kubiken ist die Abschätzung von Varchenko also scharf. Für Flächen in \mathbb{P}^3 beweist Miyaoka in [25]:

$$\mu_3(d) \leq 4/9 d(d-1)^2 .$$

Die folgende Liste umfaßt die bekannten Ergebnisse für $n = 3$, $2 \leq d \leq 12$:

Grad der Fläche	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu_3(d) \leq$	1	4	16	31	66	104	174	256	360	488	645
$\mu_3(d) \geq$	1	4	16	31	66	90	160	192	300	375	540

$\mu_3(5) = 31$ wurde von Beauville bewiesen [1], $\mu_3(6) = 66$ von Stagnaro [36]. Auch die Fläche vom Grad 7 mit 90 Nodes wurde von Stagnaro gefunden. Die Oktik mit 160 Doppelpunkten stammt von Kreiss [19].

Für Hyperflächen in \mathbb{P}^4 hat man folgende Einzelergebnisse:

Bruce:	$\mu_4(2) \leq 1$	$\mu_4(3) \leq 11$	$\mu_4(4) \leq 51$	$\mu_4(5) \leq 154$
Varchenko:	$\mu_4(2) \leq 1$	$\mu_4(3) \leq 10$	$\mu_4(4) \leq 45$	$\mu_4(5) \leq 135$

Beispiele, auf die noch näher eingegangen wird, zeigen uns:

$$\mu_4(2) = 1 \quad \mu_4(3) = 10 \quad \mu_4(4) = 45 .$$

Quintiken mit 125 bzw. 126 Nodes werden von Schoen [32] bzw. Hirzebruch [15] konstruiert. So gilt $126 \leq \mu_4(5) \leq 135$.

Im Folgenden interessiert uns das asymptotische Verhalten von $\mu_n(d)$.

Definition: Sei

$$a_n := \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{A_n(d)}{d^n} \quad , \quad b_n^1 := \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(d)}{d^n}$$
$$b_n^2 := \underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(d)}{d^n} \quad , \quad c_n := \left[\binom{n}{[n/2]} \right] 2^{-n} .$$

c_n gibt die asymptotische Anzahl der Singularitäten der Cmutov-Hyperflächen für $d \rightarrow \infty$ an. Es gilt

$$c_n \leq b_n^2 \leq b_n^1 \leq a_n .$$

Aus den Resultaten von Bruce folgt unmittelbar $b_n^1 \leq 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In den Fällen $n = 3, 4$ haben wir folgende genauere Abschätzungen:

$$3/8 \leq b_3^2 \leq b_3^1 \leq 4/9$$
$$3/8 \leq b_4^2 \leq b_4^1 \leq 11/24 .$$

Die unteren Abschätzungen erhält man durch die Cmutov-Hyperflächen, die oberen durch Miyaoka bzw. Varchenko.

Lemma: $a_n = \text{Volumen } \{(x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_i \leq 1, (n-2)/2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq n/2\}$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition der sogenannten Arnold-Zahlen $A_n(d)$.

Durch direkte Integration berechnet man: $a_3 = 23/48$, $a_4 = 11/24$. Die Folge a_n besitzt noch eine andere Darstellung: Die Bedingung

$$(n-2)/2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq n/2$$

ist äquivalent zu

$$-1 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - 1/2) \leq 0.$$

Deute $(x_i - 1/2)$ als Zufallsvariable, die im Intervall $[-1/2, 1/2]$ gleichverteilt ist. Die Fourier-Transformierte dieser Dichte ist

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{i\lambda x} dx = \frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}.$$

Dann hat $\sum_{i=1}^n (x_i - 1/2)$ eine Verteilungsfunktion mit Dichte

$$1/2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n d\lambda.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a_n &= 1/2\pi \int_{-1}^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n d\lambda dx \\ &= 1/2\pi \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda x) \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n d\lambda dx \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} a_n &= 1/2\pi \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^1 \cos(\lambda x) dx \right] \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n d\lambda \\ &= 1/2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n d\lambda \\ &= 1/\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^n dx . \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} a_n &= 2/\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{n+1} \cos x dx \\ &= 2/\pi \left[\frac{n+1}{n+2} \right] \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{n+2} dx . \end{aligned}$$

Die Varianzen der unabhängigen Zufallsvariablen $(x_i - 1/2)$ sind gleich $1/12$. Also konvergiert

$$S_n^* := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 1/2)}{\sqrt{n/12}}$$

nach dem zentralen Grenzwertsatz schwach gegen die Normalverteilung. Sei

F_n die Verteilungsfunktion von S_n^* . Dann ist

$$a_n = \int_{-\sqrt{12/n}}^0 F_n(x) dx .$$

F_n ist gleichmäßig beschränkt; damit ist a_n eine Nullfolge. Also sind auch b_n^1 und b_n^2 Nullfolgen.

Darüberhinaus wissen wir: Die Funktionenfolge F_n konvergiert in jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen die Dichte ϕ der Normalverteilung.

Wegen der Stetigkeit von ϕ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{12/n}}^0 F_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sqrt{12/n} \phi(0) = \sqrt{12} / \sqrt{2\pi} = \sqrt{6/\pi}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel berechnet man leicht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_n = \sqrt{2/\pi}.$$

Diese beiden Formeln zitiert schon Varchenko in [40], ohne allerdings einen Beweis zu geben.

Zusammenfassend ergibt sich die Ungleichung

$$\sqrt{2/\pi} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n^2 \leq \sqrt{6/\pi}.$$

VIII KUBIKEN IN $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$

Der Inhalt dieses Kapitels baut wesentlich auf Resultaten der Dissertation [18] von Ton Kalker auf, die Ergebnisse entstanden in enger Zusammenarbeit mit Hans Finkelnberg (Leiden), siehe auch [8]. Die nodalen kubischen Hyperflächen in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ werden näher untersucht.

Sei K eine singuläre Kubik in \mathbb{P}^4 mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten, eine Singularität liege im Punkt $P_1 := (0:0:0:0:1)$. Dann ist

$$K = \{x_4 Q + R = 0\} .$$

wobei $Q, R \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogen sind vom Grad 2 bzw. 3. Mit $K(P_1)$ bezeichnen wir K , aufgeblasen in P_1 ; die Quadrik $\{Q = 0\}$ entspricht der exceptionellen Fläche $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{P}^4 - \{P_1\} &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (x_0 : \dots : x_4) &\longrightarrow (x_0 : \dots : x_3) \end{aligned}$$

auf $K - \{P_1\}$ läßt sich zu einer Abbildung

$$\tilde{\Pi} : K(P_1) \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

fortsetzen. Die Kurve

$$S := \{Q = 0\} \cap \{R = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

heißt assoziierte Kurve. Auch S hat nur nodale Singularitäten. $\mathcal{S} - \{P_1\}$ wird vermöge Π eineindeutig auf die Singularitäten von S abgebildet. $\Pi^{-1}(S)$ liegt ganz in K . Außerhalb von S ist $\tilde{\Pi}$ bijektiv. Beweise dieser Fakten finden sich in [18].

$K(P_1)$ ist isomorph zu \mathbb{P}^3 , aufgeblasen entlang S . Damit ergibt sich

$$H_4(K(P_1), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_i \mathbb{Z} \tilde{\Pi}^{-1} S_i .$$

wobei S_i die irreduziblen Komponenten von S durchläuft. Zusammen mit der Homologieklassse des generischen Hyperebenenchnittes H erzeugen die Divisoren $\tilde{\Pi}^{-1} S_i$ ganz $H_4(K, \mathbb{Z})$.

Die assoziierte Kurve S , aufgefaßt als Kurve in $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ist vom Typ (3,3). Mit Hilfe der assoziierten Kurve lassen sich die Kubiken, die projektiv algebraische kleine Auflösungen zulassen, aufs Neue charakterisieren.

Satz: Sei K eine nodale Kubik in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Genau dann existiert eine projektiv algebraische kleine Auflösung, wenn alle irreduziblen Komponenten von S glatt sind und mindestens eine vom Typ (a,b) mit $a \neq b$ ist.

Die Anzahl der irreduziblen Komponenten von S ist gleich $d+1$.

Bemerkung: Sei $P \in \mathcal{S} - \{P_1\}$. Dann ist $\Pi(P)$ eine Singularität von S . Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

1. In $\Pi(P)$ schneiden sich zwei lokal glatte irreduzible Komponenten von S .
2. $\Pi(P)$ ist Selbstschnitt einer irreduziblen Komponente von S .

Im ersten Fall sei S_1 eine solche Komponente, die in $\Pi(P)$ glatt ist. Dann ist $\tilde{\Pi}^{-1} S_1$ ein Divisor auf K , der in P glatt ist. Auf einer

kleinen Auflösung \hat{V} schneidet L_P die eigentliche Transformierte dieses Divisors mit Vielfachheit ± 1 . Also ist auf \hat{V} die Kurve L_P nicht nullhomolog.

Im zweiten Fall bezeichne S_2 die irreduzible Komponente, die in $\Pi(P)$ singularär ist. Dann haben wir

$$(\Pi^{-1}S_2).L_P = \pm(1-1) = 0.$$

Dies gilt natürlich auch für die anderen Komponenten, die ja $\Pi(P)$ überhaupt nicht treffen. Damit ist L_P auf \hat{V} nullhomolog.

Es bleibt noch der Punkt P_1 zu untersuchen.

Sei S_i eine beliebige Komponente von S vom Typ (a,b) . Wegen

$$(\tilde{\Pi}^{-1}S_i).Q \cong S_i$$

haben wir

$$(\tilde{\Pi}^{-1}S_i).A_1 = -a .$$

$$(\tilde{\Pi}^{-1}S_i).B_1 = -b \quad \text{und}$$

$$(\Pi^{-1}S_i).L_1 = \pm(a-b) .$$

Damit ist L_1 auf \hat{V} genau dann nicht nullhomolog, wenn eine Komponente von S mit $a \neq b$ existiert, vgl. [7], [8].

S ist zusammenhängend, daher kann man aus den Schnittzahlen ablesen:

$$\left(\sum_i \alpha_i \Pi^{-1}S_i \right).L_P = 0$$

für alle $P \in \mathcal{Y}$ genau dann, wenn $\alpha_i = \alpha_j$ für alle i, j . Damit besteht zwischen den Divisoren $\Pi^{-1}S_i$ und H genau eine Beziehung, also ist die Anzahl der irreduziblen Komponenten von S gleich $\beta_4(V) = d+1$. \square

Umgekehrt gilt das folgende

Lemma: Jede Kurve vom Typ (3,3) in $Q \subset \mathbb{P}^3$, $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist vollständiger Durchschnitt einer Kubik mit der Quadrik Q und daher assoziierte Kurve einer singulären kubischen Hyperfläche in \mathbb{P}^4 .

Beweis: Ohne Einschränkung sei $Q = \{x_0x_3 - x_1x_2 = 0\}$. Wähle Koordinaten $(u_0:u_1:v_0:v_1)$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ so, daß $x_0 = u_0v_0$, $x_1 = u_0v_1$, $x_2 = u_1v_0$, $x_3 = u_1v_1$. Eine (eventuell reduzible) Kurve S vom Typ (3,3) in Q wird durch eine bihomogene Gleichung

$$F(u_0, u_1; v_0, v_1) = 0$$

vom Bigrad (3,3) beschrieben. Es existiert ein homogenes Polynom $R(x_0, x_1, x_2, x_3)$ vom Grad 3, so daß

$$R(u_0v_0, u_0v_1, u_1v_0, u_1v_1) = F(u_0, u_1; v_0, v_1).$$

$\{R = 0\}$ beschreibt eine Kubik in \mathbb{P}^3 , deren Durchschnitt mit Q gerade S ist.

$$\{x_4(x_0x_3 - x_1x_2) + R(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

ist eine Kubik in \mathbb{P}^4 mit S als assoziierter Kurve. \square

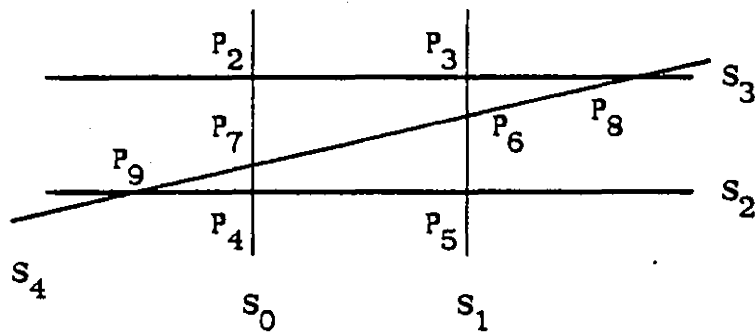
Anhand der verschiedenen nodalen Kurven vom Typ (3,3) in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ist es nun möglich, alle nodalen Kubiken in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ bezüglich der Homologiegruppen ihrer kleinen Auflösungen zu klassifizieren. Man überlege sich, wie eine Kurve vom Typ (3,3) in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in irreduzible Komponenten zerfallen kann und beachte dabei, daß eine irreduzible Komponente vom Typ (a,b) bis zu $(a-1)(b-1)$ gewöhnliche Doppelpunkte haben kann.

Man erhält folgende vollständige Liste:

Defekt	Anzahl der Nodes	davon werden nullhomolog aufgelöst	Anzahl der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen
0	1	1	0
	2	2	0
	3	3	0
	4	4	0
	5	5	0
1	4	0	2
	5	1	0
	6	2	0
	6	0	2
2	6	0	6
	7	1	0
	7	0	6
3	8	0	24
4	9	0	102
5	10	0	332

Die (eindeutig bestimmte) Kubik mit 10 Doppelpunkten wird von Finkelberg in [7] genau untersucht, er berechnet auch die Zahl 332 der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen. Details zu den anderen Kubiken werden in [8] enthalten sein; an dieser Stelle sei als Beispiel der Fall $s = 9$ behandelt.

Gehen wir aus von der Bedingung "d = 4". Dann zerfällt S in zwei Komponenten vom Typ (1,0), zwei vom Typ (0,1) und eine irreduzible (1,1)-Komponente, es muß $s = 9$ sein. Die Komponenten von S und die Singularitäten seien wie folgt bezeichnet:



Die Schnittzahlen der eigentlichen transformierten der Divisoren $\Pi^{-1}S_i$ mit den exceptionellen Kurven auf einer kleinen Auflösung lassen sich in folgender Matrix zusammenfassen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
S_1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
S_2	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	-1
S_3	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	0
S_4	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1

Die Zeilenvektoren dieser Matrix erzeugen $\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{B}$ wird deshalb von den 9-Tupeln

$$e_1 - e_2 - e_5$$

$$e_1 - e_3 - e_4$$

$$e_2 - e_7 - e_8$$

$$e_4 - e_7 - e_9$$

$$e_3 - e_6 - e_8$$

erzeugt. Durch diese werden die linearen Relationen zwischen den exceptionellen Kurven vollständig beschrieben. Die Aufteilung in projektive und nicht-projektive kleine Auflösungen erhält man durch Angabe eines Divisors D mit $D \cdot L_P > 0$ für alle $P \in \mathcal{P}$ bzw. einer effektiven nullhomologen Kurve auf den verschiedenen kleinen Auflösungen \hat{V} . In Kapitel XII wird ein einfacher Beweis dafür gegeben werden, daß genau 102 kleine Auflösungen von V projektiv algebraisch sind.

IX QUARTIKEN IN $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$

Einige der zur Untersuchung von Kubiken entwickelten Methoden lassen sich auch auf spezielle quartische Hyperflächen in \mathbb{P}^4 übertragen.

Eine nodale Quartik in \mathbb{P}^4 läßt sich durch einen Koordinatenwechsel auf die Gestalt

$$V = \{x_4^2 Q + x_4 K + R = 0\}$$

bringen. $Q, K, R \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogen vom Grad 2, 3 bzw. 4. Eine Singularität liegt in $P_1 := (0:0:0:0:1)$, die Fläche $\{Q = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ ist glatt. Wir wollen nun nur Quartiken betrachten, bei denen der mittlere Term verschwindet, das heißt

$$V = \{x_4^2 Q + R = 0\} .$$

Sei $P \in \mathcal{S} - \{P_1\}$. Es gibt zwei mögliche Fälle:

1. $x_4(P) = 0$. Dann ist $Q(P) \neq 0$, $R(P) = 0$ und $\partial_i R(P) = 0$ für alle $i = 0, \dots, 3$. ($\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$)
2. $x_4(P) \neq 0$. Wegen $\partial_4 V = 2x_4 Q$ ist $Q(P) = 0$, $R(P) = 0$ und $x_4 \partial_i Q + \partial_i R(P) = 0$ für alle $i = 0, \dots, 3$.

Die Kurve $S := \{Q = 0\} \cap \{R = 0\}$ heiße wieder assoziierte Kurve, und Π bezeichne wieder die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^4 - \{P_1\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ (x_0 : \dots : x_4) & \longrightarrow & (x_0 : \dots : x_3) \end{array}$$

S hat im Punkt $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ eine Singularität genau dann, wenn ein Paar $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ mit

$$\lambda \partial_i Q(\alpha) + \mu \partial_i R(\alpha) = 0$$

für $i = 0, \dots, 3$ existiert.

In unserem Fall muß sogar $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ gelten!

Falls $\mu = 0$, so wäre $\partial_i Q(\alpha) = 0$ für $i = 0, \dots, 3$, also Q singularär in α . Widerspruch!

Falls $\lambda = 0$, wäre $\partial_i R(\alpha) = 0$ für $i = 0, \dots, 3$, also R in α singularär. Der Punkt $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : 0)$ liegt auf V , alle partiellen Ableitungen verschwinden. Der Punkt $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : 0)$ wäre eine Singularität von V mit $x_4 = 0$ und $Q = 0$. Widerspruch!

So gibt es zu jedem $\alpha \in S_{\text{sing}}$ ein $\lambda \neq 0$ mit

$$\lambda \partial_i Q(\alpha) + \partial_i R(\alpha) = 0$$

für alle $i = 0, \dots, 3$. Die Gleichung

$$x_4^2 = \lambda$$

hat zwei Lösungen. Die beiden Punkte $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4)$ mit $\alpha_4^2 = \lambda$ gehören zu V , da $\Pi^{-1}S \subset V$. Damit liegen über $\alpha \in S_{\text{sing}}$ genau zwei Singularitäten von V .

Leider werden umgekehrt die Nodes mit $x_4(P) = 0$ unter Π nicht auf S abgebildet, sondern nur diejenigen mit $x_4(P) \neq 0$. Für einen solchen Punkt ist $\Pi(P) \in S_{\text{sing}}$.

Da die Singularitäten von V mit $x_4(P) = 0$ eineindeutig den Singularitäten von R entsprechen, gilt:

$$s = 1 + 2\#S_{\text{sing}} + \#R_{\text{sing}}$$

Welche Informationen enthält die assoziierte Kurve über die Singularitäten von V und ihre auflösenden Kurven?

Über die Singularitäten mit $Q \neq 0$ kann überhaupt nichts ausgesagt werden; hier muß man versuchen, von einem anderen Punkt aus zu projizieren. Auch über die $P \in \mathcal{S} - \{P_1\}$, $\Pi(P)$ singulärer Punkt einer irreduziblen Komponente von S , läßt sich nichts sagen, da die Kegel über den irreduziblen Komponenten von S im allgemeinen nicht ganz $H_4(V, \mathbb{Z})$ erzeugen.

Sei nun $P \in \mathcal{S} - \{P_1\}$, $\Pi(P)$ sei Schnittpunkt zweier lokal glatter Komponenten von S . Dann geht ein lokal glatter Divisor auf V durch P , also ist L_P nicht nullhomolog auf \hat{V} .

Vollständige Informationen erhält man im allgemeinen nur über P_1 : Die auflösende Kurve ist auf \hat{V} genau dann nicht nullhomolog, wenn mindestens eine Komponente von S vom Typ (a, b) mit $a \neq b$ ist.

Die assoziierte Kurve S ist in $\{Q = 0\}$ vom Typ $(4, 4)$.

Als Beispiel soll eine Quartik mit 45 Doppelpunkten - der Maximalzahl von Nodes - untersucht werden. Sei

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^5 x_i = 0, \sigma_4(x_0, \dots, x_5) = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^5.$$

σ_i bezeichne die i -te elementarsymmetrische Funktion. Diese Varietät wurde von Todd in [38] ausführlich behandelt. Die Singularitätenmenge \mathcal{S} ist der Orbit der beiden Punkte $(1:-1:0:0:0:0)$ und $(1:1:\epsilon:\epsilon:e^2:e^2) - \epsilon := e^{2\pi i/3}$ - unter der Gruppe S_6 , die durch Permutation der Koordinaten auf \mathbb{P}^5 operiert. Als P_1 werde der Punkt $(0:0:0:0:1:-1)$ ausgewählt, ein Koordinatenwechsel

$$y_4 := (x_4 - x_5)/2$$

$$y_5 := (x_4 + x_5)/2$$

$$y_i := x_i, \quad i \neq 4,5$$

bringt die Quartik auf die Gestalt

$$2y_5 + \sigma_1 = 0 \quad \text{und} \quad (y_5^2 - y_4^2)\sigma_2 + 2y_5\sigma_3 + \sigma_4 = 0.$$

hier sei $\sigma_i = \sigma_i(y_0, y_1, y_2, y_3)$. In \mathbb{P}^4 mit homogenen Koordinaten $(y_0:y_1:y_2:y_3:y_4)$ erhalten wir

$$V = \{y_4^2\sigma_2 + (\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4 + \sigma_1^2\sigma_2/4) = 0\}.$$

Es ist $P_1 = (0:0:0:0:1)$, $Q = \sigma_2$.

Die Singularitäten lassen sich folgendermaßen in Klassen einteilen:

Typ	x-Koordinaten in \mathbb{P}^5	y-Koordinaten in \mathbb{P}^4	Q	Anzahl
0	(0:0:0:0:1:-1)	(0:0:0:0:1)	0	1
1	(.....:1:0)	(.....:1/2)	0	4
2	(.....:0:1)	(.....:-1/2)	0	4
3	(.....:0:0)	(.....:0)	-1	6
4	(.....:1:1)	(.....:0)	3	6
5	(.....:1:e)	(.....:a)	0	12
6	(.....:1:e ²)	(.....:b)	0	12

Dabei sei $a := (1-e)/2$ und $b := (1-e^2)/2$, die Werte der Koordinaten sind laut obiger Beschreibung von \mathcal{Y} zu ergänzen. In $\{Q = 0\}$ wird die assoziierte Kurve S durch die Gleichung

$$\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

gegeben. Über S liegen 32 Nodes, also ist $\#S_{\text{sing}} = 16$. Daher zerfällt S in 8 Geraden. Somit werden alle Singularitäten vom Typ 0,1,2,5 und 6 durch nicht-nullhomologe Kurven aufgelöst. Dies muß auch für die Nodes vom Typ 3 und 4 gelten, da sich diese durch Koordinatenpermutationen in Singularitäten der anderen Typen überführen lassen. Somit existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Das Prinzip der assoziierten Kurve läßt sich folgendermaßen weiter verallgemeinern: Betrachte die Hyperfläche

$$V = \{x_4^{n-2}Q + R = 0\}$$

vom Grad n in \mathbb{P}^4 ; wir setzen voraus, daß $\{Q(x_0, \dots, x_3) = 0\}$ und $\{R(x_0, \dots, x_3) = 0\}$ glatte Flächen in \mathbb{P}^3 vom Grad 2 bzw. n sind. Die Kurve

$$S := \{Q = 0\} \cap \{R = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

ist in Q vom Typ (n, n) , sie zerfalle in $d'+1$ irreduzible Komponenten S_0 bis S_d . S_{sing} bestehe nur aus gewöhnlichen Doppelpunkten. Die Abbildung Π sei wie oben definiert, $P_1 := (0:0:0:0:1) \in \mathcal{S}$. Die Abbildung Π kann wieder auf V eingeschränkt und dann auf $V(P_1)$ fortgesetzt werden.

Unter Benutzung der Voraussetzung, daß R glatt ist, beweist man analog zum Fall $n = 4$:

Alle von P_1 verschiedenen Singularitäten von V werden unter der Abbildung Π auf Singularitäten von S abgebildet; über jeder Singularität von S liegen genau $(n-2)$ Singularitäten von V . Wenn S nur gewöhnliche Doppelpunkte hat, so auch V - es existiert ein $\lambda \neq 0$ mit

$$\lambda \partial_i Q + \partial_i R = 0$$

für alle $i = 0, \dots, 3$; man löse die Gleichung

$$x_4^{n-2} = \lambda.$$

Damit ist $s = 1 + (n-2)\#S_{\text{sing}}$.

Die Kegel $\Pi^{-1}(S_i)$ über den Komponenten von S sind Divisoren auf V ; ein Punkt $P \in \mathcal{S}$, dessen Bild unter der Abbildung Π Schnitt zweier (lokal glatter) Komponenten von S ist, wird auf \hat{V} durch eine Kurve aufgelöst, die in $H_2(\hat{V}, \mathbb{Q})$ nicht nullhomolog ist. P_1 wird genau dann durch eine nullhomologe Kurve aufgelöst, wenn keine Komponente S_i der assoziierten Kurve S vom Typ (a, b) mit $a \neq b$ ist.

Für den Defekt gilt:

$$d \geq d' .$$

Vermutung: $H_4(V, \mathbb{Q})$ wird von den Divisoren $\Pi^{-1}S_i$ erzeugt.

Diese Vermutung ist für $n = 3$ bewiesen. Im allgemeinen Fall fehlt jedoch bisher ein Beweis, daß kein Divisor existiert, der glatt durch gewisse Singularitäten geht und unter Π nicht auf S abgebildet wird.

Als Folgerungen ergäben sich:

1. Ein Punkt $P \in \mathcal{S} - \{P_1\}$, so daß $\Pi(P)$ Singularität einer irreduziblen Komponente der assoziierten Kurve ist, wird beim Übergang zu einer kleinen Auflösung \hat{V} durch eine nullhomologe Kurve ersetzt.
2. Es ist $d = d'$.

Aber auch ohne einen Beweis dieser Vermutung sind die folgenden charakteristischen Beispiele interessant; es werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt. Singularitätenzahlen, Defekte und nullhomologe Kurven zu kombinieren.

Beispiel 1:

Die assoziierte Kurve S zerfalle in zwei glatte Komponenten vom Typ $(1,0)$ und $(n-1,n)$. Es ist

$$s = 1 + (n-2)n = (n-1)^2 \quad \text{und} \\ d' = 1 .$$

Keine Singularität wird nullhomolog aufgelöst.

Wie man sieht, reichen schon $(n-1)^2$ Nodes in sehr spezieller Lage aus, um einen positiven Defekt und projektiv algebraische kleine Auflösungen zu erhalten. Alle Doppelpunkte liegen in einer Ebene, die ganz in V liegt. Aufblasen dieses Divisors führt zu einer projektiv algebraischen kleinen Auflösung.

Dieses Beispiel wird uns im nächsten Kapitel wieder begegnen, dabei wird sich zeigen: in der Tat ist der Defekt $d = 1$.

Die $(n-1,n)$ -Komponente von S kann noch bis zu $(n-2)(n-1)$ Singularitäten besitzen, die zugehörigen $(n-2)^2(n-1)$ Nodes von V werden vermutlich nullhomolog aufgelöst.

Beispiel 2:

Die assoziierte Kurve S zerfalle in zwei glatte Komponenten vom Typ $(1,n-1)$ und $(n-1,1)$. Wir haben

$$s = 1 + (n-2)[(n-1)^2+1] = (n-1)[n^2-3n+3] \quad \text{und} \\ d' = 1 .$$

Keine Singularität wird nullhomolog aufgelöst, es gibt projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Wieder ist d' konstant, die Anzahl der Singularitäten ist jedoch höher als im ersten Fall.

Beispiel 3:

Die Kurve S zerfalle in n Komponenten vom Typ $(1,0)$ und n vom Typ $(0,1)$.

Dann gilt

$$s = 1 + (n-2)n^2 = (n-1)[n^2 - n - 1] \quad \text{und}$$

$$d' = 2n - 1 .$$

Wieder existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Beispiel 4:

Nun zerfalle S in $(n-1)$ Komponenten vom Typ $(1,0)$ und eine vom Typ $(1,n)$. Es ist

$$s = 1 + (n-2)(n-1)n \quad \text{und}$$

$$d' = n - 1 .$$

Die Kegel über den $(1,0)$ -Komponenten sind glatte Divisoren auf V . Jede Singularität liegt auf einem solchen Divisor. Also existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Beide Beispiele zeigen, daß der Defekt mit wachsendem n ebenfalls unbeschränkt sein kann, ohne daß s wie bei den Čmutov-Hyperflächen asymptotisch wie n^4 wachsen muß.

Beispiel 5:

Jetzt zerfalle S in $(n-2)$ Komponenten vom Typ $(1,0)$ und eine $(2,n)$ -Komponente. Wir haben

$$s = 1 + (n-2)^2 n \quad \text{und}$$

$$d' = n-2 .$$

Wie im vorhergehenden Fall geht durch jede Singularität ein glatter Divisor, es existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Es ist jedoch möglich, daß die $(2,n)$ -Komponente der assoziierten Kurve noch bis zu $(n-1)$ Selbstschnittpunkte und damit V bis zu $(n-1)(n-2)$ weitere Singularitäten besitzt. Vermutlich werden diese nullhomolog aufgelöst.

Beispiel 6:

Diesmal zerfalle S in eine $(1,1)$ -Komponente und eine $(n-1,n-1)$ -Komponente. Es ist

$$s = 1 + 2(n-2)(n-1) \quad \text{und}$$

$$d' = 1 .$$

Der Punkt P_1 wird immer nullhomolog aufgelöst, trotz positiven Defektes gibt es keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen.

Das gilt auch für

Beispiel 7:

Die assoziierte Kurve S bestehe aus n Komponenten vom Typ $(1,1)$. Es ist

$$s = 1 + (n-2)(n-1)n \quad \text{und}$$

$$d' = n-1 .$$

In diesem Beispiel ist zusätzlich noch der Defekt unbeschränkt. Trotzdem existieren keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen, da P_1 nullhomolog aufgelöst wird.

Unter Voraussetzung der Vermutung ist es sogar möglich, Fälle zu konstruieren, bei denen sowohl der Defekt als auch die Zahl der nullhomologen Kurven unbeschränkt ist:

Die Kurve S bestehe aus $(n-m)$ Kurven vom Typ $(1,1)$ und einer (m,m) -Kurve mit $(m-1)^2$ Selbstschnittpunkten, $m := \lfloor n/2 \rfloor$.

Wie das Beispiel der Čmutov-Hyperflächen zeigt, kann der Defekt sogar asymptotisch wie $n^2/2$ anwachsen. In Kapitel XII werden auf anderem Wege Beispiele mit $d \geq (n-1)^2$ konstruiert.

X WEITERE BEISPIELE

Die maximale Zahl $\mu_4(5)$ von gewöhnlichen Doppelpunkten einer Quintik in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ ist noch unbekannt, bis heute hat man nur die Abschätzung

$$126 \leq \mu_4(5) \leq 135 .$$

Schoen [32] und Hirzebruch [15] konstruieren Beispiele von Quintiken mit vielen Nodes, die hier kurz vorgestellt werden sollen.

Schoens Quintik

$$\left\{ \sum_{i=0}^4 x_i^5 - 5 \prod_{i=0}^4 x_i = 0 \right\}$$

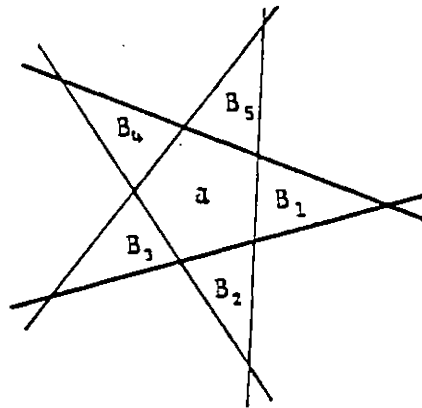
hat 125 Nodes, nämlich den Orbit des Punktes $(1:1:1:1:1)$ unter der Operation der von den Koordinatentransformationen

$$(x_0 : \dots : x_4) \longrightarrow (x_0 : x_1 \zeta_5^{a_1} : \dots : x_4 \zeta_5^{a_4})$$

mit $\sum_{i=1}^4 a_i \equiv 0(5)$ und $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$ erzeugten Gruppe. Diese Gruppe operiert transitiv auf \mathcal{Y} . Schoen berechnet den Defekt als $d = 24$, es gibt projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Hirzebruchs Quintik hat 126 Nodes. Zu ihrer Konstruktion betrachte die Kurve $\{f(x,y) = 0\}$ in der affinen (x,y) -Ebene, gegeben durch das

Produkt $f = \prod_{i=1}^5 f_i$ der 5 Geraden eines regelmäßigen Fünfecks:



Als Funktion zweier reeller Variabler hat f im Mittelpunkt des Fünfecks sowie in je einem inneren Punkt b_j des Dreiecks B_j relative Extrema. So verschwinden beide partiellen Ableitungen in diesen 6 Punkten und in den 10 Schnittpunkten der Geraden. Aus Symmetriegründen ist $f(b_i) = f(b_j)$ für alle i und j . Durch die Gleichung

$$f(u,v) - f(z,w) = 0$$

wird eine Quintik in \mathbb{C}^4 und nach Homogenisierung auch in \mathbb{P}^4 mit 126 gewöhnlichen Doppelpunkten gegeben. Sei $P \in \mathcal{Y}$ eine der 100 Nodes, deren Koordinaten sich als Schnittpunkte je zweier Geraden ergeben. Mindestens eine der meromorphen Funktionen

$$\frac{f_i(u,v)}{f_j(z,w)}$$

hat in P eine Unbestimmtheitsstelle.

Die Divisoren

$$\{z = \xi_5^i u, w = \xi_5^i v\}.$$

($i = 0, \dots, 4$) auf V sind glatt und enthalten die restlichen 26 Nodes. Also wird keine Singularität nullhomolog aufgelöst; es existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen, wie Schoen zuerst feststellte.

Wechseln wir wieder zu den Double Solids mit Verzweigungsflächen mit vielen Nodes. Leider ist mir keine explizite Formel für die Sextik in \mathbb{P}^3 mit $s = 66$ und die Kreiss-Oktik mit 160 Doppelpunkten bekannt. So kann man allgemein nur feststellen: In beiden Fällen ist $2s > \beta_3(V_t)$, also $d > 0$.

Betrachten wir statt dessen Beispiele von Quartiken, die schon von Kummer in [22] untersucht wurden. Sei $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ eine glatte Quadrik, die von den Kanten des Tetraeders $\{x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\}$ in 12 verschiedenen Punkten geschnitten wird. Dann hat die Quartik

$$B = \{x_0 x_1 x_2 x_3 + F^2 = 0\}$$

mindestens diese 12 Punkte als Nodes. Die Gleichung des dazugehörigen Double Solids läßt sich als

$$\omega^2 - F^2 = x_0 x_1 x_2 x_3$$

schreiben. Sukzessives Aufblasen der Divisoren $\{\omega - F = 0, x_i = 0\}$, $i = 0, 1, 2$, liefert eine partielle Auflösung mit $\beta_2(\tilde{V}) \geq 4$, die 12 genannten Singularitäten werden aufgelöst.

Falls keine weiteren Nodes auftreten - das heißt $s = 12$ - so ist $d = 3$ und obige partielle Auflösung schon eine projektiv algebraische kleine Auflösung. Zwischen den exzeptionellen Kurven bestehen folgende Relationen:

Die beiden Schnittpunkte einer Tetraederkante $\{x_i = 0, x_j = 0\}$, $i \neq j$, mit der Quadrik werden jeweils homolog aufgelöst, L_{ij} bezeichne einen Repräsentanten der Homologiekategorie der auflösenden Kurven. Zwischen den 6 Kurven L_{ij} bestehen in $H_2(\hat{V}, \mathbb{Z})$ noch 3 weitere Relationen:

$$L_{01} - L_{02} + L_{12} \approx 0$$

$$L_{02} - L_{03} + L_{23} \approx 0$$

$$L_{01} - L_{03} + L_{13} \approx 0 .$$

Es gibt genau 24 projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Wählt man speziell

$$F = 1/4 \sum_{i=0}^3 x_i^2 .$$

so hat B insgesamt 16 Singularitäten, es ist $d = 6$. Die 4 neuen Singularitäten sind $(1:1:1:1) - 2\sigma_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Es gibt weitere glatte Divisoren, die auch diese neuen Singularitäten enthalten; schreibe die Gleichung der Verzweigungsfläche zum Beispiel als

$$-2(F - x_0 x_1)^2 = x_0 x_1 (x_0 - x_1 + ix_2 + ix_3) (x_0 - x_1 - ix_2 - ix_3) .$$

Es gibt projektiv algebraische kleine Auflösungen, die Beziehungen zwischen den exzeptionellen Kurven sind komplizierter als im Fall $s = 12$. Interessant ist, daß mit Hilfe der neuen Divisoren die Punkte $\{x_i = 0, x_j = 0\} \cap \{F = 0\}$, $i \neq j$, getrennt werden können; die auflösenden Kurven sind nicht mehr homolog.

Im Fall $s = 13$ ist weiterhin $d = 3$, da die neue Singularität nicht auf der Quadrik $\{F = 0\}$ liegt. Die oben beschriebene partielle Auflösung hat $\beta_2(\check{V}) = 4$, also wird der 13. Doppelpunkt nullhomolog aufgelöst. Es gibt keine projektiv algebraischen kleinen Auflösungen. Ein solches Beispiel spielt bei Poon [30] eine wichtige Rolle.

Mit

$$F = 1/4 \sum_{i=0}^3 x_i^2 + x_0 x_1$$

erreicht man $s = 14$ und $d = 4$. Die neuen Singularitäten liegen bei $(1:-1:1:-1)$ und $(1:-1:-1:1)$. Schreibe die Gleichung des Double Solids als

$$\omega^2 - (F - x_0 x_1)^2 = x_0 x_1 (x_0 + x_1 + i x_2 + i x_3) (x_0 + x_1 - i x_2 - i x_3) / 2 .$$

Der Divisor

$$\{\omega = F - x_0 x_1, x_0 + x_1 = i(x_2 + x_3)\} \subset V .$$

geht glatt durch die neuen Singularitäten, die daher nicht nullhomolog aufgelöst werden. Es existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen. Es ist zu erwähnen, daß die Punkte $\{x_i = 0, x_j = 0\} \cap \{F = 0\}$ für $(i, j) \in \{(0, 1), (2, 3)\}$ weiterhin homolog aufgelöst werden, ebenso die beiden neuen Singularitäten; alle anderen können durch glatte Divisoren auf V getrennt werden.

Diese Beispiele lassen sich weiter verallgemeinern, indem man die Koordinatenfunktionen x_0, \dots, x_3 durch 4 beliebige Linearformen t_0, \dots, t_3 ersetzt, die zu je 3 linear unabhängig sind. Von dieser Art sind zwei der Cmutov-Quartiken, die uns in Kapitel VII begegnet sind.

Nach Kummer [20] läßt sich jede Quartik in \mathbb{P}^3 mit 16 gewöhnlichen Doppelpunkten als

$$B = \{\phi^2 = 16K x_0 x_1 x_2 x_3\}$$

mit $\phi = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a(x_0 x_1 + x_2 x_3) + 2b(x_0 x_2 + x_1 x_3) + 2c(x_0 x_3 + x_1 x_2)$ und $K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1$ darstellen, a , b und c sind Parameter.

Die Ebenen $\{x_i = 0\}$ enthalten je 6 Nodes, sie liegen auf dem Kegelschnitt, den die Quadrik $\{\phi = 0\}$ aus der Ebene ausschneidet.

Allgemein gibt es 16 dieser singulären Tangentialebenen, je 6 gehen durch eine Singularität der Kummer-Fläche, auf jeder liegen 6 singuläre Punkte.

Seien $\{p = 0\}$ und $\{q = 0\}$ die Gleichungen zweier beliebiger dieser Tangentialebenen. Dann existieren homogene Polynome $\phi, \psi \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ vom Grad 2, so daß

$$B = \{\phi^2 = pq\psi\} .$$

Falls B eine Kummer-Fläche mit 16 Nodes ist, zerfällt ψ bei geeigneter Wahl von ϕ in zwei Linearfaktoren, die wiederum zwei der singulären Tangentialebenen beschreiben.

Sei nun $B = \{F = 0\}$ eine Kummer-Fläche mit 16 gewöhnlichen Doppelpunkten, das definierende Polynom F sei fest gewählt. Sei weiterhin $P_1 \in \mathcal{S}$ und seien $\{q_i = 0\}$ ($i = 1, \dots, 6$) die singulären Tangentialebenen durch P_1 . Dann gibt es lineare Polynome r_{ij} und s_{ij} sowie (bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte) homogene Polynome ϕ_{ij} vom Grad 2, so daß

$$F = \phi_{ij}^2 + q_i q_j r_{ij} s_{ij} .$$

Das Double Solid V wird durch die Gleichung

$$\omega^2 - \phi_{ij}^2 = q_i q_j r_{ij} s_{ij}$$

gegeben. Für alle $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$ ist $\phi_{ij}^2 - \phi_{ik}^2$ durch q_i teilbar, also

$$\phi_{ij} = \pm \phi_{ik} + q_i \psi_i .$$

Setzt man nun

$$D_i := \{q_i = 0, \omega - \phi_{ij} = 0\} ,$$

so ist diese Definition unabhängig von j . Die Divisoren D_i auf V sind wohldefiniert, ihre Homologieklassen in $H_4(V, \mathbb{Z})$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Je zwei der Divisoren D_i und D_j ($i \neq j$) haben zwei Singularitäten gemeinsam; eine ist P_1 , die andere heiße P_{ij} . Aufblasen der Divisoren

$$\{\omega - \phi_{ij} = 0, q_i = 0\} \quad \text{und} \quad \{\omega - \phi_{ij} = 0, q_j = 0\}$$

liefert partielle Auflösungen, die sowohl P_1 als auch P_{ij} verschieden auflösen.

Somit gilt für die Schnittzahlen der eigentlichen Transformierten von D_i und D_j mit den exceptionellen Kurven L_1 und L_{ij} auf einer kleinen Auflösung:

$$\hat{D}_i \cdot L_1 = \hat{D}_i \cdot L_{ij} \Leftrightarrow \hat{D}_j \cdot L_1 = \hat{D}_j \cdot L_{ij} .$$

Auf einer speziellen kleinen Auflösung und bezüglich einer speziellen Wahl der Divisoren D_i werden die Schnittzahlen durch folgende Tabelle gegeben:

	L_1	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{23}	L_{24}	L_{25}	L_{26}	L_{34}	L_{35}	L_{36}	L_{45}	L_{46}	L_{56}
D_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_2	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
D_3	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
D_4	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	0
D_5	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	1
D_6	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	-1

Folgerungen:

1. Der Rang der Matrix ist 6; da auch der Defekt gleich 6 ist, bilden die Divisoren D_i zusammen mit dem Bild einer Erzeugenden von $H_4(V_t, \mathbb{Z})$ eine Basis von $H_4(V, \mathbb{Z})$.
2. Es gibt projektiv algebraische kleine Auflösungen; die genaue Zahl ließe sich mit Hilfe obiger Tabelle ermitteln.
3. Für alle Double Solids mit $\text{deg } B = 4$ und $s = 16$ ist die Anzahl der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen gleich.

Bis jetzt haben wir uns hauptsächlich mit Varietäten mit vielen Singularitäten und ihren kleinen Auflösungen beschäftigt. Nun stellen wir uns die Frage:

Wie viele Nodes muß eine Hyperfläche in \mathbb{P}^4 bzw. ein Double Solid mindestens haben, damit eine projektiv algebraische kleine Auflösung existiert?

Betrachte

$$V = \{x_3 Q_1 + x_4 Q_2 = 0\}$$

mit $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]$ homogen vom Grad $(n-1)$ so, daß V nur in $\{x_3 = 0, x_4 = 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0\}$ gewöhnliche Doppelpunkte besitzt. Die Kurven $Q_i(x_0 : x_1 : x_2 : 0 : 0)$ schneiden sich in der Ebene $\{x_3 = 0, x_4 = 0\}$ transversal in $(n-1)^2$ Punkten, also ist $s = (n-1)^2$. Aufblasen der Ebene $\{x_3 = 0, x_4 = 0\}$ liefert eine projektive kleine Auflösung.

Behauptung: Für alle $n \geq 2$ ist der Defekt gleich 1.

Beweis: Den Fall $n = 2, s = 1$ und $d = 1$ haben wir schon in Kapitel IV behandelt. Sei nun $n \geq 3$. Betrachte die homogenen Polynome f vom Grade $(2n-5)$ in \mathbb{P}^4 .

$$f = f_1(x_0, x_1, x_2) + x_3 g + x_4 h.$$

Die Polynome, die durch x_3 oder x_4 teilbar sind, verschwinden auf \mathcal{G} . Die Polynome vom Grad $(2n-5)$ im \mathbb{P}^2 mit homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ bilden einen Raum der Dimension $\binom{2n-3}{2} = 2n^2 - 7n + 6$.

Nach dem Noetherschen Fundamentalsatz ([10], S.120) gilt für jedes $f_1(x_0, x_1, x_2)$ vom Grad $(2n-5)$ mit $f_1|_{\mathcal{C}} \equiv 0$:

$$f_1 = AQ_1(x_0, x_1, x_2, 0, 0) + BQ_2(x_0, x_1, x_2, 0, 0)$$

mit geeigneten $A, B \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogen vom Grad $(n-4)$. Damit ist die Dimension des Raumes dieser Polynome f_1 gleich $2 \binom{n-2}{2} = n^2 - 5n + 6$. Für den Defekt ergibt sich

$$d = n^2 - 2n + 1 + n^2 - 5n + 6 - (2n^2 - 7n + 6) = 1,$$

und die Behauptung ist allgemein bewiesen. Es gibt genau zwei projektiv algebraische kleine Auflösungen. \square

Jede Hyperfläche in \mathbb{P}^4 vom Grad n mit $(n-1)^2$ Nodes, die in einer Ebene liegen, läßt sich auf die oben beschriebene Gestalt bringen.

Vermutung: Falls $\deg V = n$ und $s < (n-1)^2$, so ist immer $d = 0$.

Analoge Überlegungen lassen sich auch für Double Solids anstellen. Sei

$$B = \{x_3Q_1 + Q_2^2\} \subset \mathbb{P}^3$$

mit $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogen vom Grad $(n-1)$ bzw. $n/2$ so, daß B nur in $\{x_3=0, Q_1=0, Q_2=0\}$ gewöhnliche Doppelpunkte hat. Die Kurven $Q_1(x_0, x_1, x_2, 0)$ schneiden sich in der Ebene $\{x_3=0\}$ transversal in $(n-1)n/2$ Punkten.

also hat das Double Solid

$$\omega^2 - Q_2^2 = x_3 Q_1$$

genau $(n-1)n/2$ Nodes. Wie im vorhergehenden Beispiel zeigt man, daß V für alle $n \geq 2$ den Defekt 1 hat.

Vermutung: Sei B vom Grad n Verzweigungsfläche eines Double Solids mit $s < (n-1)n/2$. Dann ist immer $d = 0$.

XI VERALLGEMEINERUNGEN

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit soll versucht werden, einige der bisherigen Ergebnisse zu verallgemeinern. Das ist zum einen so zu verstehen, daß nicht nur Double Solids und Hyperflächen in \mathbb{P}^4 , sondern allgemein projektive Threefolds mit isolierten Singularitäten untersucht werden. Zum anderen werden nicht mehr nur gewöhnliche Doppelpunkte, sondern auch höhere Singularitäten zugelassen.

Beginnen wir gleich mit dem allgemeinsten Fall.

Sei V eine projektive Threefold mit nur isolierten Singularitäten. Alle Singularitäten sind erlaubt, die eine kleine Auflösung (das heißt: durch eine Kurve) zulassen. \mathcal{S} bezeichne wieder die Menge der Singularitäten, für $P \in \mathcal{S}$ seien L_P^i die verschiedenen irreduziblen Kurven einer kleinen Auflösung von P ; der Index i läuft von 1 bis s_P . Wieder ist es möglich, die projektiv algebraischen kleinen Auflösungen zu charakterisieren.

Satz: Für eine kleine Auflösung \hat{V} sind folgende Aussagen äquivalent:

1. \hat{V} ist projektiv algebraisch.
2. Es existiert ein Divisor D auf \hat{V} mit

$$D \cdot L_P^i > 0$$

für alle $i = 1, \dots, s_P$ und alle $P \in \mathcal{S}$.

3. Zwischen den irreduziblen exceptionellen Kurven besteht keine

nichttriviale Relation

$$\sum_{P \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^{s_P} \beta_P^i L_P^i \approx 0,$$

so daß $\beta_P^i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, s_P$ und alle $P \in \mathcal{Y}$.

Beweis: Die Implikationen "1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3" sind klar. Auch der auf den Ergebnissen Peternells beruhende Beweis der Richtung "3 \Rightarrow 1" läßt sich wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen.

Um auch den Alternativbeweis zumindest in speziellen Fällen übernehmen zu können, sind einige Vorüberlegungen notwendig.

Definiere

$$s := \sum_{P \in \mathcal{Y}} s_P$$

und \mathfrak{S} als den \mathbb{Q} -Vektorraum, der durch die s -Tupel $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ der Koeffizienten der linearen Relationen zwischen den irreduziblen exceptionellen Kurven L_i erzeugt wird. Beachte, daß wir hier die exceptionellen Kurven einfach durchnummerieren ohne darauf zu achten, welche Kurve welchen singulären Punkt auflöst. Der \mathbb{Q} -Vektorraum \mathfrak{A} werde von den s -Tupeln $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ der Schnittzahlen der irreduziblen exceptionellen Kurven mit den Divisoren auf \hat{V} erzeugt. Es ist klar, daß in \mathbb{Q}^s \mathfrak{A} und \mathfrak{S} wieder aufeinander senkrecht stehen. Nicht so klar ist, wie sich \mathfrak{A} und \mathfrak{S} bei Änderung der kleinen Auflösung \hat{V} verhalten.

Auch einen Defekt $d := \beta_4(V) - \beta_2(V)$ kann man definieren, es ist

$$\begin{aligned}\beta_4(\hat{V}) &= \beta_4(V) \quad \text{und} \\ \beta_2(\hat{V}) &= \beta_2(V) + d .\end{aligned}$$

Der Vektorraum \mathfrak{B} hat die Dimension $(s-d)$.

Falls $P \in \mathcal{P}$ vom Typ $(2,2,n+1,n+1)$ ist - das bedeutet, daß V in einer Umgebung von P in affinen Koordinaten durch

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^{n+1} + z_4^{n+1} = 0$$

gegeben ist - kann man wieder zu einer Deformation V_t übergehen, die lokal durch eine Gleichung

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^{n+1} + z_4^{n+1} = t$$

beschrieben wird. Es gilt:

$$\beta_4(V_t) = \beta_2(V_t) = \beta_2(V) = \beta_4(V) - d .$$

Damit ist die Dimension von \mathfrak{A} gleich d , wir haben $\mathbb{Q}^s = \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$.

Zwischen den verschwindenden Zykeln auf V_t bestehen d Relationen, die durch \mathfrak{A} beschrieben werden.

Beachte: Von den n^2 verschwindenden Zykeln sind nur jeweils n an globalen Relationen beteiligt. Eine genaue Beschreibung dieser Beziehungen würde an dieser Stelle zu weit führen.

Unter Benutzung dieser Überlegungen ist es möglich, zumindest im Fall von Singularitäten des Typs $(2,2,n+1,n+1)$ auch den Alternativbeweis zu übertragen. \square

Im Fall gewöhnlicher Doppelpunkte bedeutet ein Wechsel der kleinen Auflösung weiterhin einen Wechsel der Vorzeichen in den Relationen zwischen den exceptionellen Kurven. Damit gilt der

Satz: Sei V eine nodale projektive Threefold. Eine projektiv algebraische kleine Auflösung existiert genau dann, wenn alle irreduziblen exceptionellen Kurven auf \hat{V} nicht nullhomolog sind.

Erste neue Beispiele sind vollständige Durchschnitte zweier Quadriken in \mathbb{P}^5 .

Poon untersucht in [29] die dreidimensionale Varietät

$$\{ 2(z_0^2+z_1^2) + \lambda z_2^2 + 3/2 z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \sum_{i=0}^5 z_i^2 = 0 \} \subset \mathbb{P}^5.$$

$2\lambda > 3/2$, mit 4 Nodes bei $(1:\pm i:0:0:0:0)$ und $(0:0:0:0:1:\pm i)$.

Poon fand heraus:

Der Defekt ist gleich 2, die beiden Punktepaare werden (modulo Vorzeichen) jeweils homolog aufgelöst. Also gibt es 4 projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Im Fall $\lambda = 3/2$ ist $s = 6$, weitere Singularitäten sind $(0:0:1:\pm i:0:0)$. Durch

$$\{ z_0 + iz_1 = 0, z_2 + iz_3 = 0, z_4 + iz_5 = 0 \}$$

wird ein glatter Divisor auf V gegeben, der die Punkte $(1:t:0:0:0:0)$, $(0:0:1:i:0:0)$ und $(0:0:0:0:1:i)$ enthält. Analog geht der Divisor

$$\{ z_0 - iz_1 = 0, z_2 + iz_3 = 0, z_4 + iz_5 = 0 \}$$

durch $(1:-1:0:0:0:0)$, $(0:0:1:1:0:0)$ und $(0:0:0:0:1:1)$ usw.

Der Defekt ist gleich 4, das Schnittverhalten der Divisoren mit den Kurven L_p wird auf einer speziellen kleinen Auflösung durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Der Vektorraum \mathfrak{S} wird durch die Vektoren $(1,-1,-1,1,0,0)$ und $(1,-1,0,0,-1,1)$ erzeugt. Von den 64 kleinen Auflösungen sind genau 46 projektiv algebraisch.

Diese Beispiele legen die Vermutung nahe, daß bei vollständigen Durchschnitten in höherdimensionalen projektiven Räumen der Defekt und damit auch die Anzahl der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen \hat{V} im Vergleich zur Anzahl der Nodes höher ist als bei Hyperflächen in \mathbb{P}^4 . Eine allgemeine Formel zur Berechnung des Defektes fehlt bisher allerdings.

Beschäftigen wir uns nun mit höheren Singularitäten.

Sei V eine singuläre Threefold. $P \in \mathcal{Y}$ werde in lokalen affinen Koordinaten durch eine Gleichung

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^{n+1} + z_4^{n+1} = 0$$

gegeben.

Ein geeigneter Koordinatenwechsel bringt diese Gleichung in die Form

$$z_1 z_2 = \prod_{j=0}^n (z_3 + \xi_{n+1}^j z_4)$$

mit $\xi_{n+1} := e^{2\pi i/(n+1)}$. Setze $f_j := z_3 + \xi_{n+1}^j z_4$. Durch $\{f_j = 0\}$ bzw. $\{z_1 = 0\}$ werden lokale Cartier-Divisoren beschrieben, die in Weil-Divisoren zerfallen. Nach Brieskorn [2] wird eine spezielle kleine Auflösung von P durch den Abschluß des Graphen der lokalen meromorphen Funktion

$$\left[\frac{z_1}{f_0}, \frac{z_1}{f_0 f_1}, \dots, \frac{z_1}{f_0 f_1 \dots f_{n-1}} \right]$$

in $\mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^1)^n$ gegeben. Die exceptionellen Kurven sind

$$L_p^i := \{P\} \times (0:1) \times \dots \times \mathbb{P}^1 \times (1:0) \times \dots \times (1:0),$$

$i = 1, \dots, n$, \mathbb{P}^1 steht an i -ter Stelle. Es ist $s_p = n$.

Lemma: Die eigentlichen Transformierten der Weil-Divisoren $\{z_1 = 0, f_j = 0\}$, $j = 0, \dots, n$, haben mit den Kurven L_p^i die folgenden Schnittzahlen:

$\{z_1 = 0, f_0 = 0\} :$	$(-1, 0, 0, \dots, 0, 0)$
$\{z_1 = 0, f_1 = 0\} :$	$(1, -1, 0, \dots, 0, 0)$
$\{z_1 = 0, f_2 = 0\} :$	$(0, 1, -1, 0, \dots, 0)$
⋮	
$\{z_1 = 0, f_{n-1} = 0\} :$	$(0, \dots, 0, 0, 1, -1)$
$\{z_1 = 0, f_n = 0\} :$	$(0, \dots, 0, 0, 0, 1)$

Die i -te Komponente bezeichne die Schnittzahl mit der Kurve L_p^i .

Beweis: Betrachte den Fall $n = 2$. Die lokale Gleichung von V in einer affinen Umgebung von P lautet

$$z_1 z_2 = \prod_{j=0}^2 f_j.$$

Der Abschluß des Graphen der meromorphen Funktion

$$\left[\frac{z_1}{f_0}, \frac{z_1}{f_0 f_1} \right]$$

beschreibt eine kleine Auflösung, die exceptionellen Kurven sind $\mathbb{P}^1 \times (1:0)$ und $(0:1) \times \mathbb{P}^1$. Die eigentliche Transformierte des Weil-Divisors $\{z_2 = 0, f_0 = 0\}$ hat mit diesen beiden Kurven nur den Punkt $(1:0) \times (1:0)$ gemeinsam; die Schnittzahlen sind daher $(1,0)$. Da der Cartier-Divisor $\{f_0 = 0\}$ mit allen exceptionellen Kurven die Schnittzahl 0 haben muß, sind die Schnittzahlen dieser Kurven mit dem Weil-Divisor $\{z_1 = 0, f_0 = 0\}$ gleich $(-1,0)$.

Die eigentlichen Transformierten von $\{z_1 = 0, f_1 = 0\}$ bzw. $\{z_2 = 0, f_1 = 0\}$ enthalten $(0:1) \times \mathbb{P}^1$ bzw. $\mathbb{P}^1 \times (1:0)$. Als Schnittzahlen mit den exceptionellen Kurven ergeben sich $(1,-1)$ bzw. $(-1,1)$. Mit diesem Verfahren lassen sich auch im allgemeinen Fall alle Schnittzahlen berechnen. □

Nach Brieskorn werden die verschiedenen kleinen Auflösungen durch die Graphen der Funktionen

$$\left[\frac{z_1}{f_{j_0}}, \frac{z_1}{f_{j_0} f_{j_1}}, \dots, \frac{z_1}{f_{j_0} f_{j_1} \dots f_{j_{n-1}}} \right]$$

beschrieben, entsprechen also den Permutationen obiger Tupel von Schnittzahlen. Es gibt $(n+1)!$ verschiedene Möglichkeiten der kleinen Auflösung.

Wir wollen nun versuchen, mit Hilfe dieser lokalen Informationen globale Eigenschaften kleiner Auflösungen zu charakterisieren. Sei $V \subset \mathbb{P}^N$ eine singuläre Threefold, zu jedem $P \in \mathcal{S}$ existiere ein $n \in \mathbb{N}$, so daß V in einer affinen Umgebung von P durch eine Gleichung der Form

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^{n+1} + z_4^{n+1} = 0$$

gegeben wird. Es stellt sich die Frage nach der Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen, das heißt man sucht globale Divisoren auf V , deren eigentliche Transformierte auf einer kleinen Auflösung \hat{V} mit allen exceptionellen Kurven positiven Schnitt haben. Ob diese Suche erfolgreich ist, hängt davon ab, wie sich die lokalen Weil-Divisoren

$$W_P^j := \{z_1 = 0, f_j = 0\},$$

$P \in \mathcal{S}$, zu globalen Divisoren fortsetzen lassen.

Nehmen wir einmal an, alle zu einem Punkt $P \in \mathcal{S}$ gehörenden lokalen Weil-Divisoren W_P^j lassen sich zu verschiedenen globalen Divisoren fortsetzen, die jeweils in P glatt sind. Betrachte die Linearkombinationen

$$D := \sum_j \alpha_P^j D_P^j .$$

$\alpha_P^j \in \mathbb{N}_0$. Falls alle α_P^j verschieden sind - ohne Einschränkung nehmen wir an: $\alpha_P^0 < \dots < \alpha_P^n$ - gibt es genau eine kleine Auflösung des Punktes P , so daß die eigentliche Transformierte von D alle Kurven L_P^1 positiv schneidet:

Man muß so auflösen, daß W_P^0 das Schnittzahl-Tupel $(-1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ zugeordnet wird, W_P^1 das Tupel $(1, -1, 0, \dots, 0, 0)$ usw.

Falls zwei der Zahlen α_P^i gleich sind, ist es nicht möglich, eine kleine Auflösung mit

$$\hat{D} \cdot L_P^i > 0$$

für alle $i = 1, \dots, n$ zu finden, wie man sich an Hand der Schnittzahlen überzeugt. Dies gilt auch, falls sich mehrere W_P^i nur zu ein und demselben globalen Divisor ergänzen lassen, der dann in P singularär ist.

Satz: Sei V eine Threefold mit den oben angegebenen Eigenschaften. Es existiert eine projektiv algebraische kleine Auflösung genau dann, wenn für alle Singularitäten $P \in \mathcal{S}$ gilt:

Alle lokalen Weil-Divisoren W_P^i lassen sich zu globalen Divisoren D_P^i auf V fortsetzen, die in P glatt sind.

Bemerkung: Falls diese Bedingung erfüllt ist, so betrachte alle Linearkombinationen

$$D := \sum_{P \in \mathcal{Y}} \sum_{j=0}^{s_P} \alpha_P^j D_P^j .$$

$\alpha_P^j \in \mathbb{N}_0$ sowie ihre Einschränkungen D_P auf affine Umgebungen aller $P \in \mathcal{Y}$

$$D_P =: \sum_{j=0}^{s_P} \beta_P^j W_P^j .$$

Für einen Punkt $P \in \mathcal{Y}$ ist die Menge der Divisoren D mit $\beta_P^i \neq \beta_P^j$ für alle $i \neq j$ nicht leer. Dann existiert auch ein Divisor D , so daß $\beta_P^i \neq \beta_P^j$ für alle $i \neq j$ und alle $P \in \mathcal{Y}$. Wie wir uns zuvor überlegten, gibt es zu jedem solchen Divisor D eine kleine Auflösung \hat{V} , so daß

$$\hat{D} \cdot L_P^i > 0$$

für alle $i = 1, \dots, s_P$ und alle $P \in \mathcal{Y}$. Die verschiedenen projektiv algebraischen kleinen Auflösungen entsprechen dabei eindeutig den verschiedenen Möglichkeiten, die β_P^i jeweils pro Singularität der Größe nach anzuordnen. \square

Korollar: Sei V wie im vorausgehenden Satz, es existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen.

Dann hat V nur $(2, 2, n+1, n+1)$ -Singularitäten mit $n \leq d$.

XII BEISPIELE MIT HÖHEREN SINGULARITÄTEN

Wie im Fall gewöhnlicher Doppelpunkte, so sind auch jetzt wieder singuläre Kubiken in \mathbb{P}^4 schöne Beispiele, auf die sich die allgemeine Theorie gut anwenden läßt.

Sei in diesem Kapitel $K \subset \mathbb{P}^4$ eine Kubik mit nur Singularitäten vom Typ $(2,2,n+1,n+1)$. Nehmen wir weiterhin an, daß K mindestens einen gewöhnlichen Doppelpunkt habe, dieser liege im Punkt $(0:0:0:0:1)$. Dann läßt sich die Kubik als

$$\{x_4 Q + R = 0\}$$

schreiben, wobei Q und R homogene Polynome vom Grad 2 bzw. 3 in $(x_0:\dots:x_3)$ sind.

$$S := \{Q = 0\} \cap \{R = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

heißt wieder assoziierte Kurve. Unter der Abbildung $\Pi: K - \{P_1\} \rightarrow \mathbb{P}^3$ wird ein Punkt $P \in K - \{P_1\}$ vom Typ $(2,2,n+1,n+1)$ auf eine Singularität von S abgebildet, in der sich $(n+1)$ lokale Komponenten schneiden, und zwar je paarweise transversal. Da S vom Typ $(3,3)$ ist, treten nur die Fälle $n = 1, 2, 3$ auf. Die Kegel über den irreduziblen Komponenten S_i von S bilden eine Basis von $H_4(K, \mathbb{Z})$, es gilt der folgende

Satz: Sei K eine Kubik mit den oben angegebenen Eigenschaften. Eine projektiv algebraische kleine Auflösung existiert genau dann, wenn alle irreduziblen Komponenten von S glatt sind und mindestens eine vom Typ (a,b) mit $a \neq b$ ist.

Die ampeln Divisoren auf den verschiedenen projektiv algebraischen kleinen Auflösungen \hat{V} ergeben sich als eigentliche Transformierte der

$$\sum_{i=0}^d \alpha_i \Pi^{-1} S_i .$$

wobei die α_i so zu wählen sind, daß $\alpha_i \neq \alpha_j$, falls $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Beachte auch, daß $\sum_{i=0}^d \alpha_i (a_i - b_i) \neq 0$ sein muß, wobei S_i vom Typ (a_i, b_i) .

Die verschiedenen projektiv algebraischen kleinen Auflösungen entsprechen den verschiedenen Möglichkeiten, pro Singularität $P \in \mathcal{V} - \{P_1\}$ die α_i mit $\Pi(P) \in S_i$ der Größe nach anzuordnen. Die spezielle Auflösung von P_1 wird durch das Vorzeichen von $\sum_{i=0}^d \alpha_i (a_i - b_i)$ bestimmt .

Aus diesen Überlegungen ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz: Sei K^1 eine Kubik, deren assoziierte Kurve S^1 aus S durch stetige Deformation so entsteht, daß eine $(2,2,n+1,n+1)$ -Singularität in $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Nodes aufgelöst wird. Dann haben K^1 und K die gleiche Anzahl projektiv algebraischer kleiner Auflösungen.

Dies ist so zu verstehen, daß die Quadrik Q unverändert bleibt und nur die assoziierte Kurve in Q und damit die Kubik R deformiert wird.

Bemerkung: Ein analoger Satz läßt sich für beliebige singuläre Threefolds V mit nur isolierten $(2,2,n+1,n+1)$ -Singularitäten formulieren:

Sei \mathcal{W} der Totalraum einer Deformation von V .

$$\Pi: \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die Projektion, $V = V^0 = \Pi^{-1}(0)$, $V^1 = \Pi^{-1}(1)$. Die Deformation habe folgende Eigenschaften:

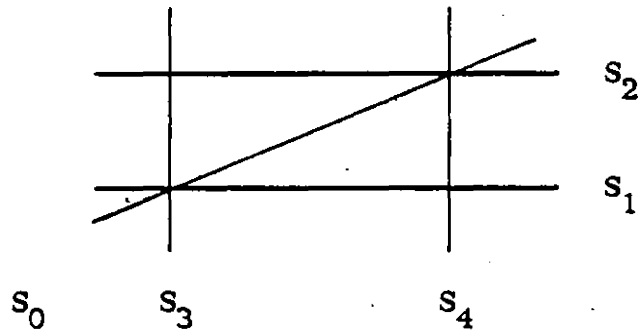
1. Eine $(2,2,n+1,n+1)$ -Singularität auf V wird in $\binom{n+1}{2}$ Nodes auf V^1 aufgelöst.
2. Es existieren Divisoren D_1, \dots, D_N auf \mathcal{W} , so daß $D_i|_{V^i}$ die globalen Divisoren auf V^i sind, $i = 0, 1$.

Dann haben V und V^1 die gleiche Anzahl projektiv algebraischer kleiner Auflösungen.

Kehren wir zurück zu den Kubiken. Beispiele mit höheren Singularitäten lassen sich als Deformationen der in Kapitel VIII angegebenen nodalen Kubiken finden; es ist möglich, so alle Kubiken mit nur isolierten Singularitäten vom Typ $(2,2,n+1,n+1)$ und mindestens einem gewöhnlichen Doppelpunkt zu klassifizieren.

Die in Kapitel VIII berechneten Zahlen der projektiv algebraischen kleinen Auflösungen lassen sich in den Fällen $d \leq 3$ so in elementarerer Weise bestätigen. Beschäftigen wir uns näher mit dem Fall $d = 4$:

Die assoziierte Kurve



gehört zu einer Kubik mit drei Nodes und zwei Singularitäten vom Typ (2,2,3,3). Die Divisoren auf dieser Kubik werden durch

$$\sum_{i=0}^4 \alpha_i \Pi^{-1} S_i$$

gegeben. Wieder ordnen wir einem Divisor D die kleine Auflösung mit $\hat{D} \cdot L_p^i > 0$ für alle $i = 1, \dots, s_p$ und alle $P \in \mathcal{P}$ zu. Wir legen

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_3$$

und damit eine von 6 Möglichkeiten der kleinen Auflösung in der zu $S_0 \cap S_1 \cap S_3$ gehörenden Singularität fest und fragen uns: Wie viele projektiv algebraische kleine Auflösungen sind unter dieser Nebenbedingung möglich?

Falls $\alpha_4 < \alpha_0$, sind es 6 Fälle:

$$\alpha_2 < \alpha_4$$

$$\alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_0$$

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_3$$

$$\alpha_2 > \alpha_3$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 + \alpha_4$$

bzw.

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + \alpha_4$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 + \alpha_4$$

bzw.

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + \alpha_4$$

Falls $\alpha_0 < \alpha_4 < \alpha_1$, gibt es 5 verschiedene Möglichkeiten:

$$\alpha_2 < \alpha_0 .$$

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_4 .$$

$$\alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_3 \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 + \alpha_4$$
$$\text{bzw.} \quad \alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + \alpha_4 .$$

$$\alpha_2 > \alpha_3 .$$

Falls $\alpha_4 > \alpha_1$, sind folgende 6 Fälle möglich:

$$\alpha_2 < \alpha_0 .$$

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \min\{\alpha_3, \alpha_4\} .$$

$$\alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_3 .$$

$$\alpha_2 > \max\{\alpha_3, \alpha_4\} \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 + \alpha_4$$
$$\text{bzw.} \quad \alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + \alpha_4 .$$

$$\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_4 .$$

Ein Wechsel des Vorzeichens von $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4)$ entspricht einem Wechsel der kleinen Auflösung bei P_1 . Insgesamt gibt es 102 projektiv algebraische kleine Auflösungen, dies gilt somit auch für eine Kubik mit 9 Nodes.

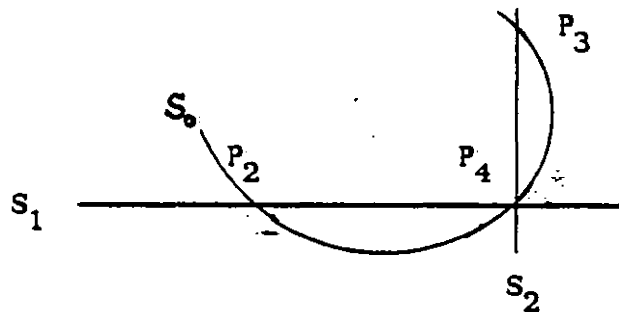
Was läßt sich über die Relationen zwischen den exzeptionellen Kurven auf den verschiedenen kleinen Auflösungen sagen?

Im Fall höherer Singularitäten ist die Änderung der Relationen bei einem Wechsel der kleinen Auflösung nicht so einfach zu beschreiben wie im

Fall der Nodes, wo dieser einen Vorzeichenwechsel der entsprechenden Koeffizienten bewirkte. Allgemein bedeutet ein Wechsel der kleinen Auflösung in einer Singularität $P \in \mathcal{S}$ eine Permutation der Schnittzahlen der eigentlichen Transformierten der Divisoren, die P enthalten, mit den Kurven L_P^i . Diese Änderung des Vektorraumes \mathcal{A} bewirkt auch eine Änderung des Vektorraumes \mathcal{B} , der ja die linearen Relationen zwischen den exceptionellen Kurven L_P^i beschreibt.

Ein charakteristisches Beispiel:

Sei K eine Kubik, deren assoziierte Kurve in 3 Komponenten vom Typ $(2,2)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ in folgender Weise zerfällt:



Eine Möglichkeit der (projektiven) kleinen Auflösung ist, den Divisoren $\Pi^{-1}S_1$ und $\Pi^{-1}S_2$ die Schnittzahlen $(-1,1,0,1,-1)$ bzw. $(1,0,1,0,1)$ mit $L_1, L_2, L_3, L_4^1, L_4^2$ zuzuordnen. Ein ample Divisor

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i \widehat{\Pi^{-1}S_i}$$

erfüllt die Bedingung

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 .$$

Der Übergang zu einer kleinen Auflösung, deren ample Divisor

$$\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$$

erfüllt, bedeutet einen Wechsel der kleinen Auflösung in P_2 und P_4 : $\Pi^{-1}S_1$ und $\Pi^{-1}S_2$ werden nun die Schnittzahlen $(-1, -1, 0, -1, 0)$ bzw. $(1, 0, 1, 0, 1)$ zugeordnet. Die linearen Relationen sind im ersten Fall

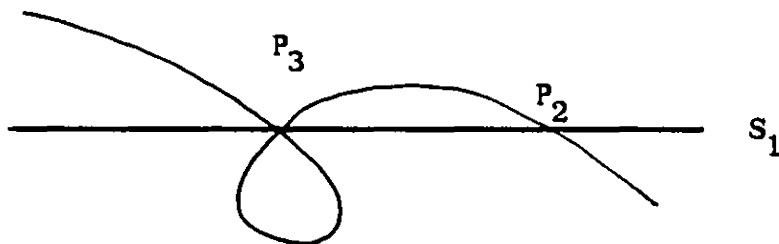
$$L_1 \approx L_4^2, L_2 \approx L_4^1, L_3 \approx L_4^1 + L_4^2$$

und im zweiten

$$L_3 \approx L_4^2, L_2 \approx L_4^1, L_1 \approx L_4^1 + L_4^2.$$

Interessant ist auch folgendes Beispiel mit $d = 1$:

Die assoziierte Kurve S zerfalle in 2 Komponenten vom Typ $(3,2)$ und $(1,0)$, die $(3,2)$ -Komponente habe einen Doppelpunkt, der gleichzeitig einer der zwei Schnittpunkte beider Komponenten ist.



Der Divisor $\hat{\Pi}^{-1}S_1$ hat mit L_1, L_2, L_3^1 und L_3^2 die Schnittzahlen $(\pm 1, \pm 1, 0, 1), (\pm 1, \pm 1, -1, 0)$ oder $(\pm 1, \pm 1, 1, -1)$. Alle Vorzeichenkombinationen sind voneinander unabhängig. In den ersten beiden Fällen ist L_3^1 bzw. L_3^2 nullhomolog; im dritten Fall sind die beiden irreduziblen exceptionellen Kurven nicht nullhomolog, dafür ist es aber die Summe $L_3^1 + L_3^2$.

Bei höheren Singularitäten kann es also von der speziellen kleinen Auflösung abhängig sein, ob eine irreduzible exzeptionelle Kurve nullhomolog ist oder nicht. Unabhängig von der speziellen kleinen Auflösung ist dagegen folgende Bedingung:

- (*) Eine Singularität $P \in \mathcal{Y}$ wird durch Kurven L^i aufgelöst, zwischen denen eine nichttriviale Relation

$$\sum_{i=1}^{s_p} \alpha^i L^i \approx 0,$$

$\alpha^i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, s_p$ besteht.

Dies gilt nicht nur für Kubiken in \mathbb{P}^4 , sondern allgemein für Threefolds mit isolierten $(2,2,n+1,n+1)$ -Singularitäten.

Eine projektiv algebraische kleine Auflösung existiert genau dann, wenn die Bedingung (*) für kein $P \in \mathcal{Y}$ erfüllt ist.

Damit verlassen wir die Kubiken und wenden uns speziellen Double Solids zu, deren Verzweigungsflächen (in Verallgemeinerung der ursprünglichen Definition von Clemens) nun auch höhere Singularitäten haben dürfen.

Erinnern wir uns an ein Beispiel aus Kapitel X; dort hatten wir Double Solids mit Verzweigungsflächen der Form

$$B = \{Q^2 - x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

$\deg Q = 2$ untersucht. Im allgemeinen haben diese Flächen 12 Nodes. Wählt man jedoch Q speziell so, daß die Quadrik $\{Q = 0\}$ durch

die 4 Eckpunkte des Tetraeders $\{x_0 x_1 x_2 x_3 = 0\}$ geht, so hat B 4 D_4 -Singularitäten. Nach Kummer [21] ist in diesem Fall

$$Q = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} a_{ij} x_i x_j .$$

Die Singularitäten des Double Solids sind vom Typ (2,2,3,3). entsprechen also der dreifachen Überlagerung einer A_2 -Flächensingularität und erlauben daher eine kleine Auflösung. Das Double Solid wird wieder durch die Gleichung

$$(\omega - Q)(\omega + Q) = x_0 x_1 x_2 x_3$$

beschrieben, es geht durch stetige Deformation aus dem allgemeinen Double Solid mit $\deg B = 4$ und $s = 12$ hervor. Daher ist weiterhin $d = 3$, die Divisoren

$$D_i = \{\omega - Q = 0, x_i = 0\} .$$

$i = 0, \dots, 3$, erzeugen $H_4(V, \mathbb{Z})$. Durch jede Singularität gehen 3 dieser globalen Divisoren, dort repräsentieren sie die 3 verschiedenen lokalen Divisoren. Also existieren projektiv algebraische kleine Auflösungen. Um ihre Anzahl zu berechnen, betrachten wir alle Divisoren

$$D = \sum_{i=0}^3 \alpha_i D_i .$$

$\alpha_i \geq 0$. Es gibt 24 Möglichkeiten, die α_i der Größe nach anzuordnen. Da sich je zwei Divisoren in zwei Singularitäten schneiden und dort verschiedene lokale Divisoren repräsentieren, führt dies zu 24 verschiedenen projektiv algebraischen kleinen Auflösungen. Das stimmt mit der in Kapitel X berechneten Zahl im Fall von 12 Nodes überein.

Wählt man die Konstanten a_{1j} in der Gleichung für Q alle gleich $1/2$, so hat B 3 weitere Singularitäten, nämlich Nodes in den Punkten $(1:1:-1:-1)$, $(1:-1:1:-1)$ und $(1:-1:-1:1)$. Die ersten beiden Nodes liegen auf dem glatten Divisor

$$\{x_0 + x_3 = 0, \omega = x_1 x_2 - x_0 x_3\},$$

der seinerseits ganz in V liegt. Analoge Divisoren erhält man durch Vertauschen von x_3 und x_1 bzw. x_2 .

Durch alle 3 Nodes gibt es so globale glatte Divisoren, also ist auch in diesem Beispiel die Existenz projektiv algebraischer kleiner Auflösungen gesichert.

Zum Schluß soll noch folgendes schöne Beispiel einer Familie von Hyperflächen in \mathbb{P}^4 nicht unerwähnt bleiben:

Sei

$$V = \{F(z_0, z_1, z_2) + z_3^{n+1} + z_4^{n+1} = 0\},$$

wobei $\{F = 0\}$ eine nodale Kurve vom Grad $(n+1)$ in \mathbb{P}^2 beschreibt. Die Singularitäten dieser Kurve entsprechen eineindeutig den Singularitäten von V , diese sind vom Typ $(2, 2, n+1, n+1)$.

Sei $F = \prod_{i=1}^m f_i$; nehmen wir weiterhin an, daß alle irreduziblen Komponenten der Kurve $\{F = 0\}$ glatt sind. Dann kommen als Singularitäten nur die Schnittpunkte der irreduziblen Komponenten in Frage, somit

erhält man durch Aufblasen der Divisoren

$$\{f_1 = 0, z_3 + \xi_{n+1}^j z_4 = 0\} .$$

$1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n$, eine projektiv algebraische kleine Auflösung von V . Die Anzahl der Singularitäten ist abhängig von der Anzahl der Komponenten der Kurve $\{F = 0\}$ und ihrem Grad. Die beiden extremen Fälle sind:

1. F zerfällt in zwei Polynome vom Grad n und 1 . Dann hat V n Singularitäten, es ist $d \geq n$.
2. F zerfällt in $(n+1)$ lineare Terme. In diesem Fall hat V $\binom{n+1}{2}$ Singularitäten, es ist $d \geq n^2$.

Deformiert man V nun so, daß jede Singularität in $\binom{n+1}{2}$ Nodes aufgelöst wird, so hat die neue Varietät V^1 genauso viele projektiv algebraische kleine Auflösungen wie V . Die Nodes liegen in sehr spezieller Lage. Im ersten Fall haben wir $s = n^2(n+1)/2$ und $d \geq n$, im zweiten $s = n^2(n+1)^2/4$ und $d \geq n^2$.

Beachte: $\deg V^1 = \deg V = n+1$.

Vermutung: Sei V eine Hyperfläche vom Grad $(n+1)$ in \mathbb{P}^4 , alle Singularitäten seien vom Typ $(2,2,n+1,n+1)$ - hier ist n ausnahmsweise nicht variabel. Dann ist die Anzahl der Singularitäten kleiner oder gleich $\binom{n+1}{2}$. Sie ist mindestens gleich n , falls V eine projektiv algebraische kleine Auflösung zuläßt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Beauville, A.: Sur le nombre maximum de points double d'une surface dans P^3 ($\mu(5)=31$). Geometrie algebrique d'Anger 1979, 207-215. Alphen an den Rijn: Sijthoff u. Nordhoff 1980.
- [2] Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. 166, 76-102 (1966).
- [3] Brieskorn, E.: Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen. Math. Ann. 178, 255-270 (1968).
- [4] Bruce, J.W.: An upper bound for the number of singularities on a projective hypersurface. Bull. Lond. Math. Soc. 13, 47-51 (1981).
- [5] Candelas, P.; Horowitz, G.T., Strominger, A.; Witten, E.: Vacuum configurations for superstrings. Erscheint in: Nucl. Phys. B. Vorabdruck in: Superstrings, Vol. 2, Ed.: J.H. Schwarz, pp. 1107-1137. Singapore: World Scientific 1985.
- [6] Clemens, C.H.: Double Solids. Adv. in Math. 47, 107-230 (1983).
- [7] Finkelberg, H.: Small resolutions of the Segre cubic. Report Nr. 25, Univ. Leiden, 1986.
- [8] Finkelberg, H.; Werner, J.: In Vorbereitung.
- [9] Friedman, R.: Simultaneous resolution of threefold double points. Math. Ann. 274, 671-689 (1986).
- [10] Fulton, W.: Algebraic Curves. New York: W.A. Benjamin 1978.
- [11] Gallarati, D.: Superficie algebriche con molti punti singolari isolati. Preprint Universita di Genova, 1983.
- [12] Griffiths, Ph.: On the periods of certain rational integrals II. Ann. of Math. 90, 496-541 (1969).

- [13] Griffiths, Ph.; Harris, J.: Principles of algebraic geometry. New York: Wiley 1978.
- [14] Harvey, R.; Lawson, H.B.: An intrinsic characterisation of Kähler manifolds. Invent. Math. 74, 169-198 (1983).
- [15] Hirzebruch, F.: Some examples of threefolds with trivial canonical bundle. MPI-Preprint 85-58 (1985).
- [16] Hirzebruch, F.: Threefolds with $c_1=0$. In: 26. mathematische Arbeitstagung. MPI-Preprint 86-26 (1986).
- [17] Hirzebruch, F.; Mayer, K.H.: $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten. Lecture Notes in Math. 57. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968.
- [18] Kalker, A.: Cubic fourfolds with fifteen ordinary double points. Dissertation (Leiden) 1986.
- [19] Kreiss, O.: Über syzygetische Flächen. Annali di Mat. 41, 105-111 (1955).
- [20] Kummer, E.E.: Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten. Monatsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin a. d. J. 1864, 246-260. Siehe auch: Coll. Papers II, 418-432.
- [21] Kummer, E.E.: Über zwei merkwürdige Flächen vierten Grades und Gypsmodelle derselben. Monatsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin a. d. J. 1866, 216-220. Siehe auch: Coll. Papers II, 448-452.
- [22] Kummer, E.E.: Über einige besondere Arten von Flächen vierten Grades. Monatsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin a. d. J. 1872, 474-483. Siehe auch: Coll. Papers II, 576-585.
- [23] Laufer, H.: On CP^1 as an exceptional set. Recent developments in several complex variables. Ann. of Math. Stud. 100, Ed: J. Fornaess, pp 261-275. Princeton Univ. Press 1981.

- [24] Meyer, W.; Randow, R.v.: Ein Würfelschnittproblem und Bernoullische Zahlen. *Math. Ann.* 193, 315-321 (1971).
- [25] Miyaoka, Y.: The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.* 268, 159-171 (1984).
- [26] Moišezon, B.G.: On n -dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions. *Amer. Math. Soc. Transl.* 63, 51-177 (1967).
- [27] Peternell, Th.: Algebraicity criteria for compact complex manifolds. *Math. Ann.* 275, 653-672 (1986).
- [28] Pinkham, H.: Factorisation of birational maps in dimension 3. *Proc. of Symp. in Pure Math.* Vol. 40 Part 2, 343-371. *Amer. Math. Soc.* 1983.
- [29] Poon, S.: Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature. *J. Diff. Geom.* 24, 97-132 (1986).
- [30] Poon, S.: Small resolutions of double solids as twistor spaces. In Vorbereitung.
- [31] Schoen, Ch.: Algebraic cycles on certain desingularized nodal hypersurfaces. *Math. Ann.* 270, 17-27 (1985).
- [32] Schoen, Ch.: On the geometry of a special determinantal hypersurface associated to the Mumford-Horrocks vector bundle. *J. reine u. angew. Math.* 364, 85-111 (1986).
- [33] Schoen, Ch.: On fibre products of rational elliptic surfaces with section. In Vorbereitung.
- [34] Siu, Y.T.: Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of positive closed currents. *Invent. Math.* 27, 53-156 (1974).

- [35] Stagnaro, E.: Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di \mathbb{P}^3 . Rend. Sem. Nat. Padua 59, 179-198 (1978).
- [36] Stagnaro, E.: Preprint. Univ. di Padova, 1985.
- [37] Strominger, A.; Witten, E.: New manifolds for superstring compactification. Comm. Math. Phys. 101, 341-361 (1985).
- [38] Todd, J.A.: On the simple group of order 25920. Proc. Royal Soc.(A) 189, 326-358 (1947).
- [39] Varchenko, A.N.: On semicontinuity of the spectrum and an upper bound for the number of singular points of projektive hypersurfaces [russisch], Dokl. Akad. Nauk. USSR 270, 1983.
- [40] Varchenko, A.N.: Asymptotics of integrals and Hodge structures [russisch]. Itogi Nauki i Techniki, Serie "Contemporary Problems of Mathematics" Vol. 22, 130-166, Moskau 1983.
- [41] Yau, S.T.: Compact three dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature. Symposium on Anomalies, Geometry, Topology. Ed.: W.A. Barden, A.R. White. Singapore: World Scientific 1985.