CARACTERE DE CHERN BIVARIANT

Christian Kassel

Max–Planck–Institut
für Mathematik
Gottfried–Claren–Straße 26
D–5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur–C.N.R.S.
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg

France

MPI/88-57

CARACTERE DE CHERN BIVARIANT

Christian KASSEL

INTRODUCTION

Dans ce travail nous construisons un *caractère de Chern bivariant* à valeurs dans la *cohomologie cyclique bivariante* de Jones-Kassel [1988]. Cette dernière associe à tout couple (A, B) d'algèbres unifères sur un anneau commutatif k fixé, un k-module $\mathbf{Z}$-gradué $HC^*(A, B)$ qui possède les propriétés suivantes. Tout d'abord $HC^*(A, B)$ est bivariant, c'est-à-dire contravariant en A et covariant en B ; de plus, en spécialisant A ou B , on retrouve la cohomologie cyclique de Connes et sa version duale qui est l'homologie cyclique négative de Goodwillie. A l'instar de la KK-théorie de Kasparov, la cohomologie cyclique bivariante possède un produit général qui combine un produit de composition à la Yoneda et un produit externe, version cyclique du théorème d'Eilenberg-Zilber. Elle est aussi invariante par extension aux matrices. Enfin, à tout morphisme d'algèbres unifères

$$f : A \to B$$

on peut associer naturellement un élément $ch(f)$ de $HC^0(A, B)$ qu'on appelle le caractère de Chern bivariant du morphisme.

Notre but ici est avant tout d'étendre ce caractère de Chern naturel à certains homomorphismes d'algèbres généralisés. La première extension – facile – consiste à passer des algèbres unifères aux algèbres sans unité. Remarquons qu'un morphisme d'algèbres non unifères de l'anneau de base dans l'algèbre A n'est rien d'autre qu'un idempotent ; comme, d'autre part, un A-module projectif P de type fini est l'image d'un idempotent de $M_p(A)$ et que cette algèbre de matrices est équivalente à A au sens de la cohomologie cyclique (du moins si A est unifère), on arrive ainsi à associer à P une classe cyclique dans $HC^0(A, k)$ qui n'est autre que celle construite par Connes [1985], Hood-Jones [1987] ou Getzler-Szenes [1988].

Plus généralement, pour tout $A-B$-bimodule P qui est projectif de type fini comme B-module, on construit dans $HC^0(A, B)$ le caractère de Chern bivariant $ch(P)$ de P en lui associant des morphismes d'algèbres

$$A \to End_B(P) \to M_p(B)\,.$$

Ces bimodules forment une catégorie exacte dont nous appelons le groupe de Grothendieck $K(A,B)$ la *K-théorie algébrique bivariante* de (A,B) . On montre alors que le caractère de Chern bivariant s'étend en un homomorphisme de groupes

$$ch : K(A,B) \to HC^0(A,B).$$

La propriété cruciale qui permet d'établir que le caractère de Chern d'un module projectif ne dépend pas du plongement dans un module libre est que, pour toute algèbre unifère, le caractère de Chern d'un automorphisme intérieur est égal à celui de l'identité.

Ce caractère de Chern algébrique est également multiplicatif. En effet, le produit tensoriel des bimodules donne sur la K-théorie algébrique bivariante un produit général du même type que celui de la cohomologie cyclique bivariante. Ce produit permet d'ailleurs de faire opérer $K(A,B)$ sur la K-théorie algébrique de Quillen de A et de B comme un espace de correspondances (c'est ainsi que le transfert en K-théorie apparaît comme l'action d'un élément de K-théorie bivariante).

Le caractère de Chern bivariant préserve ces produits, ce qui se traduit par un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc}
K(A_1, B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbf{Z}} K(C \otimes A_2, B_2) & \longrightarrow & K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2) \\
\Big\downarrow ch & & \Big\downarrow ch \\
HC^0(A_1, B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbf{Z}} HC^0(C \otimes A_2, B_2) & \longrightarrow & HC^0(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2).
\end{array}$$

Une conséquence immédiate et amusante de la multiplicativité du caractère de Chern bivariant est la preuve de l'invariance de l'homologie cyclique par équivalence de Morita. Ce petit problème qui nous a servi de fil conducteur n'avait pas reçu de solution jusqu'ici. Il vient également d'être résolu par McCarthy [1988].

Le deuxième type d'homomorphismes généralisés pour lesquels nous construisons un caractère de Chern bivariant provient de la K-théorie bivariante de Kasparov et plus précisément de la présentation simplifiée qu'en a donnée Cuntz [1983]. Etant donné un quasi-homomorphisme de A dans J tel que défini par Cuntz (*loc. cit.*), nous montrons que sous une certaine condition sur J on peut lui associer une classe cyclique bivariante dans $HC^0(A,J)$. La condition dont nous avons besoin pour faire fonctionner notre formalisme est que J , sans être unifère, est *homologiquement unifère* (ou H-unifère), un concept très important mis à jour par Wodzicki [1988b]. Pour les applications géométriques que nous avons en vue, cette restriction n'est pas gênante car, comme Wodzicki l'a montré, toutes les C*-algèbres sont H-unifères de même que la plupart des algèbres qui sont au cœur de la "géométrie différentielle non commutative" de Connes.

Lorsque de plus J est de la forme $B \otimes I$ où I est un idéal munie d'une trace, alors tout quasi-homomorphisme de A dans $B \otimes I$ donne naissance à une classe bivariante dans $HC^0(A, B)$. Lorsque $B = k$, de tels "quasi-homomorphismes à trace" généralisent les modules de Fredholm 1-sommables de Connes [1985]; nous montrons que le caractère que nous construisons ici étend celui de Connes pour les modules de Fredholm 1-sommables. De même pour tout entier $p \geq 2$, nous définissons des "quasi-homomorphismes p-sommables" de A dans $B \otimes I$ et nous leur associons un caractère de Chern bivariant qui, cette fois-ci, est à valeurs dans le groupe

$$HP^0(A, B)$$

de *cohomologie cyclique bivariante périodique* de Jones-Kassel [1988].

La construction de la K-théorie algébrique bivariante et celle du caractère de Chern bivariant algébrique apparaissent au dernier chapitre. Tout ce qui concerne les algèbres H-unifères, et notamment leur application à la définition du caractère de Chern bivariant (topologique) d'un quasi-homomorphisme à la Cuntz, se trouve concentré au chapitre III. Dans les deux premiers chapitres nous établissons les propriétés de la cohomologie cyclique bivariante nécessaires aux constructions des chapitres III et IV.

Plus précisément, le premier chapitre contient un certain nombre de propriétés nouvelles de l'homologie cyclique. Indispensables pour la suite, elles présentent un intérêt par elles-mêmes. En voici un bref résumé. On sait que l'homologie cyclique se définit à l'aide de divers complexes (quatre pour être précis) dont Loday-Quillen [1984] ont montré qu'ils ont même homologie. Nous donnons en I.3, I.5 et I.6 des formules explicites qui montrent qu'en fait ces complexes sont homotopes entre eux. Mieux, trois d'entre eux sont des rétracts par déformation du quatrième.

Comme conséquence, nous construisons (du moins en caractéristique nulle) un endomorphisme explicite de degré -2 du complexe cyclique

$$A^{\otimes(*+1)}/(1-t)$$

qui induit l'opérateur S de Connes en homologie cyclique (voir I.4).

Un autre problème soulevé et partiellement résolu dans le chapitre I est celui qu'on rencontre communément lorsqu'on calcule des groupes d'homologie cyclique. Si l'homologie de Hochschild se calcule souvent avec un "petit" complexe, il n'existe malheureusement pas de procédure connue pour transporter l'opérateur B du complexe de Hochschild sur le "petit" complexe. Dans I.7 nous montrons à l'aide d'un lemme de perturbation dû à R. Brown comment résoudre ce problème lorsque le "petit" complexe est un rétract par déformation du complexe de Hochschild.

Nous terminons ce chapitre préliminaire par la comparaison des complexes calculant l'homologie cyclique de deux algèbres unifères et de leur algèbre-produit.

Le second chapitre est consacré à la cohomologie cyclique bivariante. Dans Jones-Kassel [1988] nous avions utilisé le (b,B)-bicomplexe de Connes pour construire les groupes $HC^*(A,B)$ lorsque A et B sont des algèbres unifères. Utilisant un autre bicomplexe, nous étendons ici la définition des groupes $HC^*(A,B)$ aux cas où les algèbres n'ont plus nécessairement une unité. Cette nouvelle présentation de la cohomologie cyclique bivariante permet d'associer à tout morphisme d'algèbres un cocycle bivariant et de donner à certains cycles cycliques une forme bien plus simple. Il en est ainsi du caractère de Chern $ch(e)$ de l'idempotent e d'une k-algèbre A qui est la classe dans le (b,B)-bicomplexe du cycle

$$e + \sum_{i\geq 1} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} \left(e^{\otimes(2i+1)} - \frac{1}{2}(1 \otimes e^{\otimes(2i)} - e^{\otimes(2i)} \otimes 1)\right) u^{-i} .$$

Les morphismes de complexes explicites construits au chapitre I permettent alors d'identifier précisément la classe $ch(e)$ de ce cocycle compliqué avec la classe dans $HC^0(k,A) = HC_0^-(A)$ du morphisme d'algèbres de k dans A qui associe e à 1 .

Nous montrons ensuite en II.3 que la cohomologie cyclique bivariante possède un couple exact qui généralise celui de Connes. En II.4 nous appliquons ce couple exact à une "formule de Cartan non commutative" pour étendre un résultat de Goodwillie sur les dérivations. Nous établissons également que, de même qu'une dérivation intérieure donne 0 en cohomologie cyclique bivariante, un automorphisme intérieur est cohomologue à l'identité. Le chapitre II s'achève avec un théorème d'additivité, la notion de HC-acyclicité et la preuve que le cône d'une algèbre unifère est HC-acyclique.

Dans le chapitre III nous commençons par rappeler ce qu'est une algèbre H-unifère au sens de Wodzicki [1988b] et comment les résultats de ce dernier permettre d'étendre certains de nos énoncés du chapitre II aux algèbres H-unifères. En III.2 nous nous occupons des extensions d'algèbres

$$0 \to I \to R \to A \to 0$$

de noyau H-unifère et nous montrons comment on peut associer à une telle extension une classe canonique dans $HC^1(A,I)$. Nous donnons deux applications, l'une aux opérateurs pseudo-différentiels en III.4, l'autre à la suspension d'une algèbre (III.3), ce qui nous donne les isomorphismes

$$HC^*(A,B) \cong HC^*(\Sigma A,B)[1] \cong HC^*(A,\Sigma B)[-1] .$$

En III.5 nous faisons appel à un vieux résultat de Hochschild [1947] pour établir qu'une extension de noyau H-unifère I fixé équivaut à la donnée d'un morphisme d'algèbres dans l'algèbre des multiplications extérieures de I . Cette dernière notion a, depuis, été développée par les spécialistes des algèbres d'opérateurs et a notamment donné naissance à l'invariant de Busby. Au paragraphe suivant nous montrons que si B est unifère et que $M_\infty(B)$ est l'algèbre des matrices finies sur B , alors l'algèbre des multiplications extérieures de $M_\infty(B)$ est isomorphe à la suspension ΣB de B . Par conséquent, à toute extension de A par $M_\infty(B)$ correspond un morphisme d'algèbres

$$f : A \to \Sigma B$$

dont le caractère de Chern $ch(f) \in HC^0(A, \Sigma B)$ est en correspondance *via* les isomorphismes de III.3 avec la classe de

$$HC^1(A, M_\infty(B)) \cong HC^1(A, B)$$

construite en III.~~1~~2. Avec le paragraphe III.6 s'achève l'étude des extensions d'algèbres, c'est-à-dire de la version algébrique du groupe KK^1 de Kasparov.

Le groupe KK^0 de Kasparov, lui, est engendré par les quasi-homomorphismes de Cuntz. Nous donnons en III.7 une définition algébrique de ces homomorphismes généralisés et leur associons une classe de cohomologie cyclique bivariante. Le chapitre s'achève avec l'étude des quasi-homomorphismes qui généralisent les modules de Fredholm p-sommables. Nous examinons également les cocycles cycliques associés à des "traces partielles".

Le chapitre IV est consacré à la définition de la K-théorie algébrique bivariante, du caractère de Chern bivariant et à la démonstration de ses propriétés. Dans le dernier paragraphe nous discutons les généralisations possibles du caractère de Chern aux groupes de K-théorie supérieure. Le développement de ces idées sera l'objet d'un travail ultérieur.

Les résultats des chapitres II et IV ont été essentiellement annoncés dans Kassel [1988].

CONVENTIONS. On fixe un anneau commutatif k . Sauf mention expresse du contraire, toutes les constructions se feront dans la catégorie des modules sur k , ce qui nous permettra d'omettre l'indice k dans les symboles

$$\otimes_k \quad \text{et} \quad Hom_k \, .$$

Les lettres grasses $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{C}$ désignent respectivement l'anneau des entiers, le corps des nombres rationnels et celui des nombres complexes. On identifie également un complexe de chaînes X_* à un complexe de cochaînes X^* au moyen de la convention usuelle

$$X^n = X_{-n} \, .$$

Pour tout entier p , le complexe $X[p]_*$ est donné par

$$X[p]_n = X_{n-p}\,.$$

Enfin si X_{**} est un bicomplexe, on notera X_* le complexe total associé.

REMERCIEMENTS. J.-B. Bost m'a proposé l'exemple du bimodule d'induction (IV.4.4) qui a été à l'origine de plusieurs de mes conclusions concernant le caractère de Chern bivariant. J. Stasheff m'a signalé l'existence du lemme de perturbation de R. Brown, lemme dont j'ai fait usage à plusieurs reprises. P. Deligne et M. Wodzicki m'ont prêté une oreille attentive. Je leur en suis reconnaissant ainsi qu'à l'Institute for Advanced Study de Princeton qui m'a permis de réaliser ce travail dans de très bonnes conditions.

PLAN

Je remercie aussi le Max-Planck-Institut de Bonn pour son soutien matériel.

I. COMPLEMENTS SUR L'HOMOLOGIE CYCLIQUE

Loday-Quillen [1984] ont montré que l'homologie cyclique d'une algèbre unifère A peut se calculer comme l'homologie de trois bicomplexes différents. Il s'agit du bicomplexe $CC_{..}(A)$ inspiré de Tsygan [1983] qui est défini même si A n'a pas d'unité, du (b,B)-bicomplexe standard $\mathrm{B}(A)$ qui existe dès que A est H-unifère au sens de Wodzicki [1988b] et du (b,B)-bicomplexe normalisé $\overline{\mathrm{B}}(A)$ qui, lui, requiert une unité. Si de plus A contient le corps des nombres rationnels, alors les bicomplexes précédents sont quasi-isomorphes à $C_{.}^{t}(A)$ qui est le plus grand complexe-quotient du complexe de Hochschild sur lequel les permutations circulaires opèrent trivialement.

Dans ce chapitre nous exhibons des formules explicites qui montrent que les complexes précédents sont tous des rétracts par déformation de $CC_{..}(A)$. Rappelons qu'un complexe X, d est un *rétract par déformation* d'un autre complexe Y, d s'il existe des morphismes de complexes $\nabla : X \to Y$ et $f : Y \to X$ tels que $f\,\nabla = id_X$ et $\nabla\, f = id_Y + d\varphi + \varphi d$ où φ est un endomorphisme de degré 1 de Y . Au cours des paragraphes suivants, nous donnerons explicitement f , ∇ ainsi que l'homotopie φ . Ces formules explicites nous serviront au chapitre II; elles nous permettent aussi de construire sur $C_{.}^{t}(A)$ un endomorphisme de complexe de degré -2 qui induit l'opérateur S de Connes en homologie cyclique. Elles expliquent également l'apparition de factorielles dans les formules données par Connes [1985], Karoubi [1987] et Hood-Jones [1987] pour le caractère de Chern d'un idempotent.

Nous avons inclus un dernier paragraphe sur l'homologie cyclique d'un produit d'algèbres unifères, paragraphe dont les résultats semblent également nouveaux. Commençons par fixer la terminologie et les notations.

1. Algèbres sans unité

Dans toute la suite k désigne un anneau commutatif. Le terme *algèbre* désigne une k-algèbre associative. Une algèbre est *unifère* si elle possède une unité notée 1. Un morphisme d'algèbres $f : A \to B$ est une application k-linéaire vérifiant :

$$f(aa') = f(a)\,f(a')$$

pour tous $a, a' \in A$. Un morphisme f d'algèbres est un morphisme d'algèbres unifères si A et B sont unifères et si de plus $f(1) = 1$. On notera $\mathbf{Alg}_k^-$ (resp. $\mathbf{Alg}_k$) la catégorie des algèbres (resp. des algèbres unifères) munies des morphismes d'algèbres (resp. d'algèbres unifères).

Le foncteur oubli de $\mathbf{Alg}_k$ vers $\mathbf{Alg}_k^-$ a un foncteur adjoint à gauche

$$A \mapsto A^+ = k \oplus A$$

où A^+ est obtenue à partir de A par adjonction d'une unité. L'algèbre unifère A^+ est augmentée et son idéal d'augmentation est isomorphe à A. La correspondance $A \mapsto A^+$ établit une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Alg}_k^-$ et celle des algèbres unifères augmentées. On a la formule d'adjonction

$$Hom_{\mathbf{Alg}_k}(A^+, B) \cong Hom_{\mathbf{Alg}_k^-}(A, B)\,.$$

Si de plus A est unifère, la bijection précédente montre que l'identité de A s'étend en un isomorphisme d'algèbres unifères de A^+ sur le produit $k \times A$.

2. Modules cycliques

Si A est une algèbre unifère, on lui associe un module cyclique $A^\natural$ au sens de Connes [1983] en posant : $A^\natural_q = A^{\otimes(q+1)}$ et

$$\begin{aligned}
d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_i\, a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q && (i < q)\\
d_q(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) &= a_q\, a_0 \otimes \ldots \otimes a_{q-1} &&\\
t(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) &= a_q \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{q-1} &&\\
s_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q) &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes a_q && (1 \leq i \leq q)\,.
\end{aligned}$$

Nous préférons parler dans ce cas de *module cyclique unifère.* Lorsque A n'a pas d'unité, il n'y a plus de dégénérescences s_i. Nous réservons donc le terme de *modules cycliques* aux modules cycliques sans dégénérescences, c'est-à-dire munis des seuls opérateurs d_i et t vérifiant les relations usuelles.

Etant donné un module cyclique (X, d_i, t), nous lui associons les opérateurs usuels

$$\begin{aligned}
b' &= \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i\, d_i : X_q \to X_q\\
b &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, d_i : X_q \to X_q\\
T &= (-1)^q\, t : X_q \to X_q\\
N &= 1 + T + \cdots T^q : X_q \to X_q\,.
\end{aligned}$$

Les opérateurs b et b' sont de carré nul; ils définissent donc des complexes X, b et X, b'.

Nous dirons que le module cyclique X est *H-unifère* lorsque le complexe X, b' est contractile. Il en est ainsi du module cyclique $A^\natural$ lorsque l'algèbre A est H-unifère au sens de Wodzicki [1988b].

2.1. Le bicomplexe $CC_{..}(X)$ est défini comme le bicomplexe suivant.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "-b'"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \\
X_2 \arrow[d, "b"'] & X_2 \arrow[l, "1-T"'] \arrow[d, "-b'"'] & X_2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & \cdots \arrow[l, "1-T"'] \\
X_1 \arrow[d, "b"'] & X_1 \arrow[l, "1-T"'] \arrow[d, "-b'"'] & X_1 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & \cdots \arrow[l, "1-T"'] \\
X_0 & X_0 \arrow[l, "1-T"'] & X_0 \arrow[l, "N"'] & \cdots \arrow[l, "1-T"']
\end{tikzcd}$$

2.2. Le complexe cyclique $C^t_.(X), b$ est défini comme le complexe-quotient

$$C^t_.(X), b = X./(1-T), b$$

du bicomplexe $CC_{..}(X)$.

2.3. Par définition, lorsque le module cyclique X est H-unifère, il existe une application s de degré 1 de X vers lui-même telle que

$$b'\, s + s\, b' = id_X$$

(le choix de s importe peu). On définit alors

$$B = (1-T)sN$$

dont on sait qu'il vérifie :

$$B^2 = Bb + bB = 0 \, .$$

L'opérateur B permet de construire le (b,B)-bicomplexe $\mathbf{B}(X)$ défini par $\mathbf{B}_{pq}(X) = X_{q-p}$, les différentielles horizontales (resp. verticales) étant données par B (resp. b).

3. Premier théorème de comparaison

Le but de ce paragraphe est de montrer que lorsque A contient $\mathbf{Q}$, alors le complexe $C^t_.(A)$ est rétract par déformation de $CC_{..}(A)$. Plaçons-nous dans la situation générale suivante.

Soit C_{pq} $(p, q \geq 0)$ un bicomplexe dont les différentielles horizontales sont notées ∂ et les différentielles verticales par δ. On a :

$$\partial^2 = \delta^2 = \partial\delta + \delta\partial = 0 \ .$$

On note $H.$ le complexe $H. = H_0(C.., \partial)$ muni de la différentielle induite par δ. Soit p la projection de $C..$ sur $H.$. Pour tout $q \geq 0$, on suppose qu'il existe une application $i : H_q \to C_{0,q}$ telle que

$$\begin{aligned} pi &= id_{H_q} \\ ip &= id_{C_{\cdot,q}} + \partial h + h\partial \end{aligned}$$

où h est un endomorphisme de degré 1 de $C_{\cdot,q}$. En d'autres termes, pour tout q le complexe H_q concentré en degré zéro est un rétract par déformation de $C_{\cdot,q}$. On va en déduire que $H., \delta$ est un rétract par déformation de $C. = \operatorname{Tot}(C..), d = \delta + \partial$.

Pour cela, numérotons les colonnes de $C..$ avec les puissances positives d'une variable q de degré 1 , de sorte que

$$C_n = \oplus_{i \geq 0} C_{i,n-i}\, q^i$$

et $d(xq^i) = \delta x\, q^i + \partial x\, q^{i-1}$ si $i \geq 1$ et $d(x\, q^0) = \delta x\, q^0$.

Posons

$$u = \sum_{n \geq 0} (h\delta)^n i\, q^n$$

et

$$H(q^p) = \sum_{n \geq 1} h(\delta h)^{n-1}\, q^{p+n} \ .$$

On notera que ces sommes sont localement finies et donc bien définies sur les complexes $H.$ et $C..$.

PROPOSITION 3.1. *Sous les hypothèses précédentes,*
(a) l'application u est un morphisme de complexes de $H.$ dans $C..$ et
(b) on a :

$$\begin{aligned} pu &= id_H \\ up &= id_C + dH + Hd \ . \end{aligned}$$

Par conséquent, $H., \delta$ est bien un rétract par déformation de $C., d$. Remarquons que (b) entraîne (a). En effet,

$$\begin{aligned} (du - u\delta)p &= d(1 + dH + Hd) - upd \\ &= d(1 + dH + Hd) - (1 + dH + Hd)d = 0 \ . \end{aligned}$$

Comme p est surjectif, on a : $du - u\delta = 0$.

La première formule de (b) est évidente. Quant à la seconde, elle résulte d'un calcul direct qui ne présente aucune difficulté grâce au lemme suivant.

LEMME 3.2. *Si* $[\ ,\ ]$ *désigne le commutateur gradué, alors*

$$[\partial, (h\delta)^n] = -\delta(h\delta)^{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$.

Démonstration : Par récurrence.

Nous appliquons maintenant ce qui précède au cas où X est un module cyclique. On considère maintenant le bicomplexe $CC_{..}(X)$ défini en 2.1. Rappelons que $CC_{pq}(X) = X_q$ et que les différentielles horizontales sont données par

$$\begin{aligned}\partial(x\, q^{2p}) &= N\, q^{2p-1}\\ \partial(x\, q^{2p-1}) &= (1-T)\, q^{2p-2}\end{aligned}$$

$(p \geq 1)$ et les différentielles verticales par

$$\begin{aligned}\delta(x\, q^{2p}) &= b\, q^{2p}\\ \delta(x\, q^{2p+1}) &= -\, b'\, q^{2p+1}\end{aligned}$$

$(p \geq 0)$.

Si on pose :

$$D = T\frac{dN}{dT} = T + 2T^2 + \cdots + q\,T^q : X_q \to X_q\ ,$$

alors on a la relation

$$(3.3) \qquad (1-T)\,D + (q+1) = N\ ,$$

qu'on obtient en dérivant $(1-T)\,N = 1 - T^{q+1}$ et en posant $T^{q+1} = 1$.

Par conséquent si les groupes X_p sont uniquement divisibles, on peut poser

$$\begin{array}{ccccc} i & = & \frac{N}{n+1}\, q^0 & : & X_n/(1-T) \to C_{.,n}(X) \\ h\, q^{2p} & = & \frac{D}{n+1}\, q^{2p+1} & : & X_n \to X_n \\ h\, q^{2p+1} & = & -\frac{id}{n+1}\, q^{2p+2} & : & X_n \to X_n\ . \end{array}$$

On se trouve alors dans la situation décrite plus haut puisque $pi = id$ et $ip = id + \partial h + h\partial$. En appliquant la proposition 3.1, on obtient le

THÉORÈME 3.4. *Pour tout module cyclique X uniquement divisible, la formule*

$$u(x) = \sum_{i\geq 0} \frac{(n-2i)!}{(n+1)!} \left(1 + \frac{q}{n-2i}\right) (b'Db)^i N x \, q^{2i}$$

($x \in X_n/(1-T)$) définit un morphisme de complexes de $C^t_\cdot(X)$ dans $CC_{\cdot\cdot}(X)$ inverse homotopique de la projection naturelle de $CC_{\cdot\cdot}(X)$ sur $C^t_\cdot(X)$.

4. L'opérateur S sur le complexe cyclique

Nous nous plaçons à nouveau dans la situation du début du paragraphe 3 où nous avons un bicomplexe $C_{\cdot\cdot}$ qui a $H_0(C_{\cdot\cdot}, \partial) = H_\cdot$ pour rétract par déformation. Nous supposons maintenant, comme c'est le cas pour $C_{\cdot\cdot} = CC_{\cdot\cdot}(X)$, que les colonnes paires de $C_{\cdot\cdot}$ sont identiques entre elles de même que les colonnes impaires. On a un morphisme de complexes

$$S : C_{\cdot\cdot} \rightarrow C_{\cdot\cdot}[2]$$

donné par $S\,q^p = q^{p-2}$ si $p \geq 2$ et $S\,q^p = 0$ sinon.

La question que nous allons résoudre est celle de l'existence sur $H_\cdot$ d'un endomorphisme de complexe S de degré –2 correspondant à la projection S de $C_{\cdot\cdot}$.

Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de S vérifiant $Sp = pS$. Par contre on a

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses précédentes et si $h^2 = 0$, il existe un morphisme de complexes $S : H_\cdot \rightarrow H_\cdot[2]$ et un seul tel que $uS = Su$. Il est donné par la formule*

$$S = p(h\delta)^2 i \, .$$

Démonstration. La formule $S = puS = pSu$ montre que S est unique et est un morphisme de complexes. La condition $uS = Su$ est équivalente aux conditions

$$(h\delta)^n i S = (h\delta)^{n+2} i$$

$(n \geq 2)$ ou encore à la condition

$$i\,S = (h\delta)^2 i \, .$$

Si donc on pose $S = p(h\delta)^2 i$, alors

$$\begin{aligned} iS = (ip)(h\delta)^2 &= (1+\partial h)(h\delta)^2 i \\ &= (h\delta)^2 i + \partial\, h^2\,(\delta h\delta)\, i \\ &= (h\delta)^2 i \end{aligned}$$

si $h^2 = 0$.

La condition $h^2 = 0$ n'est pas restrictive comme on le verra plus loin (*cf.* 7.2).

Lorsque nous appliquons ceci au cas d'un module cyclique X , on obtient une homotopie de carré nul en posant

$$\begin{aligned} h\,q^{2p} = &\quad \tfrac{(1-T)\,D^2}{(n+1)^2} : X_n \to X_n \\ h\,q^{2p+1} = &\quad \tfrac{N}{(n+1)^2} : X_n \to X_n \end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin d'écrire le morphisme u avec cette nouvelle homotopie. En appliquant la proposition 4.1, on obtient

THÉORÈME 4.2. *Soit X un module cyclique uniquement divisible. Si on pose*

$$Sx = \frac{b'(1-T)D^2 bN}{n^2(n+1)(n-1)}\, x$$

où $x \in X_n/(1-T)$, alors S définit un endomorphisme de degré -2 du complexe cyclique $C.^t(X)$ et induit l'opérateur S de Connes en homologie cyclique.

EXEMPLE 4.3. Soit e ($e^2 = e$) un idempotent d'une algèbre A . Posons

$$e_{n+1} = e^{\otimes(n+1)} \in C_n^t(A)\,.$$

On vérifie facilement que e_{2k+1} est un cycle pour le bord de Hochschild. En appliquant la formule du théorème 4.2, on a

$$S(e_{2k+1}) = \frac{1}{2(2k-1)}\, e_{2k-1}\,.$$

On notera que $S(e_{2k}) = 0$.

On donnera une autre application du théorème 4.2 dans III.8.

5. Deuxième théorème de comparaison

Nous nous donnons maintenant un module cyclique X qui est H-unifère. Dans ce cas, comme on l'a vu au paragraphe 2, les deux bicomplexes $CC..(X)$ et B..(X) sont bien définis.

Loday-Quillen [1984] ont construit un morphisme de complexes $I : \mathbf{B}.(X) \to CC.(X)$ qui induit un isomorphisme en homologie. Nous allons définir un inverse homotopique J de I et établir que $\mathbf{B}.(X)$ est un rétract par déformation de $CC.(X)$. Avant tout, introduisons une variable u de degré 2 pour pouvoir écrire le complexe total $\mathbf{B}.(X)$ de $\mathbf{B}..(X)$ de la manière suivante

$$\mathbf{B}_p(X) = \oplus_{k+2l=p} X_k\, u^l \ .$$

Alors I est donné par

$$I(x\, u^p) = x\, q^{2p} + sNx\, q^{2p-1} \ .$$

Nous définissons J par les formules

$$\begin{aligned} J(x\, q^{2p}) &= x\, u^p \\ J(x\, q^{2p+1}) &= (1-T)\, sx\, u^p \end{aligned}$$

Lemme 5.1. *L'application $J : CC.(X) \to \mathbf{B}.(X)$ commute aux différentielles et induit un isomorphisme en homologie.*

Démonstration. Un calcul direct et facile montre que J est un morphisme de complexes. Par ailleurs il préserve la filtration des bicomplexes par les colonnes. Sur le gradué associé J est la projection $x\, q^{2p} \mapsto x\, u^p$ de noyau le complexe acyclique $(X, b') \otimes qk[q]$.

Nous énonçons maintenant le deuxième théorème de comparaison.

Théorème 5.2. *Lorsque X est un module cyclique H-unifère, le complexe $\mathbf{B}.(X)$ est un rétract par déformation de $CC.(X)$. Plus précisément*
(a) $I\,J$ est homotope à l'identité de $CC.(X)$
(b) si $s^2 = 0$, alors $J\,I$ est l'identité de $\mathbf{B}.(X)$.

Rappelons que la condition $s^2 = 0$ n'est pas restrictive (*cf*. 7.2).

Démonstration. (a) Si on définit l'application φ sur $CC.(X)$ par

$$\begin{aligned} \varphi(x\, q^{2p}) &= 0 \\ \varphi(x\, q^{2p+1}) &= sx\, q^{2p+1} \ , \end{aligned}$$

on vérifie immédiatement que

$$I\,J = id + d\varphi + \varphi d \ .$$

(b) Pour l'autre composé on a :

$$J\,I(x\, u^p) = x\, u^p + (1-T)s^2 Nx\, u^{p-1} \ .$$

6. Troisième théorème de comparaison. Le cas de l'anneau de base

Soit X un module cyclique *unifère*. Alors X est un module simplicial et on peut considérer le sous-module $D(X)$ engendré par les dégénérescences. On sait que la projection $\pi : X \to X/D(X)$ induit un isomorphisme en homologie. D'après Loday–Quillen [1984], l'opérateur B de X passe au quotient par les dégénérescences. On peut alors définir le (b,B)-bicomplexe *normalisé* $\bar{\mathrm{B}}..(X)$ comme étant le bicomplexe $\mathrm{B}..(X)$ où on a remplacé X par $X/D(X)$. La projection $\pi : \mathrm{B}..(X) \to \bar{\mathrm{B}}..(X)$ est un quasi-isomorphisme.

Eilenberg et MacLane [1947] ont montré qu'en fait $X/D(X), b$ est un rétract par déformation de X, b . Nous établirons au paragraphe 7 que $\bar{\mathrm{B}}..(X)$ est un rétract par déformation de $\mathrm{B}..(X)$. Dans ce paragraphe-ci nous examinons le cas le plus simple, à savoir celui où X est le module cyclique trivial $k^{\natural}$ (k étant l'anneau de base).

Soit donc $X = k^{\natural}$. Alors X_n est libre de rang un engendré par $1_n = 1\otimes\ldots\otimes 1$ ($n+1$ fois). Un calcul facile donne le

LEMME 6.1. *On a :*

$$\begin{aligned}
b(1_{2n}) &= 1_{2n-1} \\
b(1_{2n-1}) &= 0 \\
b(1_0) &= 0 \\
b'(1_{2n}) &= 0 \\
b'(1_{2n-1}) &= 1_{2n-2} \\
T(1_n) &= (-1)^n\, 1_n \\
N(1_{2n}) &= (2n+1)\, 1_{2n} \\
N(1_{2n-1}) &= 0 \\
B(1_{2n}) &= 2(2n+1)\, 1_{2n+1} \\
B(1_{2n-1}) &= 0
\end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

Nous décrivons maintenant un morphisme de complexes $\iota : \bar{\mathrm{B}}..(k^{\natural}) \to \mathrm{B}..(k^{\natural})$. Notons que $\bar{\mathrm{B}}..(k^{\natural}) = HC.(k) = H.(BS^1, k)$.

PROPOSITION 6.2. *Posons*

$$\iota(u^p) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!}\, 1_{2i}\, u^{p-i} .$$

Alors ι *est un quasi-isomorphisme de* $\bar{\mathrm{B}}(k^{\natural})$ *dans* $\mathrm{B}(k^{\natural})$ *inverse homotopique* *de la projection* π .

Démonstration. Pour montrer que ι commute aux différentielles, il suffit de vérifier que $d\iota(u^p) = 0$ et donc que

$$(-1)^i \frac{(2i)!}{i!} b(1_{2i}) + (-1)^{i-1} \frac{(2i-2)!}{(i-1)!} B(1_{2i-2}) = 0 \qquad (i \geq 0) .$$

Le lemme précédent montre que c'est une conséquence de l'identité

$$2(2i-1) \frac{(2i-2)!}{(i-1)!} = \frac{(2i)!}{i!} .$$

Lorsqu'on filtre les deux bicomplexes par les colonnes, on voit que sur le gradué associé ι est le quasi-isomorphisme $k[0] \to k^\natural$. Par suite ι est un quasi-isomorphisme.

Il est clair que $\pi\iota = id_{\bar{\mathrm{B}}(k^\natural)}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le calcul suivant.

Proposition 6.3. *Sur* $\mathrm{B}(k^\natural)$ *on a la relation*

$$\iota\pi = id_{\mathrm{B}(k^\natural)} + d\sigma + \sigma d$$

où σ *est l'application de degré 1 donnée par*

$$\begin{aligned} \sigma(1_{2n}\, u^p) &= 0 \\ \sigma(1_{2n-1}\, u^p) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+1} \frac{(2n+2i)!\, n!}{(2n)!\, (n+i)!} 1_{2n+2i}\, u^{p-i} . \end{aligned}$$

Par conséquent, le complexe $\bar{\mathrm{B}}(k^\natural)$ *est un rétract par déformation de* $\mathrm{B}(k^\natural)$.

7. Le lemme de perturbation

Rappelons pour commencer la notion de rétraction par déformation.

Définition 7.1. *Une rétraction par déformation (RD en abrégé) est la donnée* $(L, M, \nabla, f, \varphi)$ *de deux complexes* L, b , M, b , *de morphismes de complexes*

$$L \xrightarrow{\nabla} M \xrightarrow{f} L$$

et d'une homotopie φ *sur* M *telle que*

$$\begin{aligned} f\,\nabla &= id_L \\ \nabla f &= id_M + b\varphi + \varphi b . \end{aligned}$$

On dit que la RD est filtrée s'il existe sur L et M des filtrations croissantes bornées inférieurement et préservées par ∇ , f et φ . La RD est dite spéciale si de plus

$$\varphi\nabla = f\varphi = \varphi^2 = 0\ .$$

REMARQUE 7.2. A partir d'une RD $(L, M, \nabla, f, \varphi)$, on obtient toujours une RD spéciale par les procédés suivants :

– Remplacer φ par $\varphi(b\varphi + \varphi b)$ permet d'obtenir une homotopie vérifiant $\varphi\nabla = 0$.

– Remplacer φ par $(b\varphi + \varphi b)\varphi$ permet d'obtenir une homotopie vérifiant $f\varphi = 0$.

– Remplacer φ par $\varphi b\varphi$ permet d'obtenir une homotopie vérifiant $\varphi^2 = 0$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de perturbation dû à R. Brown [1967].

LEMME 7.3. *On se donne une RD spéciale $(L, M, \nabla, f, \varphi)$. Soit D une application de degré -1 sur M telle que $(b+D)^2 = 0$. On pose $D_n = (D\varphi)^{n-1}D$ si $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 2$*

$$\begin{aligned}
b_n &= b + f\,(D_1 + \cdots + D_{n-1})\,\nabla \\
\nabla_n &= \nabla + \varphi\,(D_1 + \cdots + D_{n-1})\,\nabla \\
f_n &= f + f\,(D_1 + \cdots + D_{n-1})\,\varphi \\
\varphi_n &= \varphi + \varphi\,(D_1 + \cdots + D_{n-1})\,\varphi\ .
\end{aligned}$$

Si la RD est filtrée et que D diminue le degré de la filtration, alors les applications précédentes ont un sens pour $n = \infty$ et $\big((L, b_\infty), (M, b_\infty), \nabla_\infty, f_\infty, \varphi_\infty\big)$ est une RD spéciale filtrée.

Nous allons appliquer le lemme de perturbation à diverses situations en homologie cyclique.

L'homologie de Hochschild d'une algèbre se calcule rarement avec le complexe de Hochschild, mais le plus souvent avec un "petit" complexe. Si à partir de là, on veut déterminer son homologie cyclique, il se pose immédiatement la question de savoir s'il existe sur le "petit" complexe une différentielle correspondant à B et qui permet de calculer l'homologie cyclique avec ce "petit" complexe. Cette question est ouverte en général. Le lemme de perturbation précédent va cependant nous permettre d'y répondre lorsque le "petit" complexe est un rétract par déformation du complexe de Hochschild.

En effet, soit (M, b, B) un complexe mixte au sens de Kassel [1987]. Son homologie cyclique $HC.(M)$ est l'homologie du complexe $\mathrm{B}.(M)$ décrit au paragraphe 2.

Supposons qu'il existe une RD spéciale $(L, M, \nabla, f, \varphi)$, alors clairement $(k[u] \otimes L, k[u] \otimes M, id \otimes \nabla, id \otimes f, id \otimes \varphi)$ en est une aussi. Cette dernière RD est filtrée par les puissances de u . L'opérateur B diminue le degré de la filtration. On peut donc appliquer le lemme de perturbation et on obtient

PROPOSITION 7.4. *Soit (M, b, B) un complexe mixte et $(L, M, \nabla, f, \varphi)$ une RD spéciale. Alors $\mathrm{B}(M)$ a pour rétract par déformation le complexe $k[u]\otimes L, d$ où la différentielle d est donnée par*

$$d(u^p \otimes x) = \sum_{n \geq 0} u^{p-n} \otimes f(B\varphi)^{n-1} B\nabla x .$$

On a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 7.5. *Soit (L, b, B) et (M, b, B) deux complexes mixtes tels qu'il existe une RD $(L, M, \nabla, f, \varphi)$. Si f ou ∇ commute à B , alors il existe une RD $(\mathrm{B}(L), \mathrm{B}(M), \nabla_\infty, f_\infty, \varphi_\infty)$.*

Démonstration. On peut toujours supposer que la RD est spéciale. Alors on peut appliquer la proposition 7.4. Comme f ou ∇ commute à B et que $f\varphi = \varphi\nabla = 0$, on a

$$fB\nabla = B$$

et

$$f(B\varphi)^{n-1}B\nabla = 0$$

pour $n \geq 2$. On voit donc que la différentielle de la proposition 7.4 est celle du (b,B)-bicomplexe $\mathrm{B}(L)$.

Notons pour terminer que le lemme 7.3 montre aussi que si $\nabla B = B\nabla$ (resp. $fB = Bf$), alors $\nabla_\infty = \nabla$ (resp. $f_\infty = f$).

Le corollaire 7.5 s'applique aux deux situations suivantes.

APPLICATIONS 7.6 (a) Soit X un module cyclique unifère. On sait d'après Eilenberg-MacLane [1947] qu'il existe une RD $(X/D(X), X, i, \pi, \varphi)$ entre le complexe associé à X et le complexe normalisé. Il a été vérifié dans Loday-Quillen [1984] que π commute à B . Il existe donc une RD $(\bar{\mathrm{B}}(X), \mathrm{B}(X), \iota, \pi, \sigma)$ où ι est théoriquement calculable à l'aide des formules du lemme 7.3 et de celles que donnent Eilenberg et MacLane.

On peut d'ailleurs vérifier que lorsque $X = k^\natural$, on retrouve ainsi les formules explicites du paragraphe 6.

(b) Soit A une algèbre unifère et $M_r(A)$ l'algèbre unifère des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans A . On note $i_p : A \to M_r(A)$ ($1 \leq p \leq r$) le morphisme d'algèbres (non unifères) qui envoie A sur la position (p,p) . Ceci donne un morphisme

$$i_p^\natural : A^\natural \to M_r(A)^\natural$$

de modules cycliques.

On sait que Dennis a défini une *trace généralisée*

$$Tr : M_r(A)^\natural \to A^\natural$$

qui, elle, est un morphisme de modules cycliques unifères vérifiant

$$Tr\, i_p^\natural = id$$

et

$$i_p^\natural\, Tr = id + b\theta_p + \theta_p b$$

pour une homotopie θ_p . On trouvera une description de cette homotopie dans McCarthy [1988]. Comme Tr commute à B , on est dans une situation où on peut appliquer le corollaire 7.5, à savoir il existe $I_p : \mathrm{B}(A) \to \mathrm{B}(M_r(A))$ tel que $Tr\, I_p = id$ et $I_p\, Tr \sim id$. Notons que I_p est de la forme

$$I_p(u^n \otimes x) = \sum_{i \geq 0} u^{n-i} \otimes (\theta_p B)^i i_p(x) \, .$$

Il en résulte que II_pJ est un morphisme de complexes de $CC.(A)$ dans $CC.(M_r(A))$ tel que

$$Tr\, II_pJ \sim id \quad \text{et} \quad II_pJ\, Tr \sim id \, .$$

8. Produit d'algèbres

Le but de ce paragraphe est de montrer que si A_1 et A_2 sont deux algèbres unifères, alors le bicomplexe $CC(A_1) \oplus CC(A_2)$ est rétract par déformation du bicomplexe $CC(A_1 \times A_2)$.

Notons $p_k : A_1 \times A_2 \to A_k$ ($k = 1,2$) les projections canoniques et $i_k : A_k \to A_1 \times A_2$ ($k = 1,2$) les injections canoniques qui sont des morphismes d'algèbres. On a donc les morphismes de bicomplexes

$$CC(A_k) \xrightarrow{i_k^\natural} CC(A_1 \times A_2) \xrightarrow{p_k^\natural} CC(A_k) \, .$$

PROPOSITION 8.1. *On se donne deux algèbres unifères A_1 et A_2 . Alors il existe une RD*

$$(CC(A_1) \oplus CC(A_2), CC(A_1 \times A_2), i_1^\natural + i_2^\natural, p_1^\natural + p_2^\natural, \Phi) .$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme suivant et du lemme de perturbation appliqué au bicomplexe $CC(A_1 \times A_2)$ dans lequel les différentielles horizontales sont nulles.

LEMME 8.2. *Si A_1 et A_2 sont deux algèbres unifères, alors on a les RD*

$$((A_1^\natural \oplus A_2^\natural, b + b), ((A_1 \times A_2)^\natural, b), i_1^\natural + i_2^\natural, p_1^\natural + p_2^\natural, \varphi)$$

et

$$((A_1^\natural \oplus A_2^\natural, b' + b'), ((A_1 \times A_2)^\natural, b'), i_1^\natural + i_2^\natural, p_1^\natural + p_2^\natural, \varphi) .$$

Démonstration. Posons $e_k = i_k(1) \quad (k = 1, 2)$. Clairement $A_1^\natural \oplus A_2^\natural$ est en facteur direct dans $(A_1 \times A_2)^\natural$, le complément en degré q étant égal à

$$\bigoplus_f A_{f(0)} e_{f(0)} \otimes \ldots \otimes A_{f(q)} e_{f(q)}$$

où f parcourt toutes les applications *non constantes* de $\{0, \ldots, q\}$ dans $\{1, 2\}$. Pour une telle application f , soit $r(f)$ le plus petit entier i tel que $f(i) \neq f(0)$.

On définit alors l'homotopie φ de $(A_1 \times A_2)^\natural$ comme étant nulle sur $A_1^\natural \oplus A_2^\natural$ et par la formule

$$\begin{aligned} &\varphi(a_0 e_{f(0)} \otimes \ldots \otimes a_q e_{f(q)}) \\ &\qquad = (-1)^r \, a_0 e_{f(0)} \otimes \ldots \otimes a_{r-1} e_{f(0)} \otimes e_{f(r)} \otimes a_r e_{f(r)} \otimes \ldots \otimes a_q e_{f(q)} \end{aligned}$$

lorsque f est une application non constante telle que $r = r(f)$. On vérifie alors sans peine que

$$(p_1^\natural + p_2^\natural) \circ (i_1^\natural + i_2^\natural) = id$$

et

$$\begin{aligned} (i_1^\natural + i_2^\natural) \circ (p_1^\natural + p_2^\natural) &= id + b\varphi + \varphi b \\ &= id + b'\varphi + \varphi b' . \end{aligned}$$

II. COHOMOLOGIE CYCLIQUE BIVARIANTE

La cohomologie cyclique bivariante a été définie par Jones et Kassel [1988]. Nous complétons leurs résultats avec une nouvelle définition valable en toute généralité pour les algèbres sans unité, avec un couple exact généralisant celui de Connes pour la cohomologie cyclique, avec une "formule de Cartan non commutative", avec un théorème d'additivité ainsi qu'avec un résultat sur les automorphismes intérieurs qui se révélera essentiel au chapitre IV lorsque nous établirons les propriétés du caractère de Chern bivariant.

1. Nouvelle définition

Rappelons que Jones et Kassel [1988] définissent un S-module comme un complexe borné inférieurement équipé d'un endomorphisme S de degré -2 et commutant à la différentielle. Si P et Q sont deux S-modules, on note $Hom_S(P,Q)$ le complexe des applications graduées de P dans Q commutant à S .

Comme les complexes $CC.$ du chapitre I sont des S-modules, on peut poser la définition suivante.

DÉFINITION 1.1. *Soit X et Y des modules cycliques et A et B des algèbres. On pose*

$$HC^*(X,Y) = H_{-*}(Hom_S(CC(X), CC(Y)))$$

et

$$HC^*(A,B) = HC^*(A^\natural, B^\natural) .$$

On appellera $HC^*(X,Y)$ (resp. $HC^*(A,B)$) la cohomologie cyclique bivariante des modules cycliques X et Y (resp. A et B).

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de modules cycliques, nous noterons $[f]$ la classe qu'il définit dans $HC^0(X,Y)$. Si $u : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, $u^\natural$ désignera le cocycle cyclique associé et $ch(u)$ la classe de ce cocycle. Les groupes de cohomologie cyclique bivariante ont clairement un produit de composition noté $\cup$ tel que

$$[g \circ f] = [f] \cup [g]$$

et

$$ch(v \circ u) = ch(u) \cup ch(v) .$$

Nous exprimons maintenant la cohomologie cyclique bivariante en termes des autres bicomplexes qui définissent l'homologie cyclique. Tout d'abord, il est facile de voir que si P , Q et Q' sont des S-modules et que $u, v : Q \to Q'$ sont des applications de S-modules qui sont S-homotopes, *i.e.* homotopes *via* une homotopie commutant à S , alors

$$Hom(id, u)\,,\; Hom(id, v) : Hom_S(P, Q) \to Hom_S(P, Q')$$

et

$$Hom(u, id)\,,\; Hom(v, id) : Hom_S(Q', P) \to Hom_S(Q, P)$$

sont homotopes.

On dira que $(P, Q, \nabla, f, \varphi)$ est une RD de S-modules si c'est une RD au sens de I.7, que P et Q sont des S-modules et que ∇ , f et φ commutent à S .

Il résulte de ce qui précède que si $(P, Q, \nabla, f, \varphi)$ et $(P', Q', \nabla', f', \varphi')$ sont des RD de S-modules, alors

$$(Hom_S(P, P'), Hom_S(Q, Q'), Hom(f, \nabla'), Hom(\nabla, f'), \Phi)$$

est une RD (où Φ peut être calculée explicitement).

Les résultats du chapitre I montrent que si X est un module cyclique H-unifère (resp. unifère), alors $\mathbf{B}(X)$ (resp. $\bar{\mathbf{B}}(X)$) est un rétract par déformation de $CC(X)$ dans la catégorie des S-modules. Il en résulte que dans la définition 1.1, on peut remplacer les bicomplexes CC par les bicomplexes $\mathbf{B}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ lorsqu'ils sont définis. Les groupes de cohomologie cyclique bivariante définis ici généralisent donc ceux de Jones–Kassel [1988].

Par contre, la RD $(C^t(X), CC(X), u, p, H)$ de I.3 n'est pas une RD de S-modules. Comme u commute à S et que c'est un quasi-isomorphisme en caractéristique nulle, il résulte cependant du lemme 4.5 de Jones–Kassel [1988] que si X et Y sont des modules cycliques uniquement divisibles et si X est projectif sur k , alors

$$Hom_S(C^t(X), C^t(Y)) \quad \text{et} \quad Hom_S(CC(X), CC(Y))$$

sont quasi-isomorphes.

Soit A une algèbre et A^+ l'algèbre augmentée associée à A . Loday–Quillen [1984] ont défini le bicomplexe réduit $\mathbf{B}(A)_{red}$ comme le quotient de $\bar{\mathbf{B}}(A^+)$ par $\bar{\mathbf{B}}(k)$ et montré que $\mathbf{B}(A)_{red}$ est isomorphe à $CC(A)$. C'est un isomorphisme de S-modules. On peut donc également définir $HC^*(A, B)$ comme l'homologie du complexe

$$Hom_S(\mathbf{B}(A)_{red}, \mathbf{B}(B)_{red})\,,$$

c'est-à-dire de ce qu'on pourrait appeler la cohomologie cyclique bivariante réduite de A^+ et de B^+ . Il est clair que $HC^*(A, B)$ est en facteur direct dans $HC^*(A^+, B^+)$.

2. Le caractère de Chern d'un idempotent

D'après Jones-Kassel [1988] nous savons que si A est une algèbre unifère, alors

$$HC^{-*}(k,A) \cong HC_*^-(A)\ .$$

Cette identification peut se faire au moyen de l'application

$$Hom(I\iota, J) : Hom_S(CC(k), CC(A)) \to Hom_S(B(\Lambda), \mathrm{B}(A))$$

où I , J et ι ont été introduits dans I.5 et I.6 .

Soit maintenant e un idempotent de A . Alors e s'identifie au morphisme d'algèbres $e : k \to A$ qui envoie 1 sur e . Par conséquent $ch(e)$ est un élément bien défini de $HC^0(k,A) = HC_0^-(A)$. Nous allons montrer que *via* l'identification précédente, $ch(e)$ est la classe dans le (b,B)-bicomplexe du cocycle

$$e + \sum_{i\geq 1} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} \left(e^{\otimes(2i+1)} - \frac{1}{2}(1\otimes e^{\otimes(2i)} - e^{\otimes(2i)} \otimes 1)\right) u^{-i}$$

donné notamment dans Getzler-Szenes [1988]. On notera que ces derniers travaillent dans le complexe normalisé. Notre formule est plus généralement vraie dans le complexe standard.

En effet, on peut plus généralement considérer le cas où on a un morphisme de modules cycliques

$$f : k^\natural \to A^\natural$$

et poser $f_n = f(1_n)$. On appliquera ce qui suit au cas où $f = e^\natural$; dans ce cas on a :

$$f_n = e^{\otimes(n+1)}\ .$$

Le morphisme f définit un cocycle de $Hom_S(CC(k), CC(A))$. Pour déterminer le cocycle qui lui correspond dans $Hom_S(B(\Lambda), \mathrm{B}(A))$, il suffit de calculer $JfI\iota(u^p)$. On a :

$$\begin{aligned} JfI\iota(u^p) &= J(\sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} f_{2i}\, q^{2p-2i}) + J(\sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(2i+1)!}{i!} f_{2i+1}\, q^{2p-2i-1}) \\ &= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} f_{2i}\, u^{p-i} \\ &\quad + \sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} \frac{(2i-1)!}{(i-1)!} (1\otimes f_{2i-1} - f_{2i-1}\otimes 1)\, u^{p-i} \\ &= f_0 + \sum_{i\geq 1} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} \left(f_{2i} - \frac{1}{2}(1\otimes f_{2i-1} - f_{2i-1}\otimes 1)\right) u^{p-i}\ . \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré la

PROPOSITION 2.1. *Soit* $f : k^\natural \to A^\natural$ *un morphisme de modules cycliques et* $f_n = f(1_n)$. *Alors l'élément de* $HC_0^-(A)$ *qui lui correspond est représenté dans le* (b,B)*-bicomplexe* $\mathrm{B}(A)$ *par*

$$f_0 + \sum_{i\geq 1} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!} \Big(f_{2i} - \frac{1}{2}(1 \otimes f_{2i-1} - f_{2i-1} \otimes 1) \Big) u^{-i} .$$

3. Le couple exact de la cohomologie cyclique bivariante

On fera d'abord l'observation suivante. Soit P et Q des S-modules. Supposons que Q soit de la forme $CC(Y)$ ou $\mathrm{B}(Y)$; alors l'application

$$ad(S) : Hom(P,Q) \to Hom(P,Q)[2]$$

de Jones–Kassel [1988] est surjective et par conséquent on a la suite exacte de complexes

$$0 \to Hom_S(P,Q) \to Hom(P,Q) \to Hom(P,Q)[2] \to 0 .$$

PROPOSITION 3.1. *Soit* P *et* Q *des* S*-modules. Supposons que* $S : P \to P[2]$ *soit surjective et que* Q *soit de la forme* $CC(Y)$ *ou* $\mathrm{B}(Y)$. *Si de plus* P *est projectif sur* k , *alors il existe une suite exacte courte de complexes*

$$0 \to Hom_S(P,Q)[-2] \xrightarrow{S} Hom_S(P,Q) \xrightarrow{I} Hom(Ker\, S, Ker\, S) \to 0 .$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & Hom_S(P,Q)[-2] & \longrightarrow & Hom(P,Q)[-2] & \xrightarrow{ad(S)} & Hom(P,Q) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle Hom(S,id)} & & \downarrow{\scriptstyle Hom(S,id)} & \\
0 \longrightarrow & Hom_S(P,Q) & \longrightarrow & Hom(P,Q) & \xrightarrow{ad(S)} & Hom(P,Q)[2] & \longrightarrow 0 .
\end{array}$$

Puisque P est projectif, $Hom(S,id)$ est scindée et par conséquent injective de noyau $Hom(Ker\, S, Q)$. Il reste à calculer le noyau de

$$ad(S) : Hom(Ker\, S, Q) \to Hom(Ker\, S, Q)[2] .$$

Mais ici $ad(S)(f) = Sf - fS = Sf$. Comme $Ker\, S$ est projectif car facteur direct de P , ce noyau est isomorphe à $Hom(Ker\, S, Ker\, S)$.

Comme application immédiate de la proposition 3.1, nous obtenons une longue suite exacte pour la cohomologie cyclique bivariante . Avant de l'énoncer définissons une version bivariante de l'homologie de Hochschild.

DÉFINITION 3.2. *Soit X et Y des modules cycliques. Notons $HH^*(X,Y)$ l'homologie*

$$H_{-*}\Big(Hom(Ker(CC(X)\xrightarrow{S}CC(X)[2]),\, Ker(CC(Y)\xrightarrow{S}CC(Y)[2]))\Big).$$

Si A et B sont des algèbres, on pose

$$HH^*(A,B) = HH^*(A^\natural, B^\natural).$$

On remarquera que si A est une algèbre unifère, alors $HH^*(k,A)$ est isomorphe à l'homologie de Hochschild $H_{-*}(A,A)$ de A et $HH^*(A,k)$ est isomorphe à la cohomologie de Hochschild $H^*(A,A^*)$.

Nous donnons maintenant le couple exact de la cohomologie cyclique bivariante . Il est clair que si $A = k$ ou $B = k$ on retrouve les couples exacts de Connes.

THÉORÈME 3.3. *Soit X et Y des modules cycliques tels que X soit projectif sur k . Alors il existe une longue suite exacte naturelle*

$$\cdots\xrightarrow{B}HC^{n-2}(X,Y)\xrightarrow{S}HC^n(X,Y)\xrightarrow{I}HH^n(X,Y)\xrightarrow{B}HC^{n-1}(X,Y)\xrightarrow{S}\cdots.$$

Nous allons expliciter les morphismes I, S, B de la suite exacte précédente. Tout d'abord S peut être considéré aussi bien comme le produit de composition avec l'élément $S \in HC^2(X,X)$ que comme le produit de composition avec l'élément $S \in HC^2(Y,Y)$.

L'application I est le morphisme de restriction. Si $\alpha \in HC^n(X,Y)$ est représenté par un morphisme de complexes $f : CC(X) \to CC(Y)[n]$ commutant à S , donc de la forme

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}q^2 + f^{(2)} + \cdots,$$

alors $I(\alpha)$ est représenté par $f^{(0)}$.

Pour finir décrivons B dans le cadre des complexes mixtes.

PROPOSITION 3.4. *Soit (M, b, B) et (N, b, B) deux complexes mixtes. Si $\gamma \in HH^n(M, N)$ est représenté par le morphisme de complexes $f : M \to N[n]$ commutant à b , alors $B(\gamma)$ est la classe dans $HC^{n-1}(M, N)$ de*

$$m\, u^p \mapsto [B, f](m)\, u^p \, .$$

4. Formule de Cartan non commutative

Nous présentons maintenant une application du couple exact du paragraphe précédent. On se donne une algèbre A et une dérivation D sur A , *i.e.* un endomorphisme k-linéaire de A vérifiant

$$D(aa') = D(a)a' + aD(a')$$

pour tous $a, a' \in A$. On étend D à $A^+ = k \oplus A$ en posant

$$D(\lambda.1 + a) = D(a)$$

($\lambda \in k$ et $a \in A$). Cette formule définit une dérivation sur A^+ . Avec Rinehart [1963] et Goodwillie [1985] on pose

$$L_D(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_0 \otimes \ldots \otimes D(a_i) \otimes \ldots \otimes a_n \, .$$

Il est facile de vérifier que la "dérivée de Lie" L_D est un endomorphisme cyclique de $A^\natural$ et de $A^{+\natural}$; elle définit donc dans $HC^0(A, A)$ et dans $HC^0(A^+, A^+)$ un élément que nous noterons $[L_D]$. Rinehart et Goodwillie ont également défini un "produit intérieur" i_D de degré -1 par la formule

$$i_D(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0\, D(a_1) \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \, .$$

On a $[i_D, b] = 0$. Le produit intérieur définit donc un élément

$$[i_D] \in HH^1(A, A) \, .$$

PROPOSITION 4.1. *("Formule de Cartan non commutative") Soit D une dérivation d'une algèbre unifère A , alors dans $HC^0(A, A)$ on a l'égalité*

$$[L_D] = B([i_D])$$

où B est l'une des applications qui entrent dans le couple exact de la cohomologie cyclique bivariante .

COROLLAIRE 4.2. *Soit D une dérivation d'une algèbre A , alors dans $HC^2(A, A)$ on a*

$$S([L_D]) = 0 .$$

Démonstration du corollaire. Pour les algèbres unifères, le corollaire résulte de la proposition précédente et de la longue suite exacte (Théorème 3.3). Pour les algèbres sans unité on observe que $HC^*(A, A)$ s'injecte naturellement dans $HC^*(A^+, A^+)$.

Démonstration de la proposition 4.1. Rinehart et Goodwillie (*loc. cit.*) ont montré qu'il existe sur le complexe de Hochschild normalisé de A une application j_D de degré 1 vérifiant

$$\begin{aligned} L_D &= [B, i_D] + [b, j_D] \\ 0 &= [B, j_D] . \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.4, on a

$$\begin{aligned} (L_D - B([i_D]))(m\, u^p) &= (L_D - [B, i_D])(m)\, u^p \\ &= [b, j_D](m)\, u^p \\ &= [d, j_D](m)\, u^p . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $L_D - B([i_D])$ est un cobord.

Nous considérons maintenant le cas où la dérivation D est intérieure. Rappelons qu'une dérivation intérieure est une dérivation de la forme $ad(a)$: $x \mapsto [a, x] = ax - xa$. Pour simplifier nous noterons L_a la dérivée de Lie de $ad(a)$.

PROPOSITION 4.3. *Pour tout élément a d'une algèbre A , on a*

$$[L_a] = 0$$

dans $HC^0(A, A)$.

Démonstration. Comme avant, on se ramène au cas où A est unifère. Posons

$$\gamma_a(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1}\, a_0 \otimes \ldots \otimes a_i \otimes a \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n .$$

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} ad(a) &= [b, \gamma_a] \\ 0 &= [B, \gamma_a] . \end{aligned}$$

On en déduit comme dans la démonstration de la proposition 4.1 que $ad(a)$ est un cobord. On trouve aussi les formules concernant γ_a dans Farnsteiner [1988], Wodzicki [1988b], App. B et Getzler–Szenes [1988].

Comme les dérivations (resp. dérivations intérieures) de A s'identifient aux 1-cocycles (resp. 1-cobords) de Hochschild de A, on a le résultat suivant conséquence des propositions 4.1 et 4.3. Ici $H^1(A, A)$ désigne le groupe de cohomologie de Hochschild à valeurs dans le bimodule A lui-même.

COROLLAIRE 4.4. *La dérivée de Lie définit une application $D \mapsto L_D$ de $H^1(A, A)$ dans*

$$Ker(S : HC^0(A, A) \to HC^2(A, A)) = Im(B : HH^1(A, A) \to HC^0(A, A)) .$$

5. HC-équivalences et la trace généralisée de Dennis

Rappelons la définition donnée dans Kassel [1988] (voir aussi Jones–Kassel [1988]).

DÉFINITION 5.1. *Soit X et Y deux modules cycliques. On dit que X et Y sont HC-équivalents s'il existe $\alpha \in HC^0(X, Y)$ et $\beta \in HC^0(Y, X)$ tels que*

$$\alpha \cup \beta = ch(id_X) \quad \text{et} \quad \beta \cup \alpha = ch(id_Y) .$$

Les classes α et β sont appelées des HC-équivalences inverses l'une de l'autre.

Deux algèbres A et B sont HC-équivalentes si les modules cycliques $A^\natural$ et $B^\natural$ sont HC-équivalents.

Cette terminologie est justifiée par le fait que deux modules cycliques HC-équivalents sont équivalents pour l'homologie cyclique.

PROPOSITION 5.2. *Soit Z un module cyclique et $H(-)$ une des théories $HC^*(Z, -)$, $HC^*(-, Z)$, $HC_*(-)$, $HC_*^{per}(-)$ et $HC^*_{per}(-)$. Si X et Y sont HC-équivalents, alors*

$$H(X) \cong H(Y) .$$

Démonstration. Utiliser le produit de composition ainsi que la formule des coefficients universels de Jones–Kassel [1988], Thm. 4.2.

La proposition 6.3 de Jones–Kassel [1988] donne un critère pour l'existence d'une HC-équivalence. Le corollaire 7.5 du chapitre I montre que si (L, b, B) et

(M, b, B) sont deux complexes mixtes tels qu'il existe une RD $(L, M, \nabla, f, \varphi)$, alors L et M sont HC-équivalents pourvu que f ou ∇ commute avec B .

APPLICATION 5.3. *La trace généralisée de Dennis.*

Soit A une algèbre unifère. Les formules de I.7.6 (b) montrent que la trace généralisée de Dennis

$$Tr : M_r(A)^\natural \to A^\natural$$

induit une HC-équivalence

$$[Tr] \in HC^0(M_r(A), A)$$

d'inverse

$$[I_p] = [II_pJ] \in HC^0(A, M_r(A)) \ .$$

Le morphisme d'algèbres i_p définit un élément $ch(i_p) \in HC^0(A, M_r(A))$. On a

$$[II_pJ\,Tr\,i_p^\natural] = [II_pJ] = ch(i_p) \ .$$

Par conséquent II_pJ et $i_p^\natural$ diffèrent d'un cobord. Il en résulte qu'il existe φ_p sur $M_r(A)^\natural$ tel que

$$i_p^\natural\,Tr = id + d\varphi_p + \varphi_p d$$

et

$$Tr\,i_p^\natural = id \ .$$

6. Automorphismes intérieurs

Soit A une algèbre unifère et u un élément inversible de A . Notons $Ad(u) : a \mapsto uau^{-1}$ la conjugaison par u . C'est un endomorphisme de l'algèbre A.

THÉORÈME 6.1. *Soit u un élément inversible d'une algèbre unifère A . Alors on a*

$$ch(Ad(u)) = ch(Ad(1)) = ch(id_A)$$

dans $HC^0(A, A)$.

Démonstration. On fait appel à une astuce classique en K-théorie et qui consiste à plonger simultanément l'identité et la conjugaison par u dans les automorphismes intérieurs de $M_2(A)$. Soit

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a le diagramme commutatif d'algèbres (sans unité)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "Ad(u)"'] & M_2(A) \arrow[d, "Ad(U)"'] & A \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "id"'] \\ A \arrow[r, "i_1"] & M_2(A) & A \arrow[l, "i_2"'] \end{tikzcd} .$$

Notons aussi que

$$Tr\, Ad(U)^{\natural}\, i_1^{\natural} = Ad(u)$$

et

$$Tr\, Ad(U)^{\natural}\, i_2^{\natural} = id_{A^{\natural}} .$$

En utilisant 5.3 on a

$$\begin{aligned} Ad(u)^{\natural} - id &= Tr\, Ad(U)^{\natural}\,(i_1^{\natural} - i_2^{\natural})\, Tr\, i_1^{\natural} \\ &= Tr\, Ad(U)^{\natural}\,(d(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)d)\, i_1^{\natural} . \end{aligned}$$

Comme Tr , $Ad(U)^{\natural}$ et $i_1^{\natural}$ sont cycliques et donc commutent à d , on a

$$Ad(u)^{\natural} = id + d\psi + \psi d$$

où

$$\psi = Tr\, Ad(U)^{\natural}\,(\varphi_1 - \varphi_2)\, i_1^{\natural} .$$

Nous allons généraliser le théorème précédent au cas où on a deux éléments u et v de A tels que $p = vu$ et $q = uv$ soient des idempotents. Par exemple, si u est inversible, on peut prendre $v = u^{-1}$. On voit aussitôt que

$$B = \{a \in A |\, ap = pa = a\}$$

est une sous-algèbre de A . Notons i_B^A l'inclusion de B dans A .

Soit $\alpha_{u,v} : B \to A$ défini par

$$\alpha_{u,v}(a) = uav .$$

Il est clair que $\alpha_{u,v}$ est un morphisme d'algèbres et que $\alpha_{u,v}(p) = q$. Notons que si $p = q = 1$, alors $B = A$ et $\alpha_{u,v} = Ad(u)$.

THÉORÈME 6.2. *Soit A une algèbre unifère. Si u et v sont deux éléments de A tels que $p = vu$ et $q = uv$ soient des idempotents et si $B = \{a \in A|\, ap = pa = a\}$, alors on a*

$$ch(\alpha_{u,v}) = ch(i_B^A)$$

dans $HC^0(B,A)$.

Démonstration. La matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1-p & v \\ -u & 1-q \end{pmatrix}$$

est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1-p & -v \\ u & 1-q \end{pmatrix} .$$

La relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uav \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & v \\ -u & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & -v \\ u & 1-q \end{pmatrix}$$

se traduit par

$$i_2^\natural \, \alpha_{u,v}^\natural = Ad(V)^\natural \, i_1^\natural \, i_B^{A\,\natural}$$

et donc

$$\alpha_{u,v}^\natural = Tr \, Ad(V)^\natural \, i_1^\natural \, i_B^{A\,\natural} .$$

Or d'après 6.1,

$$Ad(V)^\natural = id + d\psi + \psi d .$$

Par conséquent, on a

$$\alpha_{u,v}^\natural = i_B^{A\,\natural} + d\chi + \chi d$$

où

$$\chi = Tr \, \psi \, i_1^\natural \, i_B^{A\,\natural} .$$

Nous terminons ce paragraphe avec le cas particulier suivant.

COROLLAIRE 6.3. *Soit A une algèbre unifère. Si u et v sont deux éléments de A tels que $vu = 1$, alors*

$$ch(\alpha_{u,v}) = ch(id_A) .$$

Démonstration. L'élément $q = uv$ est un idempotent car

$$q^2 = uvuv = u1v = q .$$

On peut donc appliquer le théorème précédent. On notera que dans ce cas-ci la sous-algèbre B s'identifie à A .

7. Théorème d'additivité

Nous énonçons maintenant un théorème d'additivité pour la cohomologie cyclique bivariante .

THÉORÈME 7.1. *Soit A_1 , A_2 , B des algèbres. On suppose que A_1 et A_2 sont unifères. Alors les applications*

$$\alpha \mapsto (\alpha \cup ch(p_1), \alpha \cup ch(p_2))$$

et

$$a \mapsto (ch(i_1) \cup \alpha, ch(i_2) \cup \alpha)$$

induisent respectivement les isomorphismes

$$HC^*(B, A_1 \times A_2) \xrightarrow{\cong} HC^*(B, A_1) \oplus HC^*(B, A_2)$$

et

$$HC^*(A_1 \times A_2, B) \xrightarrow{\cong} HC^*(A_1, B) \oplus HC^*(A_2, B) .$$

Démonstration. Considérons l'application

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cup ch(i_1) + \beta \cup ch(i_2)$$

de $HC^*(B, A_1) \oplus HC^*(B, A_2)$ dans $HC^*(B, A_1 \times A_2)$ et l'application

$$(\alpha, \beta) \mapsto ch(p_1) \cup \alpha + ch(p_2) \cup \beta$$

de $HC^*(A_1, B) \oplus HC^*(A_2, B)$ dans $HC^*(A_1 \times A_2, B)$. La proposition 8.1 du chapitre I montrent qu'elles sont des applications réciproques de celles de l'énoncé précédent.

EXEMPLE 7.2. Si A est unifère, on a l'isomorphisme

$$HC^*(A, A \times A) \cong HC^*(A, A) \oplus HC^*(A, A) .$$

La diagonale $\Delta : A \to A \times A$ est un morphisme d'algèbres. L'élément $ch(\Delta)$ de $HC^0(A, A \times A)$ correspond à $\big(ch(id_A), ch(id_A)\big) \in HC^0(A, A) \oplus HC^0(A, A)$ *via* l'isomorphisme précédent.

EXEMPLE 7.3. Soit A une algèbre unifère munie d'un morphisme d'algèbres $\oplus : A \times A \to A$. Ce dernier permet d'associer à deux endomorphismes d'algèbre f et g de A un troisième $f \oplus g$ défini par

$$f \oplus g = \oplus \circ (f \times g) \circ \Delta .$$

En utilisant le théorème d'additivité 7.1, on vérifie aussitôt que dans $HC^0(A, A)$ on a

$$ch(f \oplus g) = ch(f) \cup ch(id_A \oplus 0) + ch(g) \cup ch(0 \oplus id_A) .$$

EXEMPLE 7.4. Soit A une algèbre unifère. Suivant Farrell–Wagoner [1972], nous dirons que A est *une algèbre à somme directe* s'il existe des éléments u_1, v_1, u_2, v_2 dans A vérifiant

$$v_1 u_1 = v_2 u_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 1 .$$

De ces relations on déduit que la formule

$$a \oplus b = u_1 a v_1 + u_2 b v_2$$

définit un morphisme d'algèbres $\oplus : A \times A \to A$ tel que

$$id_A \oplus 0 = \alpha_{u_1, v_1} \quad \text{et} \quad 0 \oplus id_A = \alpha_{u_2, v_2} .$$

Il résulte donc de 6.3 et de 7.3 que si f et g sont des endomorphismes d'une algèbre à somme directe, alors on a

$$ch(f \oplus g) = ch(f) + ch(g)$$

dans $HC^0(A, A)$. Le cône et la suspension d'une algèbre unifère (voir chapitre III) sont des algèbres à somme directe.

8. HC-acyclicité

Nous introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 8.1. *On dit qu'une algèbre A est HC-acyclique si*

$$HC^*(A, A) = 0 .$$

On a la caractérisation suivante.

PROPOSITION 8.2. *Pour toute algèbre A , les quatre énoncés suivants sont équivalents.*

(i) A est HC-acyclique,

(ii) $HC^*(A, B) = 0$ pour toute algèbre B ,

(iii) $HC^*(B, A) = 0$ pour toute algèbre B ,

(iv) $ch(id_A) = 0$ dans $HC^0(A, A)$.

Démonstration. Il est clair qu'on a les implications

$$\begin{array}{ccc} & \text{(ii)} & \\ & \Downarrow & \\ \text{(iii)} \Rightarrow & \text{(i)} & \Rightarrow \text{(iv)} . \end{array}$$

Il suffit donc de démontrer que (iv) implique (ii) et (iii) , ce qui est évident au vu des relations

$$ch(f) = ch(f \circ id_A) = ch(id_A) \cup ch(f)$$

et

$$ch(f) = ch(id_A \circ f) = ch(f) \cup ch(id_A) .$$

Rappelons avec Farrell–Wagoner [1972] qu'une *algèbre à somme directe infinie* est une algèbre unifère A à somme directe telle que définie en 7.4 et munie d'un endomorphisme d'algèbres τ vérifiant

$$\tau = id_A \oplus \tau .$$

PROPOSITION 8.3. *Toute algèbre à somme directe est HC-acyclique.*

Démonstration. D'après 7.4, on a dans $HC^0(A, A)$ les égalités

$$ch(\tau) = ch(id_A \oplus \tau) = ch(id_A) + ch(\tau)$$

et donc

$$ch(id_A) = 0 .$$

Farrell et Wagoner [1972] ont montré que pour toute algèbre unifère A , le *cône* de A , à savoir l'algèbre ΓA des matrices *localement finies*, c'est-à-dire des matrices infinies dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A non nuls, est une algèbre à somme directe infinie. On a donc démontré

COROLLAIRE 8.4. *Le cône de toute algèbre unifère est HC-acyclique.*

REMARQUE. Les cônes d'algèbres unifères définis par Karoubi et Loday (voir la discussion dans le paragraphe 10 de Wodzicki [1988b]) sont également acycliques pour la même raison.

Il en est de même pour le cône d'une algèbre H-unifère moyennant une condition de projectivité. Pour éviter cette condition, nous supposerons dans l'énoncé qui suit que l'anneau de base est un corps.

PROPOSITION 8.5. *Si A est une algèbre H-unifère sur un corps commutatif k , alors le cône ΓA est H-acyclique.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $ch(id_{\Gamma A}) = 0$. Or ceci résulte du critère 6.3 de Jones–Kassel [1988] et de la nullité de l'homologie cyclique de ΓA établie par Wodzicki [1988b].

III. EXTENSIONS D'ALGEBRES

Dans ce chapitre nous avons inclus tout ce qui utilise l'hypothèse de H-unitarité introduite par Wodzicki [1988b]. Nous montrons au paragraphe 1 comment on peut étendre aux algèbres H-unifères certaines propriétés démontrées jusqu'ici seulement pour les algèbres possédant une unité. Au paragraphe 2, nous associons une classe de 1-cohomologie cyclique bivariante à toute extension d'algèbres de noyau H-unifère. Nous donnons deux applications aux paragraphes 3 et 4, l'une au calcul de la cohomologie cyclique bivariante de la suspension d'une algèbre H-unifère, l'autre aux opérateurs pseudo-différentiels. En 5 et 6, nous considérons les algèbres de multiplications. L'application la plus importante de la notion d'algèbre H-unifère apparaît aux paragraphes 7 et 8 où nous associons une classe cyclique bivariante à certains quasi-homomorphismes, notion introduite par Cuntz [1983] pour donner une présentation simplifiée de la K-théorie de Kasparov. Les quasi-homomorphismes pour lesquels nous construisons un caractère de Chern bivariant généralisent les modules de Fredholm p-sommables.

1. Algèbres H-unifères

Certaines propriétés de la cohomologie cyclique bivariante établies jusqu'ici pour des algèbres unifères s'étendent en fait aux algèbres H-unifères introduites par Wodzicki [1988b].

Le but de ce paragraphe est d'étendre ainsi le produit général de Jones-Kassel [1988] Théorème 5.2, le théorème d'additivité II.7.1 et l'invariance par la trace des matrices. Nos démonstrations vont reposer sur deux résultats de Wodzicki (*loc. cit.*), à savoir :
(i) le produit tensoriel d'une algèbre unifère par une algèbre H-unifère est H-unifère;
(ii) si A est H-unifère et A^+ est l'algèbre unifère augmentée obtenue en adjoignant une unité à A , alors l'inclusion

$$CC.(A) \to Ker(CC.(A^+) \to CC.(k))$$

est un quasi-isomorphisme de S-modules.

Pour ne pas traîner d'encombrantes hypothèses de projectivité, nous supposerons dans ce paragraphe que l'anneau de base k est un corps commutatif. Nous laissons le cas général au lecteur.

Commençons par le produit.

THÉORÈME 1.1 *Soit A_1, A_2, B_1, B_2, C des algèbres H-unifères sur un corps* *commutatif k . Il existe un accouplement naturel*

$$HC^*(A_1, B_1 \otimes C) \otimes HC^*(C \otimes A_2, B_2) \to HC^*(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$$

qui étend celui de Jones-Kassel [1988] et qui coïncide avec le produit de composition lorsque $B_1 = A_2 = k$, si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :
(i) B_1 et A_2 sont unifères,
(ii) A_1 , B_1 et C sont unifères,
(iii) A_2 , B_2 et C sont unifères.

Démonstration. Le produit de composition

$$HC^*(A,B) \otimes HC^*(B,C) \to HC^*(A,C)$$

est défini sans aucune restriction sur les algèbres. Pour le produit général, on sait qu'il suffit de construire des applications naturelles

$$R(A) : HC^*(B,C) \to HC^*(B \otimes A, C \otimes A)$$

$$L(A) : HC^*(B,C) \to HC^*(A \otimes B, A \otimes C).$$

comme dans Jones-Kassel [1988] §5. Nous allons traiter le cas de $L(A)$, celui de $R(A)$ étant essentiellement identique.

Par fonctorialité, il existe un morphisme naturel de complexes

$$Hom_S(CC(B), CC(C)) \to Hom_S(CC(A) \otimes^S CC(B), CC(A) \otimes^S CC(C))$$

où $\otimes^S$ désigne le produit cotensoriel des S-modules. Rappelons (voir Kassel [1987]) que celui-ci est donné par la suite exacte

$$0 \to CC(A) \otimes^S CC(B) \to CC(A) \otimes CC(B) \xrightarrow{S\otimes 1 - 1 \otimes S} CC(A) \otimes CC(B)[2] \to 0.$$

Admettons pour l'instant le résultat suivant.

LEMME 1.2. *Soit A une algèbre H-unifère et B une algèbre unifère, alors le "shuffle"-produit s'étend en un quasi-isomorphisme de S-modules*

$$CC(A) \otimes^S CC(B) \to CC(A \otimes B).$$

Si donc A, B, C sont H-unifères et que, de plus, A est unifère ou B et C sont unifères, alors on voit que

$$Hom_S(CC(A) \otimes^S CC(B), CC(A) \otimes^S CC(C))$$

et

$$Hom_S(CC(A \otimes B), CC(A \otimes C))$$

sont quasi-isomorphes, ce qui établit l'existence de $L(A)$ sous les mêmes hypothèses. On en déduit facilement le théorème 1.1.

Démonstration du lemme 1.2. Considérons les noyaux des projections canoniques

$$K = Ker(CC(A^+) \to CC(k)) \quad \text{et} \quad L = Ker(CC(A^+ \otimes B) \to CC(B)).$$

Puisque A et $A \otimes B$ sont H-unifères, les inclusions naturelles

$$CC(A) \to K \quad \text{et} \quad CC(A \otimes B) \to L$$

sont des quasi-isomorphismes de S-modules. Considérons maintenant le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} CC(A) \otimes^S CC(B) & \to & CC(A \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CC(k) \otimes^S CC(B) & \to & CC(B) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par le "shuffle"-produit et sont de ce fait (voir Kassel [1987]) des quasi-isomorphismes de S-modules. Le noyau de la flèche verticale de gauche est isomorphe à $K \otimes^S CC(B)$ qui est, lui-même, quasi-isomorphe à $CC(A) \otimes^S CC(B)$ (utiliser la suite exacte définissant le produit cotensoriel). Le lemme résulte alors des quasi-isomorphismes de S-modules

$$CC(A) \otimes^S CC(B) \to K \otimes^S CC(B) \to L \leftarrow CC(A \otimes B).$$

Nous étendons maintenant le théorème d'additivité II.7.1.

PROPOSITION 1.3. *Soit A_1, A_2, B des algèbres. On suppose que l'une des algèbres A_1, A_2 est unifère et que l'autre est H-unifère. Alors les applications du théorème II.7.1. induisent des isomorphismes*

$$HC^*(B, A_1 \times A_2) \xrightarrow{\cong} HC^*(B, A_1) \oplus HC^*(B, A_2)$$

et

$$HC^*(A_1 \times A_2, B) \xrightarrow{\cong} HC^*(A_1, B) \oplus HC^*(A_2, B).$$

La proposition est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 1.4. *Si A_1 est unifère et A_2 est H-unifère, alors les projections $p_k : A_1 \times A_2 \to A_k$ ($k = 1, 2$) induisent un quasi-isomorphisme de S-modules*

$$CC(A_1 \times A_2) \to CC(A_1) \oplus CC(A_2).$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CC(A_1 \times A_2^+) & \to & CC(A_1) \oplus CC(A_2^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CC(0 \times k) & \to & 0 \oplus CC(k). \end{array}$$

D'après la proposition I.8.1, les flèches horizontales induites par les projections sont des quasi-isomorphismes de S-modules. Comme A_2 et $A_1 \times A_2$ sont H-unifères, les noyaux des flèches verticales sont respectivement quasi-isomorphes à

$$CC(A_1 \times A_2) \quad \text{et} \quad CC(A_1) \oplus CC(A_2).$$

Pour finir ce paragraphe, notons que la trace généralisée de Dennis

$$Tr : CC(M_r(A)) \to CC(A)$$

qui est définie pour toute algèbre A est une HC-équivalence dans $HC^0(M_r(A), A)$ lorsque A est H-unifère. Une HC-équivalence inverse est donnée par $ch(i_p)$ $(1 \leq p \leq r)$ (pour les notations, voir I.7.6 (b)). En effet, ceci résulte du corollaire 9.8 de Wodzicki [1988b] et du critère 6.3 de Jones-Kassel [1988].

2. Longues suites exactes et classe de cohomologie cyclique bivariante associées à une extension d'algèbres

Le but de ce paragraphe est d'associer à l'extension d'une algèbre A par une algèbre I qui est H-*unifère* au sens de Wodzicki [1988b] un élément naturel de $HC^1(A, I)$ qui est nul lorsque l'extension est scindée.

Toutes les extensions $0 \to I \to R \to A \to 0$ considérées ici sont *pures*, *i.e.* pour tout k-module V , le module $I \otimes V$ s'injecte naturellement dans $R \otimes V$. Wodzicki [1988b] a montré que lorsque I est H-unifère, alors l'application naturelle de S-modules

$$CC(I) \to Ker(CC(R) \to CC(A))$$

est un quasi-isomorphisme. En utilisant le paragraphe 4 de Jones–Kassel [1988], on obtient pour toute algèbre B le triangle exact

$$Hom_S(CC(B), CC(I)) \to Hom_S(CC(B), CC(R)) \to Hom_S(CC(B), CC(A))$$

si A et B sont projectifs sur k , ainsi que le triangle exact

$$Hom_S(CC(A), CC(B)) \to Hom_S(CC(R), CC(B)) \to Hom_S(CC(I), CC(B))$$

si A et I sont projectifs. Notons que sous ces hypothèses supplémentaires, l'extension $0 \to I \to R \to A \to 0$ est pure puisque scindée comme extension de k-modules. Si de plus la projection $R \to A$ est scindée dans la catégorie des algèbres, alors les triangles exacts précédents sont scindés. Résumons.

THÉORÈME 2.1. *Soit $0 \to I \to R \to A \to 0$ une extension d'algèbres telle que I soit H-unifère et A soit projective sur k . Alors*

(a) pour toute algèbre B projective sur k , il existe une longue suite exacte naturelle

$$\cdots \to HC^n(B, I) \to HC^n(B, R) \to HC^n(B, A) \xrightarrow{\partial} HC^{n+1}(B, I) \to \cdots ,$$

(b) si de plus I est projective, alors pour toute algèbre B il existe une longue suite exacte naturelle

$$\cdots \to HC^n(A, B) \to HC^n(R, B) \to HC^n(I, B) \xrightarrow{\partial'} HC^{n+1}(A, B) \to \cdots ,$$

(c) si l'extension d'algèbres $0 \to I \to R \to A \to 0$ est scindée, alors les homomorphismes de liaison ∂ et ∂' des suites exactes précédentes sont nuls.

Puisque les suites exactes du théorème sont naturelles, on voit aussitôt que l'homomorphisme de liaison $\partial : HC^n(B, A) \to HC^{n+1}(B, I)$ est égal au produit de composition à droite avec l'élément

$$\partial(ch(id_A)) \in HC^0(A, I) .$$

De même $\partial' : HC^n(I, B) \to HC^{n+1}(A, B)$ est égal au produit de composition à gauche avec l'élément

$$\partial'(ch(id_I)) \in HC^0(A, I) .$$

LEMME-DÉFINITION 2.2. *Soit $0 \to I \to R \to A \to 0$ une extension d'algèbres telle que I soit H-unifère et A et I soient projectives sur k . Alors dans $HC^1(A, I)$ on a l'égalité :*

$$\partial(ch(id_A)) = -\partial'(ch(id_I)) .$$

On note $ch^1(R \to A)$ l'élément de $HC^1(A, I)$ ainsi défini et on l'appelle la classe de cohomologie cyclique bivariante associée à l'extension.

Démonstration. Notons p la projection de R sur A . Soit

$$f \in Hom_S(CC(A), CC(R))_0$$

tel que $p^\natural \circ f = id_A^\natural$. Alors $\partial\big(ch(id_A)\big)$ est la classe dans

$$Hom_S\big(CC(A), Ker(CC(R) \xrightarrow{p^\natural} CC(A))\big)_{-1}$$

de $d(f) = [d, f]$.

Posons $K = Ker(CC(R) \xrightarrow{p^\natural} CC(A))$. Considérons la suite exacte de complexes

$$0 \to Hom_S(CC(A), K) \to Hom_S(CC(R), K) \to Hom_S(K, K) \to 0 .$$

Pour calculer $\partial'\big(ch(id_I)\big)$, il faut trouver un relèvement $g \in Hom_S(CC(R), K)$ de l'identité de K . Or clairement on peut prendre

$$g = id^\natural - f \circ p^\natural .$$

Comme l'identité et $p^\natural$ sont des morphismes de complexes, on a

$$d(g) = [d, g] = 0 - [d, f] \circ p^\natural .$$

L'élément $\partial'\big(ch(id_I)\big)$ est donc égal à la classe de $-[d, f]$, c'est-à-dire à $\partial\big(ch(id_A)\big)$.

De ce qui précède, on déduit immédiatement les formules de changement de base suivantes.

THÉORÈME 2.3. *Soit $0 \to I \to R \to A \to 0$ une extension d'algèbres vérifiant les hypothèses du lemme 2.2.*

(a) Si $B \xrightarrow{f} A$ est un morphisme d'algèbres et si B est projective sur k , alors

$$ch^1(f^*(R \to A)) = ch(f) \cup ch^1(R \to A)$$

où $f^*(R \to A)$ désigne l'image réciproque par f de l'extension $R \to A$.

(b) Si $I \to J$ est un morphisme d'algèbres et si J est H-unifère et projective sur k , alors

$$ch^1(f_*(R \to A)) = ch^1(R \to A) \cup ch(f)$$

où $f_*(R \to A)$ désigne l'image directe par f de l'extension $R \to A$.

3. Cône et suspension d'une algèbre

On donne ici une application immédiate des longues suites exactes du théorème 2.1 en calculant la cohomologie cyclique bivariante de la suspension d'une algèbre. Pour éviter des hypothèses de projectivité, nous supposerons dans ce paragraphe que l'anneau de base k est un corps commutatif.

Le cône ΓA des matrices localement finies d'une algèbre A contient l'idéal bilatère $M_\infty(A)$ des matrices finies, idéal défini par

$$M_\infty(A) = \bigcup_n M_n(A) .$$

On appelle *suspension* de A l'algèbre-quotient

$$\Sigma A = \Gamma A / M_\infty(A) .$$

Nous avons vu au chapitre II que si A est H-unifère, alors $M_\infty(A)$ est HC-équivalente à A et que ΓA est HC-acyclique. En vertu du théorème 2.1 de ce chapître, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soit A une algèbre H-unifère et B une algèbre quelconque sur un corps commutatif k . Alors on a*

$$HC^*(\Sigma A, B) \cong HC^*(A, B)[-1]$$

et

$$HC^*(B, \Sigma A) \cong HC^*(B, A)[1] ,$$

les isomorphismes étant donnés par produit de composition avec

$$ch^1(\Gamma A \to \Sigma A) \cup [Tr] .$$

REMARQUE 3.2. Soit $0 \to I \to R \to A \to 0$ une extension d'algèbres H-unifères. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_\infty(I) \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \Gamma(I) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_\infty(I) \arrow[r] & \Gamma(R) \arrow[r] & \Gamma(R)/M_\infty(I) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_\infty(I) \arrow[r] \arrow[u, "id"] & M_\infty(R) \arrow[r] \arrow[u] & M_\infty(A) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[u, "i_1"] & R \arrow[r] \arrow[u, "i_1"] & A \arrow[r] \arrow[u, "i_1"] & 0
\end{tikzcd}$$

Le quotient de $\Gamma(R)/M_\infty(I)$ par $\Sigma(I)$ étant isomorphe au cône $\Gamma(A)$, l'inclusion

$$\Sigma(I) \to \Gamma(R)/M_\infty(I)$$

induit une HC-équivalence. Comme conséquence du théorème 3.1, on a la suite d'isomorphismes

$$HC^1(A, I) \cong HC^0(A, \Sigma(I)) \cong HC^0(A, \Gamma(R)/M_\infty(I)) .$$

Il résulte du théorème 2.3 de changement de base que sous ces isomorphismes l'image de la classe $ch^1(R \to A)$ associée à l'extension considérée est la classe du morphisme composé $A \xrightarrow{i_1} M_\infty(A) \longrightarrow \Gamma(R)/M_\infty(I)$ apparaissant dans le diagramme précédent.

REMARQUE 3.3. Pour toute algèbre H-unifère A , on a :

$$HC^2(A, A) \cong HC^0(A, \Sigma^2(A)) .$$

Il serait intéressant d'expliciter un cocycle bivariant dont la classe dans $HC^0(A, \Sigma^2(A))$ est l'image de l'opérateur S de Connes.

4. Application aux opérateurs pseudo-différentiels

Soit X une variété C^∞ sans bord et E un fibré vectoriel complexe au-dessus de X . Considérons avec Wodzicki [1988a] l'extension d'algèbres complexes

$$0 \to L^{-\infty}(X, E) \to CL^0(X, E) \to CS^0(X, E) \to 0$$

où $L^{-\infty}(X, E)$ est l'algèbre des opérateurs régularisants sur $C^\infty(X, E)$ et $CL^0(X, E)$ est l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre ≤ 0 (voir Shubin [1987]). Pour appliquer les résultats du paragraphe 2, il faut définir au préalable la cohomologie cyclique bivariante topologique pour des algèbres localement convexes. Nous ne le ferons pas ici, nous contentant d'affirmer que cela se fait en suivant les lignes de Connes [1985] II.5. En particulier nous supposons maintenant que toutes les cochaînes bivariantes sont continues pour les topologies appropriées. Ceci étant posé, on déduit de Wodzicki [1988a] que les espaces vectoriels de cohomologie cyclique bivariante topologique vérifient les isomorphismes :

$$HC^1(CS^0(X,E), L^{-\infty}(X,E)) \cong HC^1(CS^0(X,E), \mathbf{C}) \cong HC^1(CS^0(X,E))$$

et donc $ch^1(CL^0(X,E) \to CS^0(X,E))$ correspond à la forme linéaire

$$I_1 : HC_1(CS^0(X,E)) \to \mathbf{C}$$

du théorème 4 de Wodzicki [1988a]. Comme I_1 n'est pas nulle, il résulte que

$$ch^1(CL^0(X,E) \to CS^0(X,E)) \neq 0\,.$$

Pour mémoire, explicitons I_1 . Soit

$$\sum_\nu a_0^\nu \otimes a_1^\nu$$

un cycle représentant une classe α de $HC_1(CS^0(X,E))$; on a

$$\sum_\nu [a_0^\nu, a_1^\nu] = 0\,.$$

Remontons les symboles a_i^ν en des opérateurs pseudo-différentiels A_i^ν . Alors $I_1(\alpha)$ est égal à la trace de l'opérateur régularisant

$$\sum_\nu [A_0^\nu, A_1^\nu]\,.$$

De même (voir Wodzicki [1987][1988a]), la classe de cohomologie cyclique bivariante associée à l'extension des opérateurs de Toeplitz sur le cercle S^1 n'est pas nulle dans

$$HC^1(CS^0_+(S^1), L^{-\infty}(S^1)) \cong HC^1(CS^0_+(S^1)) \cong \mathbf{C}\,.$$

5. L'algèbre des multiplications de Hochschild

Nous rappelons maintenant quelques résultats de Hochschild [1947] selon lesquels les extensions d'algèbres de noyau fixé I sont caractérisées par des morphismes d'algèbres à valeurs dans l'algèbre des multiplications extérieures de I . L'invariant de Busby des C*-algèbres est un cas particulier de cette théorie.

Une *multiplication* d'une algèbre I est un couple (u,v) d'endomorphismes k-linéaires de I vérifiant :

(i) u est I-linéaire à droite,

(ii) v est I-linéaire à gauche et

(iii) $xu(y) = v(x)y$ pour tout $x, y \in I$.

Etant donné un élément x de I , on appelle *multiplication intérieure* par x le couple

$$m(x) = (y \mapsto xy, y \mapsto yx)$$

de $End(I) \times End(I)$. Toute multiplication intérieure est une multiplication. On vérifie que si on pose

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

et

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (u_1 u_2, v_2 v_1)\,,$$

on munit l'ensemble $\mathrm{M}(I)$ des multiplications de I d'une structure d'algèbre unifère, d'unité égale à (id_I, id_I) . De plus l'application $m : I \to \mathrm{M}(I)$ est un morphisme d'algèbres.

On définit l'*algèbre des multiplications extérieures* $Q(I)$ et l'*annulateur* $Ann(I)$ de I au moyen de la suite exacte suivante

$$0 \to Ann(I) \to I \xrightarrow{m} \mathrm{M}(I) \to Q(I) \to 0\,.$$

EXEMPLES 5.1. (a) Si I est unifère, alors m est un isomorphisme de I sur $\mathrm{M}(I)$.

(b) Si $I^2 = 0$, alors $I = Ann(I)$, l'application m est nulle et

$$\mathrm{M}(I) = Q(I) = End(I) \times End(I)^{\circ}\,.$$

(c) Si I est une C*-algèbre, alors $Ann(I) = 0$ (voir Busby [1968]).

Si maintenant $0 \to I \to R \xrightarrow{p} A \to 0$ est une extension d'algèbres de noyau I , alors si on pose

$$\rho(r) = (x \mapsto rx, x \mapsto xr)\,,$$

on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "H_{R-A}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & m(I) \arrow[r] & \mathrm{M}(I) \arrow[r] & Q(I) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nous appellerons *invariant de Hochschild* de l'extension considérée le morphisme d'algèbres

$$H_{R-A} : A \to Q(I)\,.$$

Si $Ann(I) = 0$, alors $I \cong m(I)$ et l'extension donnée est l'image réciproque de l'extension

$$0 \to I \to \mathrm{M}(I) \to Q(I) \to 0$$

par l'invariant de Hochschild H_{R-A} . Dans le cas général, Hochschild [1947] a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2. *Si $I = I^2$ et si la projection $\mathrm{M}(I) \to Q(I)$ est scindée par une application k-linéaire, alors il existe une extension universelle*

$$0 \to I \to \mathrm{N}(I) \to Q(I) \to 0$$

telle que toute extension d'algèbres

$$0 \to I \to R \to A \to 0$$

scindée comme extension de modules est l'image réciproque par l'invariant H_{R-A} de l'extension universelle, i.e. le carré

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "H_{R-A}"'] \\ \mathrm{N}(I) \arrow[r] & Q(I) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Remarquons que si $Ann(I) = 0$, alors $\mathrm{N}(I) = \mathrm{M}(I)$. On trouvera la description de $\mathrm{N}(I)$ dans le cas général dans Hochschild [1947] p.932.

Nous appliquons maintenant la théorie de Hochschild à la 1-classe de cohomologie cyclique bivariante associée à une extension d'algèbres de noyau H-unifère, telle que nous l'avons construite au paragraphe 2.

Remarquons d'abord que si I est H-unifère, alors nécessairement

$$I/I^2 = Tor_1^{I^+}(k,k) = 0\,.$$

Si I est H-unifère et que I et $Q(I)$ sont projectives sur k , alors l'élément

$$ch^1(I) = ch^1(\mathrm{N}(I) \to Q(I)) \in HC^1(Q(I), I)$$

associé à l'extension universelle du théorème 5.2 est bien défini. Comme conséquence du théorème 2.3 de changement de base, on a

PROPOSITION 5.3. *Soit I une algèbre H-unifère telle que I et $Q(I)$ soient projectives sur k . Alors pour toute extension d'algèbres $0 \to I \to R \to A \to 0$ de noyau I telle que A est projective sur k , l'élément $ch^1(R \to A)$ de $HC^1(A, I)$ est donné par*

$$ch^1(R \to A) = ch(H_{R \to A}) \cup ch^1(I)\,.$$

REMARQUE. Wodzicki a construit des exemples d'algèbres H-unifères à annulateur non nul (voir Wodzicki [1988b] Ex. 4.7.3). Cependant l'annulateur de la plupart des algèbres H-unifères usuelles est nul et dans ce cas

$$\mathrm{N}(I) = \mathrm{M}(I)\,.$$

6. L'algèbre des multiplications stables

Nous faisons maintenant le lien entre les notions de cône et de multiplication au moyen de l'analogue algébrique des multiplications stables d'une C*-algèbre.

Pour toute algèbre A , on définit l'*algèbre des multiplications stables* $\mathrm{M}^s(A)$ comme l'algèbre des multiplications de l'algèbre $M_\infty(A)$ des matrices finies

$$\mathrm{M}^s(A) = \mathrm{M}\big(M_\infty(A)\big)$$

et l'*algèbre des multiplications extérieures stables* par

$$Q^s(A) = Q\big(M_\infty(A)\big)\,.$$

Remarquons que si A est unifère, alors l'annulateur de $M_\infty(A)$ est nul.

Le lien entre le cône et les multiplications stables est donné par

PROPOSITION 6.1. *Si A est unifère, alors l'algèbre des multiplications stables est isomorphe au cône formé des matrices localement finies*

$$\mathrm{M}^s(A) \cong \Gamma A$$

et l'algèbre des multiplications extérieures stables est isomorphe à la suspension

$$Q^s(A) \cong \Sigma A\,.$$

Démonstration. Le cône contient les matrices finies comme idéal bilatère. Par définition des multiplications, l'application ρ du paragraphe précédent envoie ΓA dans $\mathrm{M}^s(A)$. Comme A est unifère, ρ est clairement injective.

Il reste à établir que c'est une surjection. Admettons pour l'instant le lemme suivant.

LEMME 6.2. *Soit A une algèbre unifère. Alors tout endomorphisme $M_\infty(A)$-linéaire à droite (resp. à gauche) de $M_\infty(A)$ est de la forme*

$$X \mapsto UX$$

(resp. $X \mapsto XV$) où U (resp. V) est une matrice carrée infinie (indexée par les entiers positifs) dont chaque colonne (resp. chaque ligne) ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A non nuls.

Achevons la démonstration de la proposition. Toute multiplication de $M_\infty(A)$ est donc de la forme

$$(X \mapsto UX, X \mapsto XV)$$

avec $XUY = XVY$ pour tout couple (X, Y) de matrices finies. Comme les sous-algèbres $M_n(A)$ sont unifères d'unité 1_n , les restrictions de U et V à $M_n(A)$ sont identiques pour tout $n \geq 1$ et donc

$$U = V \in \Gamma A .$$

Ce qui démontre la surjectivité de ρ .

Démonstration du lemme 6.2. Soit u un endomorphisme de $M_\infty(A)$ vérifiant

$$u(XY) = u(X)Y$$

pour tout couple (X, Y) de matrices de $M_\infty(A)$. Posons

$$U_n = u(1_n) \in M_\infty(A) .$$

Montrons d'abord que la suite U_n "converge". En effet,

$$U_n = u(1_{n+m}.1_n) = u(1_{n+m})\, 1_n = U_{n+m}\, 1_n$$

pour tout $m \geq 0$. Donc les n premières colonnes de U_{n+m} sont identiques aux n premières colonnes de U_n dont les autres colonnes sont nulles. Il existe donc une matrice U qui, pour tout $n \geq 1$, a les mêmes n premières colonnes que U_n. Puisque $U_n \in M_\infty(A)$, les colonnes de U sont finies.

Soit maintenant $X \in M_\infty(A)$. Alors il existe n tel que $X \in M_n(A)$. On a :

$$u(X) = u(1_n)\, X = U_n\, X = U\, X .$$

Démonstration analogue pour les endomorphismes linéaires à gauche.

Le théorème 5.2 et la proposition 6.1 ont la conséquence suivante.

COROLLAIRE 6.3. *Soit A et B deux algèbres unifères. On suppose A projective sur k. Alors toute extension d'algèbres*

$$0 \to M_\infty(B) \to R \to A \to 0$$

est l'image réciproque par $H_{R\to A} : A \to \Sigma B$ de l'extension

$$0 \to M_\infty(B) \to \Gamma B \to \Sigma B \to 0$$

et dans la suite d'isomorphismes

$$HC^1(A, M_\infty(B)) \cong HC^1(A,B) \cong HC^0(A, \Sigma B)$$

la classe $ch^1(R \to A)$ correspond à $ch(H_{R\to A})$.

En fixant une structure d'algèbre à somme directe (voir II.7.4) sur ΣB, on peut définir la somme directe de deux extensions de A par $M_\infty(B)$ comme étant l'extension dont l'invariant de Hochschild est la somme directe des invariants de Hochschild des deux extensions. On voit aussitôt que la classe ch^1 de la somme directe de deux extensions est égale à la somme dans $HC^1(A,B)$ des classes associées aux extensions.

Dans ce paragraphe nous avons étudié une situation qu'on peut voir comme l'étude algébrique de l'analogue du groupe KK^1 de K-théorie de Kasparov. Nous en ferons de même pour le groupe KK^0 de Kasparov au paragraphe qui suit.

7. Le caractère de Chern d'un quasi-homomorphisme

La notion de *quasi-homomorphisme* de C*-algèbres a été introduite par Cuntz [1983] qui s'en est servi pour donner une définition simplifiée de la K-théorie de Kasparov. Nous présentons une version abstraite de cette notion et montrons qu'à certains quasi-homomorphismes de A dans J on peut associer naturellement une classe de $HC^0(A,J)$.

Par souci de simplification, nous supposerons dans ce paragraphe que l'anneau de base k est un corps commutatif.

DÉFINITION 7.1. *On se donne deux algèbres A et J. Un quasi-homomorphisme de A dans J est un quintuple $(A, E, J, \varphi_0, \varphi_1)$ où E est une algèbre contenant J comme idéal bilatère et φ_0 et φ_1 sont des morphismes d'algèbres de A dans E tels que*

$$Im(\varphi_0 - \varphi_1) \subset J .$$

On note $qhom(A,J)$ l'ensemble des quasi-homomorphismes de A dans J.

Cuntz [1987] a construit, pour toute algèbre A , un quasi-homomorphisme

$$(A, QA, qA, i_0, i_1)$$

où QA est le produit libre $A * A$ de deux copies de A , $i_k : A \to QA$ $(k = 0, 1)$ sont les inclusions naturelles et l'algèbre qA des "formes différentielles quantifiées" est le noyau du morphisme d'algèbres $p : QA \to A$ tel que

$$p i_k = id_A \quad (k = 0, 1).$$

Ce quasi-homomorphisme est universel en ce sens qu'il y a une bijection naturelle entre $qhom(A, J)$ et l'ensemble des morphismes d'algèbres de qA dans J .

Nous allons considérer deux types de quasi-homomorphismes auxquels nous associerons une classe bicyclique dans $HC^0(A, J)$.

Commençons par le cas où le quasi-homomorphisme $(A, E, J, \varphi_0, \varphi_1)$ est tel que l'idéal J est H-unifère. On va lui associer une classe dans $HC^0(A, J)$ de la manière suivante. Notons $p : E \to E/J$ la projection canonique. On a :

$$p\varphi_0 = p\varphi_1$$

et donc

$$p^\natural \varphi_0^\natural = p^\natural \varphi_1^\natural$$

dans $Hom_S(CC(A), CC(E/J))$. Par conséquent si K désigne le noyau de

$$CC(E) \xrightarrow{p^\natural} CC(E/J),$$

alors $\varphi_0^\natural - \varphi_1^\natural$ est un cocycle de $Hom_S(CC(A), K)$. Par hypothèse J est H-unifère et donc, d'après Wodzicki [1988b], l'inclusion de $CC(J)$ dans K est un quasi-isomomorphisme. Il résulte donc de Jones-Kassel [1988] §4 que ce cocycle définit une classe que nous noterons

$$[\varphi_0, \varphi_1]$$

dans $HC^0(A, J)$.

DÉFINITION 7.2. *On définit la classe de $HC^0(A, J)$ associée au quasi-homomorphisme $(A, E, J, \varphi_0, \varphi_1)$ de A dans J par*

$$[\varphi_0, \varphi_1].$$

Nous appelons cette classe le caractère de Chern du quasi-homomorphisme.

Lorsque l'algèbre universelle qA est H-unifère, la construction précédente appliquée au quasi-homomorphisme (A, QA, qA, i_0, i_1) de Cuntz [1987] définit une classe universelle que nous noterons $[qA]$ dans $HC^0(A, qA)$. Si alors on se donne un quasi-homomorphisme de A dans J , on définit son caractère de Chern comme l'élément

$$[qA] \cup ch(f) \in HC^0(A, J)$$

où $f : qA \to J$ est le morphisme d'algèbres que la correspondance de Cuntz assigne au quasi-homomorphisme. Bien entendu si J est H-unifère, on retrouve ainsi le caractère défini en 7.2.

EXEMPLE 7.3. Considérons des quasi-homomorphismes de la forme

$$(k, J^+, J, e_0, e_1)$$

du corps de base k dans une algèbre H-unifère J . Alors e_0 et e_1 sont des idempotents de J^+ tels que $e_0 - e_1 \in J$. Puisque J est H-unifère et que l'algèbre J^+ est augmentée, on a la suite exacte scindée

$$0 \to HC^0(k, J) \to HC^0(k, J^+) \to HC^0(k, k) \to 0\,.$$

On voit aussitôt que l'image de $[e_0, e_1]$ dans $HC^0(k, J^+)$ est égale à

$$[e_0, e_1] = ch(e_0) - ch(e_1)\,.$$

En particulier, si $e_1 = 0$, alors e est un idempotent de J et on a :

$$[e_0, 0] = ch(e_0)\,.$$

Le caractère de Chern d'un idempotent est donc un cas particulier de celui d'un quasi-homomorphisme.

EXEMPLE 7.4. On suppose maintenant que $J = M_\infty(B)$ où B est unifère. Puisque d'après le théorème 5.2 et la proposition 6.1, toute algèbre E contenant J s'envoie dans l'algèbre des multiplications $\mathrm{M}^s(B) \cong \Gamma B$, il suffit de considérer des quasi-homomorphismes de la forme $(A, \Gamma B, M_\infty(B), \varphi_0, \varphi_1)$. L'avantage de ces derniers quasi-homomorphismes est qu'en fixant une somme directe (voir II.7.4) sur ΓB préservant $M_\infty(B)$, on peut définir la somme de deux tels quasi-homomorphismes. En effet, si $\varphi = (A, \Gamma B, M_\infty(B), \varphi_0, \varphi_1)$ et $\psi = (A, \Gamma B, M_\infty(B), \psi_0, \psi_1)$ appartiennent à $qhom(A, M_\infty(B))$, la formule

$$\varphi \oplus \psi = \big(A, \Gamma B, M_\infty(B), \oplus \circ (\varphi_0 \times \psi_0) \circ \Delta, \oplus \circ (\varphi_1 \times \psi_1) \circ \Delta\big)$$

définit un quasi-homomorphisme de A dans $M_\infty(B)$ (ici Δ est le morphisme diagonal de A dans $A \times A$).

On laisse au lecteur le soin de vérifier à l'aide de II.7 que le caractère de Chern de la somme de deux tels quasi-homomorphismes est égal dans

$$HC^0(A, M_\infty(B)) \cong HC^0(A, B)$$

à la somme de leurs caractères de Chern.

Le deuxième type de quasi-homomorphisme pour lequel nous arrivons à associer une classe cyclique bivariante est celui où le quasi-homomorphisme est de la forme

$$(A, B \otimes L, B \otimes I, \varphi_0, \varphi_1)$$

et tel que I est un idéal bilatère de L muni d'une trace, c'est-à-dire d'une forme linéaire $\tau : I \to k$ nulle sur $[I, I]$. Nous appellerons un tel objet un *quasi-homomorphisme à trace*. Associons-lui un élément de $HC^0(A, B)$.

Tout d'abord, l'application

$$b_0 x_0 \otimes \ldots \otimes b_q x_q \mapsto \tau(x_0 \ldots x_q)\, b_0 \otimes \ldots \otimes b_q$$

définit clairement un morphisme cyclique $B \times \tau : (B \otimes I)^\natural \to B^\natural$ et donc un morphisme de complexes

$$B \times \tau : CC.(B \otimes I) \to CC.(B)$$

commutant à S . Si

$$\tau([L, I]) = 0\,,$$

le morphisme $B \times \tau$ s'étend au noyau

$$Ker\big(CC.(B \otimes L) \to CC.(B \otimes L/I)\big)$$

dans lequel $\varphi_0^\natural - \varphi_1^\natural$ prend ses valeurs. Donc

$$(B \times \tau) \circ (\varphi_0^\natural - \varphi_1^\natural)$$

définit alors un 0-cocycle de $Hom_S(CC(A), CC(B))$.

DÉFINITION 7.5. *On note $[\varphi_0, \varphi_1; \tau]$ l'élément de $HC^0(A, B)$ ainsi défini et on l'appelle le caractère de Chern du quasi-homomorphisme à trace.*

Bien entendu, si $B \otimes I$ est H-unifère, on n'a pas besoin de la condition

$$\tau([L, I]) = 0$$

car alors $[\varphi_0, \varphi_1]$ est défini et on peut poser :

$$[\varphi_0, \varphi_1; \tau] = [\varphi_0, \varphi_1] \cup [B \times \tau]\,.$$

L'intérêt des quasi-homomorphismes à trace vient du fait qu'ils généralisent les *modules de Fredholm 1-sommables* de Connes [1985]. En effet, utilisant les produits tensoriels topologiques appropriés, on peut prendre pour L l'algèbre

$L(H)$ des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert H et pour I l'idéal $L^1(H)$ des opérateurs à trace. Notons Tr la trace des opérateurs.

Considérons alors un quasi-homomorphisme

$$\varphi = (A, L(H), L^1(H), \varphi_0, \varphi_1)$$

de A dans $L^1(H)$ .On peut lui associer un module de Fredholm $\mathbf{Z}/2$-gradué $(H \oplus H, F)$ sur lequel A opère par

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}$$

et où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Notons $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ l'opérateur de parité du supermodule $H \oplus H$. Alors l'identité

$$\varphi_0 - \varphi_1 = 1/2\, Tr(\varepsilon F[F, \varphi])$$

montre que le caractère de Chern que nous venons de construire pour un quasi-homomorphisme à trace généralise le caractère de Chern que Connes [1985] a défini pour les modules de Fredholm 1-sommables.

8. Quasï-homomorphismes p-sommables et traces partielles

Dans ce paragraphe on supposera que k est un corps commutatif de caractéristique nulle.

Par analogie avec les modules de Fredholm p-sommables et avec ce qui précède, nous posons

DÉFINITION 8.1. *On se donne un entier $p \geq 2$. Un quasi-homomorphisme*

$$(A, B \otimes L, B \otimes I, \varphi_0, \varphi_1)$$

est dit p-sommable si B est unifère, I est un idéal bilatère H-unifère de L et il existe une trace sur l'idéal I^p , c'est-à-dire une forme linéaire $\tau : I^p \to k$ nulle sur $[I, I^{p-1}]$.

A une telle donnée, nous allons associer des éléments

$$[\varphi_0, \varphi_1; \tau]_n \in HC^{2n}(A, B)$$

lorsque $2n \geq p-1$ et tels que

$$S\,[\varphi_0, \varphi_1, \tau]_n = [\varphi_0, \varphi_1, \tau]_{n+1} .$$

Cette famille d'éléments définit donc une classe du groupe

$$HP^0(A,B)$$

de *cohomologie cyclique bivariante périodique* de Jones-Kassel [1988]. Ce groupe est la limite du système inductif

$$\{\cdots \xrightarrow{S} HC^{2n}(A,B) \xrightarrow{S} HC^{2n+2}(A,B) \xrightarrow{S} \cdots\}.$$

Pour ce faire, il nous faut examiner de plus près les algèbres I munies d'une *trace partielle*, c'est-à-dire d'une forme linéaire τ définie sur l'idéal I^p et nulle sur $[I, I^{p-1}]$, l'entier p étant fixé ≥ 2 .

Choisissons un entier pair $2n \geq p-1$. Il est bien connu et facile à vérifier que

$$T_n(x_0, \ldots, x_{2n}) = \tau(x_0 \ldots x_{2n})$$

est un cocycle cyclique dont la classe se trouve dans

$$HC^{2n}(I) = HC^{2n}(I,k).$$

On a d'ailleurs :

$$T_n = \pi\, J\, \tau_{\geq 2n}\, u$$

où u, J, π sont les quasi-isomorphismes de S-modules introduits dans I.3, I.5 et I.6 et où

$$\tau_{\geq 2n} : CC(I) \to CC(k)[2n]$$

est le morphisme naturel de S-modules donné par

$$\tau_{\geq 2n}(x_0 \otimes \ldots \otimes x_r\, q^p) = \begin{cases} \tau(x_0 \ldots x_r)\, 1_{r-2n}\, q^p & \text{si } q \geq 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

LEMME 8.2. *Soit $2n \geq p-1$. Avec les notations précédentes, on définit la classe $[\tau]_n$ de $HC^{2n}(I,k)$ comme la classe du cocycle cyclique*

$$(x_0, \ldots, x_{2n}) \mapsto \frac{n!}{(2n)!}\tau(x_0 \ldots x_{2n}).$$

Alors on a :

$$S\,[\tau]_n = [\tau]_{n+1}$$

dans $HC^{2n+2}(I,k)$.

Démonstration. On utilise le théorème I.4.2.

Soit $\alpha \in C^t_{2n+2}(I)$. Il s'agit de montrer que

$$\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} T_{n+1}(\alpha) = \frac{n!}{(2n)!} T_n(S\alpha)$$

ou encore que

$$T_{n+1}(\alpha) = 2\,(2n+1)\,T_n(S\alpha)\,.$$

Rappelons que

$$S\alpha = \frac{b'}{2n+1}(1-T)\left(\frac{D}{2n+2}\right)^2 b\,\frac{N}{2n+3}\,\alpha\,.$$

Or on a :

$$T_n\, b'(y_0 \otimes \ldots \otimes y_{2n+1}) = \tau(y_0 \ldots y_{2n+1})\,,$$

$$\tau((-1)^{2n+1}\, y_{2n+1} y_0 \ldots y_{2n}) = -\,\tau(y_0 \ldots y_{2n+1})\,,$$

$$\tau(D(y_0, \ldots, y_{2n+1})) = -(n+1)\,\tau(y_0 \ldots y_{2n+1})\,,$$

$$\tau(b(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{2n+2})) = \tau(x_0 \ldots x_{2n+2})$$

et enfin

$$T_{n+1}(N(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{2n+2})) = (2n+3)\,\tau(x_0 \ldots x_{2n+2})\,.$$

En mettant tout ensemble, on trouve :

$$T_n(S\alpha) = \frac{2\,(-1)^2\,(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)^2}\, T_{n+1}(\alpha)\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenons au problème initial et donnons-nous un quasi-homomorphisme p-sommable comme dans 8.1. Alors le produit $[B \times \tau]_n$ de $ch(id_B) \in HC^0(B,B)$ et de $[\tau]_n \in HC^{2n}(I,k)$ définit, grâce au théorème 1.1, un élément de $HC^{2n}(B \otimes I, B)$ lorsque $2n \geq p-1$. Comme le produit externe est compatible avec le produit de composition, on a

$$[B \times \tau]_{n+1} = S\,[B \times \tau]_n\,.$$

On peut alors poser la définition suivante.

Définition 8.3. *Soit $(A, B \otimes L, B \otimes I, \varphi_0, \varphi_1)$ un quasi-homomorphisme p-sommable muni de la trace $\tau : I^p \to k$. On définit son caractère de Chern bivariant comme la classe de $HP^0(A,B)$ donnée par la famille d'éléments*

$$[\varphi_0, \varphi_1; \tau]_n = [\varphi_0, \varphi_1] \cup [B \times \tau]_n$$

($n \geq \dfrac{p-1}{2}$).

IV. K–THEORIE ALGEBRIQUE BIVARIANTE

Dans ce chapitre nous construisons la K–théorie algébrique bivariante ainsi que le caractère de Chern bivariant qui la met en relation avec la cohomologie cyclique bivariante. Toutes les algèbres considérées sont unifères et tous les modules sont unitaires.

1. Une catégorie exacte de bimodules

Nous commençons par définir une catégorie de bimodules dont les objets généralisent à la fois les morphismes d'algèbres et les modules projectifs de type fini.

DÉFINITION 1.1. *Si* A *et* B *sont des algèbres unifères sur un anneau commutatif* k, *on note* $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ *la catégorie des* A–B–*bimodules qui sont projectifs de type fini en tant que modules à droite sur* B.

Par A–B–bimodule, on entend ici un k–module possédant de manière compatible une action de A à gauche et une action de B à droite. La donnée de l'objet P de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ est équivalente à la donnée du morphisme d'algèbres unifères

$$\gamma(P) : A \longrightarrow \mathrm{End}_B(P)$$

défini par $\gamma(a)(p) = ap$.

Si $\mathrm{Rep}_k(k,B)$ s'identifie à la catégorie des B–modules projectifs de type fini, par contre $\mathrm{Rep}_k(A,k)$ est une catégorie de *représentations.* En effet si A est l'algèbre d'un groupe G , alors un objet de $\mathrm{Rep}_k(A,k)$ est une représentation de G dans un module projectif de type fini sur k .

Donnons deux exemples d'objets de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$.

EXEMPLES 1.2. (a) Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres unifères. Notons ${}_fB$ le A–B–bimodule B défini par

$$a \times b = f(a) \times b$$

$(a \in A \ ; b,x \in B)$. Alors ${}_fB$ est un objet de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ et

$$\gamma({}_fB) = f : A \longrightarrow \mathrm{End}_B(B) = B\ .$$

(b) Si de plus B est projectif de type fini sur A , alors le B–A–bimodule $B = B_f$ défini par

$$b \times a = b \times f(a)$$

est un objet de $\mathrm{Rep}_k(B,A)$.

La catégorie $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ est abélienne. Nous la munissons d'une structure de *catégorie exacte* en prenant comme suites exactes admissibles toutes celles de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

qui sont *pures*, c'est-à-dire celles qui induisent une suite exacte

$$0 \longrightarrow P' \otimes V \longrightarrow P \otimes V \longrightarrow P'' \otimes V \longrightarrow 0$$

pour tout k-module V .

DÉFINITION 1.3. *On note* K(A,B) *le groupe de Grothendieck de la catégorie exacte* $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ *ainsi définie. On dira que* K(A,B) *est le groupe de* K*-théorie algébrique bivariante des algèbres unifères* A *et* B .

2. Fonctorialité et produit de composition

La fonctorialité des groupes de K-théorie algébrique bivariante va résulter de l'existence d'un "produit de composition".

Soit P un objet de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ et Q un objet de $\mathrm{Rep}_k(B,C)$. Alors le A-C-bimodule

$$P \otimes_B Q$$

est clairement projectif de type fini sur C . Ceci définit le *produit de composition* des bimodules

$$\mathrm{Rep}_k(A,B) \times \mathrm{Rep}_k(B,C) \xrightarrow{\otimes_B} \mathrm{Rep}_k(A,C) .$$

LEMME 2.1. *Le produit de composition est biexact.*

En effet, si P est projectif sur B, alors il est B–plat. D'autre part, pour tout B–module Q, le foncteur $-\otimes_B Q$ est exact sur la sous–catégorie des B–modules projectifs.

Le produit de composition définit donc un produit de composition

$$K(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} K(B,C) \longrightarrow K(A,C) .$$

Examinons–en quelques cas particuliers.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres unifères. Alors le produit de composition à gauche par ${}_fB \in \mathrm{Rep}_k(A,B)$ est un foncteur exact ("restriction des scalaires")

$$^*f : \mathrm{Rep}_k(B,C) \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(A,C) .$$

Il induit donc un homomorphisme de groupes

$$^*f : K(B,C) \longrightarrow K(A,C) .$$

De même si $g : B \longrightarrow C$ est un morphisme d'algèbres unifères, nous notons

$$g^* : \mathrm{Rep}_k(A,B) \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(A,C)$$

le foncteur exact ("extension des scalaires") obtenu par produit de composition à droite avec ${}_gC \in \mathrm{Rep}_k(B,C)$. On note encore

$$g^* : K(A,B) \longrightarrow K(A,C)$$

l'homomorphisme induit.

Si maintenant on a deux morphismes d'algèbres

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C ,$$

alors

$${}_fB \otimes_B {}_gC = {}_{(g\circ f)}C$$

ce qui se traduit par

$$(g \circ f)^* = g^* \circ f^* \quad \text{et} \quad {}^*(g \circ f) = {}^*f \circ {}^*g .$$

Les opérations précédentes font donc de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ et de $K(A,B)$ des bifoncteurs contravariants en B et covariants en A .

Considérons maintenant comme en 1.2 (b) un morphisme d'algèbres $f : A \longrightarrow B$ tel que B soit un A-module projectif de type fini. Alors la composition à gauche par B_f définit un foncteur exact ("transfert")

$$_*f : \mathrm{Rep}_k(A,C) \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(B,C)$$

et donc un homomorphisme de groupes

$$_*f : K(A,C) \longrightarrow K(B,C) .$$

De même la composition à droite par le même bimodule définit un autre transfert

$$f_* : \mathrm{Rep}_k(C,B) \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(C,A)$$

et donc

$$f_* : K(C,B) \longrightarrow K(C,A) .$$

On retrouve ainsi le transfert défini par Quillen [1973] en K–théorie algébrique.

Là encore, si $g : B \longrightarrow C$ est un morphisme d'algèbres tel que C soit B–projectif de type fini, alors on a les relations

$$_*(g \circ f) = {_*g} \circ {_*f} \quad \text{et} \quad (g \circ f)_* = f_* \circ g_* ,$$

ce qui permet de définir sur le K–théorie algébrique bivariante une autre fonctorialité, en quelque sorte en sens inverse ("wrong way functoriality"), pour une classe plus restreinte de morphismes d'algèbres.

Pour finir, notons que le produit de composition fait de $K(A,A)$ un anneau dont l'unité est la classe du A–bimodule A .

3. Produit externe

On se donne quatre algèbres unifères A_1, A_2, B_1 et B_2. Si P est un objet de $\mathrm{Rep}_k(A_1,B_1)$ et Q un objet de $\mathrm{Rep}_k(A_2,B_2)$, on munit $P \otimes Q$ d'une structure de $A_1 \otimes A_2 - B_1 \otimes B_2$–bimodule en posant

$$(a_1 \otimes a_2)(p \otimes q)(b_1 \otimes b_2) = a_1pb_1 \otimes a_2qb_2$$

($p \in P$; $q \in Q$; $a_i \in A_i$; $b_i \in B_i$, $i = 1,2$). Il est facile de voir que $P \otimes Q$ est un objet de $\mathrm{Rep}_k(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$. Le bifoncteur

$$\mathrm{Rep}_k(A_1,B_1) \times \mathrm{Rep}_k(A_2,B_2) \longrightarrow \mathrm{Rep}_k(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$$

ainsi défini sera appelé le *produit externe* des bimodules. Ce produit est biexact car nous nous sommes restreints aux suites exactes pures. Par conséquent on a un produit externe

$$K(A_1,B_1) \otimes_{\mathbb{Z}} K(A_2,B_2) \xrightarrow{\times} K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)\,.$$

Comme dans Jones–Kassel [1988] § 5, le produit de composition et le produit externe s'unissent en un produit plus général

$$K(A_1,B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K(C \otimes A_2,B_2) \xrightarrow{\times} K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$$

induit par

$$(P,Q) \longmapsto (P \otimes A_2) \otimes_{A_2 \otimes C \otimes B_1} (B_1 \otimes Q) \cong P \otimes_C Q \, .$$

Signalons quelques cas particulières intéressants.

CAS PARTICULIERS 3.1. (a) Si A et B sont des algèbres, on a un produit externe

$$K(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} K(A,B) \longrightarrow K(A \otimes A, B \otimes B) \, .$$

Si de plus A est une bigèbre et B est commutative, alors par composition avec la comultiplication de A et la multiplication de B, on obtient une structure d'anneau sur $K(A,B)$ induite par le produit tensoriel $(P,Q) \longmapsto P \otimes_B Q$. On vérifie que l'unité de cet anneau est la classe du bimodule ${}_{(\eta \circ \epsilon)}B$ où η est l'unité de B et ϵ la coünité de A.

Si $A = k$, on retrouve ainsi le produit sur la K–théorie algébrique de B. Si $B = K$ et que A est l'algèbre d'un groupe munie de sa structure naturelle de bigèbre, alors on retrouve le produit tensoriel des représentations du groupe.

(b) Le produit externe $K(k,B) \times K(A,B) \longrightarrow K(A, B \otimes B)$ munit $K(A,B)$ d'une structure de $K(k,B)$–module lorsque B est commutative. Le groupe $K(A,B)$ devient même une $K(k,B)$–algèbre lorsque, de plus, A est une bigèbre.

(c) Posons $A_1 = A_2 = k$ dans la définition du produit général. Alors on a un produit

$$K(k, B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K(C,B_2) \longrightarrow K(k, B_1 \otimes B_2)$$

qui généralise le produit de Kronecker en K–théorie algébrique (défini par exemple dans Loday [1976] 5.1.3).

Nous terminons une *formule de projection* généralisant celle de la K–théorie algébrique (voir Quillen [1973] § 4).

PROPOSITION 3.2. *Soit* $f : A \longrightarrow B$ *un morphisme d'algèbres unifères et commutatives tel que* B *soit* A*–projectif de type fini. Alors pour toute algèbre unifère* C , *tout* $x \in K(C,A)$ *et tout* $y \in K(C,B)$, *on a* :

$$f_*(f^* x \times y) = x \times f_* y$$

dans $K(C \otimes C, A)$.

Démonstration. Ceci résulte de l'isomorphisme de $C \otimes C$–A–bimodules

$$(X \otimes_A B) \otimes_B Y \cong X \otimes_A Y .$$

4. Le caractère de Chern d'un bimodule

En II.1 nous avons associé à tout morphisme d'algèbres $f : A \longrightarrow B$ un élément $ch(f)$ de $HC^0(A,B)$. Nous allons étendre ce caractère de Chern à tout bimodule de $Rep_k(A,B)$.

Soit P un objet de $Rep_k(A,B)$. Par définition, il existe un B–module Q et un isomorphisme

$$\alpha : P \oplus Q \longrightarrow B^n ,$$

ce qui définit un morphisme d'algèbres i

$$i : \mathrm{End}_B(P) \xrightarrow{u \longmapsto u \oplus 0} \mathrm{End}_B(P \oplus Q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\alpha)} M_n(B) .$$

On définit alors ch(P,i) comme le 0–cocycle bivariant

$$\mathrm{Tr} \circ i^{\#} \circ \gamma(P)^{\#}$$

où Tr est la trace généralisée de Dennis (I.7.6 (b)) et $\gamma(P)$ est le morphisme associé à P en IV.1.

L'intérêt de cette construction provient du résultat suivant.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses précédentes, la classe de* ch(P,i) *dans* $HC^0(A,B)$ *ne dépend pas du choix du complément* Q , *de l'entier* n *ou l'isomorphisme* α .

Démonstration. Comme dans Stallings [1965] 1.7, il suffit de démontrer que, d'une part, les automorphismes intérieurs opèrent trivialement sur la cohomologie cyclique bivariante – ce qui est établi dans II.6 – et que, d'autre part,

$$\mathrm{Tr}\left[\begin{bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{bmatrix} X_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \mathrm{Tr}(X_0 \otimes \ldots \otimes X_q)$$

lorsque $X_0,\ldots,X_q$ sont des matrices de $M_n(B)$, ce qui est évident.

DÉFINITION 4.2. *Soit* A *et* B *deux algèbres et* P *un objet de* $\mathrm{Rep}_k(A,B)$. *On note* $ch(P)$ *la classe dans* $HC^0(A,B)$ *du cocycle bivariant* $ch(P,i)$ *défini plus haut. On dit que* $ch(P)$ *est le caractère de Chern bivariant du bimodule* P.

CAS PARTICULIERS 4.3. (a) Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres unifères, alors dans $HC^0(A,B)$ on a:

$$ch(f) = ch({}_f B) .$$

(b) Soit e un idempotent de l'algèbre unifère B. Le module eB est un objet de $\mathrm{Rep}_k(k,B)$. Si on prend $n = 1$, $Q = (1-e)B$ et $\alpha = \mathrm{id}_B$, alors le cocycle $ch(P,i)$ est égal au cocycle $e^{\#}$ où $e : k \longrightarrow B$ représente par extension le morphisme d'algèbres envoyant 1 sur e (voir II.2). Par conséquent,

$$ch(eB) = ch(e) \in HC^0(k,B) = HC_0^-(B) .$$

Nous terminons ce paragraphe par un exemple qui nous a été suggéré par J.–B. Bost.

EXEMPLE 4.4. Soit G un groupe et Γ un sous–groupe. Notons i l'inclusion naturelle $k[\Gamma] \longrightarrow k[G]$. Considérons le *bimodule d'induction*

$$I_\Gamma^G = k[G]_i$$

(notation définie en IV.1). Si Γ est d'indice fini dans G – ce que nous supposerons désormais – alors I_Γ^G appartient à $\mathrm{Rep}_k(k[G], k[\Gamma])$. Nous allons expliciter son caractère de Chern. Choisissons un système $\{x_i\}_{i\in G/\Gamma}$ de représentants des classes de G/Γ. Ce système forme une base du Γ–module libre I_Γ^G. Alors $ch(I_\Gamma^G)$ est la classe dans $HC^0(k[G], k[\Gamma])$ du morphisme cyclique

$$g_0 \otimes \ldots \otimes g_q \longmapsto \sum_{i_0,\ldots,i_q \in G/\Gamma} x_{i_0}^{-1} g_0 x_{i_1} \otimes x_{i_1}^{-1} g_1 x_{i_2} \otimes \ldots \otimes x_{i_q}^{-1} g_q x_{i_0}$$

et ne dépend pas du système de représentants choisi.

Bost a construit un analogue topologique. Soit G un groupe de Lie et Γ un sous–groupe cocompact. Alors

$$\varphi_0 \otimes \ldots \otimes \varphi_q \longmapsto \sum_{\gamma_0,\ldots,\gamma_q \in \Gamma} c(\gamma_0,\ldots,\gamma_q)\, \gamma_0 \otimes \ldots \otimes \gamma_q$$

où $c(\gamma_0,\ldots,\gamma_q)$ est le scalaire

$$\int_D \int_D \cdots \int_D \varphi_0(h_0\gamma_0 h_1^{-1}) \varphi_1(h_1\gamma_1 h_2^{-1}) \ldots \varphi_q(h_q\gamma_q h_0^{-1}) dh_0 dh_1 \ldots dh_q ,$$

est un morphisme cyclique dont la classe dans $HC^0(\mathscr{C}_c(G), \mathbb{C}[\Gamma])$ ne dépend pas du choix du domaine fondamental D de Γ dans G.

5. Le théorème principal

Nous énonçons maintenant le résultat principal de ce chapitre.

THÉORÈME 5.1. (a) *Si* A *et* B *sont des algèbres unifères, alors le caractère de Chern défini en* 4.2 *induit un homomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{ch} : K(A,B) \longrightarrow HC^0(A,B) .$$

(b) *Le caractère de Chern est multiplicatif, i.e. si* A_1, A_2, B_1, B_2 *et* C *sont des algèbres unifères, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
K(A_1, B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K(C \otimes A_2, B_2) & \xrightarrow{\times} & K(A_1 \otimes A_2,\ B_1 \otimes B_2) \\
\Big\downarrow \mathrm{ch} \otimes \mathrm{ch} & & \Big\downarrow \mathrm{ch} \\
HC^0(A_1, B_1 \otimes C) \otimes HC^0(C \otimes A_2,\ B_2) & \xrightarrow{\times} & HC^0(A_1 \otimes A_2,\ B_1 \otimes B_2)
\end{array}$$

est commutatif. Ici la flèche horizontale supérieure (resp. inférieure) représente le produit général sur la K–théorie algébrique bivariante (resp. sur la cohomologie cyclique bivariante), produit construit au paragraphe 3 de ce chapitre (resp. construit dans Jones–Kassel [*1988*] § *5).*

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème. Comme nous allons le voir, cette démonstration repose sur le théorème II. 6.1 ainsi que sur trois propriétés – énoncées sous forme de lemmes – de la trace généralisée de Dennis.

LEMME 5.2. *Soit* B *un algèbre. On note* E *l'algèbre des matrices carrées*

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

de $M_{p+r}(B)$ *avec* $X \in M_p(B)$ *et* $Y \in M_r(B)$. *Alors si*

$$m_i = \begin{bmatrix} X_i & Z_i \\ 0 & Y_i \end{bmatrix}$$

$(i = 0,\ldots,q)$ *sont des matrices de* E , *on a la relation suivante dans* $B^{\otimes(q+1)}$

$$\mathrm{Tr}(m_0 \otimes \ldots \otimes m_q) = \mathrm{Tr}(X_0 \otimes \ldots \otimes X_q) + \mathrm{Tr}(Y_0 \otimes \ldots \otimes Y_q)\,.$$

La démonstration de ce lemme est un exercice facile laissé au lecteur.

Démonstration de 5.1 (a). Tout d'abord, le théorème II.6.1 implique que $\mathrm{ch}(P)$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme du bimodule.

Donnons–nous maintenant une suite exacte

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

dans $\mathrm{Rep}_k(A,B)$. Il s'agit d'établir que

$$\mathrm{ch}(Q) = \mathrm{ch}(P) + \mathrm{ch}(R)\,.$$

On peut toujours plonger la suite exacte précédente dans une suite exacte de B–modules libres

$$0 \longrightarrow B^p \longrightarrow B^q \longrightarrow B^r \longrightarrow 0$$

dont les endomrophismes forment précisément l'algèbre E du lemme précédent. On conclut alors avec ce lemme.

Démonstration de 5.1 (b). Vu la définition du produit général à l'aide du produit de composition et d'un produit externe particulier, il suffit d'établir les relations

$$\mathrm{ch}(P \otimes_B Q) = \mathrm{ch}(P) \cup \mathrm{ch}(Q)$$

$$\mathrm{ch}(P \otimes C) = \mathrm{ch}(P) \times \mathrm{ch}(C)$$

$$\mathrm{ch}(A \otimes Q) = \mathrm{ch}(A) \times \mathrm{ch}(Q)$$

chaque fois que P est un objet de $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ et Q un objet de $\mathrm{Rep}_k(B,C)$.

Commençons par le produit de composition. Donnons–nous, en même temps que $P \in \mathrm{Rep}_k(A,B)$ et $Q \in \mathrm{Rep}_k(B,C)$, un B–module P', un C–module Q' et des isomorphismes

$$\alpha : P \oplus P' \cong B^p \quad \text{et} \quad \beta : Q \oplus Q' \cong C^q .$$

Alors

$$\delta = \alpha \otimes Q + \beta : P \otimes_B Q \oplus P' \otimes_B Q \oplus Q' \cong (C^q)^p$$

est un isomorphisme. Soit aussi

$$i : \mathrm{End}_B(P) \xrightarrow{u \longmapsto u \oplus 0} \mathrm{End}_B(P \oplus P') \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\alpha)} M_p(B)$$

$$j : \mathrm{End}_C(Q) \xrightarrow{u \longmapsto u \oplus 0} \mathrm{End}_C(Q \oplus Q') \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\beta)} M_q(C)$$

et

$$k : \mathrm{End}_C(P \otimes_B Q) \xrightarrow{u \longmapsto u \oplus 0} \mathrm{End}_C(P \otimes_B Q \oplus P' \otimes_B Q \oplus Q') \xrightarrow{\mathrm{Ad}(\delta)} M_p(M_q(C))$$

les composés correspondants. Alors on voit que l'application $k \circ \gamma(P \otimes_B Q)$ est égale au composé

$$A \xrightarrow{i \circ \gamma(P)} M_p(B) \xrightarrow{M_p(j \circ \gamma(Q))} M_p(M_q(C)) .$$

Posons $f = i \circ \gamma(P)$ et $g = j \circ \gamma(Q)$. Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
A^{\#} \arrow[r, "f^{\#}"] & M_p(B)^{\#} \arrow[r, "M_p(g)^{\#}"] \arrow[d, "Tr_p"'] & M_p(M_q(C))^{\#} = M_{pq}(C)^{\#} \arrow[r, "Tr_{pq}"] \arrow[d, "Tr_p"'] & C^{\#} \\
& B^{\#} \arrow[r, "g^{\#}"] & M_q(C)^{\#} \arrow[r, "Tr_q"] & C^{\#}
\end{tikzcd}$$

Ici Tr_n signifie qu'il s'agit de la trace généralisée pour les matrices carrées d'ordre n. La composée des flèches de la ligne du haut représente donc $ch(P \otimes_B Q)$ tandis que $Tr_p \circ f^{\#}$ représente $ch(P)$ et $Tr_q \circ g^{\#}$ représente $ch(Q)$. La relation: $ch(P \otimes_B Q) = ch(P) \cup ch(Q)$ est alors conséquence du lemme suivant.

LEMME 5.3. *Soit* C *une algèbre et* p,q *des entiers* ≥ 1. *Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
M_p(M_q(C))^{\#} = M_{pq}(C)^{\#} \arrow[r, "Tr_{pq}"] \arrow[d] & C^{\#} \arrow[d, equal] \\
M_q(C)^{\#} \arrow[r, "Tr_q"] & C^{\#}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit $m_0,\ldots,m_r$ des matrices de $M_p(M_q(C))$. Chaque m_s est une matrice

$$m_s = (m_s(i,j))_{1 \leq i,j \leq p}$$

où les $m_s(i,j)$ sone elles–mêmes des matrices de $M_q(C)$

$$m_s(i,j) = (m_s(i,j;k,\ell))_{1 \leq k,\ell \leq q}\,.$$

Par conséquent,

$$Tr_q \circ Tr_p(m_0 \otimes \ldots \otimes m_r)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i_0,\ldots,i_r \leq p \\ 1 \leq j_0,\ldots,j_r \leq q}} m_0(i_0,i_1;j_0,j_1) \otimes m_1(i_1,i_2;j_1,j_2) \otimes \ldots \otimes m_r(i_r,i_0;j_r,j_0)\,.$$

Soit φ une bijection de $\{1,\ldots,pq\}$ sur $\{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\}$. Elle induit un isomorphisme $\Phi : M_p(M_q(C)) \longrightarrow M_{pq}(C)$ donné par

$$\Phi(m)(i,j) = m(\varphi(i);\varphi(j)) .$$

Alors

$$\mathrm{Tr}_{pq}(\Phi(m_0) \otimes \dots \otimes \Phi(m_r)) = \sum_{1 \leq k_0,\dots,k_r \leq pq} \Phi(m_0)(k_0,k_1) \otimes \dots \otimes \Phi(m_r)(k_r,k_0)$$

$$= \sum_{1 \leq k_0,\dots,k_r \leq pq} m_0(\varphi(k_0),\varphi(k_1)) \otimes \dots \otimes m_r(\varphi(k_r),\varphi(k_0))$$

$$= \mathrm{Tr}_q \circ \mathrm{Tr}_p(m_0 \otimes \dots \otimes m_r) .$$

Ceci achève la preuve de la multiplicativité du caractère de Chern pour le produit de composition. Il ne reste donc qu'à établir la relation $\mathrm{ch}(P \otimes C) = \mathrm{ch}(P) \times \mathrm{ch}(C)$, la relation $\mathrm{ch}(A \otimes Q) = \mathrm{ch}(A) \times \mathrm{ch}(Q)$ se démontrant essentiellement de la même manière.

Soit donc $P \in \mathrm{Rep}_k(A,B)$. Il lui correspond un morphisme d'algèbres

$$f : A \longrightarrow M_p(B)$$

tel que $\mathrm{ch}(P)$ soit représenté par $\mathrm{Tr} \circ f^{\#}$. Alors clairement $\mathrm{ch}(P \otimes C)$ est représenté par $\mathrm{Tr} \circ (f \otimes \mathrm{id}_C)^{\#}$ où

$$f \otimes \mathrm{id}_C : A \otimes C \longrightarrow M_p(B) \otimes C = M_p(B \otimes C) .$$

Par définition du produit externe (voir Jones–Kassel [1988], Prop. 5.3), il suffit, pour établir la relation désirée, de vérifier que le carré

$$\begin{array}{ccc} A^{\#} \otimes C^{\#} & \xrightarrow{\nabla} & (A \otimes C)^{\#} \\ {\scriptstyle (\mathrm{Tr}\circ f^{\#})\otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}\circ(f\otimes id)^{\#}} \\ B^{\#} \otimes C^{\#} & \xrightarrow{\nabla} & (B \otimes C)^{\#} \end{array}$$

où ∇ est le "shuffle"–produit, est commutatif. Comme ∇ est fonctoriel, il suffit donc d'établir le lemme suivant.

LEMME 5.4. *Soit* B *et* C *deux algèbres unifères et* p *un entier* ≥ 1. *Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} M_p(B)^{\#} \otimes C^{\#} & \xrightarrow{\nabla} & M_p(B \otimes C)^{\#} \\ {\scriptstyle \mathrm{Tr}\otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} \\ B^{\#} \otimes C^{\#} & \xrightarrow{\nabla} & (B \otimes C)^{\#} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Identifions $M_p(B)$ à $M_p(k) \otimes B$. Alors la trace généralisée prend sur $(M_p(k) \otimes B)^{\#}$ la forme suivante :

$$\mathrm{Tr}(m_0b_0 \otimes \ldots \otimes m_qb_q) = \mathrm{Tr}(m_0 \ldots m_q)b_0 \otimes \ldots \otimes b_q$$

où $m_i \in M_p(k)$ et $b_i \in B$. Notons 1_p la matrice unité de $M_p(B)$. Alors

$$\nabla(m_0b_0 \otimes \ldots \otimes m_qb_q \otimes c_0 \otimes \ldots \otimes c_r) =$$

$$\sum \epsilon(\sigma) m_0b_0c_0 \otimes \sigma(m_1b_1,\ldots,m_qb_q;\ 1_pc_1,\ldots,1_pc_r)$$

où σ parcourt tous les (p,q)–shuffles. En appliquant la trace généralisée, on obtient :

$$\sum \epsilon(\sigma) \mathrm{Tr}(m_0\sigma(m_1,\ldots,m_q;1_p,\ldots,1_p))b_0c_0 \otimes \sigma(b_1,\ldots,b_q;c_1,\ldots,c_r)$$

$$= \mathrm{Tr}(m_0m_1\ldots m_q)\sum \epsilon(\sigma) b_0c_0 \otimes \sigma(b_1,\ldots,b_q;c_1,\ldots,c_r)$$

car les shuffles ne changent pas l'ordre des matrices $m_1,\ldots,m_q$ et la matrice 1_p opère comme l'unité (*sic* !).

6. Applications

Nous donnons trois applications du théorème 5.1 qui montrent bien toute la puissance du formalisme du caractère de Chern bivariant.

Rappelons avec Karoubi–Villamayor [1971] qu'une algèbre unifère A est *flasque* s'il existe un bimodule M de $\mathrm{Rep}_k(A,A)$ tel que dans $\mathrm{Rep}_k(A,A)$ on ait :

$$M \oplus {}_{\mathrm{id}}A \cong M\,.$$

Par exemple, le cône d'une algèbre unifère est flasque.

Appliquons le caractère de Chern à la relation précédente. On a :

$$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(M) + \mathrm{ch}({}_{\mathrm{id}}A)$$

et donc

$$\mathrm{ch}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{ch}({}_{\mathrm{id}}A) = 0 .$$

Par conséquent,

PROPOSITION 6.1. *Toute algèbre unifère flasque est HC−acyclique.*

La seconde application concerne l'invariance de l'homologie cyclique par équivalence de Morita. Cette invariance a également été démontrée, indépendamment et par une autre méthode, par McCarthy [1988].

PROPOSITION 6.2. *Deux algèbres unifères équivalentes au sens de Morita sont HC−équivalentes.*

Démonstration. Si A et B sont équivalentes au sens de Morita, alors il existe, par définition, $P \in \mathrm{Rep}_k(A,B)$ et $Q \in \mathrm{Rep}_k(B,A)$ tels que

$$P \otimes_B Q \cong {}_{\mathrm{id}}A \quad \text{et} \quad Q \otimes_A P \cong {}_{\mathrm{id}}B .$$

Comme le caractère de Chern est multiplicatif pour le produit de composition, on a :

$$\mathrm{ch}(P) \cup \mathrm{ch}(Q) = \mathrm{ch}(\mathrm{id}_A) \ \text{ et } \ \mathrm{ch}(Q) \cup \mathrm{ch}(P) = \mathrm{ch}(\mathrm{id}_B) .$$

Les classes $\mathrm{ch}(P)$ et $\mathrm{ch}(Q)$ sont donc des HC–équivalences inverses l'une de l'autre.

Enfin pour toute algèbre unifère A et pour tout entier $n \geq 1$, nous considérons le morphisme diagonal

$$\Delta_n : A \longrightarrow M_n(A)$$

qui identifie A aux matrices scalaires. Ce morphisme représente un élément de $HC^0(A,M_n(A))$ dont nous calculons son image par la trace dans $HC^0(A,A)$.

PROPOSITION 6.3. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\mathrm{ch}(\Delta_n) \cup [\mathrm{Tr}] = n \, \mathrm{ch}(\mathrm{id}_A)$$

dans $HC^0(A,A)$.

Démonstration. En reprenant les notations de IV.1, on voit que

$$\Delta_n = \gamma(A^n) .$$

Par conséquent, d'après IV.4

$$\mathrm{ch}(\Delta_n) \cup [\mathrm{Tr}] = \mathrm{ch}(A^n)$$

$$= n\,\mathrm{ch}(A)$$

d'après le théorème 5.1 (a).

7. Discussion finale

Le caractère de Chern bivariant étudié dans ce chapitre est à valeurs dans le groupe HC^0 de cohomologie cyclique bivariante. Si nous voulons l'étendre en tout degré, il est nécessaire avant tout de définir des groupes de K–théorie algébrique bivariante en degrés positifs et négatifs. Nous proposons ici une définition *adhoc* fondée sur le théorème III.3.1. Pour simplifier, nous supposerons que k est un corps commutatif.

DÉFINITION 7.1. *Soit A et B deux algèbres unifères sur un corps commutatif k. On pose pour tout entier* $i \geq 0$

$$K^i(A,B) = K(A,\Sigma^i B)$$

et

$$K^{-i}(A,B) = K(\Sigma^i A,B)\,.$$

Ici $\Sigma^i A$ est défini à partir de la suspension Σ par

$$\Sigma^0 A = A \text{ et } \Sigma^i A = \Sigma(\Sigma^{i-1} A) \qquad (i \geq 1) .$$

Arrêtons-nous sur le cas $i = 1$. Le groupe $K^1(A,B)$ est représenté par des éléments de $\mathrm{Rep}_k(A,\Sigma B)$, donc par des morphismes d'algèbres

$$A \longrightarrow M_p(\Sigma B) \cong \Sigma B$$

qui, eux-mêmes, correspondent au travers de la théorie de Hochschild explicitée dans III.6 aux extensions de l'algèbre A par l'algèbre $M_\infty(B)$. Le groupe $K^1(A,B)$ est donc bien l'analogue algébrique du groupe KK^1 de Kasparov.

Revenons au cas général. Le caractère de Chern défini en IV.4 s'étend maintenant en tout degré. En effet, si $i \geq 0$, on définit ch comme le composé

$$K^i(A,B) = K(A,\Sigma^i B) \xrightarrow{ch} HC^0(A,\Sigma^i B) \cong HC^i(A,B)$$

et

$$K^{-i}(A,B) = K(\Sigma^i A,B) \xrightarrow{ch} HC^0(\Sigma^i A,B) \cong HC^{-i}(A,B) .$$

Se pose alors la question de la multiplicativité de ce caractère de Chern général. Pour définir un produit général sur la K-théorie algébrique bivariante, il faudrait pour tout couple (i,j) d'entiers ≥ 0, une application

$$K(\Sigma^i A, \Sigma^j B) \longrightarrow K^{i-j}(A,B)$$

ayant de bonnes propriétés. Comme on n'en dispose pas, il n'est possible pour l'instant que de définir un produit partiel sur la K–théorie bivariante. Encore faut–il modifier légèrement les notions de cône et de suspension. En effet si on pose, comme Loday [1976],

$$\Gamma A = \Gamma k \otimes A \quad \text{et} \quad \Sigma A = \Sigma k \otimes A\,,$$

alors ΓA est encore HC–acyclique. De plus il existe une application naturelle

$$\Sigma^i A \otimes \Sigma^j B \xrightarrow{\cong} \Sigma^{i+j}(A \otimes B)$$

qu'on peut utiliser pour définir un accouplement (i et $j \geq 0$)

$$K^i(A_1, B_1 \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K^j(C \otimes A_2, B_2) \longrightarrow K^{i+j}(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)\,.$$

C'est le composé des flèches verticales

$$\begin{array}{c}
K(A_1, B_1 \otimes \Sigma^i k \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K(C \otimes A_2, \Sigma^j k \otimes B_2) \\
\big\downarrow \\
K(A_1, B_1 \otimes \Sigma^i k \otimes C) \otimes_{\mathbb{Z}} K(\Sigma^i k \otimes C \otimes A_2, \Sigma^{i+j} k \otimes B_2) \\
x \big\downarrow \\
K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes \Sigma^{i+j} k \otimes B_2) = K^{i+j}(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)\,.
\end{array}$$

Ici la flèche verticale du haut est obtenue par produit externe avec la classe du bimodule $\Sigma^i k$ dans $K(\Sigma^i k, \Sigma^i k)$.

On définit de même un tel accomplement lorsque i et $j < 0$. Ces accomplements partiels sont associatifs.

Allons plus loin en définissant $\overline{K}^i(A,B)$ comme la limite du système inductif $\{K(\Sigma^j A, \Sigma^{i+j}B)\}_j$ dont les flèches sont données par le produit externe par la classe du ΣK–bimodule ΣK. Comme

$$ch(\Sigma K) = ch(k) = id_k \in HC^0(k,k) ,$$

on voit que le caractère de Chern bivariant passe à la limite et définit un homomophisme de groupes

$$ch : \overline{K}^*(A,B) \longrightarrow HC^*(A,B) .$$

Maintenant il est clair qu'on a, par définition de la limite inductive, une application

$$\overline{K}^0(\Sigma^i A,\Sigma^j B) \longrightarrow \overline{K}^{j-i}(A,B)$$

qui est un isomorphisme. Ceci suffit à définir sur $\overline{K}^*(-,-)$ un produit général tel que le caractère de Chern soit multiplicatif.

PROBLÈME 7.2. *Donner une description algébrique directe de* $\overline{K}^0(A,B)$.

On voit que la définition de la K–théorie algébrique bivariante supérieure au moyen de la suspension pose plus de questions qu'elles ne permet pour l'instant d'en résoudre. On peut espérer beaucoup plus de la voie inaugurée par Quillen

[1973] et poursuivie par Waldhausen [1985] et définir la K–théorie algébrique bivariante comme la K–théorie algébrique de la catégorie exacte $\mathrm{Rep}_k(A,B)$. On pourrait même considérer une catégorie de A–B–bimodules plus généraux, par exemple, ceux qui sont de dimension projective finie en tant que B–modules (de tels objets définissent des transferts en K–théorie algébrique) ; on encore définir la K–théorie bivariante à partir d'une catégorie de complexes parfaits comme le fait Thomason dans un travail récent sur la K–théorie des schémas.

Cependant jusqu'à présent, la construction d'un caractère de Chern ou, si l'on préfère, d'une trace généralisée à la Dennis passait par les matrices et donc par la construction + de Quillen. Des travaux récents non encore publiés de Goodwillie et de McCarthy (voir cependant Goodwillie [1987]) indiquent la possibilité de définir l'homologie cyclique d'une algèbre et le caractère de Chern en termes de la catégorie des modules projectifs de type fini. Ces méthodes s'appliquent aussi à la catégorie exacte $\mathrm{Rep}_k(A,B)$ et seront exploitées dans un travail ultérieur.

REFERENCES

R. Brown [1967], The twisted Eilenberg-Zilber theorem, Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Simposio di Topologia (1967), 33–37.

R. Busby [1968], Double centralizers and extensions of C*-algebras, Trans. Am. Math. Soc. 132 (1968), 79–99.

A. Connes [1983], Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n , Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 296 (1983), 953–958.

A. Connes [1985], Non-commutative differential geometry, Publ. Math. IHES 62 [1985], 41–144.

J. Cuntz [1983], Generalized homomorphisms between C*-algebras and KK-theory, Springer Lecture Notes in Math. 1031 (1983), 31–45.

J. Cuntz [1987], A new look at KK-theory, K-Theory 1 (1987), 31–51.

S. Eilenberg, S. MacLane [1947], Cohomology theory in abstract groups I, Annals of Math. 48 (1947), 51–78.

R. Farnsteiner [1988], On the vanishing of homology and cohomology groups of associative algebras, Trans. Am. Math. Soc. 306 (1988), 651–665.

F.T. Farrell, J.B. Wagoner [1972], Infinite matrices in algebraic K-theory and in topology, Comment. Math. Helvetici 47 (1972), 474–501.

E. Getzler, A. Szenes [1988], On the Chern character of a theta-summable Fredholm module, preprint Harvard University.

T. Goodwillie [1985], Cyclic homology, derivations and the free loopspace, Topology 24 (1985), 187–215.

T. Goodwillie [1987], lettre à F. Waldhausen, 10 août 1987.

G. Hochschild [1947], Cohomology and representations of associative algebras, Duke Math. J. 14 (1947), 921–948.

C.E. Hood, J.D.S. Jones [1987], Some algebraic properties of cyclic homology groups, K-Theory 1 (1987), 361–384.

J.D.S. Jones, Chr. Kassel [1988], Bivariant cyclic theory, preprint.

M. Karoubi [1987], Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque 149, S.M.F. Paris, 1987.

M. Karoubi, O. Villamayor [1971], K-théorie algébrique et K-théorie topologique I, Math. Scand. 28 (1971), 265–307.

Chr. Kassel [1987], Cyclic homology, comodules and mixed complexes, J. of Algebra 107 (1987), 195–216.

Chr. Kassel [1988], K-théorie algébrique et cohomologie cyclique bivariantes, Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 306 (1988), 799–802.

J.-L. Loday [1976], K-théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, 9 (1976), 305–377.

J.-L. Loday, D. Quillen [1984], Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, Comment. Math. Helvetici 59 (1984), 565–591.

R. McCarthy [1988], L'équivalence de Morita et l'homologie cyclique, Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 307 (1988), 211–215.

D. Quillen [1973], Higher algebraic K-theory I, Springer Lecture Notes in Math. 341 (1973), 85–147.

G. Rinehart [1963], Differential forms on general commutative algebras, Trans. Am. Math. Soc. 108 (1963), 195–222.

M.A. Shubin [1987], Pseudodifferential operators and spectral theory, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

J. Stallings [1965], Centerless groups – an algebraic formulation of Gottlieb's theorem, Topology 4 (1965), 129–134.

B.L. Tsygan [1983], Homology of matrix algebras over rings and Hochschild homology, Uspekhi Mat. Nauk 38 : 2 (1983), 217–218 (en russe); Russian Math. Surveys 38 (1983), 198–199 (trad. anglaise).

F. Waldhausen [1985], Algebraic K-theory of spaces, Springer Lecture Notes in Math. 1126 (1985), 318–419.

M. Wodzicki [1987], Report on the cyclic homology of symbols, lettre manuscrite à A. Connes, preprint I.A.S. Princeton, janvier 1987.

M. Wodzicki [1988a], Homologie cyclique des opérateurs pseudo-différentiels et classe d'Euler non commutative, Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 306 (1988), 321–325.

M. Wodzicki [1988b], Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory, à paraître aux Annals of Mathematics.

Christian Kassel
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Unité associée 1 au C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France
Tél. (33) 88.41.63.50
e-mail : a18603 at frccsc21.bitnet