Attracteurs presque–périodiques pour une classe d'équations paraboliques nonlinéaires du type réaction–diffusion sur $\mathbb{R}^N$.

by

Pierre–A. Vuillermot

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Str. 26
5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany

MPI/89 – 88

Attracteurs presque–périodiques pour une classe d'équations paraboliques nonlinéaires du type réaction–diffusion sur $\mathbb{R}^N$.

Fixons $N \in [2,\infty) \cap \mathbb{N}^+$, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$ et considérons la classe de problèmes de Neumann

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + s(t)g(u(x,t)) , & (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Ran}(u) \subseteq (u_0,u_1) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial \underset{\sim}{n}}(x,t) = 0 & , (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dans les relations (1), nous avons écrit $s : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ pour la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'une fonction presque–périodique au sens de Bohr sur $\mathbb{R}$, que nous noterons également s. Nous avons noté $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière possédant deux zéros $u_0 < u_1$ tels que $g(u) > 0$ pour chaque $u \in (u_0,u_1)$. Par ailleurs, $\mathrm{Ran}(u)$ désigne le domaine des valeurs de u et $\underset{\sim}{n}$ le vecteur unité normal extérieur à $\partial\Omega$. Considérons d'autre part le problème aux valeurs initiales

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{u}'(t) = s(t)g(\hat{u}(t)) , \ t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Ran}(\hat{u}) \subseteq [u_0,u_1] \\ \hat{u}(0) = \hat{\nu} \in [u_0,u_1] \end{array}\right\} \tag{2}$$

Nous nous proposons ici de présenter et de discuter deux théorèmes nouveaux relatifs aux phénomènes de stabilisation de certaines solutions classiques de (1) vers des solutions classiques presque–périodiques de (2) lorsque $t \longrightarrow \infty$. Ce genre de questions est motivé par certains problèmes importants de la génétique des populations, tels que la migration saisonnière de certains gènes ou virus dans une population donnée confinée à Ω([1]–[4]) . Soit $\mathbb{R}_B$ la compactification de Bohr de la droite réelle munie de sa topologie usuelle [5]; conformément à l'usage nous identifions une fonction $s \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ presque–périodique au sens de Bohr à son prolongement unique uniformément continu sur $\mathbb{R}_B$, soit $s \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_B,\mathbb{R})$. Nous rappelons aussi que le module de s est l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires finies à coefficients entiers des exposants de Fourier de s , que nous notons Mod(s) ([6], [7]) . Notre premier résultat est élémentaire. Nous y décrivons une famille à un paramètre de solutions classiques presque–périodiques de (2).

<u>Proposition 1</u>. Soit $s \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_B,\mathbb{R})$ telle que $t \longrightarrow \int_0^t d\xi s(\xi) = 0(1)$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$. Supposons que $g \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et qu'il existe $u_{0,1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(u_0) = g(u_1) = 0$, $g(u) > 0$ pour chaque $u \in (u_0,u_1)$ et $g'(u_0) > 0$, $g'(u_1) < 0$. Soit G une primitive quelconque de $1/g$ sur l'intervalle ouvert (u_0,u_1) , supposons que $G(u) \longrightarrow -\infty$ lorsque $u \longrightarrow u_0$, que $G(u) \longrightarrow +\infty$ lorsque $u \longrightarrow u_1$, et désignons par G^{-1} l'inverse monotone de G . Alors les conclusions suivantes sont valables:

(C_1) Pour chaque $\hat{\nu} \in [u_0,u_1]$, le problème (2) possède une solution classique presque–périodique $\hat{u} \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Plus précisément, si $\hat{\nu} = u_0$(resp. u_1) alors $\hat{u} = u_0$ (resp. $\hat{u} = u_1$) identiquement sur $\mathbb{R}$. Si $\hat{\nu} \in (u_0,u_1)$, la solution de (2) est uniquement déterminée par

$$\hat{u}(t) = G^{-1}\left[\int_0^t d\xi s(\xi) + G(\hat{\nu})\right] \tag{3}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, nous avons l'inclusion des modules

$$\mathrm{Mod}(\hat{u}) \subseteq \mathrm{Mod}(s) \tag{4}$$

(C_2) Chaque solution de (2) donnée par la relation (3) reste uniformément éloignée des deux solutions d'équilibre u_0 et u_1 ; en d'autres termes nous avons

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} (\hat{u}(t) - u_0) > 0 \tag{5}$$

et

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} (u_1 - \hat{u}(t)) > 0 \tag{6}$$

<u>Idée de la démonstration</u>. Nous résolvons (2) trivialement par séparation des variables et nous obtenons la conclusion (C_1) par des critères classiques de Bohr et de Favard [7]. La conclusion (C_2) est une conséquence de la relation (3) et des conditions asymptotiques de G au voisinage de u_0 et u_1 . □

Nous notons $\{\hat{u}\}_{\hat{\nu} \in [u_0,u_1]}$ la famille à un paramètre des solutions de la proposition précédente et $\{\hat{u}\}_{\hat{\nu} \in (u_0,u_1)}$ la famille des solutions déterminées par la relation (3). Fixons $p \in (N,\infty)$. Nous convenons alors d'appeler solution classique du problème (1) toute fonction $u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée partielle temporelle u_t existe en tant que fonction $u_t : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous exigeons en outre que $x \longrightarrow u(x,t) \in \mathscr{C}^{(2)}(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_0^+$, que $x \longrightarrow u_t(x,t) \in \mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$, que $t \longrightarrow u_t(x,t) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ uniformément en $x \in \overline{\Omega}$ et que $|u(x,t) - u(x,t')| \leq c(x)|t - t'|$ pour chaque $t,t' \in \mathbb{R}_0^+$, où $c \in L^p(\Omega,\mathbb{R})$. Notre premier résultat principal est alors le suivant.

Théorème 1. Supposons que s et g satisfassent aux mêmes hypothèses que celles de la proposition 1 et soit u une solution classique du problème (1). Supposons en outre que s soit hölderienne sur $\mathbb{R}^+$. Alors il existe un $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{\nu}\in(u_0,u_1)}$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t) - \hat{u}(t)| = 0 \tag{7}$$

De plus, la solution donnée satisfait aux relations

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla u(x,t)| = 0 \tag{8}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} |x-y|^{-\beta} |u(x,t) - u(y,t)| = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} |x-y|^{-\beta} |\nabla u(x,t) - \nabla u(y,t)| = 0 \tag{10}$$

pour chaque $\beta \in (0,1-p^{-1}N]$.

Idée de la démonstration. Pour $p \in (N,\infty)$, soit $H^{2,p}(\Omega,\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev réel muni de sa structure d'algèbre de Banach commutative usuelle relativement à une norme $\|\cdot\|_{2,p}$ équivalente à la norme originale [8]. Etant donnée une solution classique u de (1), définissons pour chaque $t \in \mathbb{R}_0^+$ la fonction $u(t) \in H^{2,p}(\Omega,\mathbb{R})$ par

$u(t)(x) = u(x,t)$. Puisqu'il existe l'injection continue $H^{2,p}(\Omega,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ dans l'espace de Banach usuel des fonctions hölderiennes sur $\overline{\Omega}$ à dérivées partielles hölderiennes d'exposant $\beta \in (0,1-p^{-1}N]$, tout revient à prouver l'existence d'un $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{\nu}\in(u_0,u_1)}$ tel que $\|u(t)-\hat{u}(t)\|_{2,p} \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Pour ce faire nous exploitons la structure d'algèbre de Banach de $H^{2,p}(\Omega,\mathbb{R})$ ainsi que le principe du maximum parabolique. □

<u>Remarques</u>. (1) Nous observons tout d'abord que les solutions d'équilibre u_0 et u_1 ne peuvent jamais être des attracteurs sous les conditions du théorème 1. En effet, un ingrédient essentiel dans la démonstration de ce théorème est que toute solution classique de (1) reste uniformément éloignée de u_0 et u_1 , généralisant en cela la conclusion (C_2) de la proposition 1. Cela est intuitivement compréhensible puisque l'hypothèse $t \longrightarrow \int_0^t d\xi s(\xi) = 0(1)$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$ signifie que $t \longrightarrow \int_0^t d\xi s(\xi)$ est presque–périodique, et donc que la moyenne temporelle de s est nulle.

(2) Les solutions $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{\nu}\in(u_0,u_1)}$ intervenant dans le théorème 1 ne sont en général pas des attracteurs globaux car $\hat{u}$ dépend de u . De plus, nous pouvons conclure grâce à la relation (4) que tout exposant de Fourier de $\hat{u}$ est nécessairement une combinaison linéaire finie à coefficients entiers des exposants de Fourier de s .

(3) En résolvant (2) sous les conditions de la proposition 1, nous avons obtenu <u>toutes</u> les solutions classiques presque–périodiques dans la variable temporelle de (1); en effet, il découle immédiatement du théorème 1 et de propriétés élémentaires des fonctions presque–périodiques que si u est une solution classique de (1), alors $t \longrightarrow u(x,t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_0^+$ d'une fonction presque–périodique au sens de Bohr

si, et seulement si, il existe $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{\nu}\in(u_0,u_1)}$ tel que $u(x,t) = \hat{u}(t)$ pour chaque $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$.

Il est finalement naturel de se demander comment se stabilisent les solutions classiques de (1) lorsque la moyenne de s est différente de zéro. Nous notons cette moyenne $\mu_B(s)$, soit

$$\mu_B(s) = \lim_{\ell\to\infty} \ell^{-1} \int_0^{\ell} d\xi s(\xi) \tag{11}$$

Nous remarquons d'abord que u_0 et u_1 sont toujours des solutions d'équilibre de (2) indépendamment de l'hypothèse de presque–periodicité de $t \longrightarrow \int_0^t d\xi s(\xi)$ .Nous pouvons alors montrer que u_0 ou u_1 sont des attracteurs globaux dans le sens de résultat suivant.

Théorème 2. Soit $s \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_B,\mathbb{R})$ telle que $\mu_B(s) \neq 0$ et supposons que g satisfasse aux mêmes hypothèses que précédemment. Supposons en outre que s soit hölderienne sur $\mathbb{R}^+$. Soit u une solution classique du problème (1). Alors ou bien $\mu_B(s) < 0$ et on a

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t) - u_0| = 0 \tag{12}$$

ou bien $\mu_B(s) > 0$ et on a

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t) - u_1| = 0 \tag{13}$$

De plus, les relations (9) et (10) subsistent dans les deux cas.

Le théorème précédent se démontre par une méthode semblable à celle utilisée dans la démonstration du théorème 1.

Pour terminer, nous illustrons les résultats précédents par les deux exemples suivants concernant les équations dites de Fisher qui ont en fait motivé notre étude.

Exemple 1. Considérons le problème

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t(x,t) = \Delta u(x,t)+(\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t))u(x,t)(1-u(x,t))(\alpha u(x,t)+ & \\ \qquad +(1-\alpha)(1-u(x,t)), & (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Ran}(u) \subsetneq (0,1) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0 & ,\quad (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \tag{14}$$

où $\alpha \in (0,1)$ et où $\{\omega_1,\omega_2\} \subset \mathbb{R}/\{0\}$ est rationnellement indépendant. Nous avons ici $g(u) = u(1-u)(\alpha u + (1-\alpha)(1-u))$ avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $s(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$, si bien que toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. Nous concluons donc que toute solution classique de (14) se stabilise vers un attracteur quasi–périodique $\hat{u}$ dont chaque exposant de Fourier Λ est de la forme $\Lambda = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ où $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\{\omega_1,\omega_2\}$ constitue donc une base entière de l'ensemble des exposants de Fourier de $\hat{u}$.

Exemple 2. Considérons le problème

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t(x,t) & = & \Delta u(x,t)+(\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)-1)u(x,t)(1-u(x,t))\exp[-u(x,t)], \\ & & \qquad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Ran}(u)\subsetneq & (0,1) & \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) & = 0 & \qquad ,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \qquad (15)$$

où $\{\omega_1,\omega_2\}$ est identique au choix de l'exemple 1. Nous avons ici $g(u)=u(1-u)\exp[-u]$ avec $u_0=0$, $u_1=1$ et $s(t)=\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)-1$, si bien que $\mu_B(s)=-1$. Toutes les hypothèses du théorème 2 sont alors vérifiées, de telle façon que $u_0=0$ est un attracteur global au sens de la relation (12) indépendamment du choix des valeurs de ω_1 et ω_2.

Les démonstrations complètes de nos résultats ainsi que la discussion d'autres exemples importants apparaîtront dans [9], où nous avons également développé une théorie géométrique locale au voisinage de chaque $\hat{u}\in\{\hat{u}\}_{\hat{\nu}\in[u_0,u_1]}$ suivant les principes présentés dans ([10] – [14]), afin de déterminer quantitativement à quel taux se développent les processus de stabilisation décrits dans les théorèmes ci–dessus. La présentation et la discussion de ces résultats feront l'objet de communications ultérieures.

Références bibliographiques.

[1] R.A. Fisher, "Gene Frequencies in a Cline determined by Selection and Diffusion", Biometrics 6, (1950), 353–361.

[2] T. Nagylacki, "Conditions for the Existence of Clines", Genetics 80, (1975), 595–615.

[3] J.S. Haldane, "The Theory of a Cline", Journal of Genetics 48 (1948), 277–284.

[4] P. Hess, H. Weinberger, "Convergence to Spatial Temporal Clines in the Fisher Equation with Time–Periodic Fitnesses", J. of Mathematical Biology, sous presse.

[5] W. Rudin, "Fourier Analysis on Groups", Wiley, New–York (1960).

[6] J. Favard, "Leçons sur les fonctions presque–périodiques", Gauthiers–Villars (1933).

[7] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, "Almost–Periodic Functions and Differential Equations", Cambridge University Press, London/New York (1982).

[8] R. Adams, "Sobolev Spaces", Academic Press, New York (1975).

[9] P.A. Vuillermot, "Almost–Periodic Attractors for a Class of Nonautonomous Reaction–Diffusion Equations on $\mathbb{R}^N$ ", Parties I et II, Commun. Math. Phys. (1990).

[10] B. Scarpellini, P.A. Vuillermot, "Smooth Manifolds for Semilinear Wave Equations on $\mathbb{R}^2$: On the Existence of Almost–Periodic Breathers", J. Diff. Equations 77, 1 (1989), 123–166.

[11] P.A. Vuillermot, "Variétés lisses associées à certains systèmes dynamiques et solitons périodiques pour les équations de Klein–Gordon nonlinéaires sur $\mathbb{R}^2$ ", C.R. Acad. Sci. Paris 307, Série I (1988), 639–642.

[12] P.A. Vuillermot, "Problèmes de Cauchy multipériodiques et solitons quasipériodiques pour les équations de Klein–Gordon nonlinéaires sur $\mathbb{R}^2$ ", C.R. Acad. Sci. Paris 308, Série I (1989), 215–218.

[13] P.A. Vuillermot, "Quasiperiodic Soliton Solutions to Nonlinear Klein–Gordon Equations on $\mathbb{R}^2$ ", Math. Z., sous presse.

[14] P.A. Vuillermot, "Periodic Soliton Solutions to Nonlinear Klein–Gordon Equations on $\mathbb{R}^2$, J. of Diff. and Integral Equations, sous presse.

* * * *