

Volumina von hyperbolischen Raumformen

Ruth Kellerhals

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
53225 Bonn
GERMANY

MPI 95-110

Volumina von
hyperbolischen Raumformen

Ruth Kellerhals

Habilitationsschrift

Bonn, April 1995



Einleitung

Hyperbolische Raumformen sind vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstant negativer Schnittkrümmung. Modelliert nach dem hyperbolischen Standardraum prägen sie unsere Anschauung und sind als kanonische Beispiele für Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung von breiterem Interesse. Dennoch bergen sie viele Geheimnisse. Insbesondere sind konkrete Berechnungen und geometrische Konstruktionen für höhere Dimensionen sehr schwierig und kaum bekannt.

Hyperbolische Raumformen von endlichem Volumen sind von einfachem geometrisch-topologischem Typ. Sie gestatten eine Zerlegung in einen dicken und in einen dünnen Teil. Das dicke Kernstück ist kompakt und enthält stets einen Ball vom Radius grösser gleich der halben Margulis-Konstanten $\varepsilon_n > 0$, wobei $n \geq 2$ die Dimension der Mannigfaltigkeit bezeichnet. Der dünne Teil besteht aus endlich vielen disjunkten Spitzenumgebungen und Tuben um geschlossene Geodätische der Länge kleiner als ε_n .

Das Volumen einer hyperbolischen Raumform ist zweifellos eine ihrer natürlichsten und wichtigsten Invarianten und ist mit anderen geometrisch-topologischen Grössen durch (Un-)Gleichungen verknüpft. Die Bestimmung einer einzelnen Grösse wie beispielsweise des Volumens ist in den meisten Fällen unmöglich. Hingegen ist das Volumen durch eine positive Konstante, welche nur von der Dimension abhängt, nach unten beschränkt.

In dieser Arbeit sollen explizite untere Volumenschranken für hyperbolische Raumformen von endlichem Volumen aufgestellt werden. Wir entwickeln dabei eine Methode, welche auf eine Idee von R. Meyerhoff [53] für dreidimensionale hyperbolische Raumformen zurückgeht und von Y. Miyamoto [59] auf berandete Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden ist. Die Methode stützt sich auf zwei Pfeiler. In einem ersten Schritt wird für hyperbolische und möglicherweise berandete hyperbolische Raumformen M endlichen Volumens die Grösse einer eingebetteten kugelförmigen Umgebung, einer Spitzenumgebung oder eines eingebetteten Kragens abgeschätzt. Dabei spielen Eigenschaften diskreter Gruppen hyperbolischer Isometrien, wie sie im dreidimensionalen Fall in der Jørgensenschen Ungleichung für $PSL(2, \mathbb{C})$ zum Ausdruck kommt, eine wichtige Rolle. In einem zweiten Schritt wird ermittelt, wieviel Volumen ausserhalb solcher Umgebungen liegt. Jede der Teilmengen induziert bei Hochhebung in die universelle Überlagerung von M eine verallgemeinerte Kugelpackung des hyperbolischen Raums. Lokale Dichteberechnungen und der Satz von Böröczky [10] über die simpliziale Dichteabschätzung für eine Packung führen schliesslich zu stark verbesserten, gewichteten Volumenschranken für M .

Von den eingehenden Techniken her bildet die vorliegende Arbeit eine Synthese von hyperbolischer Konvexgeometrie und der Theorie diskreter Bewegungsgruppen und führt zu globalen differentialgeometrischen Aussagen für hyperbolische Raumformen und deren Volumenspektren. Sie ist entsprechend in drei Kapitel eingeteilt. Das erste Kapitel über hyperbolische Konvexgeometrie ist grundlegend. Es beinhaltet Teile nichteuklidischer Polyedergeometrie. Insbesondere möchten wir den Coxeter-Schläfli-Vinberg-Formalismus hervorheben, den wir zur Beschreibung von Orthoschemen als elementare Bausteine nicht-

euklidischer Polytope gewählt haben. Volumenberechnungen für hyperbolische, eventuell abgestumpfte Orthoscheme nehmen einen wichtigen Platz ein. Hier gehen viele unserer früheren Resultate ein. Sie werden weiter ausgebaut und durch elementare Volumenabschätzungen für reguläre Simplexe ergänzt. Im Schlussteil des ersten Kapitels werden gewöhnliche Kugelpackungen des euklidischen und des hyperbolischen Raums, sowie verallgemeinerte Packungen des hyperbolischen Raums mit Horobällen und Hyperbällen studiert. Die Ergebnisse zum Volumenproblem gehen bei den Dichteberechnungen und Dichteabschätzungen ein und sind für die späteren Anwendungen von Bedeutung.

Unabhängig davon ist das zweite Kapitel, in welchem diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien untersucht werden. Im ersten Teil werden an die wichtigsten Eigenschaften hyperbolischer Isometrien als Möbiustransformationen erinnert. Der zweite Teil handelt von der geometrischen Charakterisierung diskreter Bewegungsgruppen. Besonders wichtig sind die Bieberbachschen Sätze über kristallographische euklidische Bewegungsgruppen. Damit im Zusammenhang stehen das fundamentale Lemma von Margulis und der Satz von A. Selberg, H. Garland–M. S. Raghunatan, N. Wielenberg [72] über die geometrische Endlichkeit von Gruppen hyperbolischer Isometrien endlichen Kovolumens. Im dritten Teil werden orientierungserhaltende hyperbolische Isometrien mit Clifford-Matrizen in $PSL(2, C_m)$ identifiziert, wobei C_m die Clifford-Algebra in m Erzeugenden bezeichnet. Eine Variante für eine Verallgemeinerung der Jørgensenschen Spurgleichung, welche unabhängig von S. Hersensky [37] und P. Waterman [70] entdeckt worden ist, hat wichtige Auswirkungen auf die Geometrie von Horobällen.

Im dritten Kapitel werden die Früchte unserer Arbeit in Kapitel eins und der Resultate in Kapitel zwei geerntet. Zuerst werden die wesentlichen Strukturaussagen über hyperbolische, eventuell berandete Raumformen zusammengestellt. Sie garantieren die Existenz universeller unterer Volumenschranken. Dann werden explizite Volumenschranken hergeleitet, getrennt für kompakte und nichtkompakte Raumformen von endlichem Volumen, mit oder ohne Rand. Zum Schluss werden die Auswirkungen auf das Volumenspektrum Vol_n und die wichtigsten geometrischen Konstruktionen n -dimensionaler hyperbolischer Raumformen diskutiert. Arithmetische Aspekte werden dabei vollständig ausgeklammert.

Für die Lesbarkeit und zur Abrundung der Arbeit haben wir eine ausführlichere Darstellung als notwendig gewählt. Um die Autonomie der ersten Kapitel und deren eigenständige Bedeutung zu unterstreichen, haben wir jedes Kapitel mit einer separaten, detaillierteren Einleitung versehen. Jedes Kapitel ist in Abschnitte eingeteilt, deren Nummern im Kopf mitgeführt werden. Sätze, Lemmata, Tafeln und Tabellen werden getrennt voneinander und nach Abschnitt durchnummeriert. Jeder Abschnitt ist in Unterabschnitte eingeteilt. Gibt es in einem Unterabschnitt mehrere Bemerkungen, so werden sie in alphabetischer Reihenfolge durchnummeriert.

Ich danke Prof. H. Karcher für die Unterstützung und Prof. H.-C. Im Hof für hilfreiche Diskussionen. Ganz besonders dankbar bin ich Prof. F. Hirzebruch für das Interesse und die vielen aufmunternden Gespräche.

Dem Max-Planck-Institut für Mathematik und seinen Mitarbeitern danke ich für die Unterstützung und die Gastfreundschaft. Die angenehme und inspirierende Atmosphäre haben sehr zu dieser Arbeit beigetragen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
Inhaltsverzeichnis	v
1. Hyperbolische Konvexgeometrie	1
1.0. Einleitung.....	1
1.1. Modelle des hyperbolischen Raums	2
1.2. Polyedergeometrie in Räumen konstanter Krümmung	6
1.3. Volumina nichteuklidischer Polytope.....	20
1.4. Verallgemeinerte Kugelpackungen des hyperbolischen Raums.....	35
2. Diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien	52
2.0. Einleitung.....	52
2.1. Möbiustransformationen in n Dimensionen.....	53
2.2. Die Geometrie diskreter Bewegungsgruppen.....	59
2.3. Clifford-Matrizen und hyperbolische Isometrien	65
3. Volumina von hyperbolischen Raumformen	71
3.0. Einleitung.....	71
3.1. Hyperbolische Raumformen.....	72
3.2. Universelle untere Volumenschranken	77
3.3. Das Volumenspektrum hyperbolischer Raumformen	90
Bibliographie	97



1. Hyperbolische Konvexgeometrie

1.0. Einleitung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der hyperbolischen Konvexgeometrie bereitgestellt. Sie reichen von den Eigenschaften des hyperbolischen Standardraums über Polyedergeometrie in Räumen konstanter Krümmung und dem Volumenproblem nichteuklidischer Simplexe bis hin zu verallgemeinerten Kugelpackungen des hyperbolischen Raums. Wir beginnen mit der Vorstellung der bekannten Modelle für den hyperbolischen Standardraum H^n (vgl. §1.1). Die konformen Realisierungen für H^n bieten sich beim Studium der Isometrien von H^n an, während das Modell im Lorentz-Minkowski-Raum für die Polyedertheorie bevorzugt wird.

Die Polyedergeometrie in Räumen konstanter Krümmung (vgl. §1.2) bildet nach dem verallgemeinerten Satz von Poincaré das Fundament für die Konstruktion und das weitere Studium von Clifford-Kleinschen Raumformen. Um die Kombinatorik von Polytopen und deren Beziehung als Fundamentalbereiche zu diskreten, einfach präsentierten Bewegungsgruppen zu formalisieren, ist die algebraische Darstellung spitzwinkliger Polytope durch Coxeter-Schläfli-Vinberg-Graphen sehr nützlich. Die einfachsten Graphen beschreiben Orthoscheme, welche als Simplexe gewissen Orthogonalitätseigenschaften genügen und die Elementarbausteine der Polyedergeometrie bilden. So kann jedes konvexe Polytop in endlich viele Orthoscheme zerlegt werden. Wir untersuchen insbesondere hyperbolische, eventuell abgestumpfte Orthoscheme und reguläre Simplexe. Diese bilden die geeigneten Objekte für analytisch-geometrische Untersuchungen in der Polyedergeometrie und als Bausteine auch bei hyperbolischen, eventuell berandeten Mannigfaltigkeiten.

Für gewöhnliche und abgestumpfte Orthoscheme können geschlossene Volumenformeln im Fall ungerader Dimensionen ≤ 5 , sowie eine Volumenreduktionsformel bei gerader Dimension angegeben werden (vgl. §1.3). Deren Herleitung beruht auf der Schläflischen Volumendifferentialformel und den Eigenschaften der Polylogarithmusfunktionen (vgl. §1.3.A). Insbesondere kann das Volumen sämtlicher Coxeter-Orthoscheme berechnet werden; sie treten als Fundamentalbereiche von diskreten Spiegelungs- oder Coxeter-Gruppen des hyperbolischen Raums auf und liefern somit Beispiele hyperbolischer Mannigfaltigkeiten der Dimensionen ≤ 5 . Für nichteuklidische reguläre Simplexe können mit Hilfe des Schläflischen Differentials immerhin noch "elementare" Volumenschranken hergeleitet werden.

Im Schlussteil werden Packungen des hyperbolischen Raums mit gewöhnlichen Bällen, Horobällen und Hyperbällen studiert (vgl. §1.4). Es kann jeweils ein lokaler Dichtebegriff bezüglich der Dirichlet-Voronoi-Zellen einer Packung eingeführt werden. Diese lokale Dichte ist nach dem erweiterten Satz von Böröczky durch die simpliziale Dichtefunktion der Packung kontrollierbar. Aufgrund der Ergebnisse von §1.3 ergeben sich daraus schliesslich explizite universelle obere Dichteschranken – zumindest für niedrige Dimensionen.

1.1. Modelle des hyperbolischen Raums

Der Vollständigkeit der vorliegenden Arbeit halber werden in diesem Abschnitt die wichtigsten Modelle für den hyperbolischen Raum H^n als einfach zusammenhängenden Riemannschen Raum von konstant negativer Krümmung -1 zusammengestellt. Jede der Realisierungen weist Vor- und Nachteile auf, sodass wir uns stets des dem jeweiligen Zweck angepassten Modells bedienen, und dies oftmals ohne Vorankündigung. Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf [3, Chapter 2], [5, Chapter 7] und [61, §3, 4.5, 4.6].

1.1.1. *Vektormodelle.* Es sei $E^{1,n}$ der $(n+1)$ -dimensionale reelle Vektorraum versehen mit der Bilinearform

$$(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

der Signatur $(1, n)$. $E^{1,n}$ ist der *Lorentz-Minkowski-Raum*. Der *hyperbolische Raum* H^n ist die Menge $\{x \in E^{1,n} \mid (x, x) < 0, x_0 > 0\}$ bis auf Multiplikation mit positiv reellen Zahlen. Die Normalisierung

$$\begin{aligned} H^n &= \{x \in E^{1,n} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

erlaubt auch, H^n als eine Zusammenhangskomponente, hier als positives Blatt $\{x_0 > 0\}$, eines Hyperboloids im \mathbb{R}^{n+1} zu sehen. Die Darstellung (1.1.1) liefert das *Hyperboloid-Modell* für H^n . Andererseits beschreibt (1.1.1) H^n als nördliche Hemisphäre der Pseudosphäre vom Radius $i = \sqrt{-1}$ im $E^{1,n}$. Die hyperbolische Trigonometrie lässt sich dabei auf einer Sphäre vom Radius i im \mathbb{R}^{n+1} realisieren (siehe [8, p. 20]). Dies entspricht der Betrachtungsweise von J. L. Coolidge und verdeutlicht das *trigonometrische Dualitätsprinzip* der Nichteuklidischen Geometrie (siehe [8, p. 210 und p. 258, Bemerkung 6]). Nach diesem Prinzip geht jede Formel der sphärischen Trigonometrie nach Multiplikation aller auftretenden Kantenlängen mit i in eine Formel der hyperbolischen Trigonometrie über. Im Vektorraummodell lässt sich jede hyperbolische Hyperebene H , als Schnitt von $H^n \subset E^{1,n}$ mit einem n -dimensionalen Unterraum von $E^{1,n}$, darstellen als $H =: H_e = e^\perp$ vermöge des zugehörigen raumartigen Normalenvektors $e \in E^{1,n}$ mit $(e, e) = 1$. Diese Darstellungsweise wird in der Polyedergeometrie bevorzugt (vgl. §1.2).

1.1.2. *Projektive Modelle.* Im reell-projektiven Raum $P^n := P_n(\mathbb{R})$ kann H^n nach (1.1.1) als Inneres von P^n bezüglich der Ovalquadrik

$$Q_{1,n} := \{[x] \in P^n \mid (x, x) = 0\}$$

veranschaulicht werden; auf diese Weise erhalten wir das *projektive Modell*

$$H^n =: IQ_{1,n} = \{[x] \in P^n \mid (x, x) < 0\} .$$

Der Abschluss $\overline{H^n}$ von H^n in P^n ist die natürliche Kompaktifizierung von H^n . Punkte des Randes $\partial H^n = \overline{H^n} - H^n$ heissen *unendliche Punkte* oder *Fernpunkte* von H^n . Punkte ausserhalb der Absoluten $Q_{1,n}$ heissen *ultra-unendliche Punkte* von H^n und bilden den

Aussenraum $AQ_{1,n}$ von H^n . Nach dem Pol-Polare-Prinzip des projektiven Raums P^n (siehe [30, Kapitel 4]) entspricht jedem Punkt eine Hyperebene in P^n und umgekehrt. Ist etwa $P = [x] \in P^n$, so bilden alle zu $[x]$ *konjugierten Punkte* $[y] \in P^n$ eine projektive Hyperebene Pol_P ,

$$\text{Pol}_P := \{ [y] \in P^n \mid (x, y) = 0 \} \quad , \quad (1.1.2)$$

welche *Polarhyperebene* zu $P = [x]$ heisst. Der Punkt P ist der *Pol* von Pol_P . Der Pol zu einer beliebigen Hyperebene H in P^n wird mit $\text{Pol}(H)$ bezeichnet.

Eigenschaften. (siehe [30, §4E])

- (a) Die Polarhyperebene Pol_P zu $P \in P^n$ schneidet, berührt oder meidet die Quadrik $Q_{1,n}$ genau dann, wenn $P \in AQ_{1,n}$, $P \in Q_{1,n}$ oder $P \in IQ_{1,n}$ ist.
- (b) Sind g, h Geraden in P^2 mit Schnittpunkt $S = g \cap h$, so ist Pol_S die Gerade bestimmt durch die Pole $\text{Pol}(g)$ und $\text{Pol}(h)$.
- (c) Enthält die Gerade g in P^2 den Punkt $\text{Pol}(h)$ der Geraden h , so gilt $g \perp h$.

Wir erinnern kurz an die hyperbolische Längen- und Winkelmessung. Die *hyperbolische Distanz* $\text{dist}(P, Q) = \text{dist}_{\text{proj}}(P, Q)$ zwischen zwei Punkten $P = [x]$ und $Q = [y]$ in H^n mit $(x, x) = (y, y) = -1$ ist gegeben durch (siehe [3, Chapter 1, §4.2])

$$\cosh \text{dist}(P, Q) = |(x, y)| \quad , \quad 0 \leq \text{dist}(P, Q) < \infty \quad .$$

Es seien H_e, H_f zwei Hyperebenen in H^n mit Orthonormalvektoren $e, f \in E^{1,n}$. Weiter bezeichnen $H_v^\pm := \{ x \in H^n \mid (x, v) \gtrless 0 \}$ die beiden von der Hyperebene H_v begrenzten, orientierten Halbräume in H^n . Schneiden sich H_e und H_f im Innern $IQ_{1,n}$ mit $H_e^- \cap H_f^- \neq \emptyset$, so ist der *hyperbolische Winkel* $\angle(H_e, H_f)$ zwischen H_e und H_f in $H_e^- \cap H_f^-$ gegeben durch (siehe [3, (8), p. 84])

$$\cos \angle(H_e, H_f) = -(e, f) \quad , \quad 0 \leq \angle(H_e, H_f) \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

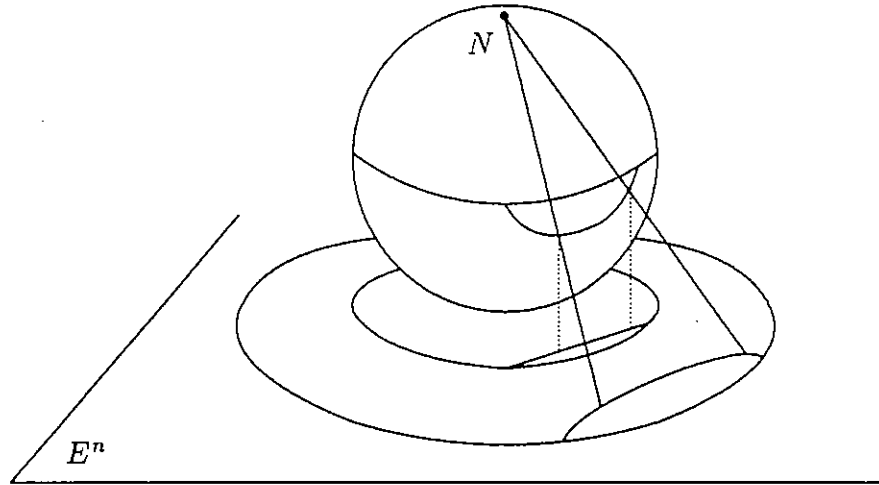
Sind H_e, H_f disjunkt oder *ultra-parallel* in H^n , so ist die *hyperbolische Länge* $\rho(H_e, H_f)$ des (eindeutig bestimmten) gemeinsamen Lotes gegeben durch (siehe [3, (9), p. 84])

$$\cosh \rho(H_e, H_f) = |(e, f)| \quad , \quad 0 \leq \rho(H_e, H_f) < \infty \quad .$$

Mit diesen Kenntnissen lassen sich alle Gesetzmässigkeiten der hyperbolischen Trigonometrie herleiten.

Schliesslich bemerken wir, dass nach [3, Chapter 2, Theorem 1.4] das Innere IQ jeder Ovalquadrik $Q \subset P^n$ einen zu H^n isomorphen Raum liefert. Am bequemsten ist das *projektive Modell* $(B^n, \text{dist}_{\text{proj}})$, wobei H^n als Inneres der Einheitskugel B^n im E^n (oder als Schnitt der Ebene $\{x_0 = 1\}$ mit dem Innern des Lichtkegels $\{(x, x) = 0\}$ im Lorentz-Minkowski-Raum $E^{1,n}$) hervorgeht. Die meisten Abbildungen hyperbolischer Figuren sind im (winkerverzerrenden) projektiven Modell realisiert.

1.1.3. *Konforme Modelle.* Wir betrachten das projektive Modell $(B^n, \text{dist}_{proj})$ mit $B^n \subset E^n = \{x \in E^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ in E^{n+1} . Durch orthogonale Projektion dieses Modells hoch auf die südliche Hemisphäre der Kugel $K^{n+1} \subset E^{n+1}$ vom Radius 1 mit Südpol $S = (0, \dots, 0)$ und anschliessend durch stereographische Projektion vom Nordpol N zurück auf E^n erhält man ein konformes Ballmodell für H^n (siehe [73, p. 70–72] und Figur 1.1.1).



Figur 1.1.1

Nach geeigneter Renormalisierung ist die Bildkugel wieder die Einheitskugel B^n , und wir erhalten das *konforme Ballmodell* $(B^n, \text{dist}_{konf})$ mit Riemannscher Metrik (siehe [61, Theorem 4.5.5])

$$ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - |x|^2)^2} .$$

Im Gegensatz zum projektiven Modell für H^n sind die *Geodätischen*, das heisst, die distanzerhaltenden Abbildungen $g : J \subset \mathbb{R} \mapsto H^n$, im konformen Modell nicht mehr gewöhnliche Geraden, sondern Kreisbogensegmente orthogonal zur Grenzsphäre $S^{n-1} = \partial B^n$, sowie gewöhnliche Geraden durch das Zentrum von B^n . Das andere konforme Modell ist das Halbraummodell $(E_+^n, \text{dist}_{konf})$ mit $E_+^n = \{y \in E^n \mid y_n > 0\}$, welches mit dem Ballmodell $(B^n, \text{dist}_{konf})$ vermöge der verallgemeinerten Cayley-Transformation (siehe [3, p. 43])

$$y_i = \frac{2x_i}{|x + e_n|^2} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 ; \quad y_n = \frac{2(x_n + 1)}{|x + e_n|^2} - 1 ,$$

zusammenhängt. Die Riemannsche Metrik für $(E_+^n, \text{dist}_{konf})$ ist somit gegeben durch

$$ds^2 = \frac{dy_1^2 + \dots + dy_n^2}{y_n^2} ,$$

und für den hyperbolischen Abstand $\text{dist}(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in E_+^n$ gilt (siehe [5, §3.3]):

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \text{dist}(x, y) = \frac{|x - y|^2}{4 x_n y_n} . \quad (1.1.3)$$

Schliesslich kann die Gruppe $I(H^n)$ der längentreuen Selbstabbildungen oder *Isometrien* von H^n in einem der konformen Modelle mit der Gruppe $GM(\hat{E}^{n-1})$ der Möbiustransformationen von $\hat{E}^{n-1} := E^{n-1} \cup \{\infty\}$ identifiziert werden (vgl. Kapitel 2).

1.2. Polyedergeometrie in Räumen konstanter Krümmung

Die Polyedergeometrie in Räumen X^n konstanter Krümmung ist wesentlicher Bestandteil bei der Konstruktion und für das Verständnis Clifford-Kleinscher Raumformen X^n/Γ , wobei $\Gamma \subset I(X^n)$ eine diskrete, torsionsfreie Gruppe von Isometrien auf X^n bezeichnet. Besonders reichhaltig ist die hyperbolische Theorie, welche die sphärische und die euklidische Geometrie umfasst, und darüber hinaus viele noch ungelöste Probleme wie etwa das Klassifikationsproblem hyperbolischer Kristalle und Coxeter-Polytope aufweist.

Dieser Abschnitt beinhaltet die grundlegenden Begriffe und Sätze der hyperbolischen Polyedergeometrie, insbesondere zur Orthoschemengeometrie und über reguläre Simplexes. Wir machen uns dabei den Formalismus von Coxeter-Schläfli-Vinberg zur Beschreibung von Polytopen durch gewichtete Graphen oder Schemata zunutze.

1.2.1. *Konvexe Polytope in X^n .* Es bezeichne X^n entweder die Sphäre S^n , den euklidischen Raum E^n oder den hyperbolischen Raum H^n . Wir denken uns S^n im euklidischen Raum E^{n+1} und H^n im Lorentz-Minkowski-Raum $E^{1,n}$ eingebettet.

Eine Kollektion von Teilmengen $\{U_i\}_{i \in I}$ in X^n heisst *lokal endlich*, falls es für jeden Punkt $p \in X^n$ eine Umgebung $U_p \subset X^n$ gibt, sodass $\{i \in I \mid U_p \cap U_i \neq \emptyset\}$ endlich ist. Ein *n -dimensionales konvexes Polyeder* $K \subset X^n$ ist eine nicht-leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge in X^n , sodass die Gesamtheit \mathcal{S} der Seiten lokal endlich ist (siehe [61, §6.3]). Dabei verstehen wir unter einer *Seite* S von K eine maximale konvexe Teilmenge von ∂K . Jede Seite S von K ist ein konvexes Polyeder der Dimension $n - 1$ in X^n . Bezeichnet H_S den abgeschlossenen Halbraum von X^n mit $S \subset \partial H_S$ und $K \subset H_S$, so ist $K = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} H_S$.

Ist $p \in K$ ein Eckpunkt (Punkt einer 0-dimensionale Seite), so ist die *Eckenfigur* K_p von p in K der Durchschnitt von K mit einer hinreichend kleinen Sphäre um p ; K_p ist ein $(n - 1)$ -dimensionales sphärisches konvexes Polyeder. Ein konvexes Polyeder $K \subset X^n$ ist genau dann kompakt, wenn K endlich viele Eckpunkte besitzt und deren konvexe Hülle ist, und falls für $X^n = S^n$ das Polyeder K in einer offenen Hemisphäre von S^n liegt (siehe auch [61, Theorem 6.4.1]). Ein kompaktes konvexes Polyeder $P \subset X^n$ heisst ein *konvexes Polytop*.

Es sei $X^n = H^n$ realisiert im projektiven Modell $(B^n, \text{dist}_{proj})$. Den Begriff des hyperbolischen konvexen Polytops P schwächen wir etwas ab, indem wir Eckpunkte auf dem Rand $\partial H^n = S^{n-1}$ zulassen: Es sei $P \subset B^n$ ein konvexes Polyeder. \bar{P} bezeichne den Abschluss von P in E^n , das heisst, $\bar{P} \cap H^n = P$. Ein *unendlicher Eckpunkt* q von P ist ein Punkt in $\bar{P} \cap S^{n-1}$, sodass die Eckenfigur P_q , das heisst, der Durchschnitt von P mit einer hinreichend kleinen Horosphäre zu q , ein $(n - 1)$ -dimensionales euklidisches Polytop ist. Ein (*verallgemeinertes*) *konvexes Polytop* $P \subset H^n$ ist ein konvexes Polyeder, dessen Abschluss \bar{P} ein Polytop in E^n ist. P ist die konvexe Hülle von endlich vielen gewöhnlichen oder unendlichen Eckpunkten, besitzt nur endlich viele Seiten und ist von endlichem Volumen (siehe [61, §6.3 und §6.4]).

Es sei $P \subset X^n$ ein konvexes Polytop. Dann ist P von endlich vielen Hyperebenen $H_i, i \in I$, begrenzt. Wir schreiben $H_i = e_i^\perp$, wobei e_i derjenige Einheitsnormalenvektor bezeichnet, welcher bezüglich P nach aussen gerichtet ist. P ist somit von der Form $P = \bigcap_{i \in I} H_i^-$, wobei wie gewöhnlich $H_i^- = \{x \in X^n \mid (x, e_i) \leq 0\}$ bezeichnet.

Ein Polytop $P = \bigcap_{i \in I} H_i^- \subset X^n$ heisst *spitzwinklig*, falls jedes Paar sich schneidender Hyperebenen $H_i, H_j, i, j \in I, i \neq j$, einen Keilwinkel $\alpha_{ij} = \angle(H_i, H_j)$ in $H_i^- \cap H_j^-$ nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$ bildet, das heisst, $\alpha_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$. Im hyperbolischen Fall gilt nach einem Resultat von V. Andreev (siehe [3, Chapter 6, Theorem 1.4]), dass sich zwei Hyperebenen H_i, H_j , wenn überhaupt in H^n , dann auf P schneiden.

Weiter heisst $P \subset X^n$ *einfach*, falls jede k -dimensionale Seite $F \subset P$ in genau $n - k$ Fazetten (Seiten der Kodimension 1) von P enthalten ist. Es gilt (siehe [3, Chapter 6, Theorem 1.8]):

SATZ 1.2.1.

Jedes spitzwinklige Polytop $P \subset X^n$ ist einfach.

Es sei $P = \bigcap_{i \in I} H_i^- \subset X^n$ ein spitzwinkliges Polytop. Die Gram-Matrix $G(P) := ((e_i, e_j))_{i, j \in I}$ der Normalenvektoren $e_i, i \in I$, zu P ist eine unzerlegbare (nicht als Blockdiagonalmatrix darstellbare), symmetrische Matrix der Ordnung $|I|$ mit Elementen $(e_i, e_i) = 1$ auf der Diagonalen und $(e_i, e_j) \leq 0, i \neq j$, neben der Diagonalen. $G(P)$ bestimmt P bis auf die Lage im Raum eindeutig. Geometrisch gilt folgender Zusammenhang:

$$-(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } H_i \perp H_j, \\ \cos \alpha_{ij}, & \text{falls } \alpha_{ij} = \angle(H_i, H_j), \\ 1, & \text{falls } H_i, H_j \text{ (asymptotisch) parallel,} \\ \cosh l_{ij}, & \text{falls } H_i, H_j \text{ ultra-parallel mit Lotlänge } l_{ij}. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Umgekehrt sei $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ eine unzerlegbare symmetrische $(m \times m)$ -Matrix vom Rang $n+1$ mit Eingängen $g_{ii} = 1$ und $g_{ij} \leq 0$ für $1 \leq i \neq j \leq m$. Dann ist G realisierbar als Gramsche Matrix $G(P)$ eines spitzwinkligen Polyeders $P \subset X^n$. Genauer gilt (siehe [3, Chapter 6, Theorem 1.7 und Theorem 2.2]):

- (1) Ist G positiv definit (G ist *elliptisch*), so ist $m = n + 1$, und G ist die Gram-Matrix eines bis auf Isometrie eindeutig bestimmten Simplexes in S^n .
- (2) Ist G positiv semidefinit (G ist *parabolisch*), so ist $m = n + 2$, und G ist die Gram-Matrix eines bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmten Simplexes in E^{n+1} .
- (3) Ist G von der Signatur $(1, n)$ (G ist *hyperbolisch*), so ist G die Gram-Matrix eines bis auf Isometrie eindeutig bestimmten konvexen Polyeders in \overline{H}^n .

In Abhängigkeit der Gram-Matrix $G(P)$ kann die kombinatorisch-metrische Gestalt eines konvexen Polytops $P \subset H^n$ bestimmt werden (siehe [3, Chapter 6, §2.2]). Ist beispielsweise $p \in H^n$ ein gewöhnlicher Eckpunkt von P , so ist die zugehörige Eckenfigur P_p beschrieben durch eine elliptische Prinzipaluntermatrix G_p von $G(P)$ vom Rang n . Ist $q \in \partial H^n$ ein unendlicher Eckpunkt von P , so ist die Eckenfigur P_q beschrieben durch eine parabolische Prinzipaluntermatrix G_q von $G(P)$ vom Rang $n - 1$.

1.2.2. Das Schema eines Polytops. Ein spitzwinkliges Polytop $P \subset \overline{H}^n$ von endlichem Volumen kann im Gegensatz zu seinen Verwandten in S^n und E^n (siehe (1) und (2))

kombinatorisch sehr kompliziert sein; die Gram-Matrix $G(P)$ ist von der Signatur $(1, n)$, kann aber beliebig grosse Ordnung haben. Schränkt man sich auf kombinatorisch einfache Klassen von Polytopen $P \subset X^n$ ein, etwa solche vom simplizialen Typ oder von hohem Orthogonalitätsgrad, so ist deren geometrische Beschreibung durch gewichtete Graphen oder Schemata wesentlich angenehmer und überschaubarer.

Ein *Schema* Σ ist ein gewichteter Graph (siehe [68, Chapter 5, §1.3]), dessen Knoten n_i, n_j ($i, j \in I$) entweder mit einer Kante vom Gewicht $c_{ij} > 0$ verbunden oder disjunkt vom Gewicht $c_{ij} = 0$ sind. Die Zahl $|I|$ der Knoten heisst die *Ordnung* von Σ . Ein *Unterschema* von Σ ist ein Untergraph von Σ , dessen Knoten $n_i, i \in I' \subset I$, denselben Verknüpfungsregeln wie in Σ gehorchen.

Jedem Schema Σ der Ordnung m ist eine symmetrische Matrix $A(\Sigma) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ der Ordnung m mit $a_{ii} = 1$ und $a_{ij} = -c_{ij}$ für $i \neq j$ zugeordnet. Offensichtlich ist Σ genau dann zusammenhängend, wenn $A(\Sigma)$ unzerlegbar ist. Entsprechend zur Ordnung lassen sich Begriffe wie Rang, Determinante und Definitheitscharakter von $A(\Sigma)$ auf Σ übertragen.

LEMMA 1.2.1 [66, (1), p. 258; p. 262].

- (1) Für die Determinante eines linearen Schemas Σ_1^m mit Knoten $1, \dots, m$ und mit Gewichten $c_i := c_{i, i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$, das heisst,

$$\Sigma_1^m : \circ \underset{1}{\frac{c_1}{\quad}} \circ - \dots - \circ \underset{m}{\frac{c_{m-1}}{\quad}} \circ ,$$

gilt die Rekursionsformel

$$\det \Sigma_1^m = \det \Sigma_1^{m-1} - c_{m-1}^2 \det \Sigma_1^{m-2} \quad , \quad \text{wobei} \quad \det \Sigma_1^0 = \det \Sigma_1^1 := 1 \quad .$$

- (2) Für die Determinante eines zyklischen Schemas Δ_m der Ordnung m mit Gewichten $c_i, i \geq 1$, modulo m , das heisst,

$$\Delta_m : \begin{array}{c} \circ \quad \dots \quad \circ \\ \diagdown \quad \quad \diagup \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \diagup \quad \quad \diagdown \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ \diagdown \quad \quad \diagup \\ \circ \quad \quad \quad \circ \end{array} \quad ,$$

gilt bis auf zyklische Vertauschung der Indizes die Formel

$$\det \Delta_m = -2 \prod_{i=1}^m c_i + \det \Sigma_1^{m-1} - c_m^2 \det \Sigma_2^{m-2} \quad .$$

Ein Schema Σ heisst entweder *elliptisch*, *parabolisch* oder *hyperbolisch*, falls entweder alle Komponenten von Σ elliptisch sind, oder falls es neben elliptischen Komponenten mindestens eine parabolische Komponente gibt, oder falls genau eine Komponente hyperbolisch ist.

Nach Definition (siehe [68, Chapter 5, Definition 1.6]) ist das Schema $\Sigma(P)$ eines spitzwinkligen Polytops $P = \bigcap_{i \in I} H_i^- \subset X^n$ gleich dem Schema Σ , dessen Matrix $A(\Sigma)$ mit der Gram-Matrix $G(P)$ von P zusammenfällt; $\Sigma(P)$ beschreibt P bis auf Isometrie eindeutig. Die Knoten von $\Sigma(P)$ entsprechen den berandenden Hyperebenen $H_i = e_i^\perp$ von P , und für die Gewichte gilt $c_{ij} = -(e_i, e_j)$, $i, j \in I$. Insbesondere sind Knoten zu orthogonalen Hyperebenen disjunkt.

Wir sagen, dass zwei Polytope $P_1, P_2 \subset \overline{H}^n$ vom gleichen schematischen Typ sind, falls

- (i) die Schemata $\Sigma(P_1), \Sigma(P_2)$ vom gleichen Graphentyp sind, das heisst, die zugrunde liegenden Graphen sind als eindimensionale simpliziale Komplexe homöomorph;
- (ii) die Gewichte c_{ij}^k von $\Sigma(P_k)$, $k = 1, 2$, korrespondieren gemäss

$$c_{ij}^1 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 1 \quad \iff \quad c_{ij}^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 1 \quad .$$

Nach [3, Chapter 6, §2] sind Polytope vom gleichen schematischen Typ kombinatorisch äquivalent.

Für Coxeter-Polytope $P_C \subset X^n$, welche definitionsgemäss durch natürliche Keilwinkel, also solche von der Form $\frac{\pi}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, charakterisiert sind, übernehmen wir die gebräuchlichen Bezeichnungen aus der Lie-Theorie: Sind zwei Knoten durch das Gewicht $\cos \frac{\pi}{p}$ miteinander verknüpft, so werden sie durch eine mit p markierte Kante verbunden (auf die Markierung $p = 3$ wird wie gewöhnlich verzichtet). Im nicht-kristallographischen Fall ersetzen wir das Gewicht $\cos \alpha$ durch die Marke α .

Weist $P_C \subset X^n$, $X^n \neq S^n$, zwei (asymptotisch) parallele berandende Hyperebenen auf, so werden die zugehörigen Knoten in $\Sigma(P_C)$ durch eine Kante der Form $\circ \overset{\infty}{\text{---}} \circ$ verbunden. Sind zwei Hyperebenen von $P_C \subset \overline{H}^n$ ultra-parallel mit Lotabstand der Länge l , so werden ihre Knoten im Schema $\Sigma(P_C)$ durch eine gestrichelte Kante $\circ \cdots \cdots \circ$ verbunden, das heisst, auf die Gewichtung $\cosh l$ wird verzichtet.

Coxeter-Polytope $P_C \subset X^n$ treten als Fundamentalpolytope von diskreten Spiegelungsgruppen oder *Coxeter-Gruppen* in X^n auf. Im Gegensatz zu den endlichen und affinen Coxeter-Gruppen (siehe Tafel 1.2.1 und [68, Chapter 5, §1.4]) ist das Klassifikationsproblem für hyperbolische Coxeter-Gruppen noch weit von einer vollständigen Lösung entfernt. Partielle Resultate können erzielt werden, indem man sich auf Teilklassen von hyperbolischen Coxeter-Gruppen einschränkt, deren Fundamentalpolytope von fest gewähltem und einfachem schematischem Typ sind (siehe [68, Chapter 5, §2] und Tafel 1.2.2). So sind beispielsweise alle hyperbolischen Coxeter-Simplizes klassifiziert; sie existieren bis und mit Dimension 9 (siehe [68, Chapter 5, §2.3]).

$A_n \ (n \geq 1)$	$\circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \circ$
$B_n \ (n \geq 2)$	$\overset{4}{\circ - \circ} - \circ - \dots - \circ - \circ$
F_4	$\circ - \overset{4}{\circ - \circ} - \circ - \circ$
H_4	$\overset{5}{\circ - \circ} - \circ - \circ - \circ$
H_3	$\circ - \overset{5}{\circ - \circ} - \circ$
$G_2^m \ (m \geq 5)$	$\circ - \overset{m}{\circ} - \circ$

Tafel 1.2.1. Die linearen *elliptischen* Coxeter-Schemata der Ordnung n

1.2.3. *Orthoscheme vom Grad d .* Einfachste Beispiele für Polytope in Räumen X^n konstanter Krümmung sind durch lineare und zyklische Schemata der Ordnung $\geq n + 1$ gegeben. In diesem Abschnitt betrachten wir eine Klasse solcher Polytope in H^n .

Ein n -dimensionales Orthoschem R_d vom Grad d , $0 \leq d \leq 2$, ist ein konvexes Polytop in H^n , $n \geq 2$, dessen Schema $\Sigma(R_d)$ für $d = 0, 1$ linear von der Ordnung $n + d + 1$ und für $d = 2$ zyklisch von der Ordnung $n + 3$ ist (siehe [40], [41]). Ein Orthoschem $R_d \subset H^n$ vom Grad d ist somit begrenzt von $n + d + 1$ Hyperebenen H_0, \dots, H_{n+d} mit der Eigenschaft

$$H_i \perp H_j \quad \text{für} \quad 2 \leq |i - j| \leq n + 1 \quad .$$

Im Folgenden beschreiben wir die Geometrie von Orthoschemen R_d für $d = 0$ und $d > 0$. Orthoscheme vom Grad $d = 0$ sind identisch mit den (gewöhnlichen) Orthoschemen im Sinne von L. Schläfli [66, p. 243] (siehe auch [8, §4.2]): Ein Orthoschem $R \subset X^n$ ist ein Simplex, dessen Eckpunkte p_0, \dots, p_n so numeriert sind (etwa durch die Vorgabe, dass p_i der Eckpunkt gegenüber der Seitenfläche $R \cap H_i$ sei), dass

$$\text{span}(p_0, \dots, p_j) \perp \text{span}(p_j, \dots, p_n) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n - 1 \quad ,$$

wobei $\text{span}(x_1, \dots, x_m)$ die konvexe Hülle der Punkte $x_1, \dots, x_m \in X^n$ bezeichnet. Ein Orthoschem R kann als Verallgemeinerung eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden. Nach Definition folgt leicht, dass die Seiten und Eckenfiguren (vgl. §1.2.1) eines Orthoschems wiederum Orthoscheme sind. Jedes Orthoschem $R \subset X^n$ ist durch höchstens n nicht-rechte Keilwinkel der Form $\alpha_i = \angle(H_{i-1}, H_i)$ charakterisiert; sie heissen *wesentliche Keilwinkel* von R und bilden im nichteuklidischen Fall ein vollständiges Invariantensystem für R (siehe [8, p. 75-77]). Ist $R \subset X^n$, $X^n \neq S^n$, von endlichem Volumen, so gilt $\alpha_i < \frac{\pi}{2}$ für alle $i \in [1, n]$. Auf der Sphäre S^n hingegen kann ein Orthoschem R k -fach orthogonal entarten (siehe [8, §4.3, Satz 1]), das heisst,

$$\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n \quad .$$

Somit ist das Schema $\Sigma(R)$ eines Orthoschems $R \subset X^n$ linear und von der Gestalt

$$\Sigma(R) \quad : \quad \underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_1} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_n} \underset{n}{\circ} \quad ,$$

zerfällt aber für ein k -fach orthogonal entartetes Orthoschem $R \subset S^n$ in $k + 1$ disjunkte Komponenten.

Die Eckpunkte p_0, \dots, p_n von $R \subset X^n$ bilden einen *total-orthogonalen Kantenzug*, das heisst, die Kanten $p_i p_{i+1}$, $0 \leq i \leq n - 1$, sind paarweise orthogonal. Ist R nicht orthogonal entartet, so spielen der Anfangspunkt p_0 und der Endpunkt p_n des Kantenzugs eine ausgezeichnete Rolle; nur bei ihnen tritt kein rechter Dreieckswinkel auf, während die Eckenfiguren R_{p_i} zu den Eckpunkten p_i , $i = 1, \dots, n - 1$, stets orthogonal entartet sind mit Unterschema

$$\Sigma(R_{p_i}) \quad : \quad \underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_1} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \circ \quad \circ \xrightarrow{\alpha_{i+2}} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_n} \underset{n}{\circ} \quad .$$

Für ein hyperbolisches Orthoschem R ergibt sich daraus, dass höchstens die Hauptecken p_0, p_n von R unendliche Punkte sein können (siehe [8, §4.8, Satz 15]). In diesem Fall heisst $R \subset \overline{H}^n$ *einfach* oder *doppelt asymptotisch* (kurz: 1- oder 2-asymptotisch), und $\Sigma(R)$ weist die parabolischen Unterschemata

$$\begin{aligned} \Sigma(R_{p_0}) & : \quad \underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_1} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \circ \quad , \\ \Sigma(R_{p_n}) & : \quad \underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_n} \underset{n}{\circ} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

auf. Die Parabolizität der Graphen (1.2.2) liefert nach Lemma 1.2.1 folgende Relationen zwischen $\cos^2 \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 & = \det(\underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \circ) / \det(\underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_3} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \circ) \\ & = 1 - \frac{|\cos^2 \alpha_2|}{|1|} \cdots \frac{|\cos^2 \alpha_{n-1}|}{|1|} \quad , \\ \cos^2 \alpha_n & = \det(\underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \circ) / \det(\underset{0}{\circ} \xrightarrow{\alpha_2} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \circ) \\ & = 1 - \frac{|\cos^2 \alpha_{n-1}|}{|1|} \cdots \frac{|\cos^2 \alpha_2|}{|1|} \quad , \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

wobei

$$1 - \frac{c_1}{|1|} \cdots \frac{c_k}{|1|} := 1 - \frac{c_1}{1 - \frac{c_2}{1 - \frac{c_{k-1}}{1 - c_k}}}$$

die Pringsheimsche Kurzschreibweise für Kettenbrüche ist.

Gewöhnliche Orthoschemata sind elementarste Bausteine der Polyedergeometrie in X^n : Jedes Polytop $P \subset X^n$ von endlichem Volumen lässt sich zunächst als elementargeometrische

Summe (disjunkte innere Vereinigung) von endlich vielen Simplexes schreiben. Anschließend kann jedes Simplex $S \subset X^n$ elementargeometrisch als Summe oder Differenz (siehe [8, p. 196, Bemerkung (9)]) von endlich vielen Orthoschemen dargestellt werden, indem von einem fest gewählten Punkt $x \in X^n$ aus nacheinander das Lot auf die k -kodimensionalen Seiten ($1 \leq k \leq n-1$) von S gefällt wird; die so entstehenden Lotfusspunkte bilden zusammen mit den Eckpunkten von S total-orthogonale Kantenzüge für die Orthoscheme der Zerlegung (siehe [66, p. 246–247], [8, p. 80–81]). Ist S spitzwinklig und $x \in S$, so ist S *echt* in Orthoscheme zerlegbar.

Diese Aussagen lassen sich durch Übergang zur *Polyedergruppe* oder *scissors congruence-Gruppe* $\mathcal{P}(X^n)$ algebraisch fassen. Die Polyedergruppe $\mathcal{P}(X^n)$ ist die abelsche Gruppe erzeugt von den Symbolen $[P]$ für Polytope $P \subset X^n$ und mit den Relationen

- (i) $[P] = [P_1] + [P_2]$, falls $P = P_1 \sqcup P_2$ (elementargeometrische Summe);
(ii) $[P] = [g(P)]$ für eine Isometrie $g \in I(X^n)$.

Nach einem Resultat von Zylev (siehe etwa [22, §1, p. 125]) gilt $[P] = [Q]$ für Polytope $P, Q \subset X^n$ genau dann, wenn es Zerlegungen $P = \sqcup_{i=1}^r P_i$ und $Q = \sqcup_{i=1}^r Q_i$ gibt mit P_i isometrisch zu Q_i für jedes $i = 1, \dots, r$.

Offensichtlich bilden die Orthoscheme ein Erzeugendensystem für $\mathcal{P}(X^n)$. Im hyperbolischen Fall genügen dazu *asymptotische* Orthoscheme: Jede Orthoschemenklasse $[R]$ lässt sich als Summe von Klassen 1-asymptotischer Orthoscheme schreiben (siehe [22, (6.1)]). Darüberhinaus kann neben der Gruppe $\mathcal{P}(H^n)$ die Polyedergruppe $\mathcal{P}(\overline{H}^n)$ des erweiterten hyperbolischen Raums \overline{H}^n betrachtet werden, welche nach [23, Theorem 2.1] für $n > 0$ isomorph sind. Schliesslich gilt sogar (siehe [22, Proposition 6.4]):

SATZ 1.2.2.

Für $n > 1$ ungerade wird $\mathcal{P}(\overline{H}^n)$ von den Klassen der 2-asymptotischen Orthoscheme erzeugt.

Jedes doppelt asymptotische Orthoschem $R \subset \overline{H}^n$ gegeben durch

$$\Sigma(R) \quad : \quad \circ \frac{\alpha_1}{\quad} \circ \dots \circ \frac{\alpha_n}{\quad} \circ$$

induziert einen Zyklus von 2-asymptotischen Orthoschemen: Es sei $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel, sodass das Schema

$$\circ \frac{\alpha_0}{\quad} \circ \frac{\alpha_1}{\quad} \circ \dots \circ \frac{\alpha_{n-2}}{\quad} \circ$$

parabolisch vom Rang $n-2$ ist. Entsprechend zu (1.2.3) folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_0 &= \det(\circ \frac{\alpha_1}{\quad} \circ \dots \circ \frac{\alpha_{n-2}}{\quad} \circ) / \det(\circ \frac{\alpha_2}{\quad} \circ \dots \circ \frac{\alpha_{n-2}}{\quad} \circ) \\ &= 1 - \frac{\cos^2 \alpha_1}{|1} \dots - \frac{\cos^2 \alpha_{n-2}}{|1} \end{aligned}$$

SATZ 1.2.3 [45, Proposition 1.3].

Die Schemata $\Sigma_i : \circ \frac{\alpha_i}{} \circ \dots \circ \frac{\alpha_{n+i-1}}{\phantom{\alpha_{n+i-1}}} \circ$, $i \in \mathbb{Z}$ modulo $n+1$, bilden einen Zyklus von $n+1$ doppelt asymptotischen Orthoschemen in $\overline{H^n}$, worin benachbarte Elemente Σ_i, Σ_{i+1} eine gemeinsame Hauptecke aufweisen.

Bemerkungen.

(a) Der asymptotische Orthoschemenzyklus von Satz 1.2.3 kann als hyperbolisches Analogon zu Schläflis Orthoschemenperioden [66, p. 259–260] aufgefasst werden. Diese Perioden verkörpern eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen der Napierschen Regel für sphärische Dreiecke (siehe [8, §4.6, Satz 2]), wie sie im Pentagramma Mirificum von Napier (siehe [8, §4.7]) dargestellt ist.

(b) Es stellt sich die Frage, ob die Zykluseigenschaft der 2-asymptotischen Orthoscheme $R_i \subset \overline{H^n}$ mit $\Sigma(R_i) = \Sigma_i$, $i \in \mathbb{Z}$ modulo $n+1$, eine Relation für die Polyedergruppe $\mathcal{P}(\overline{H^n})$ induziert. In diesem Zusammenhang erwähnen wir eine Zerlegungsrelation für 2-asymptotische Orthoscheme, welche für Volumenberechnungen sehr nützlich ist (für $n=5$, siehe [44, p. 654–656]). Es sei $R = p_0 \cdots p_n \subset \overline{H^n}$ ein 2-asymptotisches Orthoschem mit Eckpunkten p_0, \dots, p_n und mit Schema

$$\Sigma(R) = \Sigma_1 : \circ \frac{\alpha_1}{} \circ \dots \circ \frac{\alpha_n}{} \circ .$$

Dann ist $Q \subset \overline{H^n}$ mit dem Schema

$$\Sigma(Q) : \circ \frac{\alpha_2}{} \circ \dots \circ \frac{\alpha_n}{} \circ \frac{\alpha_0}{} \circ$$

ein Zyklusnachbar von R . Weiter kann Q im Raum $\overline{H^n}$ bezüglich R so verschoben werden, dass für die Eckpunkte q_i , $0 \leq i \leq n$, von Q mit $q_0, q_n \in \partial H^n$ gilt:

$$q_0 \in \overrightarrow{p_0 p_1} ; \quad q_i \in \overrightarrow{p_0 p_{i+1}} , \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 ; \quad q_n = p_0 .$$

Dabei bezeichnet \overrightarrow{xy} die Halbgerade von x aus durch y . Wir bilden nun die Simplexes

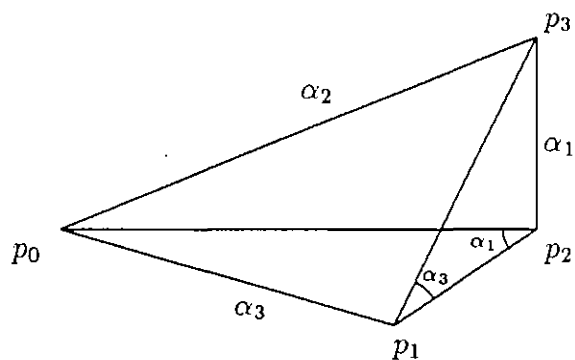
$$R_k := q_0 \cdots q_{k-1} p_k \cdots p_n \quad \text{für } k = 1, \dots, n .$$

Dann gilt $\Sigma(R_1) = \Sigma(R)$ und $\Sigma(R_n) = \Sigma(Q)$, sowie (siehe [22, Theorem (2.6) (i)]):

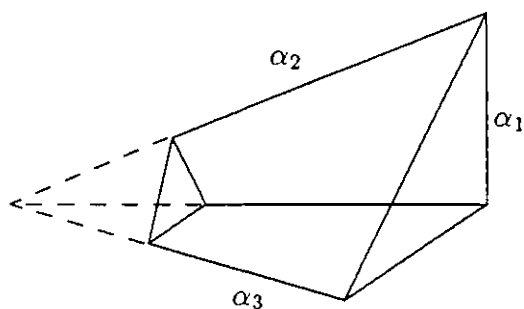
- (i) R_k ist ein 2-asymptotisches Orthoschem;
- (ii) In $\mathcal{P}(\overline{H^n})$ gilt: $2[R] = 2[Q] + \sum_{i=2}^{n-1} [R_i]$.

Für die Beschreibung von Orthoschemen R_d mit Grad $d > 0$ denken wir uns H^n im projektiven Modell $IQ_{1,n}$ des P^n bezüglich einer Ovalquadrik $Q_{1,n}$ realisiert (vgl. §1.1.2). Ein Orthoschem R_d vom Grad $d = 1$ oder $d = 2$ kann als gewöhnliches Orthoschem in $E^n \subset P^n$ aufgefasst werden, wovon d der Hauptecken p_0, p_n im Aussenraum $AQ_{1,n}$

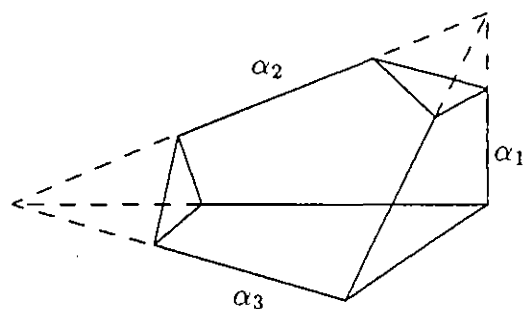
liegen und vermöge der zugehörigen Polarhyperebenen, $\text{Pol}(p_0) =: H_{n+2}$ beziehungsweise $\text{Pol}(p_n) =: H_{n+1}$, abgestumpft werden.



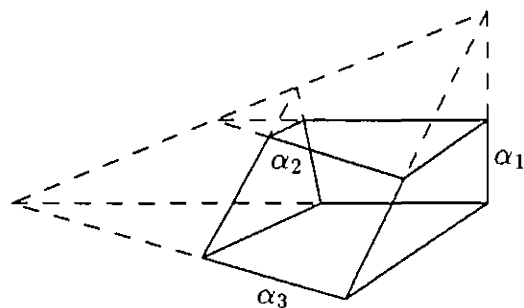
Das gewöhnliche Orthoschem $R_0 \subset H^3$ vom Typ A



$R_1 \subset H^3$ vom Typ A



$R_2 \subset H^3$ vom Typ A



Der Lambert-Würfel $R_2 \subset H^3$ vom Typ B

Figur 1.2.1. Orthoscheme R_d vom Grad $d = 0, 1, 2$

Der Orthoschemstumpf $R_d \subset H^n$ ist nach Konstruktion von endlichem Volumen und darstellbar als

$$R_d = \bigcap_{i=0}^{n+d} H_i^- ,$$

wobei wie immer $H_i^- = \{x \in H^n \mid (x, e_i) \leq 0\}$ der abgeschlossene Halbraum bezüglich des nach aussen gerichteten Normalenvektors e_i zu H_i ist. R_d wird deshalb auch d -(fach) *abgestumpftes Orthoschem* oder (*polar*) *vollständiges Orthoschem vom Grad d* genannt. R_d ist für $d > 0$ kein Simplex mehr, aber durch $m, n \leq m \leq n+3$, spitze Keilwinkel der Form $\alpha_i = \angle(H_{i-1}, H_i)$ bis auf Isometrie eindeutig bestimmt. Die Eulersche Polyederformel impliziert $m = n = 3$, sodass es für $R_d \subset H^3$ mit $0 \leq d \leq 2$ insgesamt nur vier kombinatorisch verschiedene Typen gibt (vgl. Figur 1.2.1).

n	$\Sigma(R_C)$ der Signatur $(1, n)$
2	$\circ \xrightarrow{p} \circ \xrightarrow{q} \circ$ für $3 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$
3	$\circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{6} \circ$ $\circ \xrightarrow{6} \circ$ $\circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{6} \circ$ $\circ \xrightarrow{6} \circ \xrightarrow{6} \circ$ $\circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{6} \circ$
4	$\circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{5} \circ \xrightarrow{5} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$
5	$\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$ $\circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ \xrightarrow{4} \circ$

Tafel 1.2.2. Die hyperbolischen Coxeter-Orthoscheme R_C

Es bezeichne Σ_d das Schema eines d -abgestumpften Orthoschems R_d mit $d > 0$. Indem d nicht-benachbarte Knoten von Σ_d entfernt werden, zerfällt Σ_d in zwei disjunkte Komponenten σ_1, σ_2 , welche folgende Eigenschaften aufweisen (siehe [40, Proposition 1.4]):

$$\sigma_1 \begin{cases} \text{elliptisch,} \\ \text{parabolisch,} \\ \text{hyperbolisch,} \end{cases} \iff \sigma_2 \begin{cases} \text{hyperbolisch,} \\ \text{parabolisch,} \\ \text{elliptisch.} \end{cases}$$

Dies impliziert, dass das Schema Σ_d von $R_d \subset H^n$ für $n > 3$ stets ein zusammenhängendes hyperbolisches Unterschema der Ordnung $n + 1$ und mit Gewichten $0 < c_i = \cos \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq n$, enthält; R_d heisst *vom Typ A*. Der Lambert-Würfel $R_2 \subset H^3$ (vgl. Figur 1.2.1) hingegen verletzt diese Eigenschaft und wird *vom Typ B* genannt.

Ein Orthoschem $R_d \subset H^n$ vom Grad d , $0 \leq d \leq 2$, ist konvexe Realisierung $\bigcap_{(e_i, e_i) > 0} H_i^-$ eines *Napier-Zyklus vom Typ d* in $E^{1,n}$ (siehe [40, §1]); ein solcher ist gegeben durch $n + 3$ Vektoren $e_i \in E^{1,n}$, $i \in \mathbb{Z}$ modulo $n + 3$, mit $(e_{i-1}, e_i) < 0$ für alle i und mit $(e_i, e_j) = 0$ für $2 \leq |i - j| \leq n + 1$. Je $n + 1$ aufeinanderfolgende Vektoren des Napier-Zyklus bilden eine Basis von $E^{1,n}$ und – als nach aussen gerichtete Normalenvektoren – ein (eventuell unendliches) Orthoschem in H^n . Die *kristallographischen* Napier-Zyklen beschreiben Coxeter-Orthoscheme $R_{d,C}$ vom Grad d und wurden von H.-C. Im Hof 1985 (siehe [40]) vollständig klassifiziert. Beispiele existieren für $n \leq 9$, wobei für $4 \leq n \leq 9$ jeweils nur endlich viele auftreten. In Tafel 1.2.2 sind die hyperbolischen Coxeter-Orthoscheme $R_C = R_{0,C}$ aufgeführt.

1.2.4. *Reguläre Polytope und Mosaik.* Der Begriff des regulären Polytops $P_{reg} \subset X^n$ kann auf verschiedene Weise definiert werden (siehe [20, §7.5–§7.9] und [68, Chapter 5, §3]). Wir gehen induktiv vor und nennen ein Polygon in X^2 *regulär*, wenn alle Kanten und alle Winkel gleich sind. Ist $r \geq 3$ die Anzahl der Kanten, so schreiben wir $P_{reg} = \{r\}$. Ein reguläres Polygon ist eine spezielle Konfiguration in X^2 :

Eine *Konfiguration* in X^n besteht aus N_j Unterräumen von X^n der Dimension j , $j = 0, \dots, n - 1$, sodass jeder j -dimensionale Unterraum der Konfiguration mit N_{jk} , $j \neq k$, der k -dimensionalen Unterräume inzidiert (siehe [20, §1.8, p. 12]). Offenbar ist $N_{jj} = N_j$ und $N_j N_{jk} = N_k N_{kj}$. Ein reguläres Polygon $\{p\}$ liefert eine Konfiguration in X^2 mit $N_0 = N_1 = p$, $N_{01} = N_{10} = 2$.

Ein Polytop in X^n , $n > 2$, heisst *regulär*, falls alle Fazetten (oder *Zellen*) und alle Eckenfiguren regulär sind. Daraus folgt, dass alle Zellen gleich und alle Eckenfiguren kongruent sind. Da die Fazetten einer Eckenfigur gleich den Eckenfiguren einer Fazette sind, kann das Symbol $\{r\}$ für den ebenen Fall per Induktion für ein reguläres Polytop $P_{reg} \in X^n$, $n > 2$, erklärt werden; das *Schläflische Symbol eines regulären Polytops* P_{reg} mit Zelle $\{r_1, \dots, r_{n-2}\}$ und Eckenfigur $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$ ist gleich $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$. Zum Beispiel beschreiben $\{3, \dots, 3\}$, $\{3, \dots, 3, 4\}$ und $\{4, 3, \dots, 3\}$ das euklidische reguläre Simplex, Kreuzpolytop und Masspolytop (oder "Hyperwürfel").

Eine äquivalente Charakterisierung der Regularität eines Polytops $P \subset X^n$ kann in Abhängigkeit der *Deckgruppe* oder *Symmetriegruppe* $\Pi(P) = \{\pi \in I(X^n) \mid \pi(P) = P\}$

von P erklärt werden: P ist regulär, wenn $\Pi(P)$ transitiv auf den j -dimensionalen Seiten ($0 \leq j \leq n-1$) von P operiert. $\Pi(P)$ ist eine Permutationsgruppe, welche die Eckpunkte von P vertauscht. Für die Ordnung von $\Pi(P)$ gilt (siehe [20, p. 130]):

$$\text{ord } \Pi(P) = N_{n-1} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} N_{n-l, n-(l+1)} \geq 0 \quad .$$

Für ein reguläres Simplex $S_{reg} = \{3, \dots, 3\}$ beispielsweise ist $\text{ord } \Pi(S_{reg}) = (n+1)!$. Jedes reguläre Polytop $P_{reg} \subset X^n$ besitzt einen eindeutig bestimmten Mittelpunkt p_n , den Fixpunkt der Symmetriegruppe $\Pi(P_{reg})$; p_n ist Zentrum der Kugeln B_{n-j} , $j = 0, \dots, n-1$, vom Radius ${}_{n-j}R$, welche alle Mittelpunkte der j -dimensionalen Seiten von P_{reg} berühren. B_1 ist die *Inkugel* und B_n die *Umkugel* von P_{reg} .

Das reguläre Polytop $P_{reg} = \{r_1, \dots, r_{n-1}\} \subset X^n$ kann vom Zentrum p_n aus durch fortgesetztes Lotfällen auf die Konfiguration der Seiten in Orthoschemen zerlegt werden (vgl. §1.2.2): Ist F^{j-1} eine Fazette der j -dimensionalen Seite $F^j \subset P_{reg}$, $1 \leq j \leq n-1$, so bilden die Mittelpunkte $F^0 =: p_0, p_1, \dots, p_n$ der Fahne $\{F^0, F^1, \dots, F^{n-1}, F^n := P_{reg}\}$ zur Konfiguration ein n -dimensionales Orthoschem, welches *charakteristisches Orthoschem* von P_{reg} heisst. Auf diese Weise zerfällt P_{reg} in $\text{ord } \Pi(P_{reg})$ isometrische Orthoschemen der Form $R = R(p_0, \dots, p_n)$. Die Eckenfigur $R_{p_n} = p'_0 \cdots p'_{n-1}$ von R zu p_n mit den Eckpunkten $p'_i \in \overrightarrow{p_n p_i}$, $i = 0, \dots, n-1$, ist ein sphärisches Orthoschem mit Keilwinkeln $\frac{\pi}{r_i}$ gegenüber der Kante $p'_{i-1} p'_i$ (siehe [20, §7.9, p. 137] und [68, Chapter 5, §3.2]), das heisst,

$$\Sigma(R_{p_n}) \quad : \quad \underset{0}{\circ} \overset{r_1}{\text{---}} \underset{0}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{n-1}{\circ} \overset{r_{n-1}}{\text{---}} \underset{0}{\circ}$$

ist elliptisch, wobei der Knoten j die Seitenfläche gegenüber p'_j in R_{p_n} repräsentiert. Daraus folgt, dass

$$\text{ord } \Pi(P) = \frac{\text{vol}_{n-1}(S^{n-1})}{\text{vol}_{n-1}(R_{p_n})} \quad . \tag{1.2.4}$$

Für $P_{reg} = \{r_1, \dots, r_{n-1}\} \subset X^n$ ist das charakteristische Orthoschem R durch

$$\Sigma(R) \quad : \quad \underset{0}{\circ} \overset{\rho}{\text{---}} \underset{0}{\circ} \overset{r_1}{\text{---}} \underset{0}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{0}{\circ} \overset{r_{n-1}}{\text{---}} \underset{0}{\circ}$$

mit einem gewissen $\rho = \rho(P_{reg}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Im euklidischen Fall ist ρ durch die Bedingung $\det \Sigma(R) = 0$ eindeutig bestimmt.

Auf induktive Weise wird auch die Regularität und das zugehörige Schläflische Symbol $\{r_1, \dots, r_n\}$ einer *Pflasterung* oder eines *Mosaiks* in X^n definiert; diese bestehen aus (eventuell unendlich vielen) regulären Polytopen $P = \{r_1, \dots, r_{n-1}\}$, welche X^n lückenlos überdecken (siehe [20, §4.6, p. 68; §7.4, p. 127] und [68, Chapter 5, §3.3]). Der Index r_n bezeichnet die Anzahl der Zellen $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$ mit gemeinsamer $(n-2)$ -dimensionaler Seite, und $\frac{2\pi}{r_n}$ ist der Keilwinkel des Polytops P . Die Symmetriegruppe der Pflasterung $\{r_1, \dots, r_n\}$ von X^n wird von den Spiegelungen in den Fazettenebenen des Coxeter-Orthoschems

$$\underset{0}{\circ} \overset{r_1}{\text{---}} \underset{0}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{0}{\circ} \overset{r_n}{\text{---}} \underset{0}{\circ}$$

erzeugt; dieses Orthoschem ist demnach Fundamentalbereich der Symmetriegruppe von $\{r_1, \dots, r_n\}$.

Für eine hyperbolische reguläre Pflasterung $\{r_1, \dots, r_n\}$ ist das Unterschema

$$\sigma : \circ \text{---} \frac{r_1}{\text{---}} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \frac{r_{n-1}}{\text{---}} \circ$$

elliptisch und beschreibt die Konfiguration um jedes Zellenzentrum herum. Lassen wir zu, dass das Schema σ parabolisch ist, so beschreibt das Symbol $\{r_1, \dots, r_n\}$ ein Mosaik in $\overline{H^n}$, worin die Zellenschwerpunkte zu unendlichen Punkten und die Zelleninkugeln zu Horobällen entartet sind.

Wir sind insbesondere an regulären Simplizes $S_{reg}(2\alpha) \subset X^n$ mit Keilwinkel $0 \leq 2\alpha \leq \pi$ interessiert. $S_{reg}(2\alpha)$ ist realisierbar (siehe [8, §6.3, Satz 1])

$$\begin{aligned} \text{in } S^n & \quad \text{für} \quad -1 < \cos(2\alpha) < \frac{1}{n} \quad ; \\ \text{in } E^n & \quad \text{für} \quad \cos(2\alpha) = \frac{1}{n} \quad ; \\ \text{in } \overline{H^n} & \quad \text{für} \quad \frac{1}{n} < \cos(2\alpha) \leq \frac{1}{n-1} \quad . \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Im Extremfall $\cos(2\alpha_0^n) = \frac{1}{n}$ ist ein *nichteuklidisches* reguläres Simplex $S_{reg}(2\alpha_0^n)$ dimensionsentartet und hat somit n -dimensionales Volumen gleich null. In $\overline{H^n}$ beschreibt die Bedingung $\cos(2\alpha_\infty^n) = \frac{1}{n-1}$ ein total-asymptotisches oder *ideales* reguläres Simplex $S_{reg}(2\alpha_\infty^n)$ mit sämtlichen Ecken in ∂H^n . Wir bemerken, dass $\alpha_\infty^n = \alpha_0^{n-1} < \alpha_0^n < \frac{\pi}{4}$.

Es sei $S_{reg}(2\alpha) \subset H^n$ im projektiven Modell $(B^n, \text{dist}_{proj})$ realisiert. Das Zentrum von $S_{reg}(2\alpha)$ sei der Mittelpunkt von B^n . Sind alle Eckpunkte p_0, \dots, p_n von $S_{reg}(2\alpha)$ ultra-unendlich, sodass die Strecken $p_i p_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$, hyperbolische Segmente (gleicher Länge) enthalten, so verbleibt nach Abstumpfen von p_i entlang der Polaren Pol_{p_i} ein Polytop $T_{reg}(2\alpha)$ in $\overline{H^n}$ von endlichem Volumen. $T_{reg}(2\alpha)$ ist ein *abgestumpftes reguläres Simplex* mit

$$\frac{1}{n-1} < \cos(2\alpha) \leq \frac{1}{n-2} \quad . \quad (1.2.6)$$

Im euklidischen Raum ist $S_{reg}(2\alpha)$ durch den Keilwinkel 2α nur bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Im nichteuklidischen Fall besteht folgender Zusammenhang zwischen Winkel 2α und Kantenlänge $2l$ von $S_{reg}(2\alpha)$ (siehe [8, §6.4, p. 276–270]):

$$\text{In } S^n : \frac{1}{\cos(2\alpha)} = n - 1 + \frac{1}{\cos(2l)} \quad \text{oder} \quad \cos(2l) = \frac{\cos(2\alpha)}{1 - (n-1)\cos(2\alpha)} \quad ; \quad (1.2.7)$$

$$\text{in } H^n : \frac{1}{\cos(2\alpha)} = n - 1 + \frac{1}{\cosh(2l)} \quad \text{oder} \quad \cosh(2l) = \frac{\cos(2\alpha)}{1 - (n-1)\cos(2\alpha)} \quad . \quad (1.2.8)$$

Für die Radien ${}_1R$ und ${}_nR$ der Inkugel und der Umkugel von $S_{reg}(2\alpha)$ gilt:

LEMMA 1.2.2 [46, Lemma 1].

Der Inradius ${}_1R$ und der Umradius ${}_nR$ eines regulären Simplexes $S_{reg}(2\alpha) \subset X^n$, $X^n \neq E^n$, der Kantenlänge $2l$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{In } S^n & : \cos({}_1R) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \cos \alpha \quad \text{und} \quad \sin({}_nR) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \sin l \quad ; \\ \text{in } H^n & : \cosh({}_1R) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \cos \alpha \quad \text{und} \quad \sinh({}_nR) = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \sinh l \quad . \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt ist $S_{reg}(2\alpha) \subset X^n$ auf verschiedene Weise in Orthoscheme zerlegbar. Eine Zerlegung ist gegeben durch (vgl. (1.2.4))

$$[S_{reg}(2\alpha)] = (n+1)! [R(\alpha)] \quad , \tag{1.2.9}$$

wobei $R(\alpha)$ das charakteristische Orthoschem von $S_{reg}(2\alpha)$ ist mit

$$\Sigma(R(\alpha)) \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \quad .$$

Das Orthoschem $R(\alpha)$ ist Teil einer Schläflischen Orthoschemperiode (vgl. §1.2.3, Bemerkung (a)): Ist

$$\nu_{n+1}^i \quad : \quad \underset{0}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \underset{i}{\circ} \xrightarrow{2\alpha} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \underset{n}{\circ}$$

für $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ein Orthoschem in X^n , so gilt $\nu_{n+1}^i = \nu_{n+1}^{n-1-i}$ und

$$[\nu_{n+1}^i] = \binom{n+1}{i+1} [R(\alpha)] \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad . \tag{1.2.10}$$

Diese Relationen entstehen aus verschiedenen Zerlegungen von $S_{reg}(2\alpha) \subset X^n$ (siehe [66, p. 271] und [22, Theorem (7.4)]). Ist $S_{reg}(2\alpha) \subset \overline{H^n}$ ideal, so gehören $\nu_{n+1}^i, i = 0, 1, \dots, n-1$, zu einem Napier-Zyklus (vgl. Satz 1.2.3). Wie der verbleibende Napierbaustein

$$\nu_{n+1}^n \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ$$

über eine scissors-congruence-Relation mit $[\nu_{n+1}^i], i = 0, 1, \dots, n-1$, in Beziehung steht, ist jedoch ungeklärt.

Entsprechende Zerlegungsaussagen gelten auch für das abgestumpfte reguläre Simplex $T_{reg}(2\alpha) \subset H^n$. Zum Beispiel ist

$$[T_{reg}(2\alpha)] = (n+1)! [R_1(\alpha)] \quad , \tag{1.2.11}$$

wobei $R_1(\alpha)$ das 1-abgestumpfte charakteristische Orthoschem ist mit

$$\Sigma(R_1(\alpha)) \quad : \quad \underset{n+2}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \underset{0}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \underset{n}{\circ} \quad .$$

Dabei bezeichnet der Knoten $n+2$ die Polarhyperebene H_{n+2} zur ultra-unendlichen Ecke $\bigcap_{i=1}^n H_i$ gegenüber H_0 .

1.3. Volumina nichteuklidischer Polytope

Das Problem Formeln für das Volumen von Polytopen in nichteuklidischen Räumen X^n , $n \geq 2$, aufzustellen (wir sprechen künftig vom Volumenproblem für X^n), ist erstaunlich schwierig und für Dimensionen $n \geq 7$ völlig ungelöst. Die meisten der bekannten Resultate gehen für die Sphäre S^n auf L. Schläfli [66] und für den hyperbolischen Raum H^3 auf N. I. Lobatschewskij [48] zurück. Dieser Abschnitt beinhaltet die wichtigsten analytisch-geometrischen Konzepte und bietet einen Überblick über den Stand des Volumenproblems für Orthoscheme und ideale Simplizes im hyperbolischen Raum.

1.3.1. *Das Schläflische Volumendifferential.* Es sei künftig X^n , $n \geq 2$, entweder die Sphäre S^n oder der hyperbolische Raum H^n . Da die Polyedergruppen $\mathcal{P}(X^n)$ von Orthoschemklassen erzeugt sind (vgl. §1.2.3), genügt es, das Volumenproblem auf Orthoscheme in X^n einzuschränken. Ein Orthoschem $R \subset X^n$ ist durch seinen Graph

$$\Sigma(R) \quad : \quad \underset{0}{\circ} \overset{\alpha_1}{\text{---}} \underset{\circ}{\text{---}} \dots \text{---} \underset{\circ}{\text{---}} \overset{\alpha_n}{\text{---}} \underset{n}{\circ}$$

bis auf Isometrie eindeutig bestimmt (vgl. §1.2.2). Das Volumen $\text{vol}_n(R)$ von R kann deshalb als eine analytische Funktion der Keilwinkel $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ angesehen werden. L. Schläfli [66] hat eine Differentialformel für das Volumen in Abhängigkeit kleiner Winkelvariationen entdeckt, die das Volumen als *einfaches* Integral liefert, und beispielsweise gegenüber der Koordinatendarstellung

$$\text{vol}_n(R) = \int_R \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_n^n}$$

für $R \subset H^n$ im konformen oberen Halbraummodell (H_+^n , dist_{konf}) enorme Vorteile aufweist (vgl. §1.1.3; [61, Theorem 4.6.7]).

SATZ 1.3.1 (L. Schläfli; [66, Nr. 22, p. 235]).

Es sei $n \geq 2$, und $R \subset X^n$ ein nichteuklidisches Orthoschem mit Keilwinkel $\alpha_i = \angle(H_{i-1}, H_i)$ und Scheitel $F_i = R \cap H_{i-1} \cap H_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$d\text{vol}_n(R) = \frac{\kappa}{n-1} \sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-2}(F_i) d\alpha_i \quad , \quad \text{vol}_0 := 1 \quad , \quad (1.3.1)$$

wobei $\kappa = \kappa(X^n) \in \{-1, +1\}$ die Krümmungskonstante von X^n bezeichnet.

Schläfli bewies Satz 1.3.1 für beliebige sphärische Simplizes und gab eine Reihe von Beweisen an. Wie er selbst bemerkte [66, p. 273], lässt sich die Differentialformel für beliebige Polytope verallgemeinern. Ist $P \subset X^n$, so gilt

$$d\text{vol}_n(P) = \frac{\kappa}{n-1} \sum_F \text{vol}_{n-2}(F) d\alpha_F \quad ,$$

wobei die Summe über alle $(n - 2)$ -dimensionalen Seiten $F \subset P$ mit Keilwinkel α_F erstreckt wird. In der Tat ist $P \subset X^n$ als elementargeometrische Summe von Simplexes darstellbar, worauf das Volumendifferential zerlegungsadditiv wirkt (siehe [41, §2, p. 549]). Insbesondere gilt

$$d\text{vol}_n(R_d) = \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^{m(d)} \text{vol}_{n-2}(F_i) d\alpha_i \quad (1.3.2)$$

für d -abgestumpfte Orthoscheme $R_d = \bigcap_{i=0}^{m(d)} H_i^- \subset H^n$, $0 \leq d \leq 2$, mit Scheitel $F_i = R_d \cap H_{i-1} \cap H_i$ zum Keilwinkel α_i für $1 \leq i \leq m(d)$ und $n \leq m(d) \leq n + 3$.

H. Kneser fand einen eleganten Beweis der Schläflischen Formel für beide Krümmungsfälle $\kappa = \pm 1$, welcher von J. Böhm [8, §5.1] ausgearbeitet worden ist. Ein ausgesprochen geometrischer Beweis, welcher $d\text{vol}_n(R)$ im "Elementarkeil" behandelt, geht auf C. F. Gauss zurück (siehe auch [8, p. 267, Bemerkung (28)]) und ist in [3, Chapter 7, §2.2] ausgeführt. Schliesslich sei noch der Beweis von J. Milnor [57, *The Schläfli differential equation*, p. 281 ff] erwähnt, der auf funktionalanalytischen Methoden beruht.

Aus Satz 1.3.1 leitet man unmittelbar die bekannten Flächenformeln für nichteuklidische rechtwinklige Dreiecke $R \subset X^2$ mit Diagramm $\Sigma(R) : \circ \frac{\alpha_1}{} \circ \frac{\alpha_2}{} \circ$ ab:

$$\text{vol}_2(R) = \kappa \left(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.3.3)$$

Die Integrationskonstante kann für punktförmige Entartung $\det \Sigma(R) \rightarrow 0$ bestimmt werden: Ein infinitesimales und somit euklidisches rechtwinkliges Dreieck R_{deg} mit Winkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ hat hyperbolische Fläche $\text{vol}_2(R_{deg}) = 0$.

1.3.2. Reduktion von geraddimensionalen Volumina. Die Schläflische Differentialformel (1.3.1) deutet an, dass das Volumenproblem für gerade und für ungerade Dimensionen separiert und prinzipiell verschieden ist. Wie die Flächenformeln (1.3.3) für ebene Orthoscheme bereits anzeigen, kann das Volumen eines geraddimensionalen Simplexes durch die Inhalte von sämtlichen ungeraddimensionalen sphärischen Eckenfiguren dargestellt werden. Dieses Reduktionsprinzip geht auf Schläfli [66, Nr. 24 und Nr. 26] zurück und wurde von H. Hopf auf den hyperbolischen Fall übertragen; davon unabhängig und einiges später entdeckte H. Poincaré ein Analogon für verallgemeinerte Winkelsummen (siehe auch [3, Chapter 7, §2.3] und [8, p. 263, Bemerkung (13)]). Tatsächlich kann für *jede* Klasse von geraddimensionalen Polytopen P von vorgeschriebenem kombinatorischem Typ eine Reduktionsformel hergeleitet werden; das Verfahren beruht auf Induktion nach der Dimension und der Schläflischen Differentialformel (1.3.1). Die auftretenden Volumenkoeffizienten widerspiegeln den kombinatorisch-metrischen Typ von P . Dabei können störende dimensionsabhängige Universalkonstanten ausgeschaltet werden, indem das Volumenfunktional $\text{vol}_n(P)$ geeignet normalisiert wird. Es bezeichne

$$\omega_n := \frac{2^{n+1}}{\text{vol}_n(S^n)} = \frac{2^n}{\pi^{(n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad .$$

Ist $P \subset S^n$ ein Polytop mit Schema Σ , so heisst die Funktion

$$f_n(\Sigma) := \omega_n \text{vol}_n(P) \quad , \quad f_0 := 1 \quad ,$$

die *Schläflische Funktion* von P [66, Nr. 238]. f_n ist so normalisiert, dass $f_n(\Sigma) = 1$ für total-orthogonale Simplizes in S^n mit Graph $\Sigma : o \ o \ \cdots \ o \ o$ der Ordnung $n + 1$. Weiter ist f_n multiplikativ:

LEMMA 1.3.1 [66, Nr. 23].

Ist Σ ein lineares elliptisches Schema der Ordnung $n + 1 \geq 2$ mit disjunkten Komponenten $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ der Ordnungen $n_1 + 1, \dots, n_r + 1 \geq 1$, so gilt:

$$f_n(\Sigma) = f_{n_1}(\sigma_1) \cdots f_{n_r}(\sigma_r) \quad .$$

Mit Hilfe von Lemma 1.3.1 und gewissen Orthoschemeperioden (vgl. §1.2.3, Bemerkung (a) und (1.2.9)) konnte Schläfli explizit die Werte $f_n(\Sigma_C)$ aller elliptischen Coxeter-Schemata Σ_C (vgl. Tafel 1.2.1) berechnen [66, Nr. 29 und Nr. 30, p. 266 ff]. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_n(A_{n+1}) &= \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \quad , \quad n \geq 0 \quad ; \quad f_n(B_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \quad , \quad n \geq 1 \quad ; \quad (1.3.4) \\ f_3(F_4) &= \frac{1}{72} \quad ; \quad f_3(H_4) = \frac{1}{900} \quad ; \quad f_2(H_3) = \frac{1}{15} \quad ; \quad f_1(G_2^m) = \frac{2}{m} \quad , \quad m \geq 2 \quad . \end{aligned}$$

Ist $P \subset \overline{H^n}$ ein Polytop mit Schema Σ , so heisst die Funktion

$$F_n(\Sigma) := i^n \omega_n \text{vol}_n(P) \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad F_0 := 1 \quad ,$$

(*hyperbolische*) *Schläflische Funktion* von P . Diese Definition ergibt sich auf natürliche Weise durch Übergang von der sphärischen zur hyperbolischen Trigonometrie interpretiert auf der Sphäre vom Radius i in \mathbb{R}^{n+1} (vgl. §1.1.1). Es gilt:

$$F_{2n}(\Sigma) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \cdot \text{vol}_{2n}(P) \quad .$$

Für d -abgestumpfte Orthoscheme $R_d \subset \overline{H^{2n}}$ lautet die Reduktionsformel wie folgt:

SATZ 1.3.2 [42, §3, Theorem].

Es sei $R_d \subset \overline{H^{2n}}$, $0 \leq d \leq 2$, $n \geq 1$, ein Orthoschem vom Grad d mit Graph Σ_d . Dann gilt:

$$F_{2n}(\Sigma_d) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} \sum_{\sigma} f_{2n-(2k+1)}(\sigma) \quad , \quad \sum f_{-1} := 1 \quad ,$$

wobei σ alle elliptischen Unterschemata der Ordnung $2(n-k)$ von Σ_d durchläuft, deren Komponenten von gerader Ordnung sind.

Bemerkung.

Mit Satz 1.3.2, Lemma 1.3.1 und den Resultaten (1.3.4) von Schläfli für die linearen elliptischen Coxeter-Graphen lassen sich die Volumina sämtlicher d -abgestumpfter Coxeter-Orthoscheme gerader Dimension berechnen (siehe [42, Appendix]).

Beispiel.

Es bezeichne $\Sigma_1^n(\alpha)$: $\circ \xrightarrow{\infty} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ$ das Schema eines 1-asymptotischen Orthoschems $R_1(\alpha) \subset \overline{H}^n$ vom Grad 1 (vgl. §1.2.3). $R_1(\alpha)$ ist charakteristisches Orthoschem zu einem regulären Simplex mit ultra-unendlichen Eckpunkten, welche mittels der zugehörigen Polarebenen abgestumpft worden sind; die Polarebenen sind paarweise parallel, sodass der Keilwinkel des regulären Simplexstumpfs $Reg(2\alpha) \subset \overline{H}^n$ die Gleichung $\cos(2\alpha) = \frac{1}{n-2}$ erfüllt (vgl. auch (1.2.6)).

Für $n = 4$: Das Schema

$$\Sigma_1^4(\alpha) : \circ \xrightarrow{\infty} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{6} \circ$$

ist vom Volumen $F_4(\Sigma_1(\alpha)) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \text{vol}_4(R_1(\alpha)) = \frac{1}{135}$ (siehe [42, Appendix]).

Für $n = 6$: Das Schema

$$\Sigma_1^6(\alpha) : \circ \xrightarrow{\infty} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ$$

mit $\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$ ist vom Volumen

$$\begin{aligned} F_6(\Sigma_1^6(\alpha)) &= (-1)^3 \frac{120}{\pi^3} \cdot \text{vol}_6(R_1(\alpha)) \\ &= [f_5(A_6) + f_3(A_4) f_1(\circ \xrightarrow{\alpha} \circ) + f_1(A_2) f_3(\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ)] \\ &\quad - [3 f_3(A_4) + f_3(\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ) + 3 f_1^2(A_2) + 3 f_1(A_2) f_1(\circ \xrightarrow{\alpha} \circ)] \\ &\quad + 2 [5 f_1(A_2) + f_1(\circ \xrightarrow{\alpha} \circ)] - 5 \\ &= \frac{1}{15} [2 f_1(\circ \xrightarrow{\alpha} \circ) - 5 f_3(\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ) - \frac{16}{21}] \end{aligned}$$

Für die endgültige Berechnung von $\text{vol}_6(R_1(\alpha))$ ist das Volumen eines Orthoschems in S^3 und insbesondere von $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ$ zu bestimmen (vgl. §1.3.3, Folgerung (iii)).

1.3.3. Dreidimensionale Volumina. Für die Familie der d -abgestumpften Orthoscheme $R_d \subset \overline{H}^3$, $0 \leq d \leq 2$, können mit Hilfe des Schläflischen Differentialausdrucks von Satz 1.3.1 geschlossene Volumenformeln hergeleitet werden. Nach (1.3.2) gilt für ein kompaktes Polyeder $R_d \subset H^3$:

$$d\text{vol}_3(R_d) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \text{vol}_1(F_i) d\alpha_i \quad ,$$

wobei $\text{vol}_1(F_i) =: V_i$ die Länge der Scheitelkante $F_i = R_d \cap H_{i-1} \cap H_i$ zu α_i bezeichnet. Die Koeffizienten V_i sind nun als Funktionen der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auszudrücken. Dazu

wird ein Hilfswinkel $\theta(R_d) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, der sogenannte *Hauptparameter* von R_d , eingeführt (vgl. §1.2.3):

$$\tan^2 \theta(R_d) := \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3}{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3}, & \text{falls } R_d \text{ vom Typ A} \quad ; \\ \frac{\cosh^2 V_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3}{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3}, & \text{falls } R_d \text{ vom Typ B (Lambert-Würfel)} \quad . \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Bemerkungen.

(a) Der Hauptparameter $\theta(R_d)$ lässt sich formal einheitlich und in invarianter Weise durch die Permanente und die Determinante von maximalen Unterschemata σ von $\Sigma(R_d)$ ausdrücken (siehe [42, p. 305 und p. 311]):

$$\cos^2 \theta(R_d) = \frac{\text{per} \sigma + \det \sigma - 2}{\text{per} \sigma - \det \sigma - 2} .$$

Dabei heisst ein zusammenhängendes Unterschema σ von $\Sigma(R_d)$ der Ordnung 4 maximal, falls die Anzahl der Gewichte der Form $\cos \alpha$ maximal ist.

(b) Die Grösse $\cosh V_k$ der Scheitelkante F_k zum Keilwinkel α_k , $1 \leq k \leq 3$, eines Lambert-Würfels ist gegeben durch (siehe [41, (40)])

$$\cosh^2 V_k = 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{A_k^2 + (2B_k \sin \alpha_k)^2} - A_k) \quad \text{mit} \\ A_k = \cos^2 \alpha_{k-1} + \cos^2 \alpha_{k+1} - B_k^2, \quad B_k = \frac{\cos \alpha_{k-1} \cos \alpha_{k+1}}{\cos \alpha_k} \quad (k \text{ modulo } 3) .$$

LEMMA 1.3.2 [41, Lemma 1].

Es sei $R_d \subset H^3$ ein kompaktes Orthoschem vom Grad d , $0 \leq d \leq 2$, mit Keilwinkel α_k und zugehöriger Kantenlänge V_k , $1 \leq k \leq 3$. Ist $\theta = \theta(R_d)$ der Hauptparameter von R_d , so gilt:

$$V_k = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos(\theta - \bar{\alpha}_k)}{\cos(\theta + \bar{\alpha}_k)} \right| \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}_k := \begin{cases} \alpha_2, & \text{falls } R_d \text{ vom Typ A und } k = 2; \\ \frac{\pi}{2} - \alpha_k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung.

(c) Der Hauptparameter $\theta(R_d)$ charakterisiert Ausartungsfälle von R_d . Mit Hilfe von Lemma 1.3.2 kann gezeigt werden, dass (siehe [42, Proposition 14.2])

$$\theta = 0 \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \implies \quad \text{vol}_3(R_d) = 0 \quad .$$

Aus Lemma 1.3.2 ist ersichtlich, dass die analytische Gestalt der Koeffizientenfunktionen $V_k = V_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \theta)$ im Schläflischen Differential (1.3.1) keine elementaren Stammfunktionen zulassen. Für gewöhnliche Orthoscheme $R_0 \subset H^3$ überwand N. I. Lobatschefskij [48] diese Schwierigkeit, indem er kurzerhand eine neue Funktion einführte; in leicht

abgeänderter Form ist die *Lobatschewskij-Funktion* $\mathbb{J}(z)$ gegeben durch

$$\mathbb{J}(z) = - \int_0^z \log |2 \sin t| dt$$

und hängt mit dem Eulerschen Dilogarithmus

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^2} = - \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad , \quad |z| \leq 1 \quad ,$$

wie folgt zusammen:

$$\mathbb{J}(z) = \frac{i}{2} \left\{ \text{Li}_2(e^{2iz}) + z(\pi - z) - \frac{\pi^2}{6} \right\} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < \text{Re}z \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

Einige Eigenschaften der Lobatschewskij-Funktion und des Dilogarithmus sind im Anhang 1.3.A von Abschnitt 1.3 zusammengefasst. Nach diesen Vorbereitungen kann die Integration des Schläflischen Differentials ausgeführt werden. Es gilt:

SATZ 1.3.3 [41, Theorem II; Theorem III].

(A) *Es sei $R_d \subset \overline{H^3}$ ein Orthoschem vom Grad d , $0 \leq d \leq 2$, und vom Typ A mit Keilwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(R_d) = \frac{1}{4} \{ & \mathbb{J}(\alpha_1 + \theta) - \mathbb{J}(\alpha_1 - \theta) + \mathbb{J}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 - \theta\right) + \mathbb{J}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \theta\right) + \\ & + \mathbb{J}(\alpha_3 + \theta) - \mathbb{J}(\alpha_3 - \theta) + 2\mathbb{J}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \} \quad , \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta = \arctan \left(\frac{\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3}{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

(B) *Es sei $R \subset \overline{H^3}$ ein Orthoschem vom Typ B (Lambert-Würfel) mit Keilwinkel α_k und Scheitelkante V_k , $1 \leq k \leq 3$. Dann gilt:*

$$\text{vol}_3(R) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \left\{ \mathbb{J}(\alpha_k + \theta) - \mathbb{J}(\alpha_k - \theta) \right\} - \frac{1}{4} \mathbb{J}(2\theta) + \frac{1}{2} \mathbb{J}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad , \quad \text{wobei}$$

$$0 \leq \theta = \arctan \left(\frac{\cosh^2 V_k - \sin^2 \alpha_{k-1} \sin^2 \alpha_{k+1}}{\cos^2 \alpha_{k-1} \cos^2 \alpha_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad k \text{ modulo } 3 \quad .$$

Folgerungen.

(i) Für ein 2-asymptotisches gewöhnliches Orthoschem $R_0 \subset \overline{H^3}$ gegeben durch

$$\Sigma(R_0) : \circ \frac{\alpha}{\quad} \circ \frac{\alpha'}{\quad} \circ \frac{\alpha}{\quad} \circ \quad , \quad \alpha' := \frac{\pi}{2} - \alpha \quad ,$$

gilt:

$$\text{vol}_3(R_0) = \frac{1}{2} \text{JI}(\alpha) \quad . \quad (1.3.6)$$

Die Lobatschefskij-Funktion $\text{JI}(z)$ kann damit geometrisch als hyperbolisches Volumen aufgefasst werden.

(ii) Zerlegt man ein ideales Simplex $S_\infty(\alpha, \beta, \gamma) \subset \overline{H^3}$, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (alle Eckenfiguren sind euklidische kongruente Dreiecke mit Winkeln α, β, γ), in Orthoscheme, so liefert Satz 1.3.3 (A) die Formel von J. Milnor [57, *How to compute volume in hyperbolic space*, (12)]:

$$\text{vol}_3(S_\infty(\alpha, \beta, \gamma)) = \text{JI}(\alpha) + \text{JI}(\beta) + \text{JI}(\gamma) \quad . \quad (1.3.7)$$

Daraus folgt, dass ein Simplex $S \subset \overline{H^3}$ genau dann maximales Volumen besitzt, wenn S ideal und regulär ist, das heisst:

$$\text{vol}_3(S) \leq \text{vol}_3(S(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})) = 3 \text{JI}(\frac{\pi}{3}) \simeq 1.01494 \quad . \quad (1.3.8)$$

(iii) Die Inhaltsformel von Satz 1.3.3 (A) für gewöhnliche Orthoscheme ist durch analytische Fortsetzung auf den sphärischen Fall übertragbar. Ist $R \subset S^3$ ein Orthoschem mit

$$\Sigma(R) : \circ \frac{\alpha_1}{\quad} \circ \frac{\alpha_2}{\quad} \circ \frac{\alpha_3}{\quad} \circ \quad , \quad \text{das heisst} \quad , \quad \det \Sigma(R) = \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_2 > 0 \quad ,$$

so erhält man (siehe [42, p. 302; (14.38), p. 315]; siehe auch [17]):

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(R) = \text{Re} [& i \{ \text{JI}(\alpha_1 + i\tau) - \text{JI}(\alpha_1 - i\tau) + \text{JI}(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 - i\tau) + \text{JI}(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - i\tau) + \\ & + \text{JI}(\alpha_3 + i\tau) - \text{JI}(\alpha_3 - i\tau) + 2\text{JI}(\frac{\pi}{2} - i\tau) \}] \quad , \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \log \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sqrt{\sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sqrt{\sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_2}} \quad .$$

1.3.4. Fünfdimensionale Volumina. Mit dem Schläflischen Differential von Satz 1.3.1 und den Resultaten von §1.3.3 über dreidimensionale Polyedervolumina kann das fünfdimensionale hyperbolische Volumenproblem angegangen werden. Nach Satz 1.2.2 reicht es, eine Volumenformel für 2-asymptotische Orthoscheme zu finden, da sie die Polyedergruppe $\mathcal{P}(\overline{H^5})$ erzeugen.

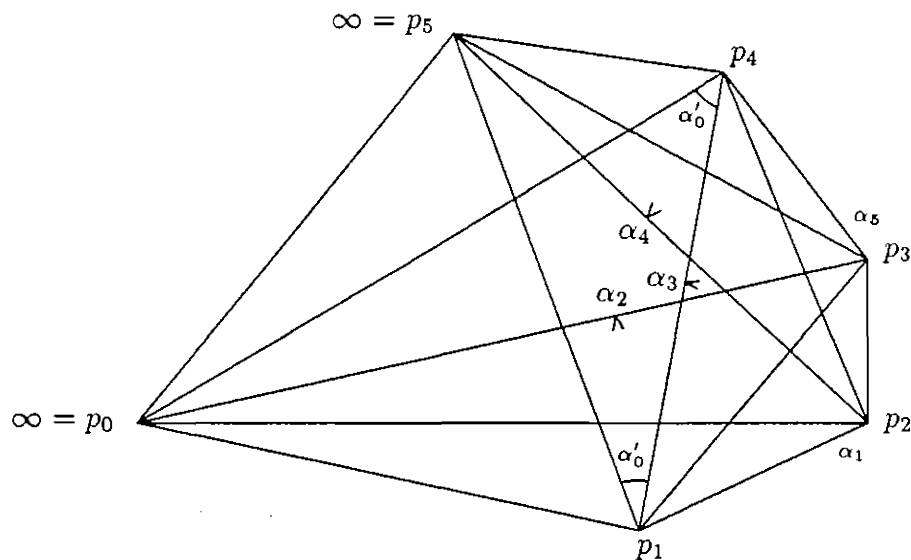
Es bezeichne $R \subset \overline{H^5}$ ein 2-asymptotisches Orthoschem (vgl. Figur 1.3.1), dessen Graph

$$\Sigma(R) \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha_1} \circ \xrightarrow{\alpha_2} \circ \xrightarrow{\alpha_3} \circ \xrightarrow{\alpha_4} \circ \xrightarrow{\alpha_5} \circ$$

die parabolischen Unterschemata

$$\circ \xrightarrow{\alpha_1} \circ \xrightarrow{\alpha_2} \circ \xrightarrow{\alpha_3} \circ \xrightarrow{\alpha_4} \circ \quad \text{und} \quad \circ \xrightarrow{\alpha_2} \circ \xrightarrow{\alpha_3} \circ \xrightarrow{\alpha_4} \circ \xrightarrow{\alpha_5} \circ$$

aufweist.



Figur 1.3.1.

R ist Teil eines sechsgliedrigen Napier-Zyklus von 2-asymptotischen Orthoschemen (vgl. Satz 1.2.3). Diese Bedingung lässt sich analytisch folgendermassen formulieren:

LEMMA 1.3.3 [45, Proposition 1.3].

Ein sechsgliedriger Napier-Zyklus von 2-asymptotischen Orthoschemen R_i gegeben durch

$$\Sigma(R_i) \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha_i} \circ \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \circ \xrightarrow{\alpha_{i+2}} \circ \xrightarrow{\alpha_{i+3}} \circ \xrightarrow{\alpha_{i+4}} \circ \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \text{ modulo } 6 \quad ,$$

erfüllt die Gleichung

$$\cot \alpha_0 \tan \alpha_3 = \tan \alpha_1 \cot \alpha_4 = \cot \alpha_2 \tan \alpha_5 = \tan \Theta \quad ,$$

wobei $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$ gegeben ist durch

$$\tan^2 \Theta = \frac{|\det \Sigma(R)|}{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_3 \cos^2 \alpha_5}$$

Für einen Napier-Zyklus mit $\lambda := \tan \Theta = 1$, kann das Volumen eines Glieds $\Sigma(R_i)$, $0 \leq i \leq 5$, entsprechend den Formeln für den dreidimensionalen Fall und mit Hilfe der *Trilobatschefsckij-Funktion* $\mathbb{J}_3(\omega) = \frac{1}{4} \zeta(3) - \int_0^\omega \mathbb{J}(t) dt = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^\infty \frac{\cos(2r\omega)}{r^3}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) berechnet werden (vgl. §1.3.A):

SATZ 1.3.4 [44, §3.1, Theorem].

Es sei $R \subset \overline{H^5}$ ein 2-asymptotisches Orthoschem mit $\lambda := \tan \Theta = 1$, das heisst,

$$\Sigma(R) : \circ \text{---} \frac{\alpha_1}{\text{---}} \circ \text{---} \frac{\alpha_2}{\text{---}} \circ \text{---} \frac{\alpha_3}{\text{---}} \circ \text{---} \frac{\alpha_1}{\text{---}} \circ \text{---} \frac{\alpha_2}{\text{---}} \circ \quad , \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_5(R) = & \frac{1}{4} \{ \mathbb{J}_3(\alpha_1) + \mathbb{J}_3(\alpha_2) - \frac{1}{2} \mathbb{J}_3(\frac{\pi}{2} - \alpha_3) \} - \frac{1}{16} \{ \mathbb{J}_3(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + \mathbb{J}_3(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2) \} + \frac{3}{64} \zeta(3) \quad . \end{aligned}$$

Bemerkung.

Weitere Volumenformeln für Familien von Polytopen $P \subset \overline{H^5}$ mit einfachem (zum Beispiel zyklischem) Schema sind in [45, §2.3, Remarks] zu finden.

Beispiele [44].

Die in $\overline{H^5}$ verbleibenden Coxeter-Orthoscheme sind (vgl. Tafel 1.2.2)

$$\begin{aligned} \sigma_1 & : \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{4}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \quad , \\ \sigma_2 & : \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{4}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad , \\ \sigma_3 & : \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{4}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{4}{\text{---}} \circ \quad . \end{aligned}$$

Diese Orthoscheme treten als charakteristische Orthoscheme des total-asymptotischen regulären Kreuzpolytops $\{3, 3, 3, 4\}$ mit Keilwinkel $\frac{2\pi}{3}$ auf (vgl. §1.2.4; [44, p. 662]) und erfüllen deshalb die Zerlegungsrelation $[\sigma_3] = 2[\sigma_2] = 10[\sigma_1]$. Das Orthoschem σ_1 ist 1-asymptotisch, während σ_2, σ_3 2-asymptotisch sind und die Bedingung $\lambda = 1$ von Satz 1.3.4 erfüllen. Es folgt (vgl. §1.3.A):

$$\text{vol}_5(\sigma_3) = \frac{7}{4608} \zeta(3) = 2 \text{vol}_5(\sigma_2) = 10 \text{vol}_5(\sigma_1) \quad . \tag{1.3.9}$$

Im allgemeinen Fall $\lambda \neq 1$ ist das Volumen eines fünfdimensionalen 2-asymptotischen Orthoschems wohl nicht mehr *allein* durch Trilobatschefsckij-Funktionen $\mathbb{J}_3(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, darstellbar. Immerhin gilt in Abhängigkeit der Funktion

$$I(a, b; x) := \int_{\frac{\pi}{2}}^x \mathbb{J}(y) d \arctan(a \tan(b + y)) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ fest} \quad , \tag{1.3.10}$$

mit $I(1, b; x) = -\mathbb{J}_3(x) - \frac{3}{16}\zeta(3)$, welche sich als J -Integral und somit durch Polylogarithmen $Li_k(z)$ der Ordnung $k \leq 3$ ausdrücken lässt (vgl. §1.3.A, (1.3.24), und [45, §2.3, (27), (28)]) folgendes Resultat:

SATZ 1.3.5 [45, Theorem 3].

Es sei $R \subset \overline{H^5}$ ein 2-asymptotisches Orthoschem gegeben durch

$$\Sigma(R) \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha_1} \circ \xrightarrow{\alpha_2} \circ \xrightarrow{\alpha_3} \circ \xrightarrow{\alpha_4} \circ \xrightarrow{\alpha_5} \circ \quad \text{und}$$

$$\lambda = \tan \Theta = \frac{|\det \Sigma(R)|^{1/2}}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \cos \alpha_5} \quad , \quad 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

Weiter sei $0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$, sodass $\tan \alpha_0 = \cot \Theta \tan \alpha_3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_5(R) = & \\ & -\frac{1}{8} \left\{ I(\lambda^{-1}, 0; \alpha_1) + \frac{1}{2} I(\lambda, 0; \alpha_2) - I(\lambda^{-1}, 0; \alpha'_0) + \frac{1}{2} I(\lambda, 0; \alpha_4) + I(\lambda^{-1}, 0; \alpha_5) \right\} + \\ & + \frac{1}{32} \left\{ I_{alt}(\lambda, \alpha_1; \alpha_2) + I_{alt}(\lambda, \alpha_5; \alpha_2) \right\} \quad , \end{aligned}$$

wobei $I(a, b; x)$ die Funktion (1.3.10) ist, und $I_{alt}(a, b; x)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} I_{alt}(a, b; x) &:= I_\delta(a, b; x) + I_\delta(a, -b; x) \quad \text{mit} \\ I_\delta(a, b; x) &:= I\left(a, -\left(\frac{\pi}{2} + b\right); \frac{\pi}{2} + b + x\right) - I\left(a, -\left(\frac{\pi}{2} + b\right); \frac{\pi}{2} + b + \frac{\pi}{2}\right) \quad . \end{aligned}$$

1.3.5. *Das reguläre Simplexvolumen.* Ein reguläres Simplex $S_{reg}(2\alpha) \subset \overline{H^n}$ mit Keilwinkel $\frac{1}{n} < \cos(2\alpha) \leq \frac{1}{n-1}$ ist in Orthoscheme zerlegbar (vgl. §1.2.4):

$$[S_{reg}(2\alpha)] = (n+1)! [R(\alpha)] = n! [\nu_{n+1}^0] \quad ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma(R(\alpha)) &: \quad \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \quad \text{und} \\ \nu_{n+1}^0 &: \quad \circ \xrightarrow{2\alpha} \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \quad . \end{aligned}$$

Die Volumenformeln für Orthoscheme in $\overline{H^n}$ von §1.3.2–§1.3.4 erlauben daher, das reguläre Simplexvolumen für die Dimensionen $n \leq 6$ zu berechnen. Ist allerdings $S_{reg}(2\alpha) \subset H^n$, $n > 4$, kompakt, so muss zuvor eine Zerlegung/Ergänzung von $S_{reg}(2\alpha)$ in 2-asymptotische Orthoscheme angegeben werden, was sehr umständlich ist. Diese Schwierigkeit können wir umgehen, indem wir das Volumenproblem direkt für die Einparameterfamilie kompakter regulärer Simplizes $S_{reg}(2\alpha)$ mit $[S_{reg}(2\alpha)] = (n+1)! [R(\alpha)]$ untersuchen. Ein Orthoschem $R(\alpha) = p_0 \cdots p_n \subset X^n$, $n \geq 3$, gegeben durch

$$\Sigma(R(\alpha)) \quad : \quad \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \quad n$$

enthält als Scheitelseite $R(\alpha) \cap H_0 \cap H_1$ zum Keilwinkel $\alpha = \angle(H_0, H_1)$ das Orthoschem $R(\beta(\alpha)) \subset X^{n-2}$ mit

$$\Sigma(R(\beta(\alpha))) : \underset{2}{\circ} \overset{\beta(\alpha)}{\text{---}} \underset{n}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$$

Der *Scheitelwinkel* $\beta(\alpha)$ ist die Kantenlänge $l(p_2p_3)$ von $R(\alpha) \subset X^3$ beziehungsweise der Winkel $\angle(p_2p_4p_3)$ an p_4 im Dreieck $p_2p_3p_4$ von $R(\alpha) \subset X^n$, $n \geq 4$. Für $n \geq 3$ gilt [46, (15), (16)]:

$$0 \leq \beta(\alpha) < \infty \quad \text{mit} \quad \cosh(\beta(\alpha)) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{4 \sin^2(\alpha) - 1}} \quad \text{in } H^3; \quad (1.3.11)$$

$$0 \leq \beta(\alpha) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad \cos(\beta(\alpha)) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{4 \sin^2(\alpha) - 1}} \quad \text{in } X^n \neq H^3. \quad (1.3.12)$$

Daraus folgt, dass $\beta(\alpha_0^n) = \alpha_0^{n-2}$, und dass das Orthoschem $R(\beta(\alpha_0^n)) \subset X^{n-2}$ dimensionsentartet ist. Mit der Schläflischen Differentialformel von Satz 1.3.1 und mit Satz 1.3.3 (A) ist das Volumen eines kompakten regulären Simplexes $S_{reg}(2\alpha) \subset X^5$ als einfacher Integralausdruck erhältlich. Für den hyperbolischen Fall gilt:

LEMMA 1.3.4.

Sei $S_{reg}(2\alpha) \subset H^5$ ein kompaktes reguläres Simplex mit Keilwinkel 2α . Es bezeichne $R(\alpha)$ das zugehörige charakteristische Orthoschem $R(\alpha)$ mit Scheitelseite $R(\beta(\alpha))$ zum Keilwinkel α . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_5(S_{reg}(2\alpha)) &= 45 \int_{\alpha}^{\alpha_0^5} \text{vol}_3(R(\beta(t))) dt \\ &= 45 \int_{\alpha}^{\alpha_0^5} \left\{ \text{JI}(\beta(t) + \theta(t)) - \text{JI}(\beta(t) - \theta(t)) + \text{JI}\left(\frac{\pi}{6} - \theta(t)\right) - \text{JI}\left(\frac{\pi}{6} + \theta(t)\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{JI}\left(\frac{\pi}{3} + \theta(t)\right) - \text{JI}\left(\frac{\pi}{3} - \theta(t)\right) + 2 \text{JI}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(t)\right) \right\} dt, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_0^5 = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}$, $\beta(x) = \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}}$ und $\theta(x) = \theta(R(\beta(x)))$ den Hauptparameter von $R(\beta(x))$ bezeichnet, das heisst, $\theta(x) = \arctan \sqrt{1 - 2 \tan^2 \beta(x)}$.

Bemerkungen.

(a) Die Integrale $\int \text{JI}(\arccos \phi(t) + \arctan \psi(t)) dt$ lassen sich auf J -Integrale der Form $J(a, b, c; z) = \int_0^z \log(1+at) \log(1+bt) d \log(1+ct)$ zurückführen, die wiederum auf Polylogarithmen $\text{Li}_k(z)$ der Ordnungen $k \leq 3$ umgerechnet werden können (vgl. §1.3.A, (1.3.24)).

(b) Das Lemma 1.3.4 mit $\alpha_0^5 = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$ gilt auch für ein abgestumpftes reguläres Simplex $T_{reg}(2\alpha) \subset H^5$, $\frac{1}{4} < \cos(2\alpha) < \frac{1}{3}$, welches in 720 Orthoscheme $R_1(\alpha)$ vom Grad 1 (und vom Typ A) mit Diagramm

$$\Sigma(R_1(\alpha)) \quad : \quad \circ \cdots \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{\alpha}{\circ}$$

zerlegbar ist (vgl. (1.2.11) und Satz 1.3.3 (A)).

Es sei $n \geq 7$ und $\cos(2\alpha_0^n) = \frac{1}{n}$. Für $S_{reg}(2\alpha) \subset X^n$ mit Krümmungskonstante $\kappa = \kappa(X^n)$ kann das Volumen (siehe [46, §4, (B2)])

$$\text{vol}_n(S_{reg}(2\alpha)) = (n+1)! \text{vol}_n(R(\alpha)) = (n+1)! \frac{\kappa}{n-1} \int_{\alpha_0^n}^{\alpha} \text{vol}_{n-2}(R(\beta(t))) dt \quad (1.3.13)$$

auf verschiedene Weise *abgeschätzt* werden. Die Inkugel B_1 und die Umkugel B_n von $S_{reg}(2\alpha)$, deren Radien ${}_1R$ und ${}_nR$ als Funktionen von α in Lemma 1.2.2 dargestellt sind, liefern erste grobe Volumenschranken. Im Folgenden geben wir *elementare* Volumenabschätzungen für $R(\alpha) \subset X^n$ an. Dazu definieren wir induktiv eine Folge von Winkeln $\beta^k(\alpha) = \beta(\beta^{k-1}(\alpha)) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$\beta^0(\alpha) := \alpha \quad , \quad \beta^1(\alpha) := \beta(\alpha) \quad ,$$

das heisst:

$$\beta^k(\alpha) = \arccos \sqrt{\frac{k-1 - (2k-3)b(\alpha)}{2k-1 - 4(k-1)b(\alpha)}} \quad , \quad \text{für } k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1 \quad , \quad (1.3.14)$$

und für $k = \left[\frac{n}{2}\right]$,

$$\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\alpha) = \begin{cases} \arccos(B(\alpha)) \in [0, \frac{\pi}{2}] & \text{für } R(\alpha) \subset S^n \quad ; \\ \text{arcosh}(B(\alpha)) \in [0, \infty) & \text{für } R(\alpha) \subset H^n \quad , \end{cases} \quad (1.3.15)$$

wobei

$$B(\alpha) := \sqrt{\frac{\left[\frac{n}{2}\right] - 1 - (2\left[\frac{n}{2}\right] - 3)b(\alpha)}{2\left[\frac{n}{2}\right] - 1 - 4(\left[\frac{n}{2}\right] - 1)b(\alpha)}} \quad \text{mit} \quad b(\alpha) := \frac{\sin^2(\alpha)}{4\sin^2(\alpha) - 1}$$

Es sei ferner $m(x, y) := \frac{x+y}{2}$. Schliesslich definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \mu^0(\alpha) &:= \alpha \quad , \quad \mu^1(\alpha) := m(\alpha_0^n, \alpha) = \frac{\alpha_0^n + \alpha}{2} \quad \text{und} \\ \mu^k(\alpha) &:= m(\beta^{k-1}(\alpha_0^n), \beta(\mu^{k-1}(\alpha))) \quad \text{für } k \geq 2 \quad , \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

das heisst,

$$\mu^2(\alpha) = \frac{\beta(\alpha_0^n) + \beta\left(\frac{\alpha_0^n + \alpha}{2}\right)}{2} \quad , \quad \mu^3(\alpha) = \frac{\beta^2(\alpha_0^n) + \beta\left(\frac{\beta(\alpha_0^n) + \beta\left(\frac{\alpha_0^n + \alpha}{2}\right)}{2}\right)}{2} \quad , \quad \dots$$

LEMMA 1.3.5 [46, Lemma 4; Lemma 5].

Es sei $n \geq 3$ und $\alpha_0^k = \arccos \sqrt{\frac{k+1}{2k}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ für $2 \leq k \leq n$. $R(\alpha) \subset X^n$ sei charakteristisches Orthoschem eines nichteuklidischen regulären Simplexes mit Keilwinkel 2α .

(1) Für $R(\alpha) \subset S^n$ gilt:

$$\text{vol}_n(R(\alpha)) \leq \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{\beta^k(\alpha) - \alpha_0^{n-2k}}{n - (2k + 1)} \cdot \varphi_n(\alpha), \quad \text{wobei}$$

$$\varphi_n(\alpha) = \begin{cases} \beta^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\alpha), & \text{für } n \text{ ungerade;} \\ 1, & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

(2) Für $R(\alpha) \subset H^n$ gilt:

$$\text{vol}_n(R(\alpha)) > \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{\alpha_0^{n-2k} - \mu^{k+1}(\alpha)}{n - (2k + 1)} \cdot \psi_n(\alpha), \quad \text{wobei}$$

$$\psi_n(\alpha) = \begin{cases} \beta^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mu^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\alpha)), & \text{für } n \text{ ungerade;} \\ 1, & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bemerkungen.

(c) Die jeweils fehlende Ungleichung in (1) respektive (2) geht durch Vorzeichenwechsel aus (2) respektive (1) hervor.

(d) Für das Volumen von $R(\frac{\pi}{5}) \subset H^4$ beispielsweise gilt nach der Reduktionsformel von Satz 1.3.2 (siehe [42, p. 206]):

$$\text{vol}_4(R(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi^2}{10,800} \simeq 0.00091 \quad .$$

Nach Lemma 1.3.5 (2), erhalten wir $\text{vol}_4(R(\frac{\pi}{5})) > 0.00021$, während die Inkugelabschätzung lediglich $\text{vol}_4(R(\frac{\pi}{5})) > 0.00009$ ergibt.

Majorisiert wird das hyperbolische Simplexvolumen durch den Inhalt von idealen Simplexes. Darüber hinaus gilt (vgl. Folgerung (ii), (1.3.8)):

SATZ 1.3.6 (U. Haagerup-H. Munkholm; [33, Theorem 1]).

Ein Simplex $S \subset \overline{H^n}$, $n \geq 2$, ist genau dann von maximalem Volumen, wenn S ideal und regulär ist, das heisst, wenn $S = S_{reg}^\infty(2\alpha)$ mit $\cos(2\alpha) = \frac{1}{n-1}$.

Im projektiven Modell $(B^n, \text{dist}_{proj})$ kann das Volumen eines idealen regulären Simplexes $S_{reg}^\infty \subset \overline{H^n}$, $n \geq 2$, als Potenzreihe dargestellt werden (siehe [57, How to compute volume in hyperbolic space, §4]):

LEMMA 1.3.6 (J. Milnor).

Es sei $\beta = \frac{n+1}{2}$ und $S_{reg}^\infty \subset \overline{H^n}$, $n \geq 2$, ein ideales reguläres Simplex. Dann gilt:

$$\text{vol}_n(S_{reg}^\infty) = \sqrt{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)}{(n+2k)!} A_{n,k} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$A_{n,k} = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_n=k \\ i_\mu \geq 0}} \frac{(2i_0)! \cdots (2i_n)!}{i_0! \cdots i_n!} \quad .$$

1.3.A. *Polylogarithmen und Lobatschefskij-Funktionen.* Bei Volumenberechnungen für Polytope in nichteuklidischen Räumen X^n , $n \leq 6$, treten Polylogarithmen und verwandte Funktionen wie die Lobatschefskij-Funktionen auf. Polylogarithmen (siehe [47]) können induktiv definiert werden. Es sei

$$\text{Li}_1(z) := -\log(1-z) \quad \text{mit} \quad \text{Li}_1(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r} \quad \text{für} \quad |z| < 1 \quad .$$

Dann ist der k -Logarithmus oder *Polylogarithmus der Ordnung* $k \geq 2$ definiert als

$$\text{Li}_k(z) := \int_0^z \frac{\text{Li}_{k-1}(t)}{t} dt \quad \text{mit} \quad \text{Li}_k(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^k} \quad \text{für} \quad |z| \leq 1 \quad . \quad (1.3.17)$$

Es ist $\text{Li}_k(1) = \zeta(k)$, $k \geq 2$, die Riemannsche Zetafunktion, und es gilt die Identität

$$\frac{1}{m^{k-1}} \text{Li}_k(z^m) = \text{Li}_k(z) + \text{Li}_k(\omega z) + \cdots + \text{Li}_k(\omega^{m-1} z) \quad , \quad (1.3.18)$$

wobei $\omega = e^{2\pi i/m}$, $m \geq 1$.

Für Argumente auf dem Einheitskreis, das heisst, $z = e^{2i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, definieren wir ausgehend von Polylogarithmen *höhere Lobatschefskij-Funktionen*

$$\mathbb{J}_{2k}(\alpha) = \frac{1}{2^{2k-1}} \text{Im}(\text{Li}_{2k}(e^{2i\alpha})) = \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(2r\alpha)}{r^{2k}} \quad ,$$

$$\mathbb{J}_{2k+1}(\alpha) = \frac{1}{2^{2k}} \text{Re}(\text{Li}_{2k+1}(e^{2i\alpha})) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos(2r\alpha)}{r^{2k+1}} \quad (1.3.19)$$

nach dem Modell der Lobatschefskijschen Funktion (vgl. §1.3.3)

$$\mathbb{J}(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Im}(\text{Li}_2(e^{2i\alpha})) = - \int_0^\alpha \log |2 \sin t| dt \quad .$$

Dann gilt

$$\mathbb{J}_{2k}(\alpha) = \int_0^\alpha \mathbb{J}_{2k-1}(t) dt \quad , \quad \mathbb{J}_{2k+1}(\alpha) = \frac{1}{2^{2k}} \zeta(2k+1) - \int_0^\alpha \mathbb{J}_{2k}(t) dt \quad . \quad (1.3.20)$$

Weiter ist $\mathbb{J}_k(\alpha)$ π -periodisch, gerade (ungerade) für k ungerade (gerade) und erfüllt die Distributionsformel (vgl. (1.3.18))

$$\frac{1}{m^{k-1}} \mathbb{J}_k(m\alpha) = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{J}_k\left(\alpha + \frac{r\pi}{m}\right) \quad . \quad (1.3.21)$$

Damit lassen sich spezielle Werte berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_3(0) &= \frac{1}{4} \zeta(3) \quad ; \quad \mathbb{J}_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{128} \zeta(3) \quad ; \quad \mathbb{J}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{16} \zeta(3) \quad ; \\ \mathbb{J}_3\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{12} \zeta(3) \quad ; \quad \mathbb{J}_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{9} \zeta(3) \quad . \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Schliesslich erlaubt die Darstellung

$$\text{Li}_n(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_1^\infty \log^{n-1} t \left\{ \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right\} dt \quad (1.3.23)$$

einige wichtige Funktionalgleichungen für $\text{Li}_n(z)$ aufzustellen, womit sich sogenannte J -Integrale auf Polylogarithmen zurückführen lassen. Es gilt (siehe [45, Appendix B1]):

$$\begin{aligned} J(a, b, c; z) &= \int_0^z \log(1+at) \log(1+bt) d\log(1+ct) = \quad (1.3.24) \\ &= \text{Li}_3\left(\frac{b}{a}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{c-b}{c-a}\right) + \text{Li}_3\left(\frac{c}{c-a}\right) + \text{Li}_3\left(\frac{c}{c-b}\right) + \text{Li}_3\left(\frac{(c-b)(1+az)}{(c-a)(1+bz)}\right) - \\ &\quad - \text{Li}_3\left(\frac{b(1+az)}{a(1+bz)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{c(1+az)}{c-a}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{c(1+bz)}{c-b}\right) + \\ &\quad + \log\left(\frac{1+az}{1+bz}\right) \left\{ \text{Li}_2\left(\frac{b(1+az)}{a(1+bz)}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{(c-b)(1+az)}{(c-a)(1+bz)}\right) \right\} + \\ &\quad + \log(1+az) \text{Li}_2\left(\frac{c(1+az)}{c-a}\right) + \log(1+bz) \text{Li}_2\left(\frac{c(1+bz)}{c-b}\right) + \\ &\quad + \log(1+az) \log(1+bz) \log \frac{a(1+cz)}{a-c} - \frac{1}{2} \log^2(1+bz) \log \frac{a(c-b)}{b(c-a)} \quad , \end{aligned}$$

oder, in abgekürzter Schreibweise,

$$J(a, b, c; z) = F\left(\frac{c-b}{c-a}; \frac{1+az}{1+bz}\right) - F\left(\frac{b}{a}; \frac{1+az}{1+bz}\right) - F\left(\frac{c}{c-a}; 1+az\right) - F\left(\frac{c}{c-b}; 1+bz\right) \quad ,$$

wobei

$$F(s; z) = G(s; z) - G(s; 1) \quad \text{mit} \quad G(s; z) = \text{Li}_3(sz) - \log z \cdot \text{Li}_2(sz) + \frac{1}{2} \log^2 z \cdot \text{Li}_1(sz) \quad .$$

1.4. Verallgemeinerte Kugelpackungen des hyperbolischen Raums

In diesem Paragraphen werden gewöhnliche Kugelpackungen eines Raums X^n konstanter Krümmung und verallgemeinerte Kugelpackungen des erweiterten hyperbolischen Raums \overline{H}^n studiert. Für spätere Anwendungen besonders wichtig sind die Ergebnisse der lokalen Dichteberechnungen und Dichteabschätzungen in den Dirichlet-Voronoi'schen Fundamentalzellen einer Packung. Einige Ergebnisse, insbesondere über den euklidischen Raum, sind klassisch, die Resultate über verallgemeinerte hyperbolische Kugelpackungen hingegen sind neu.

1.4.1. *Kugelpackungen in E^n .* Eine Kugelpackung $\mathcal{B} = \mathcal{B}^n(r)$, $n \geq 2$, eines Raums X^n konstanter Krümmung ist eine Anordnung von Bällen $B = B(r)$ vom Radius r in X^n ohne gegenseitige Überlappung. Für Packungen der Sphäre S^n mit r -Kugeln sei stets $r < \frac{\pi}{4}$ vorausgesetzt. Ein klassisches und im allgemeinen ungelöstes Problem besteht darin, dichteste Kugelpackungen im euklidischen Raum E^n zu finden. Eine natürliche Einschränkung dabei ist, gitterförmige Arrangements \mathcal{B}_Γ von Kugeln zu studieren, deren Mittelpunkte ein Punktgitter Γ bilden.

Die Dichte $d_\Gamma = d(\mathcal{B}_\Gamma)$ einer Gitterpackung \mathcal{B}_Γ in X^n ist gegeben durch das Verhältnis des Volumens einer Kugel B der Packung zum Volumen einer Fundamentalmasche F_Γ des Gitters, das heisst,

$$d_\Gamma = \frac{\text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(F_\Gamma)} < 1 \quad ; \quad (1.4.1)$$

d_Γ ist eine vom Kugelradius r unabhängige Zahl. *Dichteste* Gitterpackungen \mathcal{B}_Γ sind Packungen mit grösstmöglicher Dichte d_Γ . In E^n sind die dichtesten gitterförmigen Kugelpackungen bis zur Dimension $n = 8$ bekannt und als solche eindeutig bestimmt. Sie gehören zu Wurzelgittern vom Typ A , D oder E und sind in Tafel 1.4.1 zusammengestellt (siehe [64, Table 1, p. 3]).

n	Γ	d_Γ		
2	A_2	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 0.90690$	J. L. Lagrange	1773
3	D_3	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0.74048$	C. F. Gauss	1831
4	D_4	$\frac{\pi^2}{16} \simeq 0.61685$	A. Korkine–G. Zolotareff	1872
5	D_5	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}} \simeq 0.46526$	A. Korkine–G. Zolotareff	1877
6	E_6	$\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} \simeq 0.37295$	H. F. Blichfeldt	1925
7	E_7	$\frac{\pi^3}{105} \simeq 0.29530$	H. F. Blichfeldt	1926
8	E_8	$\frac{\pi^4}{384} \simeq 0.25367$	H. F. Blichfeldt	1934

Tafel 1.4.1. Dichteste Gitterpackungen \mathcal{B}_Γ in E^n

Für Gitterpackungen \mathcal{B}_Γ in E^n , $9 \leq n \leq 12$ existieren immerhin noch Abschätzungen der Dichte d_Γ nach unten (vgl. Tafel 1.4.2; siehe [64, Table 1, p. 3]).

n	$d_\Gamma \geq$		
9	$\frac{2\pi^4}{945\sqrt{2}} \approx 0.14578$	T. W. Chaundy	1946
10	$\frac{\pi^5}{1920\sqrt{3}} \approx 0.09202$	T. W. Chaundy	1946
11	$\frac{64\pi^5}{197,110\sqrt{3}} \approx 0.05737$	E. S. Barnes	1959
12	$\frac{\pi^6}{19,440} \approx 0.04945$	H. S. M. Coxeter–J. A. Todd	1951

Tafel 1.4.2. Dichteabschätzungen für Gitterpackungen \mathcal{B}_Γ in E^n

Für beliebiges n bewies H. Minkowski 1905 (siehe [64, (2), p. 3]) die Existenz von Gitterpackungen \mathcal{B}_Γ in E^n mit

$$d_\Gamma \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}.$$

Diese Abschätzung wurde 1947 von C. A. Rogers [64, (4), p. 4]) für $n > 2$ verbessert zu

$$d_\Gamma \geq \frac{n\zeta(n)}{2^{n-1} \cdot e(1 - e^{-n})}.$$

Werden schliesslich *beliebige* konvexe Körper K gitterförmig in E^n angeordnet, so kann die Dichte $d_\Gamma(\mathcal{K})$ der Packung \mathcal{K} von E^n mit Exemplaren von K bezüglich des Gitters Γ mit Fundamentalbereich F_Γ wie folgt abgeschätzt werden [64, Theorem 4.4, p. 53]:

$$d_\Gamma(\mathcal{K}) = \frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(F_\Gamma)} \geq \frac{2(n!)^2}{(2n)!}. \quad (1.4.2)$$

Lässt man die Gitterbedingung fallen, so muss für eine Kugelpackung \mathcal{B} des E^n zuerst ein geeigneter Dichtebegriff $d(\mathcal{B})$ erklärt werden, welcher die Gesamtheit der Bälle aus \mathcal{B} mit dem Raum E^n vergleicht. Es sei dazu $K(R) \subset E^n$ eine Kugel vom Radius R mit Zentrum 0. Dann ist

$$d(\mathcal{B}) := \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{B \subset \mathcal{B} \cap K(R)} \text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(K(R))} < 1 \quad (1.4.3)$$

eine von der Wahl des Zentrums der Kugel $K(R)$ unabhängige und wohldefinierte Zahl, welche die Dichte der Packung \mathcal{B} misst (siehe [16, p. 8], und für beliebige Packungen [64, Kapitel 1]). Weiter gilt die Ungleichung (siehe (1.4.2) und [64, (14), p. 10; Theorem 1.4, p. 25])

$$d(\mathcal{B}) \geq d_\Gamma(\mathcal{B}) \geq \frac{2(n!)^2}{(2n)!}. \quad (1.4.4)$$

Für die Ebene E^2 ist die dichteste Kreispackung durch das Wurzelgitter A_2 gegeben. Dieses Resultat wurde von A. Thue 1892 erstmals erwähnt und von L. Fejes Tóth 1940 streng bewiesen (siehe [26, p. 94–95]). Hingegen ist für $n > 3$ das Problem der dichtesten Kugelpackung in E^n noch ungelöst (für $n = 3$, siehe [34] und [39] über den Stand der Keplerschen Vermutung, dass die Kugelpackung zum flächenzentrierten Würfelgitter, die sogenannte Kanonenballpackung, die dichteste des E^3 überhaupt ist).

Die Dichte $d(\mathcal{B})$ einer Kugelpackung \mathcal{B} in E^n kann nach Rogers [64, Theorem 7.1, p. 81] aber nach oben abgeschätzt werden. Es ist

$$d(\mathcal{B}) \leq d_n \quad , \quad (1.4.5)$$

wobei d_n die Dichte von $n + 1$ sich gegenseitig berührenden Kugeln $B = B(1)$ im regulären n -Simplex S_{reg} (der Kantenlänge 2) ist, welches von ihren Mittelpunkten erzeugt wird, das heißt,

$$d_n = (n + 1) \frac{\text{vol}_n(B \cap S_{reg})}{\text{vol}_n(S_{reg})} \quad . \quad (1.4.6)$$

LEMMA 1.4.1.

Es sei $n \geq 2$ und $\alpha_n := \alpha_n^0 = \arccos \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. $R_0 \subset S^{n-1}$ bezeichne das Orthoschem mit Graph $\Sigma(R_0) : \circ \xrightarrow{\alpha_n} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ$. Dann ist die euklidische simpliziale Dichte d_n gegeben durch

$$d_n = (n - 1)! \prod_{k=2}^n \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{\frac{n-k+1}{2}} \cdot \text{vol}_{n-1}(R_0) \quad .$$

Beweis: Nach (1.4.6) ist

$$d_n = (n + 1) \frac{\text{vol}_n(B \cap S_{reg})}{\text{vol}_n(S_{reg})} \quad ,$$

wobei $B = B(1)$ die Einheitskugel und $S_{reg} = S_{reg}(2\alpha_n)$ ein reguläres Simplex mit Kantenlänge 2 und Zentrum p_n in E^n sind. Das charakteristische Orthoschem $R = R(\alpha_n)$ zu $S_{reg}(2\alpha_n)$ besitzt im Eckpunkt p_0 von S_{reg} die Eckenfigur $R_0 = R_{p_0}(\alpha_n) \subset S^{n-1}$ (vgl. §1.2.4). Bezeichnet $\Omega_k := \text{vol}_k(S^k)$, so können wir aufgrund von (1.2.9) schreiben:

$$d_n = (n + 1) \cdot \text{vol}_n(B) \cdot \frac{n! \text{vol}_{n-1}(R_0)}{\Omega_{n-1}} \cdot \frac{1}{(n + 1)! \text{vol}_n(R)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\text{vol}_{n-1}(R_0)}{\text{vol}_n(R)} \quad .$$

Es seien $p_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}, p_n$ die Eckpunkte und $q_1 = p_0 p'_1 = 1$, $q_i = p'_{i-1} p'_i$, $q_n = p'_{n-1} p_n$ ($2 \leq i \leq n - 1$) die Kanten von $R(\alpha_n)$. Nach Induktion gilt für das euklidische Or-

thoschemvolumen $\text{vol}_n(R)$ mit $q_1 = 1$ und $\tan^2 \alpha_n = \frac{n-1}{n+1}$:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(R) &= \frac{1}{n!} q_1 \cdots q_n \\ &= \frac{1}{n!} q_2^{n-1} \frac{q_3^{n-2}}{q_2^{n-2}} \cdots \frac{q_{n-1}^2}{q_{n-2}^2} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} \\ &= \frac{1}{n!} \tan^{n-1} \alpha_2 \cdots \tan^2 \alpha_{n-1} \cdot \tan \alpha_n \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{n-k+1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Q.E.D.

Für $n = 2$ liefert Lemma 1.4.1 das Resultat von Thue mit $d_2 = d_{A_2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (vgl. Tafel 1.4.1). Für $n \geq 3$ lassen sich einige Werte von d_n mit Hilfe der Volumenformeln von §1.3 berechnen; sie sind in Tafel 1.4.3 aufgeführt.

n	$d_n \simeq$
2	0.90690
3	0.77964
4	0.64782
5	0.52571
6	0.41924
7	0.32999

Tafel 1.4.3. Die euklidische simpliziale Dichte d_n

Nach einer Formel von H. E. Daniels (siehe [64, (11), p. 90]) verhält sich diese simpliziale Dichtefunktion d_n asymptotisch gemäss

$$d_n \sim \frac{(n+1)! e^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \cdot (4n)^{\frac{n}{2}}} \sim \frac{n}{e} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \quad (1.4.7)$$

1.4.2. *Der Satz von Böröczky.* Für das allgemeine Problem dichtester Kugelpackungen $\mathcal{B}(r)$ in X^n , $n \geq 2$, vermuteten L. Fejes Tóth [24, p. 212] und H. S. M. Coxeter [19, §8, p. 61] eine entsprechende simpliziale obere Dichteschranke, nämlich die Dichte $d_n(r)$ von

$n + 1$ sich gegenseitig berührenden Kugeln $B(r) \subset X^n$ vom Radius r zentriert in den Eckpunkten eines regulären Simplexes S_{reg} der Kantenlänge $2r$:

$$d_n(r) = (n + 1) \frac{\text{vol}_n(B(r) \cap S_{reg})}{\text{vol}_n(S_{reg})} \quad (1.4.8)$$

Neben dem Resultat (1.4.5) von Rogers für den euklidischen Raum E^n wurde die Vermutung für die 2-Sphäre S^2 von L. Fejes Tóth [24] bewiesen. Schliesslich gelang 1978 K. Böröczky [10] der Beweis der allgemeinen Vermutung, nachdem er bereits im Spezialfall des hyperbolischen Raums H^3 erfolgreich war (siehe [9]). Dabei stützte er sich auf einen lokalen Dichtebegriff: Zu jedem Ball $B = B(r)$ der Packung $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r)$ in X^n wird die *Dirichlet-Voronoi'sche Zelle*

$$D = D(B, \mathcal{B}) := \{ p \in X^n \mid \text{dist}(p, B) \leq \text{dist}(p, B'), \forall B' \in \mathcal{B} \}$$

zugeordnet. Die Dirichlet-Voronoi'schen Zellen sind als Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen konvexe Polytope (vgl. §1.2.1), welche X^n schlicht und lückenlos überdecken. Die *lokale Dichte* $ld_n(B, \mathcal{B})$ von B bezüglich \mathcal{B} ist definiert als die Dichte der Kugel B in ihrer Dirichlet-Voronoi'schen Zelle D , das heisst,

$$ld_n(B, \mathcal{B}) := \frac{\text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(D)}$$

SATZ 1.4.1 (K. Böröczky; [10, Theorem 1]).

Ist \mathcal{B} eine Packung von X^n mit Kugeln B vom Radius r , so ist $ld_n(B, \mathcal{B}) \leq d_n(r)$ für jede Kugel $B \in \mathcal{B}$.

Bemerkung [10, §6, p. 260].

Die Abschätzung $ld_n(B, \mathcal{B}) \leq d_n(r)$ von Satz 1.4.1 ist scharf, falls die Dirichlet-Voronoi'sche Zelle $D(B)$ zum Ball B ein reguläres Polytop (vgl. §1.2.4) ist. Gilt dies für jede Zelle $D(B)$ der Packung \mathcal{B} , so bilden die Kugeln B die Inkugeln einer regulären Pflasterung von X^n . Eine solche reguläre Pflasterung ist gekennzeichnet durch ein Schläfli-Symbol $\{r, 3, \dots, 3\}$ mit $r \in \mathbb{N}$ ($r \geq 3$) mit *simplizialen* Eckenfiguren $\{3, \dots, 3\}$ und durch das charakteristische Coxeter-Orthoschem $R(\frac{\pi}{r})$ gegeben durch (vgl. §1.2.3 und §1.2.4)

$$\Sigma(R(\frac{\pi}{r})) \quad : \quad \circ \text{---} \overset{r}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \quad .$$

Auf der n -Sphäre S^n gibt es für $n = 3$ das Mosaik $\{5, 3, 3\}$ und für jedes n die regulären Pflasterungen $\{3, 3, \dots, 3\}$ und $\{4, 3, \dots, 3\}$ (vgl. Tafel 1.2.1). Hingegen existiert in H^n für $n > 2$ nur noch die reguläre Pflasterung $\{5, 3, 3, 3\}$ des H^4 (vgl. Tafel 1.2.2). Die zugehörigen Inkugeldichten $d_n(r)$ sind $d_3(5) \simeq 0.77413$ (siehe [18, p. 266]) und $d_4(5) \simeq 0.69098$ (siehe [18, p. 273]). Weiter folgt unter Verwendung der Volumenformeln von Schläfli für die Coxeter-Orthoscheme A_n und B_n (vgl. (1.3.4)):

$$d_n(3) = (n + 2) \cdot h_{n-1}(r) \quad ; \quad d_n(4) = 2(n + 1) \cdot h_{n-1}(r) \quad ,$$

wobei $h_k(x)$ definiert ist als

$$h_k(x) = \frac{s_k(r)}{s_k\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{mit} \quad s_k(x) = \int_0^x \sin^k(t) dt$$

und sich in geschlossener Form darstellen lässt gemäss

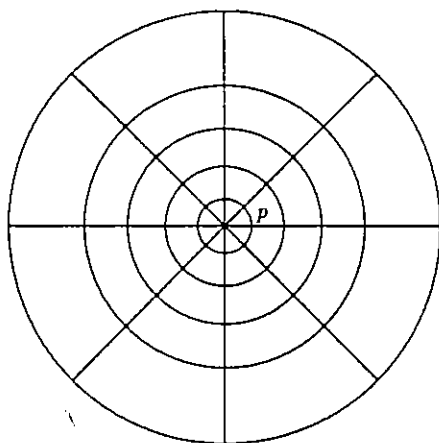
$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{2m!!}{(2m-1)!!} \left\{ \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} x + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{2m}{l} \frac{\sin((2m-2l)x)}{2m-2l} \right\}, & \text{für } k=2m; \\ \frac{(2m+1)!!}{2m!!} \left\{ \frac{1}{2^{2m+1}} (-1)^{m+1} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{2m+1}{l} \frac{[\cos((2m+1-2l)x)-1]}{2m+1-2l} \right\}, & \text{für } k=2m+1. \end{cases}$$

1.4.3. *Verallgemeinerte Kugelpackungen in H^n .* Die Ergebnisse von §1.4.2 lassen sich auf verallgemeinerte Kugelpackungen des hyperbolischen Raums erweitern. Legen wir dem hyperbolischen Raum H^n das konforme Ballmodell $(B^n, \text{dist}_{\text{konf}})$ zugrunde (vgl. §1.1.3), so gibt es entsprechend der Lage eines Punktes p zum Rand ∂H^n unterschiedliche Formen von Kugeln um p in H^n .

Ist $p \in H^n$ ein gewöhnlicher Punkt, so bestimmt das Bündel \mathcal{P}_p hyperbolischer Geraden durch p als orthogonale Trajektorien oder *Komplement C_p Hyperflächen*, welche mit Standardsphären $S^{n-1} \subset E^n$ identifiziert werden können und gewöhnliche konzentrische Kugeln um p beranden (siehe [61, Theorem 4.5.4] und Figur 1.4.1a).

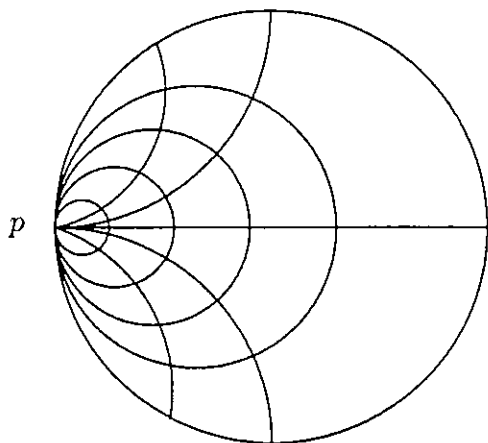
Ist $p \in \partial H^n$ ein unendlicher Punkt von $\overline{H^n}$, so bestimmt das Bündel \mathcal{P}_p (asymptotisch) paralleler Geraden mit Fernpunkt p als Komplement C_p Sphären in B^n , die sich in p tangential an $S^{n-1} = \partial B^n$ anschmiegen (vgl. Figur 1.4.1b). Diese Hyperflächen können jeweils als E^{n-1} aufgefasst werden. Dies lässt sich nach Übergang zum oberen Halbraum-Modell $(E_+^n, \text{dist}_{\text{konf}})$ verifizieren. Wird nämlich p auf ∞ abgebildet, so gehen die Hyperflächen in zur Grundebene E^{n-1} parallele Hyperebenen über (siehe [61, Theorem 4.6.5]). Solche Flächen heissen *Horosphären* (für $n=2$ *Horozykeln*) mit Zentrum $p \in \partial H^n$ und werden mit S_∞ bezeichnet; sie beranden *Horobälle B_∞ mit Zentrum p* .

Ist schliesslich p ein ultra-unendlicher Punkt von H^n und Zentrum eines Bündels \mathcal{P}_p von ultra-parallelen hyperbolischen Geraden (siehe [3, Chapter 3, §1.1]), so besteht C_p aus äquidistanten Hyperflächen in H^n . Jede dieser Hyperflächen in H^n ist einem H^{n-1} gleich (siehe [61, Theorem 4.5.3]) und heisst *Hypersphäre* (für $n=2$ *Hyperzyklus*) zum Zentrum p (vgl. Figur 1.4.1c). Ein *Hyperball $BH_p(r)$ mit Zentrum p , Radius r und Rand H_p* ist der abgeschlossene Teilraum von H^n , welcher von der Hypersphäre H_p und der von ihr und p weg um r verschobenen konzentrischen Hypersphäre $H_p(r)$ eingespannt ist. Mit jedem Hyperball $BH_p(r)$ ist ein abgeschlossener Halbraum $H_p^+ \supset BH_p(r)$ in H^n bestimmt, der von H_p begrenzt wird, von p abgewandt ist und als solcher positiv orientiert sei.



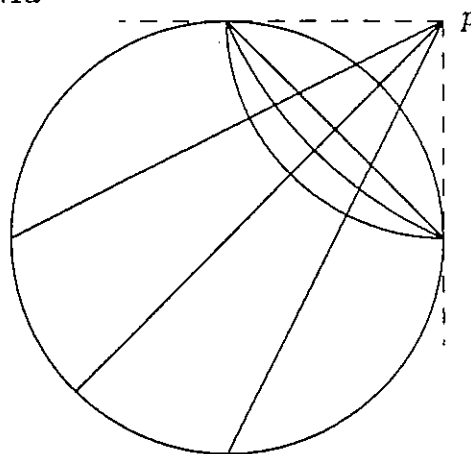
Hyperbolische Kreise um p

Figur 1.4.1a



Horozyklen zu p im konformen Modell

Figur 1.4.1b



Hyperzyklen zu p im projektiven Modell

Figur 1.4.1c

Nähert sich das Zentrum p von aussen her einem Randpunkt $p_0 \in \partial H^n$, so gehen Hypersphären H_p in Horosphären S_∞ mit Zentrum p_0 über. Davon überzeugt man sich im projektiven Ballmodell $(B^n, \text{dist}_{proj})$. Jeder Punkt p ausserhalb des Balls B^n ist Pol einer hyperbolischen Hyperebene, der Polarhyperebene Pol_p von p eingeschränkt auf H^n (vgl. §1.1.2). Unter allen Hypersphären zum Zentrum p ist Pol_p ausgezeichnet und wird die *Polhypersphäre zu p* genannt (umgekehrt ist jede hyperbolische Hyperebene H polar zu genau einem Punkt q ausserhalb von B^n , dem Pol von H . $q =: \text{Pol}(H)$ heisst das *Polzentrum zur Hypersphäre H*). Konvergiert nun p gegen $p_0 \in \partial H^n$, so degeneriert die Polhypersphäre $\text{Pol}_p \cap \overline{H^n}$ zu p punktartig zu p_0 . Weiter gehen bei diesem Prozess Hyperbälle $B\text{Pol}_p(r)$ in Horobälle B_∞ zum Mittelpunkt p_0 über.

Schliesslich bemerken wir, dass Horobälle und Hyperbälle unendliches Volumen haben.

(I) Eine *Horoballpackung* \mathcal{B}_∞ von H^n ist eine Anordnung von sich nicht schneidenden Horobällen B_∞ in H^n . Wie bei herkömmlichen Kugelpackungen lässt sich zu jedem Horoball B_∞ der Packung eine Dirichlet-Voronoi'sche Zelle $D(B_\infty)$ zuordnen: Ist $p \in H^n$ ein beliebiger Punkt, so bezeichne $\text{dist}(p, B_\infty)$ die Länge des eindeutig bestimmten Lotes von p auf den Rand $S_\infty = \partial B_\infty$ (liegt p im Innern von B_∞ , so sei $\text{dist}(p, B_\infty)$ negativ). Die *Dirichlet-Voronoi'sche Zelle* $D(B_\infty)$ von B_∞ ist der konvexe Körper

$$D_\infty = D(B_\infty) = \{p \in H^n \mid \text{dist}(p, B_\infty) \leq \text{dist}(p, B'_\infty), \forall B'_\infty \in \mathcal{B}_\infty\} .$$

Bei *gesättigten* Horoballpackungen (in keinem der freien Zwischenräume $H^n - (\cup B_\infty)$ lässt sich ein Horoball einbetten) sind Dirichlet-Voronoi'sche Zellen Durchschnitte von unendlichen vielen Halbräumen und somit keine Polytope im eigentlichen Sinne mehr (vgl. §1.2.1).

Wie die Kugel B_∞ selbst, ist auch $D(B_\infty)$ von unendlichem Volumen. Somit muss der Begriff der lokalen Dichte von B_∞ bezüglich \mathcal{B}_∞ modifiziert werden (siehe [10, §6]). Es sei $B_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ ein Horoball mit Mittelpunkt $p \in \partial H^n$, dessen Rand S_∞ als euklidischer Raum E^{n-1} aufgefasst wird. Wir wählen einen beliebigen Punkt $O \in S_\infty$ und schlagen eine Kugel $B_{n-1}(R) \subset S_\infty$ vom Radius R um O . Ist $K_n(R) := \text{Kegel}_p(B_{n-1}(R))$ der Kegel mit Spitze p aller hyperbolischer Geraden durch $B_{n-1}(R)$ hindurch, so ist die *lokale Dichte* $ld_n(B_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ von B_∞ bezüglich \mathcal{B}_∞ definiert als (vgl. (1.4.3))

$$ld_n(B_\infty, \mathcal{B}_\infty) := \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_n(B_\infty \cap K_n(R))}{\text{vol}_n(D_\infty \cap K_n(R))} < 1 .$$

Wie im Falle (1.4.3) der Dichte einer Kugelpackung des euklidischen Raums E^n sieht man, dass der Wert $ld_n(B_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ von der Wahl des Mittelpunkts $O \in B_{n-1}(R)$ unabhängig ist.

Der Satz von Böröczky lässt sich nun auf Horoballpackungen verallgemeinern. Es sei

$$d_n(\infty) = (n+1) \frac{\text{vol}_n(B_\infty \cap S_{reg}^\infty)}{\text{vol}_n(S_{reg}^\infty)} \quad (1.4.9)$$

die Dichte von $n+1$ sich gegenseitig berührenden Horobällen im idealen regulären Simplex $S_{reg}^\infty \subset \overline{H^n}$ (vgl. §1.2.4).

SATZ 1.4.2 (K. Böröczky; [10, Theorem 4]).

Es sei \mathcal{B}_∞ eine Horoballpackung in $\overline{H^n}$. Dann ist $ld_n(B_\infty, \mathcal{B}_\infty) \leq d_n(\infty)$ für jeden Horoball $B_\infty \in \mathcal{B}_\infty$.

Bemerkung [10, p. 261].

(a) Die Schranke $d_n(\infty)$ in Satz 1.4.2 wird wiederum von Packungsdichten für Horobälle angenommen, die als Inkugeln einer regulären Pflasterung $\{r, 3, \dots, 3\}$ des $\overline{H^n}$ auftreten. In der hyperbolischen Ebene $\overline{H^2}$ gibt es das reguläre Mosaik $\{\infty, 3\}$ mit der Inkreisdichte $d_2(\infty) = \frac{3}{\pi}$. Diese Horozykelpackung liefert die dichteste Kreisausfüllung der hyperbolischen Ebene überhaupt. Denn L. Fejes Tóth [25, II.4.1, p. 230] bewies, dass die Dichtefunktion $d_2(r)$ eine streng monoton wachsende Funktion ist.

Entsprechendes gilt im dreidimensionalen hyperbolischen Raum $\overline{H^3}$. Die einzig verbleibende Horoballpackung des $\overline{H^n}$ für $n > 2$ bestehend aus den Inkugeln einer regulären Pflasterung gehört zum Mosaik $\{6, 3, 3\}$ in $\overline{H^3}$. Für diese Horoballpackung wird die Dichteschranke

$$d_3(\infty) = \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - + \dots\right)^{-1} \simeq 0.85328 \tag{1.4.10}$$

erreicht (siehe [18, p. 270]). Wie A. Florian [10] zeigte, ist $d_3(r)$ eine streng monoton wachsende Funktion, sodass die Inkugelpackung zum Mosaik $\{6, 3, 3\}$ die absolut dichteste Kugelpackung des hyperbolischen 3-Raums darstellt. Florian hat sich beim Nachweis der Monotonie von $d_3(r)$ auf die explizite analytische Gestalt von $d_3(r)$ abgestützt und $d_3'(r) > 0$ nachgeprüft.

Für $n > 3$ ist zu vermuten, dass $d_n(r)$ ebenfalls streng monoton bis zur Grenzdichte $d_n(\infty)$ anwächst. Allerdings müssen zum Beweis neue Wege beschritten werden, da Inhaltsformeln zur expliziten Darstellung von $d_n(r)$ für ansteigende Dimensionen $n > 3$ nicht nur äusserst kompliziert, sondern ab Dimension $n = 7$ nicht verfügbar sind (vgl. §1.3). Dennoch können wir die Grenzdichte $d_n(\infty)$ für jedes $n \geq 2$ konkret berechnen. Es gilt:

SATZ 1.4.3.

Die simpliciale Horoballdichte $d_n(\infty)$, $n \geq 2$, ist gegeben durch

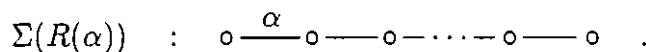
$$d_n(\infty) = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \cdot \frac{\prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{n-k}{2}}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(n+2k)!} A_{n,k}}$$

wobei $\beta = \frac{1}{2}(n+1)$ und $A_{n,k} = \sum_{\substack{i_0+\dots+i_n=k \\ i_\mu \geq 0}} \frac{(2i_0)! \cdots (2i_n)!}{i_0! \cdots i_n!}$.

Beweis: Nach Definition (1.4.9) und aufgrund (1.2.9) ist

$$d_n(\infty) = (n+1) \frac{\text{vol}_n(B_\infty \cap S_{reg}^\infty)}{\text{vol}_n(S_{reg}^\infty)} = \frac{\text{vol}_n(B_\infty \cap R(\alpha))}{\text{vol}_n(R(\alpha))}$$

wobei S_{reg}^∞ das ideale reguläre Simplex ist mit Keilwinkel $\cos(2\alpha) = \frac{1}{n-1}$ und zugehörigem 1-asymptotischen charakteristischen Orthoschem $R(\alpha)$ gegeben durch



Der Nenner $\text{vol}_n(S_{reg}^\infty)$ lässt sich nach Lemma 1.3.6 darstellen als

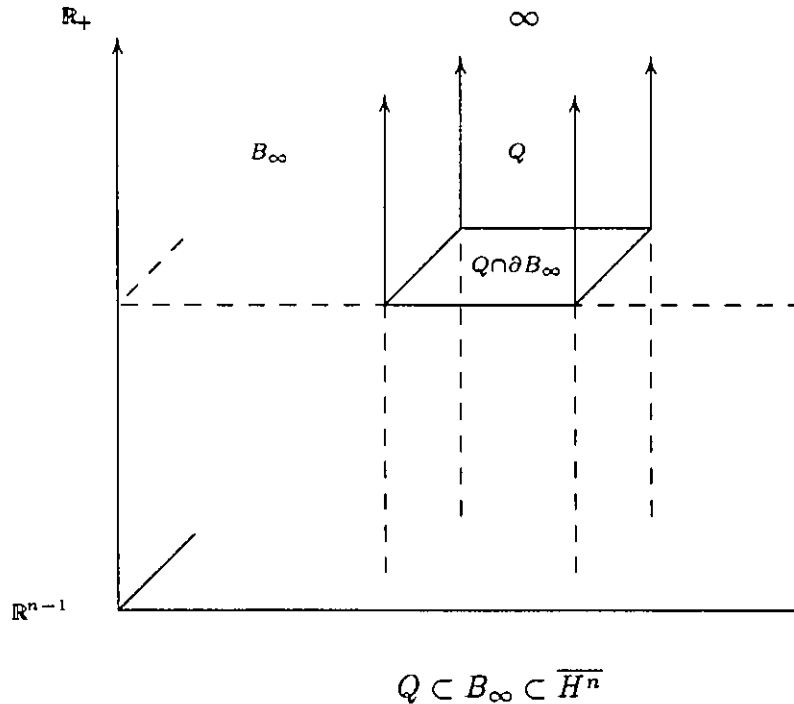
$$\text{vol}_n(S_{reg}^\infty) = (n+1)! \text{vol}_n(R(\alpha)) = \sqrt{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(n+2k)!} A_{n,k}$$

wobei $\beta = \frac{1}{2}(n+1)$ und $A_{n,k} = \sum_{\substack{i_0+\dots+i_n=k \\ i_\mu \geq 0}} \frac{(2i_0)! \cdots (2i_n)!}{i_0! \cdots i_n!}$.

Für den Zähler $\text{vol}_n(B_\infty \cap S_{reg}^\infty)$ haben wir das Volumen des Horoballsektors $B_\infty \cap R(\alpha)$ im 1-asymptotischen Orthoschem $R(\alpha)$ auszurechnen. Für das Volumen eines beliebigen n -dimensionalen Horoballsektors $Q \subset B_\infty$ gilt (siehe [3, (3), p. 113]):

$$\text{vol}_n(Q) = \frac{1}{n-1} \text{vol}_{n-1}(Q \cap \partial B_\infty) \quad . \quad (1.4.11)$$

In (1.4.11) bezeichnet $\text{vol}_{n-1}(Q \cap \partial B_\infty)$ das euklidische Mass der horosphärischen Oberfläche $Q \cap \partial B_\infty$ von Q (vgl. Figur 1.4.2).



Figur 1.4.2

Für den Horoballanteil $B_\infty \cap R(\alpha)$ im Orthoschem $R(\alpha) = P_0 \cdots P_n$ mit $P_0 \in \partial H^n$ ergibt sich somit

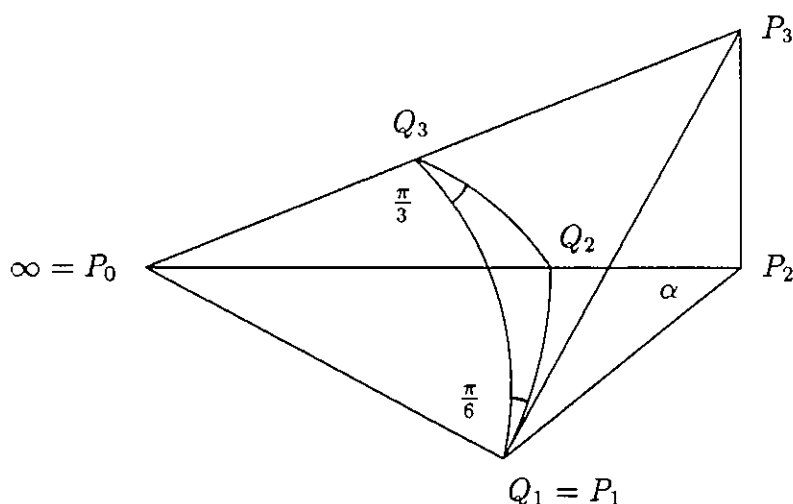
$$\text{vol}_n(B_\infty \cap R(\alpha)) = \frac{1}{n-1} \text{vol}_{n-1}(\partial B_\infty \cap R(\alpha)) = \frac{1}{n-1} \text{vol}_{n-1}(R_0(\alpha)) \quad ,$$

wobei $R_0(\alpha) := R_{P_0}(\alpha)$ mit parabolischem Schema

$$\Sigma(R_0(\alpha)) \quad : \quad \circ \overset{\alpha}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ$$

vom Rang $n - 1$ das euklidische $(n - 1)$ -dimensionale Auffangorthoschem von $R(\alpha)$ zur Ecke P_0 ist, welches von ∂B_∞ in $R(\alpha)$ erzeugt wird. Es seien $Q_1 := P_1$ und $Q_i := P_0 P_i \cap \partial B_\infty$, $i = 2, \dots, n$, die Eckpunkte von $R_0(\alpha)$ (vgl. Figur 1.4.3). Das Volumen $\text{vol}_{n-1}(R_0(\alpha))$ lässt sich mittels der Kantenlängen $q_i := Q_i Q_{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$, wie folgt schreiben (vgl. Beweis von Lemma 1.4.4):

$$\text{vol}_{n-1}(R_0(\alpha)) = \frac{1}{(n - 1)!} q_1 \cdots q_{n-1} \quad . \quad (1.4.12)$$



Figur 1.4.3

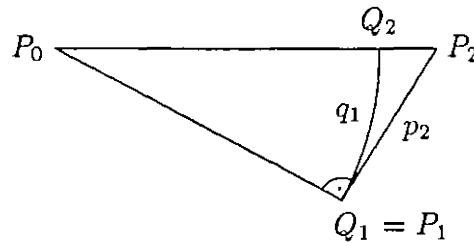
Weiter ist jede der Kanten $p_k := P_{k-1}P_k$, $k = 2, \dots, n$, Inkugelradius ρ_k eines k -dimensionalen idealen regulären Simplexes $S_{reg}^\infty(2\alpha_k) \subset \overline{H}^k$ mit Keilwinkel $\cos(2\alpha_k) = \frac{1}{k-1}$, welches wiederum als k -dimensionale Seite von $S_{reg}^\infty(2\alpha)$ angesehen werden kann. Es gilt [46, Lemma 1, p. 4]:

$$\cosh \rho_k = \sqrt{\frac{2l}{k+1}} \cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(k+1)}} \quad ,$$

und deshalb

$$\tanh p_k = \tanh \rho_k = \frac{1}{k} \quad \text{für } k \geq 2 \quad . \quad (1.4.13)$$

Als nächstes betrachten wir die Dreiecksseite $P_0P_1P_2$ in $R(\alpha)$ mit dem einbeschriebenen Horozykelbogen $q_1 = Q_1Q_2$ (vgl. Figur 1.4.4):



Figur 1.4.4

Ein Lemma der hyperbolischen Trigonometrie (siehe [18, §4, p. 268]) besagt, dass $\tanh(p_2) = q_1$. Zusammen mit (1.4.13) folgt daraus, dass $q_1 = \frac{1}{2}$. Für die verbleibenden Kantenlängen q_k , $k \geq 2$, von $R_0(\alpha)$ gilt:

$$\tan \alpha_{k+1} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = \frac{q_k}{q_{k-1}} \quad \text{für } k = 2, \dots, n-1 \quad (1.4.14)$$

Denn im Orthoschem $R_0(\alpha) = Q_1 \cdots Q_n \subset E^{n-1}$ ist der Winkel im Dreieck $Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n$ mit Katheten q_{n-2}, q_{n-1} zum Scheitel Q_{n-2} gleich $\alpha = \alpha_n$, das heisst, $\tan \alpha_n = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$. Dies folgt deduktiv für jedes euklidische (Seiten-)Orthoschem $R_0(\alpha_k) = Q_1 \cdots Q_k \subset E^{k-1}$ in $R_0(\alpha)$, welches selbst als Eckenfigur zum charakteristischen Orthoschem $R(\alpha_k) = P_0P_1 \cdots P_k$ von $S_{reg}^\infty(2\alpha_k) \subset \overline{H^k}$ angesehen werden kann. Schliesslich gilt aufgrund von $q_1 = \frac{1}{2}$, (1.4.12) und (1.4.14):

$$\begin{aligned} (n-1)! \operatorname{vol}_{n-1}(R_0(\alpha)) &= q_1 \cdots q_{n-1} = q_1^{n-1} \cdot \frac{q_2^{n-2}}{q_1^{n-2}} \cdots \frac{q_{n-2}^2}{q_{n-3}^2} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tan^{n-2} \alpha_3 \cdots \tan^2 \alpha_{n-1} \cdot \tan \alpha_n \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{n-k}{2}} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\operatorname{vol}_n(B_\infty \cap R(\alpha)) = \frac{1}{n-1} \operatorname{vol}_{n-1}(R_0(\alpha))$ ist der Satz somit vollständig bewiesen.

Q.E.D.

Einige Werte für die Grenzdichte $d_n(\infty)$ haben wir in Tafel 1.4.4 tabelliert (vgl. auch (1.4.10)):

n	$d_n(\infty) \simeq$
2	0.95493
3	0.85328
4	0.73046
5	0.60695
6	0.49339
7	0.39441
8	0.31114
9	0.24285
10	0.18789

Tafel 1.4.4. Die simpliziale Grenzdichte für Horoballpackungen des \overline{H}^n

Auffällig in Tafel 1.4.4 ist, dass die Werte der Grenzdichte $d_n(\infty)$ mit wachsendem n abnehmen. In der Tat gilt folgende Ungleichung (vgl. auch Lemma 1.4.3):

LEMMA 1.4.2 [46, Lemma 3].

Für $0 < r \leq \infty$ gilt $d_n(r) < d_{n-1}(r)$.

Bemerkung.

(b) Das Abfallen der simplizialen Dichtewerte $d_n(r)$ mit ansteigender Dimension n nach Lemma 1.4.2 gilt auch für den Grenzfall d_n der euklidischen Dichtefunktion, das heisst, $d_n < d_{n-1}$ (vgl. Lemma 1.4.1 und Tafel 1.4.3). Dies folgt entweder durch die Limesbetrachtung $d_n = \lim_{r \rightarrow 0} d_n(r)$ oder durch wörtliche Übertragung des Beweises von [46, Lemma 3] von H^n auf E^n .

(II) Eine *Hyperballpackung* $BH(r)$ vom Radius $r \geq 0$ ist eine Lagerung von sich nicht schneidenden Hyperbällen BH_i , $i \in I$, in H^n , sodass $H := \bigcap_{i \in I} H_i^+$ nicht leer ist und eine offene Menge von H^n enthält (siehe [59, §3, p. 621]). Wir sagen, dass $\{BH_i\}_{i \in I}$ einen *r-Kragen* oder eine *r-Packung* von H bildet. Die *Dirichlet-Voronoi'sche Zelle* D_i zum Hyperball BH_i der Packung $BH(r)$ von H ist gegeben durch

$$D_i = D(BH_i, BH(r)) := \{p \in H \mid \text{dist}(p, H_i) \leq \text{dist}(p, H_j), \forall j \in I, j \neq i\}.$$

D_i ist ein konvexes und im allgemeinen unendliches Polyeder in \overline{H}^n (vgl. §1.2.1). Unter den $(n-1)$ -dimensionalen Seiten (oder *Fazetten*) F von $D_i \subset H$ ist die Seite $F_i := D_i \cap H_i =$

$H \cap H_i$ ausgezeichnet; F_i heisst *Polseite* von D_i zum ultra-unendlichen Pol $p_i = \text{Pol}(H_i)$ der Hyperebene H_i .

Es sei $F \neq F_i$ eine beliebige Fazette von D_i und $K_i(F) := \text{Kegel}_{p_i}(F) \cap D_i$ der abgestumpfte polyhedrale Kegel mit Spitze p_i aufgespannt von F , welcher unendliches Volumen haben kann. Es gilt:

$$D_i = \bigcup_{\substack{F \text{ Fazette von } D_i \\ F \neq F_i}} K_i(F) .$$

Zur Hyperballpackung $\mathcal{B}H(r)$ wird kann auch ein lokaler Dichtebegriff eingeführt werden (siehe [59, p. 616]): Dazu ordnen wir einer beliebigen Menge $X \subset H^n$ von endlichem Volumen und einer Hyperebene Y in H^n die Zahl

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{vol}_n(X)}{\text{vol}_{n-1}(X \cap Y)}$$

zu.

Ist D_i die Dirichlet-Voronoi'sche Zelle zur Hyperkugel BH_i der Packung $\mathcal{B}H(r)$, sodass für eine Fazette F von D_i der Kegel $K_i(F)$ von endlichem Volumen ist, so heisst $\rho(K_i(F), H_i)$ die *lokale Hyperdichte von $K_i(F)$ relativ zu H_i in D_i* .

Die *simpliziale Hyperdichte* $\rho_n(r)$ ist definiert als die Hyperdichte eines abgestumpften regulären Simplexes $T_{reg}(2r) \subset H^n$ mit ultra-unendlichen Eckpunkten p_0, \dots, p_n und abgestumpften Kanten der Länge $2r$ zwischen den Polarebenen Pol_{p_i} (vgl. §1.2.4), das heisst,

$$\begin{aligned} \rho_n(r) &= \frac{\text{vol}_n(T_{reg}(2r))}{\text{vol}_{n-1}(T_{reg}(2r) \cap \bigcup_{i=0}^n \text{Pol}_{p_i})} = \frac{\text{vol}_n(T_{reg}(2r))}{(n+1)\text{vol}_{n-1}(S_{reg}(2\alpha))} \\ &= \frac{\text{vol}_n(R_1(\alpha))}{\text{vol}_{n-1}(R(\alpha))} = \frac{\text{vol}_n(\text{o} \overset{\alpha}{\text{---}} \text{o} \text{---} \text{o} \text{---} \dots \text{---} \text{o} \text{---} \text{o} \dots \text{o})}{\text{vol}_{n-1}(\text{o} \overset{\alpha}{\text{---}} \text{o} \text{---} \text{o} \text{---} \dots \text{---} \text{o} \text{---} \text{o})} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Jede Polarfazette $T_{reg}(2r) \cap \text{Pol}_{p_i}$ von $T_{reg}(2r)$ mit Keilwinkel 2α ist ein reguläres Simplex $S_{reg}(2\alpha) \subset H^{n-1}$ mit Kantenlänge $2l$ gegeben durch (vgl. (1.2.8))

$$\cosh(2l) = \frac{\cos(2\alpha)}{1 - (n-2)\cos(2\alpha)} .$$

Mit den Regeln der hyperbolischen Trigonometrie ergibt sich daraus folgende Relation zwischen den Kantenlängen $2r$ und dem Keilwinkel 2α von $T_{reg}(2r)$:

$$\frac{1}{n-1} \leq \cos(2\alpha) = \frac{\cosh(2r)}{(n-1)\cosh(2r) - 1} \leq \frac{1}{n-2} , \quad (1.4.16)$$

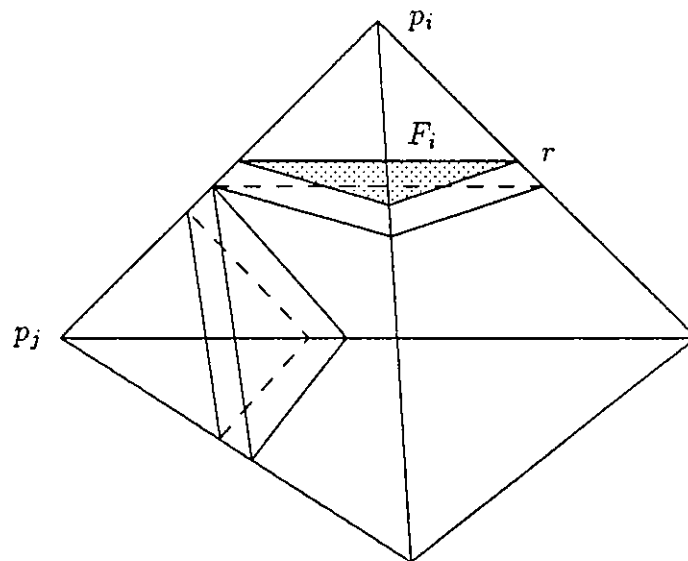
wobei das Gleichheitszeichen auf der linken (bzw. rechten) Seite in (1.4.16) im asymptotischen Grenzfall $r = \infty$ (bzw. $r = 0$) auftritt.

Die simpliziale Hyperdichte $\rho_n(r)$ wird von der Hyperballpackung $\mathcal{B}H(r)$ bestehend aus $n+1$ sich gegenseitig berührenden Hyperbällen BH_i , $i = 0, \dots, n$, in H^n realisiert. Denn

$H = \bigcap_{i=0}^n H_i^+$ ist ein abgestumpftes reguläres Simplex $T_{reg}(2r) \subset H^n$ der Kantenlänge $2r$ mit r -Kragen $\bigcup_{i=0}^n BH_i$, sodass

$$\rho(T_{reg}(2r), \bigcup_{i=0}^n F_i) = \rho_n(r) \quad ,$$

wobei F_i die Polseite von $T_{reg}(2r)$ zur ultra-unendlichen Ecke p_i bezeichnet (vgl. Figur 1.4.5 für eine Andeutung der Situation).



Figur 1.4.5

Wie bei gewöhnlichen Kugelpackungen kann die lokale Hyperdichte einer Packung $\mathcal{B}H(r)$ durch die simpliziale Hyperdichte $\rho_n(r)$ abgeschätzt werden (vgl. Satz 1.4.1 und Satz 1.4.2). Die Beweismethode von Böröczky lässt sich entsprechend anpassen und führt zu folgender Aussage:

SATZ 1.4.4 (Y. Miyamoto; [59, Lemma 3.2]).

Ist $\mathcal{B}H(r)$ eine Hyperballpackung von $H = \bigcap_{i \in I} H_i^+ \subset H^n$, und bezeichnet D_i die Dirichlet-Voronoi'sche Zelle zur Hyperkugel $BH_i(r)$ mit Polseite F_i , so gilt für jeden Fazettenkegel $K_i(F)$, $F \neq F_i$, in D_i mit $\text{vol}_n(K_i(F)) < \infty$ die Abschätzung

$$\rho(K_i(F), H_i) \geq \rho_n(r) \quad .$$

Bemerkung [59, Lemma 3.2].

(c) Die Ungleichung in Satz 1.4.4 ist scharf, wenn $n + 1$ der Hyperbälle $BH_i(r), i \in I$, welche zu einem gemeinsamen Eckpunkt eines Kegels $K_i(F)$ in H bestimmen, einander gegenseitig berühren.

Die simpliziale Hyperdichte $\rho_n(r)$ ist nach (1.4.15) eine mit r streng monoton wachsende Funktion (jede Polseite $S_{reg}(2\alpha) \subset H^{n-1}$ von $T_{reg}(2r)$ degeneriert für $r \rightarrow \infty$ zu einem euklidischen regulären Simplex von hyperbolischem Nullvolumen), das heisst,

$$\rho_n(r') > \rho_n(r) \geq \rho_n(0) \quad \text{für } r' > r \quad .$$

Im Grenzfall von $n + 1$ paarweise parallelen Hyperebenen H_i bilden die Hyperkugeln BH_i einen 0-Kragen im total-asymptotischen abgestumpften regulären Simplex $T_{reg}(0)$ mit Hyperdichte

$$\rho_n(0) = \frac{\text{vol}_n(T_{reg}(0))}{(n+1)\text{vol}_{n-1}(S_{reg}^\infty)} \quad , \quad n > 2 \quad .$$

Dieser Wert kann mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Volumenformeln für die zugehörigen abgestumpften charakteristischen Orthoscheme (vgl. §1.3) berechnet werden. Tabelle 1.4.5 enthält alle so berechenbare Zahlenwerte $\rho_n(0)$.

n	$\rho_n(0) \simeq$
3	0.29156
4	0.43219
5	0.54167
6	0.64652

Tafel 1.4.5. Minimale simpliziale Hyperdichten

LEMMA 1.4.3.

Für $n \geq 3$ und $0 \leq r < \infty$ gilt $\rho_{n-1}(r) < \rho_n(r)$.

Beweis: Wie im Falle gewöhnlicher Kugelpackungen (siehe [46, Lemma 3]) erfolgt der Beweis, indem $\rho_n(r)$ mit $\rho_{n-1}(r)$ vermöge eines Grenzprozesses verglichen wird. Nach Definition ist

$$\rho_n(r) = \frac{\text{vol}_n(T_{reg}(2r))}{(n+1)\text{vol}_{n-1}(S_{reg}(2\alpha))} = \frac{\text{vol}_n(R_1(\alpha))}{\text{vol}_{n-1}(R(\alpha))} \quad ,$$

wobei $R_1(\alpha) \subset H^n$ 1-abgestumpftes charakteristisches Orthoschem zu $T_{reg}(2r)$ und $R(\alpha) \subset H^{n-1}$ charakteristisches Orthoschem zu $S_{reg}(2\alpha)$ sind.

Es sei P_n das Zentrum von $T_{reg}(2r)$. Weiter schreiben wir $R_1(\alpha) = P_0 P_1 \cdots P_{n-1} P_n$, wobei P_0 der ultra-unendliche Eckpunkt von $R_1(\alpha)$ bezeichnet, welcher durch die Polarebene $\text{Pol}(P_0)$ in H^n ersetzt ist und $\text{dist}(P_1, \text{Pol}(P_0)) = r$ erfüllt. Somit können wir schreiben: $\rho_n(r) = \rho(R_1(\alpha), \text{Pol}(P_n))$.

In der Hyperdichte $\rho_{n-1}(r) = \frac{\text{vol}_{n-1}(R'_1(\alpha))}{\text{vol}_{n-2}(R'(\alpha))}$ sind die Bestandteile $R'(\alpha), R'_1(\alpha)$ Seiten von $R(\alpha), R_1(\alpha)$, also etwa $R'_1(\alpha) = P_0 \cdots P_{n-1}$.

Schliesslich bezeichne $R(Q) := P_0 \cdots P_{n-1} Q$ das Orthoschem in H^n mit Hauptecken P_0 und Q , wobei $Q \in P_{n-1} P_n$ beliebig ist. Es ist $R(P_n) = R_1(\alpha)$ und $R(P_{n-1}) = R'_1(\alpha)$. Damit kann $\rho_{n-1}(r)$ aufgefasst werden als Grenzwert

$$\rho_{n-1}(r) = \lim_{Q \rightarrow P_{n-1}} \rho(R(Q), \text{Pol}(P_0)) .$$

Da aber $\text{dist}(Q, \text{Pol}(P_0)) < \text{dist}(P_n, \text{Pol}(P_0))$ für jedes $Q \in P_{n-1} P_n$, $Q \neq P_n$, gilt nach [59, Lemma 2.1]:

$$\rho(R(Q), \text{Pol}(P_0)) < \rho(R(P_n), \text{Pol}(P_0)) ,$$

das heisst, $\rho_{n-1}(r) < \rho_n(r)$.

Q.E.D.

2. Diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien

2.0. Einleitung

Für das Studium von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten sind diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien von grosser Bedeutung und Kenntnisse ihrer geometrischen Eigenschaften unerlässlich.

Im ersten Teil dieses Kapitels (vgl. §2.1) wird die Isometriegruppe $I(H^n)$ des hyperbolischen Raums H^n mit einer Untergruppe der allgemeinen Gruppe $GM(\hat{E}^n)$ der Möbiustransformationen von $\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$ identifiziert und beschrieben. Entsprechend dem Fixpunktverhalten erhält man eine Einteilung der Elemente von $I(H^n)$ in drei Klassen und darin enthaltene Untergruppen vom elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Typ. Elementare diskrete Gruppen von einem festen Typ können schliesslich algebraisch-geometrisch charakterisiert werden.

In Abschnitt 2.2 wird die Geometrie von diskreten Gruppen von Isometrien eines Raums X konstanter Krümmung untersucht. Jede dieser Gruppen besitzt einen Fundamentalbereich in X in der Form eines Dirichlet-Polyeders, was insbesondere im Zusammenhang mit Packungsproblemen von Bedeutung ist (vgl. §1.4).

Wir sind vor allem an hyperbolischen und euklidischen Bewegungsgruppen interessiert. Kristallographische euklidische Bewegungsgruppen sind durch die Bieberbachschen Sätze charakterisiert. Diese bilden den Ausgangspunkt für das Klassifikationsproblem kompakter euklidischer Raumformen, welches für die Dimensionen ≤ 4 vollständig gelöst ist.

Darauf aufbauend kann die Geometrie diskreter, torsionsfreier Untergruppen $\Gamma \subset I(H^n)$ von endlichem Volumen beschrieben werden. Diese besitzen ein konvexes Fundamentaltpolytop mit höchstens endlich vielen Spitzen im Unendlichen und sind somit geometrisch endlich. Fundamental für die Strukturtheorie hyperbolischer Raumformen ist das Lemma von Margulis, welches diskrete Untergruppen von $I(H^n)$ mit beschränkter Auswirkung gegenüber der Identität charakterisiert; der Masstab wird von der Margulis-Konstanten gesetzt.

Im Schlussteil wird die Operation parabolischer Elemente in Γ auf Horobälle untersucht (vgl. §2.3). Dazu machen wir Gebrauch von der Beschreibung von $I^+(H^n)$ orientierungserhaltender Isometrien als Clifford-Matrizen, welche auf L. Ahlfors zurückgeht. Von diesem Standpunkt aus kann nach Ergebnissen von S. Hersonsky und P. Waterman die Jørgensensche Ungleichung für $PSL(2, \mathbb{C})$ auf $I^+(H^n)$, $n > 3$, ausgedehnt werden. Zu parabolischen Elementen von Γ lassen sich damit ausgezeichnete Horobälle konstruieren, die paarweise disjunkt und exakt invariant sind. Als solche liefern sie im Quotienten H^n/Γ einbettbare Spitzenumgebungen und werden bei der Grössenabschätzung nichtkompakter hyperbolischer Raumformen von endlichem Volumen wertvolle Dienste leisten.

2.1. Möbiustransformationen in n Dimensionen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe und Eigenschaften von Möbiustransformationen zusammengestellt. Für weitere Einzelheiten und Beweise sei auf [5, Chapter 3], [50] und insbesondere auf die neuere Darstellung [61, Chapter 4,5,12] verwiesen.

2.1.1. *Möbiustransformationen von \hat{E}^n .* Es sei E^n der n -dimensionale euklidische Raum mit Abstand $\text{dist}(x, y) = |x - y|$. Bekanntlich ist jede längentreue Selbstabbildung oder Isometrie von E^n eine Komposition von höchstens $n + 1$ Spiegelungen an Hyperebenen in E^n . Es bezeichne $\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von E^n . Unter einer *Sphäre* Σ in \hat{E}^n verstehen wir künftig entweder eine euklidische Sphäre

$$S(a, r) = \{x \in E^n \mid |x - a| = r\}$$

oder eine erweiterte Hyperebene

$$\hat{P}(a, t) = P(a, t) \cup \{\infty\} = \{x \in E^n \mid (a, x)_{E^n} = t\} \cup \{\infty\} .$$

Eine *Möbiustransformation* von \hat{E}^n ist eine Komposition von endlich vielen Spiegelungen an Sphären in \hat{E}^n . Möbiustransformationen sind Homöomorphismen von \hat{E}^n und bilden eine topologische Gruppe, die *allgemeine Möbiusgruppe* $GM(\hat{E}^n)$. $GM(\hat{E}^n)$ enthält die Gruppen $I(E^n)$ und $S(E^n)$ der euklidischen Isometrien und der euklidischen Ähnlichkeiten. Die *Möbiusgruppe* $M(\hat{E}^n)$ von E^n ist die Untergruppe von $GM(\hat{E}^n)$, welche aus den *orientierungserhaltenden* Möbiustransformationen besteht (man beachte, dass jede Spiegelung konform und orientierungsumkehrend wirkt).

Eine Abbildung $\varphi : \hat{E}^n \rightarrow \hat{E}^n$ ist genau dann eine Möbiustransformation, wenn φ Doppelverhältnisse invariant lässt; φ operiert dreifach transitiv auf \hat{E}^n . Ist $\varphi \in GM(\hat{E}^n)$ beliebig, so ist das Bild $\varphi(\Sigma)$ jeder Sphäre Σ wieder eine Sphäre. Gilt zudem $\varphi(x) = x$ für jedes $x \in \Sigma$, so ist φ entweder gleich $\text{id}_{\hat{E}^n}$ oder gleich der Spiegelung an Σ .

Zu $\varphi \in GM(\hat{E}^n)$ gehört eine gewisse invariante Sphäre: Es sei $\varphi(\infty) \neq \infty$ und $a := \varphi^{-1}(\infty)$. Ist σ die Spiegelung an der Sphäre $S(a, r)$, $r > 0$, in E^n , so ist $\varphi \circ \sigma(\infty) = \infty$ und deshalb $\varphi \circ \sigma \in S(E^n)$. Als euklidische Ähnlichkeit impliziert $\varphi \circ \sigma$ mit $\sigma^2 = \text{id}_{E^n}$ folgende Darstellung (siehe [61, Theorem 1.3.6]):

$$\varphi(x) = b + k \cdot A\sigma(x) \quad \text{für } b \in E^n, k > 0 \text{ und } A \in O(E^n) \quad . \quad (2.1.1)$$

Da (siehe [61, Theorem 4.1.3 (3)])

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2 |x - y|}{|x - a| \cdot |y - a|} ,$$

ergibt (2.1.1):

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{kr^2 |x - y|}{|x - a| \cdot |y - a|} \quad . \quad (2.1.2)$$

Dies bedeutet, dass φ als Isometrie auf $S(a, r\sqrt{k})$ operiert. $S(a, r\sqrt{k})$ ist durch diese Eigenschaft unter den Sphären mit Zentrum a in E^n eindeutig bestimmt und heisst die *isometrische Sphäre* von φ .

2.1.2. *Möbiustransformationen von E_+^n und B^n .* Es bezeichne $E_+^n = \{x \in E^n \mid x_n > 0\}$ den oberen Halbraum von E^n . Ist $\varphi \in GM(\hat{E}^{n-1})$, so kann φ auf \hat{E}^n fortgesetzt werden: Dazu identifiziere man $x \in E^{n-1}$ mit $\tilde{x} = (x, 0) \in E^{n-1} \times \{0\} \subset E^n$. Ist nun σ die Spiegelung an $S(a, r)$ beziehungsweise an $\hat{P}(a, t)$ in \hat{E}^{n-1} , so ist die Erweiterung $\tilde{\sigma}$ von σ gegeben durch die Spiegelung an $S(\tilde{a}, r)$ beziehungsweise an $\hat{P}(\tilde{a}, t)$ in \hat{E}^n . Also ist $\tilde{\sigma}(x, 0) = (\sigma(x), 0)$ für $x \in E^{n-1}$. Weiter folgt, dass $\tilde{\sigma}(\hat{E}^{n-1}) = \hat{E}^{n-1}$ und $\tilde{\sigma}(E_+^n) = E_+^n$. Für beliebige Möbiustransformationen $\varphi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m$ wird die Erweiterung komponentenweise durch $\tilde{\varphi} = \tilde{\sigma}_1 \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_m$ definiert. Dann ist $\tilde{\varphi} \in GM(\hat{E}^n)$ und durch φ eindeutig bestimmt; $\tilde{\varphi}$ heisst die *Poincaré-Erweiterung* von φ . Nach Konstruktion gilt $\tilde{\varphi}(E_+^n) = E_+^n$. Umgekehrt tritt jede Transformation $\psi \in GM(\hat{E}^n)$ mit $\psi(E_+^n) = E_+^n$ als Poincaré-Erweiterung $\psi = \tilde{\varphi}$ eines $\varphi \in GM(\hat{E}^{n-1})$ auf.

Die Menge aller Möbiustransformationen $\psi \in GM(\hat{E}^n)$ mit $\psi(E_+^n) = E_+^n$ bildet eine Untergruppe $GM(E_+^n)$ von $GM(\hat{E}^n)$, die zu $GM(\hat{E}^{n-1})$ isomorph ist. Elemente $\psi \in GM(\hat{E}^n)$ mit $\psi(\infty) = \infty$ sind wie bereits erwähnt Ähnlichkeiten von E^n ; ist hingegen $\psi(\infty) \neq \infty$, so ist die isometrische Sphäre Σ von ψ orthogonal zu E^{n-1} . Weiter ist jede Möbiustransformation $\psi \in GM(E_+^n)$ die Komposition von Spiegelungen an Sphären in \hat{E}^n orthogonal zu E^{n-1} . Schliesslich gilt, dass jedes Element $\psi \in GM(\hat{E}^n)$ als Poincaré-Erweiterung $\psi = \tilde{\varphi}$ von $\varphi \in GM(\hat{E}^{n-1})$ eine *Isometrie* ist des hyperbolischen Raums H^n realisiert im oberen Halbraummodell E_+^n mit der Metrik $ds = \frac{|dx|}{x_n}$. Denn die Spiegelung $\tilde{\sigma}$ an einer Sphäre $S(\tilde{a}, r)$, $a \in E^{n-1}$, gegeben durch

$$\tilde{\sigma}(x) = \tilde{a} + \frac{r^2}{|x - \tilde{a}|^2} (x - \tilde{a}) \quad , \quad (2.1.3)$$

weist als n -te Komponente den Ausdruck $[\tilde{\sigma}(x)]_n = 0 + \frac{r^2 \cdot x_n}{|x - \tilde{a}|^2}$ auf und lässt somit $\frac{|y-x|^2}{y_n x_n}$ invariant (vgl. (1.1.3) und (2.1.2)); die Spiegelung $\tilde{\sigma}$ an einer Ebene $\hat{P}(\tilde{a}, t)$, $a \in E^{n-1}$, gegeben durch

$$\tilde{\sigma}(x) = x - 2 \frac{(x, \tilde{a}) - t}{|\tilde{a}|^2} \tilde{a} \quad , \quad (2.1.4)$$

ist eine euklidische Isometrie mit $[\tilde{\sigma}(x)]_n = x_n$ und lässt $\frac{|y-x|^2}{y_n x_n}$ ebenfalls invariant. Es bestehen somit folgende Isomorphismen topologischer Gruppen:

$$I(H^n) = GM(E_+^n) = GM(\hat{E}^{n-1}) \quad , \quad (2.1.5)$$

und bei Berücksichtigung der Orientierung:

$$I^+(H^n) = M(E_+^n) = M(\hat{E}^{n-1}) \quad . \quad (2.1.6)$$

Beim Übergang zu anderen Modellen für den hyperbolischen Raum H^n transformiert sich die Gruppe $GM(\hat{E}^{n-1})$ durch Konjugation. Durch stereographische Projektion π von \hat{E}^{n-1} auf $S^{n-1} \subset \hat{E}^n$ gefolgt von der Spiegelung σ_0 an $\{x_n = 0\}$ geht das obere Halbraummodell in das konforme Ballmodell für H^n über (vgl. §1.1.3 und [61, p. 136 und p. 138]). Eine Isometrie $\varphi \in GM(E_+^n)$ von E_+^n mit der Metrik $ds = \frac{|dx|}{x_n}$ transformiert sich gemäss

$$p \circ \varphi \circ p^{-1} \quad , \quad \text{wobei} \quad p := \pi \circ \sigma_0 \quad ,$$

zu einer Isometrie von B^n versehen mit der Metrik $ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$ (vgl. §1.1.3). Da π gleich der Spiegelung an der Sphäre $S((1, 0, \dots, 0), \sqrt{2})$ in \hat{E}^n ist (siehe [61, p. 136]), gilt $p \circ \varphi \circ p^{-1} \in GM(\hat{E}^n)$. Somit ist

$$I(H^n) = GM(B^n) := \{ \varphi \in GM(\hat{E}^n) \mid \varphi(B^n) = B^n \} \quad , \quad (2.1.7)$$

das heisst, $GM(\hat{E}^{n-1})$ ist in $GM(\hat{E}^n)$ zu $GM(B^n)$ konjugiert.

Im Vektorraum- oder Hyperboloidmodell $H^n = \{x \in E^{1,n} \mid (x, x)_{E^{1,n}} = -1, x_0 > 0\}$ ist die Isometriegruppe $I(H^n)$ identisch mit der Untergruppe

$$O^+(1, n) := \{A \in \text{Mat}(n+1) \mid (Ax, Ax)_{E^{1,n}} = (x, x)_{E^{1,n}} \text{ , } [A]_{00} > 0\}$$

der Gruppe $\text{Mat}(n+1)$ aller reellen $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen (siehe [50, §1]).

Von Interesse ist die Wirkung einer Isometrie von H^n auf *Horobällen* (vgl. §1.4.3).

SATZ 2.1.1 (S. Hersonsky; [36, Proposition 2.1]).

Es sei $\varphi \in GM(\hat{E}^{n-1})$ eine Möbiustransformation mit $\varphi(\infty) \neq \infty$, isometrischer Sphäre $S(a, r)$ und Poincaré-Erweiterung $\tilde{\varphi}$. Es bezeichne $B_\infty(r) = \{x \in H^n \mid x_n > r\}$, $r > 0$, ein Horoball zum Zentrum ∞ . Dann gilt:

- (1) $\forall x \in H^n : \quad |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(\infty)| \cdot |x - \tilde{\varphi}^{-1}(\infty)| = r^2 \quad .$
- (2) $\forall x \in B_\infty(r) : \quad |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(\infty)| < r \quad .$
- (3) $\tilde{\varphi}(B_\infty(r)) \cap B_\infty(r) = \emptyset \quad .$

Beweis: Da $\varphi(\infty) \neq \infty$, gibt es eine eindeutig bestimmte Spiegelung σ an der Sphäre $S(a, r)$, $a = \varphi^{-1}(\infty)$, zu φ und eine eindeutig bestimmte euklidische Isometrie $\psi \in I(E^{n-1})$ mit $\varphi = \psi \circ \sigma$ (siehe [61, Theorem 4.3.3]). Es gilt $\sigma(a) = \sigma^{-1}(a) = \infty$.

Die Poincaré-Erweiterung $\tilde{\sigma}$ ist eine Inversion an der Sphäre $S(\tilde{a}, r)$, wobei $\tilde{a} = (a, 0) \in E^n$, und die Poincaré-Erweiterung $\tilde{\psi}$ ist ein Element von $I(E^n)$ mit $\tilde{\psi}(\infty) = \infty$. Mit diesen Vorbereitungen gilt:

Ad (1): Ist $x \in H^n$, so ist

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(\infty)| \cdot |x - \tilde{\varphi}^{-1}(\infty)| &= |\tilde{\psi} \circ \tilde{\sigma}(x) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\sigma}(\infty)| \cdot |x - \tilde{\sigma}^{-1} \circ \tilde{\psi}^{-1}(\infty)| \\ &= |\tilde{\sigma}(x) - \tilde{\sigma}(\infty)| \cdot |x - \tilde{\sigma}^{-1}(\infty)| \text{ , und mit (2.1.3) ,} \\ &= |\tilde{\sigma}(x) - \tilde{a}| \cdot |x - \tilde{a}| \\ &= r^2 \quad . \end{aligned}$$

Ad (2): Ist $x \in B_\infty(r)$, so ist $|x - \tilde{a}| > r$, da $\tilde{a} = (a, 0) \in \{x \in E^n \mid x_n = 0\}$. Nach (1) folgt:

$$|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(\infty)| = \frac{r^2}{|x - \tilde{a}|} < r .$$

Ad (3): Da $\varphi(\infty) \neq \infty$, ist $\tilde{\varphi}(B_\infty(r))$ ein Horoball in E_+^n tangential an $\{x_n = 0\}$ im Punkt $\tilde{\varphi}(\infty)$. Nach (2) ist $|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(\infty)| < r$ für alle $x \in B_\infty(r)$, und somit folgt $\tilde{\varphi}(B_\infty(r)) \cap B_\infty(r) = \emptyset$.

Q.E.D.

2.1.3. *Die Klassifikation der Möbiustransformationen.* Eine Möbiustransformation des oberen Halbraums $E_+^n \subset \hat{E}^n$ besitzt nach dem Satz von Brouwer stets einen Fixpunkt in \hat{E}^n . In Abhängigkeit der Fixpunkte kann eine Klassifikation der Möbiustransformationen und der hyperbolischen Isometrien vorgenommen werden.

Es sei $\varphi \in GM(E_+^n) = GM(\hat{E}^{n-1})$, $\varphi \neq \text{id}_{E_+^n}$.

- (i) φ heisst *elliptisch*, falls φ einen Fixpunkt in E_+^n besitzt.
- (ii) φ heisst *parabolisch*, falls φ genau einen Fixpunkt in \hat{E}^{n-1} besitzt.
- (iii) φ heisst *loxodromisch*, falls φ genau zwei Fixpunkte in \hat{E}^{n-1} besitzt.

Man beachte, dass die Eigenschaften (i) bis (iii) nur von der Konjugationsklasse von φ in $GM(E_+^n)$ abhängen.

Im hyperbolischen Raum H^n lässt sich der Charakter einer Möbiustransformation φ geometrisch deuten. Dazu machen wir von den Identifikationen $I(H^n) = GM(E_+^n) = GM(\hat{E}^{n-1}) = GM(S^{n-1}) = GM(B^n)$ Gebrauch (vgl. (2.1.5) und (2.1.7)).

Ist $\varphi \in GM(B^n)$ elliptisch mit Fixpunkt $p \in B^n$, so ist φ konjugiert zu einer orthogonalen Transformation $A \in O(n)$ von E^n (siehe [61, Theorem 4.7.1]). Es bezeichne \mathcal{P}_p das Bündel aller hyperbolischen Geodätischen durch p . Das Komplement \mathcal{C}_p bestehend aus den orthogonalen Trajektorien von \mathcal{P}_p wird von den $(n-1)$ -dimensionalen (euklidischen) Sphären um p gebildet (vgl. §1.4.3). Die Transformation φ lässt \mathcal{C}_p invariant und operiert als Isometrie auf jeder Sphäre $S(p, r)$, $r > 0$, von \mathcal{C}_p bezüglich der intrinsisch sphärischen Metrik.

Ist $\varphi \in GM(E_+^n)$ parabolisch, so ist φ konjugiert zur Poincaré-Erweiterung einer fixpunkt-freien Isometrie von E^{n-1} (siehe [61, Theorem 4.7.2]). φ ist eine *parabolische Translation*, falls φ modulo Konjugation von der Gestalt $x \mapsto x+a$, $a \in E^n$, ist. Zu $\varphi \in GM(E_+^n)$ mit Fixpunkt $p \in \hat{E}^{n-1}$ gehört das Bündel \mathcal{P}_p aller (asymptotisch) parallelen Geodätischen zum Fernpunkt p in H^n . φ lässt das Komplement \mathcal{C}_p der Horosphären mit Zentrum p in E_+^n invariant und wirkt als Isometrie auf jeder Horosphäre $S_\infty(p)$ von \mathcal{C}_p bezüglich der intrinsisch euklidischen Metrik.

Schliesslich sei $\varphi \in GM(E_+^n)$ loxodromisch. φ ist konjugiert zu einer Transformation $x \mapsto r \cdot Ax$ mit $r > 0$, $r \neq 1$, und $A \in O(n)$ (siehe [61, p. 144]). Ist $A = I$ die Einheitsmatrix,

so wird φ *hyperbolische Transformation* genannt. Es seien nun $p, q \in \hat{E}^{n-1}$ die Fixpunkte von φ und g die hyperbolische Gerade mit Endpunkten p, q . g heisst die *Achse* von φ und ist als φ -invariante Geodätische eindeutig bestimmt. φ wirkt als Drehverschiebung entlang g , sodass etwa $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^k(x)$ für $x \neq q$ *anziehender* Fixpunkt und q *abstossender* Fixpunkt von φ ist. Die *Verschiebungslänge* l_φ von φ ist gegeben durch $l_\varphi = \text{dist}(x, \varphi x) > 0$ und ist von $x \in E_+^n$ unabhängig.

Legen wir H^n das projektive Ballmodell $(B^n, \text{dist}_{proj})$ zugrunde, so bestimmen die Fixpunkte $p, q \in S^{n-1}$ eine projektive Gerade \hat{g} in P^n . Zu \hat{g} gehört der Pol $P := \text{Pol}(\hat{g})$ im Aussenraum von H^n , welcher in der von p, q und dem Kugelzentrum $0 \in B^n$ aufgespannten Ebene $H \subset P^n$ liegt (vgl. §1.1.2). Es sei \mathcal{P}_P das Büschel der projektiven Geraden in P^n durch P . Ist \mathcal{C}_P das Komplement von \mathcal{P}_P , so besteht $\mathcal{C}_P \cap H \cap H^n$ aus äquidistanten Kurven oder Hyperzyklen (vgl. §1.4.3) und enthält die Achse g als gemeinsames Lot der ultra-parallelen Geraden $\mathcal{P}_P \cap H \cap H^n$ und als die eindeutig bestimmte Geodätische mit Endpunkten p, q .

2.1.4. Elementare Gruppen. Eine Untergruppe G von $GM(\hat{E}^n)$ von Möbiustransformationen, welche den Schauplatz $X^n := E_+^n$ oder B^n der hyperbolischen Geometrie invariant lässt, heisst *elementar*, falls G einen endliche Bahn $Gx = \{\varphi x \mid \varphi \in G\}$ für ein x im Abschluss $\overline{X^n}$ besitzt. Entsprechend der Einteilung von Möbiustransformationen nach Fixpunkten wird der Elementartyp von G definiert. Für den loxodromischen Fall ändern wir die Wortwahl ab, was aber keine Konfusion verursachen sollte.

- (i) G heisst vom *elliptischen Typ*, falls G eine endliche Bahn in X^n besitzt.
- (ii) G heisst vom *parabolischen Typ*, falls G einen Punkt auf $\partial X^n = \overline{X^n} - X^n$ festlässt und sonst keine endlichen Bahnen in $\overline{X^n}$ besitzt.
- (iii) G heisst vom *hyperbolischen Typ*, falls G weder elliptisch noch parabolisch ist.

Der Elementartyp von $G \subset GM(\hat{E}^n)$ hängt nur von der Konjugationsklasse von G ab. Falls G *diskret* ist (die Identität ist offen in G), kann er folgendermassen charakterisiert werden:

LEMMA 2.1.1.

Es sei G eine Untergruppe von $GM(\hat{E}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (E1) G ist *diskret, elementar und vom elliptischen Typ*.
- (E2) G ist *endlich*.
- (E3) G ist *konjugiert zu einer endlichen Untergruppe von $O(n)$* .

Für Gruppen mit parabolischen und loxodromischen Elementen wählen wir das obere Halbraummodell $X^n = E_+^n$. Sind nun $\varphi, \psi \in GM(E_+^n)$ derart, dass φ loxodromisch ist und mit ψ genau einen Fixpunkt gemeinsam hat, so ist die von φ und ψ erzeugte Untergruppe $\langle \varphi, \psi \rangle$ von $GM(E_+^n)$ nicht diskret. Damit ergibt sich folgende Charakterisierung von Gruppen vom parabolischen und hyperbolischen Typ:

LEMMA 2.1.2.

Es sei G eine Untergruppe von $GM(E_+^n)$.

- (P) G ist diskret, elementar und vom parabolischen Typ genau dann, wenn G modulo Konjugation eine unendliche diskrete Untergruppe von $I(E^{n-1})$ ist.
- (H) G ist diskret, elementar und vom hyperbolischen Typ genau dann, wenn G eine unendliche zyklische Untergruppe endlichen Indexes enthält, welche von einer loxodromischen Transformation erzeugt ist.

Schliesslich sei noch an folgende Eigenschaften von Untergruppen $G \subset GM(X^n)$ erinnert. Ist G eine diskrete Untergruppe von $GM(B^n)$ bestehend aus lauter elliptischen Transformationen, so ist G endlich; besteht G aus lauter parabolischen Transformationen, so ist G elementar. Ist G also diskret und nichtelementar, so besitzt G unendlich viele loxodromische Elemente, die paarweise verschiedene Fixpunkte aufweisen.

Elementare Untergruppen $G \subset GM(B^n)$ können auch rein algebraisch charakterisiert werden. Beispielsweise ist G elementar, falls G auflösbar oder abelsch ist. Tatsächlich ist G genau dann elementar, wenn G eine abelsche Untergruppe von endlichem Index enthält. Alle Eigenschaften übertragen sich auf die Gruppen $I(H^n)$ und $I^+(H^n)$ hyperbolischer Isometrien, deren elementare Untergruppen per definitionem durch Konjugation aus den elementaren Untergruppen von $GM(X^n)$ und $M(X^n)$ hervorgehen.

In Abhängigkeit der Häufungspunkte einer diskreten Untergruppe $\Gamma \subset GM(B^n)$ kann entschieden werden, ob Γ elementar ist. Dabei heisst ein Punkt $p \in S^{n-1}$ Häufungspunkt von Γ , falls für ein $x \in B^n$ und eine Folge $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset GM(B^n)$ gilt:

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \quad .$$

Die Grenz- oder Häufungsmenge $L(\Gamma)$ von Γ ist definiert als die Menge aller Häufungspunkte von Γ . Jeder Fixpunkt $p \in S^{n-1}$ einer parabolischen oder loxodromischen Transformation von Γ gehört zu $L(\Gamma)$. Schliesslich gilt:

LEMMA 2.1.3.

Es sei Γ eine diskrete Untergruppe von $GM(B^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Γ ist elementar.
- (2) $L(\Gamma)$ besteht aus 0, 1 oder 2 Punkten.
- (3) $L(\Gamma)$ ist endlich.

Ist $\Gamma \subset GM(B^n)$ diskret und nichtelementar, so ist die Häufungsmenge $L(\Gamma)$ perfekt (das heisst, abgeschlossen und ohne isolierte Punkte) und somit überabzählbar.

Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset GM(B^n)$ heisst von erster Art, falls $O(\Gamma) := S^{n-1} - L(\Gamma) = \emptyset$; ansonsten wird Γ von zweiter Art genannt. Nach Lemma 2.1.3 ist Γ von zweiter Art, falls Γ elementar ist.

2.2. Die Geometrie diskreter Bewegungsgruppen

Im Folgenden werden die wesentlichen geometrischen Eigenschaften diskreter Gruppen von Isometrien eines Raums konstanter Krümmung zusammengestellt. Im Zentrum steht der Fundamentalbereich einer diskreten Bewegungsgruppe und die Konstruktion eines Dirichlet-Gebiets. Den zweiten Teil bilden die Sätze von Bieberbach über kristallographische Gruppen euklidischer Bewegungen und das Lemma von Margulis über diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien.

2.2.1. Der Quotientenraum. Es bezeichne $X^n = E^n, S^n$ oder H^n . Eine Untergruppe $\Gamma \subset I(X^n)$ von Isometrien auf X^n ist genau dann diskret, wenn Γ *eigentlich diskontinuierlich* auf X^n operiert, das heisst, wenn für alle Kompakta $K \subset X^n$ die Menge $\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma(K) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Folglich ist jede Bahn $\Gamma x, x \in X^n$, lokal endlich. Somit ist Γ genau dann diskret in $I(X^n)$, wenn jede Bahn $\Gamma x, x \in X^n$, diskret in X^n ist, und die Stabilisatoruntergruppe $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ von Γ endlich ist.

Der Quotient $X^n/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X^n\}$ von X^n nach Γ ist ein metrischer Raum bezüglich der Metrik $d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = \inf\{\text{dist}(u, v) \mid u \in \Gamma x, v \in \Gamma y\}$, und die dadurch bestimmte Topologie stimmt mit der Quotiententopologie auf X^n/Γ überein. Die kanonische Projektion $\pi : X^n \rightarrow X^n/\Gamma, \pi(x) = \Gamma x$, ist offen und stetig. Operiert Γ *fixpunktfrei* auf X^n (das heisst, für alle $x \in X^n$ ist der Stabilisator Γ_x trivial), so ist π eine lokal isometrische Überlagerungsabbildung mit Deckgruppe Γ . Es sei hinzugefügt, dass Γ auf $X^n = E^n$ oder H^n genau dann fixpunktfrei operiert, wenn Γ *torsionsfrei* ist und damit keine Elemente endlicher Ordnung aufweist (siehe [61, Theorem 8.2.1]).

2.2.2. Fundamentalbereiche. Es sei Γ eine diskrete Gruppe von Isometrien auf X^n . Ein *Fundamentalbereich* G für Γ ist eine Teilmenge von X^n , sodass gilt:

- (i) G ist offen;
- (ii) $\{\gamma(\overline{G}) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ist lokal endlich;
- (iii) $X^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{G})$.

An manchen Stellen in der Literatur wird ein Fundamentalbereich als *abgeschlossene* Teilmenge von X^n definiert (siehe etwa [68]). Es besteht aber folgender Zusammenhang: Ist $F \subset X^n$ eine *Fundamentalmenge* für Γ , das heisst, ist F eine Teilmenge von X^n , welche genau einen Punkt jeder Bahn von Γ enthält, so ist eine Menge $G \subset X^n$ genau dann ein Fundamentalbereich für Γ , falls es eine Fundamentalmenge $F \subset X^n$ für Γ gibt mit $G \subset F \subset \overline{G}$ (siehe [61, Theorem 6.5.13]).

Ist $G \subset X^n$ ein Fundamentalbereich für Γ , so wird Γ von der Menge

$$S = \{\gamma \in \Gamma \mid \overline{G} \cap \gamma(\overline{G}) \neq \emptyset\}$$

erzeugt. Γ ist sicherlich endlich erzeugt, falls \overline{G} ein kompaktes Polytop in X^n ist (vgl. §1.2.1). Die Inklusionsabbildung $\overline{G} \rightarrow X^n$ induziert einen Homöomorphismus $\overline{G}/\Gamma \rightarrow$

X^n/Γ . X^n/Γ ist deshalb genau dann kompakt, wenn \overline{G}/Γ kompakt ist; in diesem Fall heisst Γ *kokompakt*.

Für einen Fundamentalbereich G von Γ ist $\gamma(\overline{G}) \cap \overline{G} \subset \partial G$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ (siehe [61, Theorem 6.5.4]). G heisst ein *eigentlicher* Fundamentalbereich für Γ , falls ∂G eine Nullmenge ist, das heisst, falls $\text{vol}_n(\overline{G}) = \text{vol}_n(G)$. Ist G ein eigentlicher Fundamentalbereich für Γ , so ist $\text{vol}_n(X^n/\Gamma) = \text{vol}_n(G)$. Daraus folgt, dass zwei verschiedene eigentliche Fundamentalbereiche G_1, G_2 von Γ gleiches Volumen haben. Ferner ist der Quotient X^n/Γ genau dann von endlichem Volumen, falls $\text{vol}_n(G) < \infty$ für einen eigentlichen Fundamentalbereich G ; Γ heisst in diesem Fall *von endlichem Kovolumen*.

Ist schliesslich $\Gamma' \subset \Gamma$ eine Untergruppe von endlichem Index m , und besitzt Γ einen Fundamentalbereich G , so ist $G' := \cup_{i=1}^m \gamma_i(G)$ ein Fundamentalbereich für Γ' , wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ Repräsentanten für die Rechtsnebenklassen von Γ' in Γ sind. Dies impliziert (siehe [68, Chapter 1, (13)])

$$\text{vol}_n(G') = [\Gamma : \Gamma'] \cdot \text{vol}_n(G) \quad . \quad (2.2.1)$$

Zu jeder diskreten Gruppe $\Gamma \subset I(X^n)$ von Isometrien auf X^n existiert ein konvexer Fundamentalbereich. Ein Beweis beruht auf der Konstruktion des *Dirichlet-Gebiets* zu Γ : Da Γ eigentlich diskontinuierlich, also abzählbar ist, existiert ein Punkt $x_0 \in X^n$ mit trivialem Stabilisator Γ_{x_0} . Für $\gamma \in \Gamma$ sei

$$H_\gamma = H_\gamma(x_0) := \{x \in X^n \mid \text{dist}(x, x_0) < \text{dist}(x, \gamma(x_0))\}$$

der offene Halbraum in X^n , welcher von der Hyperebene

$$h_\gamma = h_\gamma(x_0) := \{x \in X^n \mid \text{dist}(x, x_0) = \text{dist}(x, \gamma(x_0))\}$$

begrenzt ist. Das Dirichlet-Gebiet $D(x_0)$ zum Zentrum x_0 ist definiert als (vgl. auch §1.4.2 und §1.4.3)

$$D(x_0) := \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} H_\gamma \quad . \quad (2.2.2)$$

$D(x_0)$ ist ein konvexes Gebiet in X^n , dessen Rand $\partial D(x_0)$ eine Nullmenge ist (jede Seite $h_\gamma \cap D(x_0)$ ist eine Nullmenge, und Γ ist abzählbar). Schliesslich folgt, dass jedes Dirichlet-Gebiet $D(x_0)$ ein eigentlicher konvexer Fundamentalbereich für Γ ist. Ein *konvexes Fundamentalpolyeder* für eine diskrete Gruppe $\Gamma \subset I(X^n)$ ist ein konvexes Polyeder P (vgl. §1.2.1), dessen Inneres ein Fundamentalbereich für Γ ist. Der Abschluss $\overline{D(x)}$ jedes Dirichlet-Gebiets $D(x)$ für Γ ist ein konvexes Fundamentalpolyeder (siehe [61, Theorem 6.6.1]) und heisst *Dirichlet-Polyeder* für Γ .

2.2.3. Kristallographische Gruppen euklidischer Isometrien und die Bieberbachschen Sätze.

In diesem Abschnitt betrachten wir diskrete Isometriegruppen des euklidischen Raums E^n . Ein *Gitter* Γ ist eine Untergruppe von $I(E^n)$, welche von n linear unabhängigen Translationen von E^n erzeugt wird. Eine Untergruppe Γ von $I(E^n)$ ist somit genau dann ein Gitter, falls Γ diskret und frei abelsch vom Rang n ist.

Eine diskrete Untergruppe Γ von $I(E^n)$ heisst *kristallographisch*, falls der Quotient E^n/Γ kompakt ist. Der erste Satz von Bieberbach besagt nun (siehe beispielsweise [61, Theorem 7.4.2]):

SATZ 2.2.1 (L. Bieberbach).

Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset I(E^n)$ ist genau dann kristallographisch, falls die Untergruppe $\Lambda(\Gamma)$ aller Translationen von Γ von endlichem Index und vom Rang n ist.

L. Bieberbach bewies 1910 folgenden Satz, welcher das achtzehnte Hilbertsche Problem im positiven Sinne beantwortete (siehe auch [61, Theorem 7.4.3]):

SATZ 2.2.2 (L. Bieberbach).

Zu jedem $n \geq 1$ gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen von n -dimensionalen kristallographischen Gruppen auf E^n .

Bemerkungen.

(a) Kristallographische Gruppen sind für die Dimensionen $n \leq 4$ klassifiziert (siehe [73, §3.5] für $n = 3$ und [13] für $n = 4$); für $n = 1, 2, 3, 4$ gibt es genau 2, 17, 219, 4783 Isomorphieklassen solcher Gruppen.

(b) Ist Γ eine n -dimensionale kristallographische Gruppe und $\Lambda(\Gamma)$ die zugehörige Translationsuntergruppe vom Rang n , so geht aus dem Beweis (siehe beispielsweise [61, p. 312]) des Bieberbachschen Satzes folgende Abschätzung für den Index $[\Gamma : \Lambda(\Gamma)]$ hervor:

$$[\Gamma : \Lambda(\Gamma)] \leq 3^{n^2} \quad (2.2.3)$$

Ist Γ *torsionsfrei*, so ist E^n/Γ eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit flacher Metrik und endlicher Holonomiegruppe $\Phi := \Gamma/\Lambda(\Gamma)$ (siehe [73, §3.4]). Ist Γ darüberhinaus *orientierungserhaltend*, so liefern die Klassifikationsresultate für $n \leq 4$ präzisere Ordnungsabschätzungen für Φ . Ist Γ 2-dimensional, so ist $\Gamma = \Lambda(\Gamma)$ und E^2/Γ ein Torus (vgl. [73, Theorem 2.5.5]); daraus folgt $\text{ord}(\Phi) = 1$. Ist Γ 3-dimensional, so ist $\text{ord}(\Phi) \leq 6$ (siehe [73, Theorem 3.5.5]). Ist schliesslich Γ 4-dimensional, so ist $\text{ord}(\Phi) \leq 12$ (siehe [13, Table 8C, p. 408]). *

(c) Nach einem Resultat von S. Friedland (siehe [27, Theorem 3.3]) gilt folgende Abschätzung für die Ordnung einer Torsionsuntergruppe $A \subset GL(m, \mathbb{Z})$:

$$\text{ord}(A) \leq e^{\frac{2\sqrt{2m+1}+1}{2} \log(2\sqrt{2m+1}+1) - 2\sqrt{2m+1}+1}$$

Da die Holonomiegruppe $\Phi \cong \Gamma/\Lambda(\Gamma)$ einer kristallographischen Gruppe $\Gamma \subset I(E^n)$ isomorph zu einer endlichen Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Z})$ ist, folgt daraus für die maximale Ordnung $k \geq 1$ von Torsionselementen in Φ :

$$k \leq e^{\frac{2\sqrt{2n+1}+1}{2} \log(2\sqrt{2n+1}+1) - 2\sqrt{2n+1}+1} \quad (2.2.4)$$

* An dieser Stelle möchte ich A. Szczepanski für die Führung durch [13] danken.

2.2.4. *Diskrete Gruppen hyperbolischer Isometrien.* Es sei $\Gamma \subset I(H^n)$ eine diskrete Gruppe hyperbolischer Isometrien mit konvexem Fundamentalpolyeder P . Ist Γ kokompakt, so besteht Γ nur aus elliptischen und loxodromischen Elementen, und P ist ein kompaktes Polytop in H^n mit endlich vielen gewöhnlichen Eckpunkten (siehe [61, Theorem 6.5.7]). Ist Γ nicht kokompakt, und ist $\overline{P} \cap \partial H^n \neq \emptyset$, so gilt (siehe [68, Chapter 2, Proposition 1.4]):

LEMMA 2.2.1.

Es sei Γ eine diskrete Gruppe von hyperbolischen Isometrien mit konvexem Fundamentalpolyeder P . Ist $x \in \overline{P}$ ein unendlicher Punkt in $\overline{H^n}$, so ist x nicht Fixpunkt einer loxodromischen Transformation aus Γ .

Die Frage stellt sich nun, ob ein Punkt $x \in \overline{P} \cap \partial H^n$ Fixpunkt einer parabolischen Transformation in Γ ist. Ein beliebiger Punkt $x \in \partial H^n$ heisst *quasi-parabolisch* für Γ , falls der Stabilisator Γ_x parabolische Transformationen enthält. Ist x quasi-parabolisch, so enthält Γ_x keine loxodromischen Elemente (vgl. §2.1.4). Ein Punkt $x \in \overline{P} \cap \partial H^n$ ist genau dann quasi-parabolisch für Γ , falls Γ_x von unendlicher Ordnung ist. Weiter ist $x \in L(\Gamma)$, und Γ_x ist mit einer unendlichen diskreten Untergruppe von $I(E^{n-1})$ identifizierbar (vgl. Lemma 2.1.2).

Ist Γ von endlichem Kovolumen mit konvexem Fundamentalpolyeder P , so ist Γ von erster Art und somit nichtelementar (vgl. §2.1.4; siehe [61, Theorem 12.1.15]). Ein quasi-parabolischer Punkt $x \in \overline{P}$ heisst ein *parabolischer Punkt* oder eine *Spitze* von Γ . Ist Γ torsionsfrei, so kann mit Hilfe der Bieberbachschen Sätze folgender fundamentale Satz aufgestellt werden (siehe [72, Theorem 1]):

SATZ 2.2.3 (A. Selberg; H. Garland–M. S. Raghunatan; N. Wielenberg).

Es sei $\Gamma \subset I(H^n)$ eine diskrete, torsionsfreie Gruppe von endlichem Kovolumen. Es sei $P \subset \overline{H^n}$ ein Dirichlet-Polyeder von Γ mit $\infty \in P$. Bezeichnet $\Lambda(\Gamma_\infty)$ die freie abelsche Untergruppe der parabolischen Translationen in Γ_∞ , so gilt:

- (1) $\Lambda(\Gamma_\infty)$ ist vom Rang $n - 1$.
- (2) P hat nur endlich vielen Spitzen und ist ein konvexes Polytop in $\overline{H^n}$.

Bemerkungen.

(a) Satz 2.2.3 besagt, dass Γ *geometrisch endlich* ist, das heisst, ein konvexes Fundamentalpolyeder mit endlich vielen Seiten zulässt. Γ ist in diesem Fall endlich erzeugt (siehe auch [61, Theorem 12.3.9]).

(b) Die Voraussetzung in Satz 2.2.3, dass Γ torsionsfrei ist, ist keine starke Einschränkung. Denn nach einem Ergebnis von A. Selberg besitzt jede diskrete Gruppe $\Gamma \subset I(H^n)$ von endlichem Kovolumen eine torsionsfreie Untergruppe Γ' von endlichem Index (siehe auch [11, Theorem B (ii)]).

2.2.5. *Das Lemma von Margulis.* Das Lemma von Margulis über diskrete Untergruppen Γ von $I(H^n)$ ist von fundamentaler Bedeutung beim Studium der globalen geometrischen Struktur des Quotienten H^n/Γ . Zuvor untersuchen wir, wann eine Teilmenge von H^n/Γ von der Gestalt eines Quotienten einer Teilmenge von H^n nach einer Untergruppe von Γ ist.

Eine Teilmenge $V \subset H^n$ heisst *exakt invariant*, falls entweder $\gamma(V) = V$ oder $\gamma(V) \cap V = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Es bezeichne Γ_V die Untergruppe $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(V) = V\}$ in Γ . Es gilt (siehe [4, §10.2, Lemma]):

LEMMA 2.2.2.

Es sei $\Gamma \subset I(H^n)$ eine diskrete Gruppe. Für $r > 0$ sei V eine Zusammenhangskomponente von $\{x \in H^n \mid \min_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} \text{dist}(x, \gamma x) < r\}$. Dann gilt:

- (1) V ist exakt invariant;
- (2) Für $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$ mit $\text{dist}(x, \gamma x) < r$ gilt $\gamma \in \Gamma_V$.

Es sei nun $\Gamma \subset I(H^n)$ diskret und fixpunktfrei operierend auf H^n mit Überlagerungsabbildung $\pi : H^n \rightarrow H^n/\Gamma$. Ist $U \subset H^n/\Gamma$ eine zusammenhängende Teilmenge isometrisch zu einem Ball $B(\frac{r}{2}) \subset H^n$ vom Radius $\frac{r}{2}$ und $V \subset \pi^{-1}(U)$ eine Zusammenhangskomponente in H^n , so ist V eine Komponente von $\{x \in H^n \mid \min_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} \text{dist}(x, \gamma x) < r\}$. Nach

Lemma 2.2.2 folgt daraus, dass $U = V/\Gamma_V$ ist.

Für $x \in H^n$ und $\varepsilon > 0$ wird nun folgende Untergruppe $\Gamma_\varepsilon(x)$ von Γ definiert:

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \text{dist}(x, \gamma x) \leq \varepsilon\} \quad . \quad (2.2.5)$$

Es gilt (siehe etwa [61, Theorem 12.5.1]):

SATZ 2.2.4 (Das Lemma von Margulis).

Zu $n \geq 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für jede diskrete Untergruppe Γ von $I(H^n)$ und für jedes $x \in H^n$ die Gruppe $\Gamma_\varepsilon(x)$ elementar ist.

Es bezeichne ε_n die *n-te Margulis-Konstante*, das heisst, ε_n ist gleich dem Supremum aller $\varepsilon > 0$, für welche das Lemma von Margulis gilt. Man beachte, dass $\varepsilon_n < \infty$, da es für jedes $n \geq 1$ diskrete Untergruppen Γ von $I(H^n)$ mit kompaktem Quotienten H^n/Γ gibt; Konstruktionen stammen von A. Borel (für Literaturangaben siehe [61, §11.7, p. 571] und [68, Capter 6, §3.3]).

Es gilt folgender Struktursatz (siehe [4, §10.3, Lemma]):

SATZ 2.2.5.

Es sei ε_n die n -te Margulis-Konstante und $0 < r \leq \varepsilon_n$. Es sei $\Gamma \subset I(H^n)$ eine diskrete, torsionsfreie Untergruppe und V eine Zusammenhangskomponente von $\{x \in H^n \mid \min_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} \text{dist}(x, \gamma x) < r\}$. Dann bestehen folgende Alternativen:

- (1) Entweder Γ_V ist eine unendliche zyklische Gruppe von hyperbolischen Transformationen mit gemeinsamer Achse, und V/Γ_V ist beschränkt;
- (2) oder Γ_V ist eine Gruppe parabolischer Transformationen mit einem gemeinsamen Fixpunkt in ∂H^n , und V/Γ_V ist unbeschränkt.

Es sei $0 < r \leq \varepsilon_n$ und $\Gamma \subset I(H^n)$ eine diskrete Gruppe. Aus Satz 2.2.5 gehen wichtige geometrische Aussagen über die Γ -invariante Menge

$$V(\Gamma, r) := \{x \in \overline{H^n} \mid \exists \gamma \in \Gamma \text{ nicht-elliptisch} : \text{dist}(x, \gamma x) < r\} \subset \overline{H^n} \quad (2.2.6)$$

hervor (siehe beispielsweise [61, §12.5]): Die Teilmengen $V(\Gamma_a, r) = V(\Gamma, r) \cap \Gamma_a$, wobei a Fixpunkt einer nicht-elliptischen Transformation in Γ ist, liefern eine Zerlegung $V(\Gamma, r) = \cup_a V(\Gamma_a, r)$ und bilden darüberhinaus die Zusammenhangskomponenten von $V(\Gamma, r)$; eine Komponente $V(\Gamma_a, r) \subset V(\Gamma, r)$, $r \leq \varepsilon_n$, heisst *Margulis-Gebiet* von Γ zum Punkt a .

Es sei Γ eine unendliche elementare und diskrete Untergruppe von $I(H^n)$. Dann ist $V(\Gamma, r)$ für jedes $r > 0$ zusammenhängend.

Ist Γ eine elementare, diskrete Untergruppe von $I(H^n)$ erzeugt von einer hyperbolischen Transformation γ mit Achse g und Verschiebungslänge l_γ , so ist $V(\Gamma, r)$ für $r > l_\gamma$ eine *Tube* um g in H^n , das heisst,

$$V(\Gamma, r) =: T(g, s) = \{x \in H^n \mid \text{dist}(x, g) < s\} \quad \text{für ein } s > 0 \quad . \quad (2.2.7)$$

Es sei schliesslich Γ eine elementare, diskrete Untergruppe von $I(H^n)$ vom parabolischen Typ. Γ besteht aus lauter parabolischen Transformationen mit einem gemeinsamen Fixpunkt $x \in \partial H^n$ (vgl. Lemma 2.1.2), welche als euklidische Isometrien auf Horosphären zum Zentrum x operieren. ObdA sei $x = \infty$. Ist Γ zusätzlich von endlichem Kovolumen, so ist jedes $V(\Gamma, r)$, $r > 0$, ein Horoball in H^n und enthält einen Fundamentalbereich G von endlichem Volumen von der Form $F \times (0, \infty)$; dabei ist $F \subset \{x_n = r\}$ ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ als Untergruppe von $I(E^{n-1})$ auf der Horosphäre $\partial V(\Gamma, r) = \{x_n = r\}$ (siehe [72, §4]). Als Untergruppe von $I(E^{n-1})$ mit endlichem Kovolumen ist Γ aber kokompakt und kristallographisch (vgl. Satz 2.2.3). Somit ist $V(\Gamma, r)/\Gamma$ von der Gestalt

$$V(\Gamma, r)/\Gamma = N \times (0, \infty) \quad , \quad (2.2.8)$$

wobei N eine kompakte euklidische Raumform der Dimension $n - 1$ ist (siehe [72, Beweis von Proposition 1] und [4, p. 113]).

2.3. Clifford-Matrizen und hyperbolische Isometrien

Die Gruppe $M(E_+^n)$, $n \geq 2$, der konformen Möbiustransformationen, welche E_+^n invariant lassen, kann mit der projektiven Gruppe $PSL(2, C_{n-2})$ zur Clifford-Algebra C_{n-2} in $n-2$ Erzeugenden in Beziehung gesetzt werden. Diese Beschreibung der Gruppe $I^+(H^n)$ der orientierungserhaltenden hyperbolischen Isometrien geht auf L.V. Ahlfors zurück und stellt die Verallgemeinerung der bekannten Identifikationen $I^+(H^2) = PSL(2, \mathbb{R})$ und $I^+(H^3) = PSL(2, \mathbb{C})$ dar. Viele Methoden und Sätze für $n = 2, 3$ lassen sich sinngemäss auf $n \geq 4$ übertragen; wir möchten insbesondere die Jørgensensche Ungleichung über die gleichförmige Isolierung der Identität I hervorheben.

2.3.1. Die Clifford-Algebra. Die Clifford-Algebra C_m , $m \geq 0$, ist eine reelle assoziative (aber nicht kommutative) Algebra erzeugt von m Elementen i_1, \dots, i_m , welche den Relationen $i_k^2 = -1$, $i_k i_l = -i_l i_k$, $k \neq l$, genügen (siehe [70, §2]). Wir setzen $i_0 := 1$. Jedes Element $a \in C_m$ kann in der Form $a = \sum_I a_I I$ geschrieben werden, wobei $a_I \in \mathbb{R}$ und die Summe über alle Produkte $I = i_{\nu_1} \cdots i_{\nu_k}$ mit $1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_k \leq m$ erstreckt wird (das Nullprodukt ist zugelassen und wird mit $i_0 = 1$ identifiziert). Beispielsweise ist $C_0 = \mathbb{R}$, $C_1 = \mathbb{C}$, $C_2 = \mathbb{H}$ (die Quaternionenalgebra).

Die Clifford-Algebra C_m ist ein Vektorraum der Dimension 2^m über \mathbb{R} und kann mit einer euklidischen Norm versehen werden: Ist $a =: a_{\mathbb{R}} + a_{\mathbb{C}} \in C_m$ mit $a_{\mathbb{R}} := a_0$, so wird $|a|^2 = \sum a_I^2 = a_{\mathbb{R}}^2 + |a_{\mathbb{C}}|^2$ gesetzt.

Auf C_m gibt es verschiedene Involutionen:

- (i) Die *Hauptinvolution* $' : C_m \rightarrow C_m$ ersetzt jeden Bestandteil i_l , $l > 0$, von $I = i_{\nu_1} \cdots i_{\nu_k}$ in der Darstellung $a = \sum_I a_I I \in C_m$ durch $-i_l$. Offensichtlich gilt $(ab)' = a'b'$ und $(a+b)' = a'+b'$.
- (ii) Die *Inversion* $* : C_m \rightarrow C_m$ kehrt jedes Produkt $I = i_{\nu_1} \cdots i_{\nu_k}$ in $a = \sum_I a_I I \in C_m$ gemäss $I^* := i_{\nu_k} \cdots i_{\nu_1}$ um. Es gilt $(ab)^* = b^*a^*$ und $(a+b)^* = a^*+b^*$.
- (iii) Die *Konjugation* $\bar{} : C_m \rightarrow C_m$ ist gegeben durch $\bar{a} = (a')^* = (a^*)'$ und erfüllt $(\overline{ab}) = \bar{b}\bar{a}$.

Die Elemente $x \in C_m$ der Gestalt $x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_m i_m$ heissen *Vektoren* und bilden einen $(m+1)$ -dimensionalen Untervektorraum von C_m , den wir mit \mathbb{R}^{m+1} identifizieren. Für Vektoren $x \in C_m$ gilt $x^* = x$ und $\bar{x} = x'$. Da ferner $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$, sind Vektoren $x \neq 0$ invertierbar mit $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$. Sie bilden eine multiplikative Gruppe G_m , welche *Clifford-Gruppe* genannt wird. Auf G_m ist die Norm multiplikativ, das heisst, $|xy| = |x| \cdot |y|$ (siehe [70, Theorem 1 (iii)]). Die Clifford-Gruppe G_m kann geometrisch wie folgt interpretiert werden (siehe [70, Theorem 2 und Theorem 3]): Ist $a \in C_m$ invertierbar und $\rho_a(x) := axa'^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, so ist $\rho_a \in O(m+1)$, und die Abbildung

$$\phi : G_m \rightarrow O(m+1) \quad \text{mit} \quad \phi(a) = \rho_a$$

ist surjektiv auf $SO(m+1)$ mit Kern $\mathbb{R} - \{0\}$. Schliesslich gilt:

$$\begin{aligned} G_m &= \{ a \in C_m \mid a\bar{a} = |a|^2 \neq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}^{m+1} : axa^* \in \mathbb{R}^{m+1} \} \\ &= \{ a \in C_m - \{0\} \mid \forall x \in \mathbb{R}^{m+2} : axa^* \in \mathbb{R}^{m+2} \} \quad , \end{aligned}$$

da $ai_{m+1}a^* = |a|^2i_{m+1} \in \mathbb{R}^{m+2}$.

2.3.2. *Clifford-Matrizen.* Wir definieren [70, §4] folgend

$$GL(2, C_m) := \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C_m ; x \mapsto Tx = (ax + b)(cx + d)^{-1} \right. \\ \left. \text{ist eine Bijektion auf } \hat{E}^{m+2} \right\}. \quad (2.3.1)$$

Ist $T \in GL(2, C_m)$, so folgt unmittelbar aus der Definition, dass

$$\begin{aligned} T(0) &= bd^{-1} \quad , \quad T(\infty) = ac^{-1} \quad , \\ T^{-1}(0) &= -a^{-1}b \quad , \quad T^{-1}(\infty) = -c^{-1}d \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Vektoren in \hat{E}^{m+1} sind. Für $x \in \hat{E}^{m+2}$ gilt $S(Tx) = (ST)x$, sowie

$$Tx = x \iff T = \lambda I \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ist ∞ Fixpunkt der Transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $c = 0$. Schliesslich gilt für $x, y \in \hat{E}^{m+2}$:

$$y = Tx \iff x = T^*y \quad \text{mit} \quad T^* = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix} . \quad (2.3.3)$$

Die *Determinante* $\Delta = \Delta(T)$ von $T \in GL(2, C_m)$ wird definiert gemäss

$$\Delta = \Delta(T) := ad^* - bc^* \quad \text{für} \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \quad (2.3.4)$$

Es folgt (siehe [70, Lemmata 5 bis 9]), dass $\Delta(T) \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $\Delta(ST) = \Delta(S)\Delta(T) = \Delta(TS)$, sowie

$$Tx = \begin{cases} ac^{-1} - \Delta c^{*-1}(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1} & \text{für } c \neq 0 ; \\ \Delta^{-1}axa^* + bd^{-1} & \text{für } c = 0 . \end{cases}$$

Die Transformation T ist genau dann orientierungserhaltend, falls $\Delta(T) > 0$ (siehe [70, Lemma 10]). Schliesslich gilt für $x, y \in \hat{E}^{m+2}$ (siehe [70, Theorem 7]):

$$\begin{aligned} |Ty - Tx| &= \frac{|\Delta| \cdot |y - x|}{|cy + d| \cdot |cx + d|} \quad ; \\ [Tx]_{m+1} &= \Delta \frac{x_{m+1}}{|cx + d|^2} . \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die folgende Darstellung von Ahlfors zurückgewonnen werden (siehe etwa [70, Theorem 6]):

SATZ 2.3.1 (L.V. Ahlfors).

Es gilt: $GL(2, C_m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in G_m \cup \{0\}; ab^*, cd^*, c^*a, d^*b \in \mathbb{R}^{m+1}; \right.$
 $\left. ad^* - bc^* \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$.

Es sei

$$PGL(2, C_m) := GL(2, C_m) / \{ \lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \};$$

$$SL(2, C_m) := \{ T \in GL(2, C_m) \mid \Delta(T) = 1 \};$$

$$PSL(2, C_m) := SL(2, C_m) / \{ \pm I \}.$$

Folgendes auf Ahlfors zurückgehende Resultat ist Kernpunkt unseres Interesses (siehe auch [70, Theorem 5]):

SATZ 2.3.2 (L.V. Ahlfors).

- (1) $PGL(2, C_m)$ ist isomorph zur allgemeinen Möbiusgruppe $GM(\hat{E}^{m+1})$.
- (2) $PSL(2, C_m)$ ist isomorph zur Möbiusgruppe $M(\hat{E}^{m+1})$ der orientierungserhaltenden Möbiustransformationen von \hat{E}^{m+1} .

Für Clifford-Matrizen $T \in PGL(2, C_m)$ als Möbiustransformationen von \hat{E}^{m+1} und deren Poincaré-Erweiterungen auf \hat{E}^{m+2} verwenden wir künftig dieselbe Symbolik, das heisst, $\tilde{T} = T$ (vgl. auch §2.3.1).

Nach (2.3.5) lassen Elemente $T \in SL(2, C_m)$ den Ausdruck $\frac{|y-x|^2}{y_{m+2}x_{m+2}}$, $x, y \in \hat{E}^{m+2}$, invariant und somit auch den hyperbolischen Raum H^{m+2} (vgl. §2.1.2). Nach Satz 2.3.2 und (2.1.6) ist $PSL(2, C_m)$ demnach mit $I^+(H^{m+2})$ identifizierbar.

2.3.3. Die verallgemeinerte Jørgensensche Ungleichung. Von T. Jørgensen stammt die folgende Spurgleichung für $SL(2, \mathbb{C})$, welche eine Aussage über die gleichförmige Isolierung der Identität I beinhaltet (siehe etwa [5, Theorem 5.4.1]):

SATZ 2.3.3 (T. Jørgensen).

Es seien $f, g \in SL(2, \mathbb{C})$, sodass die Untergruppe $\langle f, g \rangle$ diskret und nichtelementar ist. Dann gilt:

$$|\mathrm{Sp}^2 f - 4| + |\mathrm{Sp}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1.$$

Bemerkung.

(a) Die Jørgensensche Ungleichung ist scharf für die Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ erzeugt von $f(z) = z + 1$ und $g(z) = -1/z$.

Ist $f \in SL(2, \mathbb{C})$ parabolisch (vgl. §2.1.3), so reduziert sich die Spurgleichung modulo Konjugation von f auf die Ungleichung von Shimizu-Leutbecher (siehe auch [5, Case 1, p. 106] und [37, §1]):

Ist für $f, g \in SL(2, \mathbb{C})$ mit $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Untergruppe $\langle f, g \rangle$ von $SL(2, \mathbb{C})$ diskret und nichtelementar, so gilt $|c| \geq 1$.

Es gibt verschiedene Ansätze zur Verallgemeinerung des Jørgensenschen Satzes für Möbiustransformationen in n Dimensionen (siehe [37] für eine entsprechende Spurungleichung *hyperbolischer* Elemente $f, g \in PSL(2, C_n)$; [70, §5 und §6] für weitere Varianten zu $PSL(2, C_n)$; [50] für $GM(\tilde{E}^{n-1}) = O^+(1, n)$ versehen mit der Hilbert-Schmidt-Norm).

Wir sind insbesondere am höherdimensionalen Analogon der Shimizu-Leutbecher-Ungleichung interessiert. Es gilt (siehe auch [37, Theorem A] und [72, Proposition 4]):

SATZ 2.3.4 (P. Waterman; [70, Theorem 8]).

Sind $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} \in PSL(2, C_n)$ mit T parabolisch und $T(\infty) = \infty$, sodass $\langle S, T \rangle$ eine diskrete und nichtelementare Gruppe von Möbiustransformationen ist, so gilt:

$$(1) \quad |c| \cdot |T(ac^{-1}) - ac^{-1}|^{1/2} \cdot |T(-c^{-1}d) - (-c^{-1}d)|^{1/2} \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 8|\lambda_C|}}{2},$$

$$\text{wobei } |\lambda_C| = |\lambda| - |\lambda_{\mathbb{R}}|.$$

$$(2) \quad \text{Ist } T = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eine parabolische Translation, so gilt } |c| \cdot |\mu| \geq 1.$$

Bemerkung.

(b) Es ist $1 = i_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Weiter ist nach (2.3.2) $S(\infty) = ac^{-1}$ und $S^{-1}(\infty) = -c^{-1}d$.

Mit Hilfe der Jørgensenschen Ungleichung und deren verschiedenförmigen Verallgemeinerungen lassen sich Aussagen unterschiedlicher Art über diskrete und nichtelementare Gruppen von Möbiustransformationen machen. Beispielsweise kann deren algebraischer Limes untersucht und gezeigt werden, dass eine endlich erzeugte Gruppe G von Möbiustransformationen genau dann diskret ist, wenn jede von zwei Elementen aus G erzeugte Untergruppe diskret ist (siehe [50, Theorem 5.6] und [70, Corollary, p. 109]). Somit ist eine Gruppe G von Möbiustransformationen genau dann diskret und nichtelementar, falls jede Untergruppe $\langle f, g \rangle$, $f, g \in G$, diskret und nichtelementar ist.

Besonders interessiert sind wir an der Wirkung von Elementen einer diskreten und nichtelementaren Gruppe von Möbiustransformationen aus $PSL(2, C_{n-2})$, $n \geq 3$, auf Horobällen in H^n , welche zu Fixpunkten parabolischer Translationen gehören (siehe auch [68, p. 171; für $n = 3$, siehe [5, Theorem 5.4.4]). Es ergibt sich folgendes Verhalten (siehe auch [72, Proposition 4]):

SATZ 2.3.5 (S. Hersonsky; [36, Theorem 2.3]).

Es sei Γ eine diskrete und nichtelementare Untergruppe von $PSL(2, C_{n-2})$, $n \geq 3$, und $T = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\mu \in E^{n-1}$, eine parabolische Translation. Ist $B_\infty(\mu) = \{x \in H^n \mid x_n > |\mu|\}$ ein Horoball zum Zentrum ∞ , so gilt für alle $S \in \Gamma - \Gamma_\infty$:

$$S(B_\infty(\mu)) \cap B_\infty(\mu) = \emptyset \quad .$$

Beweis: Nach Übergang zu einem konjugierten Element dürfen wir annehmen, dass T von der Gestalt $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist. Es sei $B_\infty = B_\infty(1)$.

Weiter sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma - \Gamma_\infty$. Es gilt $S(\infty) \neq \infty$, und der euklidische Horoball $S(B_\infty)$ ist im Punkt $S(\infty)$ tangential an die Hyperebene $\{x_n = 0\}$.

Wir setzen $U := STS^*$. Dann ist $U \in \Gamma$, und die Untergruppe $\langle T, U \rangle$ von Γ ist diskret und nichtelementar (siehe oben). Da nach (2.3.3) $S^* = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}$ und, nach Satz 2.3.1, $cd^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt $[U]_{21} = -cc^* + cd^* - dc^* = -cc^*$. Auf der Clifford-Gruppe G_{n-2} ist die Norm multiplikativ, das heisst, $|-cc^*| = |c|^2$ (vgl. §2.3.1). Nach Satz 2.3.4 (2) folgt für $\langle T, U \rangle$, dass $|c|^2 > 1$ und somit $|c| > 1$.

Mit Hilfe von Satz 2.1.1 (3) für $\tilde{\varphi} = S$ und $r = |c|^{-1}$ folgt schliesslich $S(B_\infty) \cap B_\infty = \emptyset$.

Q.E.D.

Es sei Γ eine diskrete und torsionsfreie Untergruppe von $I^+(H^n) = PSL(2, C_{n-2})$, $n \geq 3$, von endlichem Kovolumen. Nach 2.2.4 ist Γ nichtelementar. Zu parabolischen Elementen von Γ können exakt invariante "kanonische" Horobälle in H^n konstruiert werden (für $n = 3$, siehe [5, (5.4.5)]; für $n \geq 3$, siehe [36, p. 471–472]): Es sei $T \in \Gamma$ parabolisch mit Fixpunkt $p \in \hat{E}^{n-1}$. Ist $S \in PSL(2, C_{n-2})$ mit $S(\infty) = p$, so enthält der Stabilisator $(S^{-1}\Gamma S)_\infty$ von ∞ die parabolische Transformation $S^{-1}TS$. Nach Satz 2.2.3 enthält $(S^{-1}\Gamma S)_\infty$ eine parabolische Translation, etwa $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in E^{n-1}$.

Nach Satz 2.3.5 und nach Lemma 2.2.2 ist $B_\infty(\mu)/(S^{-1}\Gamma S)_\infty$ in $H^n/S^{-1}\Gamma S$ einbettbar und somit auch von endlichem Volumen. Die Gruppe $(S^{-1}\Gamma S)_\infty$ operiert als diskrete Gruppe euklidischer Isometrien auf jeder Horosphäre $S_\infty(r)$, $r > 0$, zum Zentrum ∞ (vgl. §2.1.3) und ist von endlichem Kovolumen, also kokompakt und somit kristallographisch. Bezeichnet $\Lambda := \Lambda((S^{-1}\Gamma S)_\infty)$ die Translationsuntergruppe von $(S^{-1}\Gamma S)_\infty$, so ist Λ von endlichem Index und vom Rang $n - 1$ (vgl. Satz 2.2.3). Denken wir uns Λ als Gitter von Vektoren in E^{n-1} , so bezeichne $v \in \Lambda$, $v \neq 0$, den Vektor minimaler Länge, das heisst,

$$|v| = \min \{ |\mu| \mid \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Lambda - \{0\} \} \quad .$$

Der *kanonische Horoball* zum Zentrum $p \in \hat{E}^{n-1}$ ist nun definiert als $S(B_\infty(v))$ und dadurch wohlbestimmt. Denn ist $S_1 \in PSL(2, C_{n-2})$ eine weitere Transformation mit $S_1(\infty) = p$, so ist $S_1 = SU$ für eine euklidische Ähnlichkeit $U \in S(E^{n-1})$. Das Translationsgitter zu $(S_1^{-1}\Gamma S_1)_\infty$ ist gegeben durch $U(\Lambda)$ und enthält als kürzesten nicht-trivialen Verschiebungsvektor das Element $v_1 := U(v)$. Da weiter $U(B_\infty(v)) = B_\infty(v_1)$, ist $S_1(B_\infty(v)) = S(B_\infty(v_1))$.

Mit Hilfe von Satz 2.3.5 ergibt sich schliesslich:

SATZ 2.3.6 (S. Hersensky; [36, Proposition 3.3]).

Ist Γ eine diskrete, torsionsfreie und nichtelementare Untergruppe von $PSL(2, C_{n-2})$, $n \geq 3$, so sind die kanonischen Horobälle in H^n zu je zwei verschiedenen parabolischen Fixpunkten von Γ disjunkt.

Bemerkung.

(c) Wie bei Satz 2.2.3 bedeutet die Bedingung, dass Γ torsionsfrei ist, keine erhebliche Restriktion (siehe [36, p. 471–472]).

3. Volumina von hyperbolischen Raumformen

3.0. Einleitung

In diesem Kapitel werden hyperbolische Raumformen auf der Grundlage der Ergebnisse der Kapitel 1 und 2 studiert.

Im ersten Teil (vgl. §3.1) wird die globale geometrische Struktur n -dimensionaler hyperbolischer Raumformen von endlichem Volumen mit oder ohne Rand beschrieben. Das Lemma von Margulis impliziert die Zerlegbarkeit einer hyperbolischen Raumform M in einen dünnen und in einen dicken, kompakten Teil. Der dünne Teil besteht aus endlich vielen disjunkten Spitzenumgebungen und Tuben um kurze geschlossene Geodätische. Das dicke Kernstück enthält immer eine Kugel vom Radius grösser gleich der halben Margulis-Konstanten $\varepsilon_n > 0$, sodass das Volumen von M durch eine nur von der Dimension n abhängige, universelle positive Schranke nach unten begrenzt ist.

Diese Schranke wird in Abschnitt 3.2 getrennt für n -dimensionale kompakte, nichtkompakte und berandete hyperbolische Raumformen M abgeschätzt. Wir verwenden dabei eine Methode, welche für $n = 3$ auf R. Meyerhoff zurückgeht. Kurz zusammengefasst beruht das Prinzip auf der Konstruktion einer eingebetteten Kugel-, Spitzen- oder Kragenumgebung $U \subset M$, welche bei Hochhebung in die universelle Überlagerung von $M = H^n/\Gamma$ eine verallgemeinerte Kugelpackung $\{\gamma(U) \mid \gamma \in \Gamma\}$ in H^n (vgl. §1.4) induziert. Die lokale Dichte einer verallgemeinerten Kugel in ihrer Dirichlet-Voronoi-Zelle ist nach dem Satz von Böröczky durch die simpliziale Dichtefunktion majorisiert und liefert mit den Ergebnissen von §1.3 die gewünschte Volumenschranke für ein Fundamentalpolyeder von M . Für kompakte Mannigfaltigkeiten hängt der Erfolg dieser Methode ab von der Güte der Abschätzungen über den Inradius $r(M)$ – den Radius der grössten in M eingebetteten Kugel. Die vorhandenen Resultate sind von der Grössenordnung her aber sehr unbefriedigend. Besonders vielversprechend dagegen zeigt sich die Methode im Falle nichtkompakter Mannigfaltigkeiten von endlichem Volumen, da uns zur Beschreibung der Spitzen die Bieberbachschen Sätze über kristallographische euklidische Bewegungsgruppen (vgl. §2.2) und, als Mass dafür, kanonische Horobälle (vgl. §2.3) zur Verfügung stehen.

In Paragraph 3.3 wird das Volumenspektrum Vol_n n -dimensionaler hyperbolischer Raumformen, insbesondere im unteren Bereich, untersucht. Zuerst werden die wichtigsten Strukturaussagen zusammengefasst, wobei wir sämtliche arithmetischen Aspekte ausklammern. Eine Sonderrolle spielt das Spektrum Vol_3 aufgrund der Theorie von T. Jørgensen und W. Thurston. Zahlreiche Untersuchungen insbesondere in Folge der Arbeiten von R. Meyerhoff und viele Beispiele liefern konkrete Hinweise über die Verteilung der Volumina in Vol_3 . Für Dimensionen $n > 3$ hingegen gibt es nur sehr wenige, verschiedene Beispiele geometrisch konstruierter hyperbolischer Raumformen. Für konkrete Aussagen über die Volumenspektren Vol_n sind wir deshalb auf die Theorie und die Volumenabschätzungen von §3.2 angewiesen.

3.1. Hyperbolische Raumformen

Im folgenden Abschnitt wird die globale geometrische Struktur von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten von endlichem Volumen beschrieben. Solche Raumformen sind für Dimensionen ≥ 3 metrisch starre Gebilde und von einfachem topologischem Typ. Es werden auch hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit Rand in Betracht gezogen. Deren Verdoppelungen sind unberandete hyperbolische Mannigfaltigkeiten im herkömmlichen Sinne, besitzen darüberhinaus aber eine eingebettete total geodätische Hyperfläche.

3.1.1. Clifford-Kleinsche Raumformen. Es sei M eine n -dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung $\kappa \in \{-1, 0, +1\}$. M ist lokal diffeomorph zu einem der Standardräume $X_\kappa^n = X^n = S^n, E^n$ oder H^n derselben Krümmung κ . Nach dem Satz von Hopf-Killing ist M genau dann eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Krümmung κ , falls M eine *Clifford-Kleinsche Raumform* (kurz: Raumform) ist, das heisst, $M = X^n/\Gamma$ bezüglich einer fixpunktfrei operierenden diskreten Untergruppe $\Gamma \subset I(X^n)$. Wir sagen, dass $M = X^n/\Gamma$ eine *sphärische, euklidische* oder *hyperbolische Raumform* oder *Mannigfaltigkeit* ist, falls $X^n = S^n, E^n$ oder H^n ist.

Die Gruppe $\Gamma \subset I(X^n)$ operiert fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich auf X^n ; ist $X^n = E^n$ oder H^n , so operiert Γ fixpunktfrei genau dann, wenn torsionsfrei ist. Die Quotientenabbildung $\pi : X^n \rightarrow X^n/\Gamma$ ist eine lokal isometrische Überlagerungsabbildung und liefert die *universelle* Überlagerung von $M = X^n/\Gamma$. Weiter gilt, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ isomorph zur Deckgruppe Γ der Überlagerung ist. Die Raumform $M = X^n/\Gamma$ ist *orientierbar*, falls jede Decktransformation $\gamma \in \Gamma$ orientierungserhaltend wirkt.

Im Folgenden lassen wir zu, dass $M = X_\kappa^n/\Gamma$ eine Raumform mit *total geodätischem Rand* ∂M ist. Das heisst, M ist eine (orientierbare) differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche lokal diffeomorph zu \mathbb{R}_+^n und mit einer Riemannschen Metrik g der konstanten Krümmung κ versehen ist. Der Rand ∂M ist eine (orientierbare) Untermannigfaltigkeit von M mit induzierter Metrik $g|_{\partial M}$ (siehe [12, §13]); ∂M ist total geodätisch, falls alle Geodätischen in ∂M auch Geodätische in M sind. ∂M ist somit eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit der Krümmung κ .

3.1.2. Hyperbolische Raumformen. Es sei M eine n -dimensionale hyperbolische Raumform mit Überlagerung $\pi : H^n \rightarrow M$. Wir nehmen künftig immer an, dass M *von endlichem Volumen* sei, das heisst, $\Gamma \subset I(H^n)$ ist von endlichem Kovolumen (vgl. §2.2.2).

Mit Hilfe des Lemmas von Margulis (vgl. Satz 2.2.4) kann die globale geometrische Struktur von M beschrieben werden (vgl. §2.2.5; [4, §10] und [6, Chapter D]). Dazu bezeichne $\varepsilon := \varepsilon_n$ die n -te Margulis-Konstante. Ist weiter $p \in M$ und $B_p(r) \subset M$ der Ball vom Radius r um p , so bezeichne

$$r_p(M) = r(p, M) := \sup \{ r > 0 \mid B_p(r) \text{ ist isometrisch zu einem } r\text{-Ball in } H^n \}$$

den *Injektivitätsradius* von M an der Stelle p . Ferner sei $x \in H^n$ mit $\pi(x) = p$. Ist dann $c : [0, 1] \rightarrow M$, $c(0) = c(1) = p$, eine geodätische Schleife zu p , so bezeichne $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow$

H^n ein Überlagerungsweg von c mit $\tilde{c}(0) = x$. Dann ist $\tilde{c}(1) = \gamma x$ für ein $\gamma \in \Gamma$. Die geodätischen Schleifen zu p entsprechen also eineindeutig den geodätischen Segmenten von x nach γx für $\gamma \in \Gamma$. Weiter gilt, dass der Injektivitätsradius $r(p, M) = r_p(M)$ gleich der halben Länge der kürzesten nicht-trivialen geodätischen Schleife zu p in M ist, das heisst (siehe [4, §8.1]):

$$r(\pi(x), M) = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} \text{dist}(x, \gamma x) \quad . \quad (3.1.1)$$

Ist nun $U \subset M$ eine Zusammenhangskomponente von $\{p \in M \mid r_p(M) < \frac{r}{2}\}$, so kann die geometrische Gestalt von U für $0 < r \leq \varepsilon$ wie folgt beschrieben werden (vgl. Satz 2.2.5; siehe [6, Theorem D.3.3] und [4, p. 112–113]):

Eine *beschränkte* Komponente U ist von der Form einer *Tubenumgebung* $T(c, s) = \{p \in M \mid \text{dist}(c, p) < s\}$ um eine geodätische Schleife c der Länge $< r$ und für ein $s > 0$ (vgl. (2.2.7)).

Ist U eine *unbeschränkte* Komponente (von endlichem Volumen), so ist U von der Form einer *Spitzenumgebung* $N^{n-1} \times (0, \infty)$, wobei N^{n-1} eine kompakte euklidische Raumform der Dimension $n - 1$ ist (vgl. (2.2.8)).

Wir erhalten somit eine Zerlegung

$$M = M_{(0, \varepsilon)} \cup M_{[\varepsilon, \infty)} \quad , \quad (3.1.2)$$

wobei $M_{(0, \varepsilon)} := \{p \in M \mid r_p(M) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ der *dünne Teil* von M und $M_{[\varepsilon, \infty)} := \{p \in M \mid r_p(M) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ der *dicke Teil* von M ist.

Der dicke Teil $M_{[\varepsilon, \infty)}$ ist kompakt (siehe [6, Proposition D.2.6]) und enthält einen Ball isometrisch zu einer Kugel $B(r) \subset H^n$ vom Radius $r \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Der dünne Teil $M_{(0, \varepsilon)}$ von M ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Tubenumgebungen zu geschlossenen Geodätischen der Länge $< \varepsilon$ (siehe auch [4, §10.4, Lemma]) und endlich vielen Spitzenumgebungen der Form $N^{n-1} \times (0, \infty)$, wobei N^{n-1} eine kompakte euklidische Raumform ist (vgl. Satz 2.2.3; vgl. Figur 3.1.1).

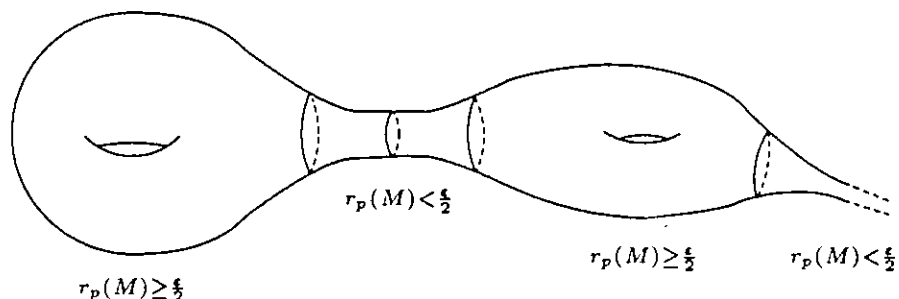
Schliesslich gilt (siehe [4, §10.5, Theorem], [6, Corollary D.3.14]):

SATZ 3.1.1 (M. Gromov).

Es sei M eine n -dimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen. Dann ist M diffeomorph zum Innern einer kompakten Mannigfaltigkeit N mit Rand ∂N . Ist $\partial N \neq \emptyset$, so ist jede Zusammenhangskomponente von ∂N diffeomorph zu einer $(n - 1)$ -dimensionalen kompakten euklidischen Raumform.

Bemerkung.

Ist M eine *orientierte* hyperbolische Raumform der Dimension $n = 3$ diffeomorph zu einer berandeten Mannigfaltigkeit N , so bestehen die Zusammenhangskomponenten von ∂N aus lauter Tori $T = E^2/\mathbb{Z}^2$. Dies folgt aus den Klassifikationsresultaten für orientierungserhaltende kristallographische Untergruppen von $I(E^2)$ (siehe [73, Theorem 2.5.5]).



Figur 3.1.1

3.1.3 Invariante Größen hyperbolischer Raumformen. Es sei $M = H^n/\Gamma$ mit $\Gamma \subset I^+(H^n)$ eine n -dimensionale orientierbare hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen. Die geometrischen Invarianten von M , wie etwa das Volumen $\text{vol}_n(M)$, der Durchmesser $\text{diam}(M)$ und der Injektivitätsradius $i(M)$, die Ordnung $\text{ord}(\Gamma)$ der Isometriegruppe Γ und der erste Eigenwert $\lambda_1(M)$ des Laplace-Operators von M sind *topologische* Invarianten für M . Dies folgt aus dem berühmten Satz von G. D. Mostow und G. Prasad (siehe auch [6, Theorem C.5.2 und Theorem C.5.4]):

SATZ 3.1.2 (Der Starrheitssatz von G. D. Mostow–G. Prasad).

Für $n \geq 3$ seien M_1, M_2 n -dimensionale orientierbare hyperbolische Mannigfaltigkeiten von endlichem Volumen, sodass $\pi_1(M_1)$ isomorph zu $\pi_1(M_2)$ ist. Dann sind M_1 und M_2 isometrisch zueinander.

Das Volumen $\text{vol}_n(M)$ einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit $M = H^n/\Gamma$, gegeben durch das Volumen $\text{vol}_n(D)$ eines Dirichlet-Polyeders $D \subset H^n$ für Γ (vgl. §2.2.2), ist sicherlich eine der natürlichsten und wichtigsten Invarianten für M . Das Volumen $\text{vol}_n(M)$ ist mit anderen charakteristischen Zahlen für M durch geometrische (Un-)Gleichungen verknüpft.

Es sei M kompakt:

Dann gilt für den Injektivitätsradius $i(M) := \inf_{p \in M} r(p, M)$ von M (siehe [63, Theorem]):

$$\text{Für } n \geq 4 : \quad i(M) \geq c(n) \cdot \text{vol}_n(M)^{-(1+\frac{4}{n-3})} , \quad (3.1.3)$$

wobei hier wie später auch $c(n)$ eine nur von n abhängige Konstante bezeichnet. Für den Durchmesser $\text{diam}(M) = \max_{p, q \in M} \text{dist}(p, q)$ von M gilt (siehe [14, Theorem 1 (1)]):

$$\text{Für } n \geq 4 : \quad \text{diam}(M) \leq c(n) \text{vol}_n(M) , \quad (3.1.4)$$

während der erste Eigenwert $\lambda_1(M)$ des Laplace-Operators auf M wie folgt durch $\text{vol}_n(M)$ abgeschätzt werden kann (siehe [14, Theorem 2]):

Für $n \geq 4$:

$$\lambda_1(M) \leq \frac{c_1(n) + c_2(n) \log \text{vol}_n(M)}{\text{diam}(M)} \quad (3.1.5)$$

Die Ordnung $\text{ord}(\Gamma)$ der Isometriegruppe Γ einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit M von endlichem Volumen ist endlich und in erster Näherung abschätzbar gemäss $\text{ord}(\Gamma) \leq c(n) \text{vol}_n(M)$ für $n \geq 2$ (siehe [35, Satz, p. 29]). Ist M kompakt, so gibt es eine präzisere Aussage (siehe [38, Abschnitt I]):

$$\text{ord}(\Gamma) < \left[\frac{\omega_n \left(6 \text{diam}(M) + \frac{5}{2} r(M) + \log 4(n-1) \right)}{\omega_n \left(\frac{r(M)}{2} \right)} \right]^{n+1}, \quad \text{wobei} \quad (3.1.6)$$

$$\omega_n(x) = \int_0^x \sinh^{n-1} t \, dt = \frac{\text{vol}_n(B(x))}{\Omega_{n-1}},$$

und $B(x) \subset H^n$ wie immer eine Kugel von Radius x bezeichnet, sowie $\Omega_k = \text{vol}_k(S^k)$.

Die Betti-Zahlen $b_k(M)$ erfüllen die Ungleichung (siehe [4, §10.5, Theorem (ii)] und auch [63, p. 478])

$$\sum_{k=0}^n b_k(M) \leq c(n) \text{vol}_n(M) \quad (3.1.7)$$

Für eine Abschätzung von $b_k(M)$ nach unten und in Abhängigkeit von $\text{vol}_n(M)$ verweisen wir auf [74], worin der Fall *arithmetischer* hyperbolischer Raumformen H^n/Γ und deren Überlagerungen $H^n/\Gamma(p)$ zu Kongruenzuntergruppen $\Gamma(p) \subset \Gamma$ behandelt wird.

Schliesslich sei $\chi(M)$ die *Euler-Poincaré-Charakteristik* von M . Dann gilt $\chi(M) = 0$ für n ungerade (siehe [67, Corollary I.11–25]), während für gerades n der bekannte Satz von Gauss-Bonnet-Chern folgenden Zusammenhang mit $\text{vol}_n(M)$ liefert (siehe auch [67, The Gauss-Bonnet-Theorem V.13–26]):

SATZ 3.1.3 (Der Satz von Gauss-Bonnet-Chern).

Es bezeichne $\Omega_k = \text{vol}_k(S^k)$. Ist M eine kompakte orientierte hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension $2m$, so gilt:

$$\text{vol}_{2m}(M) = (-1)^m \frac{\Omega_{2m}}{2} \chi(M) \quad .$$

Bemerkung.

Satz 3.1.3 bleibt auch für *nichtkompakte* hyperbolische Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens bestehen. Für den arithmetischen Fall wurde dies 1971 von G. Harder gezeigt (siehe etwa [32]), während die Verallgemeinerung der Gauss-Bonnet-Formel auf den allgemeinen Fall von M. Gromov 1982 bewiesen worden ist (siehe [32, Theorem (C')]).

Ist M eine (orientierte) hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M , so bezeichne DM die *Verdoppelung* von M entlang ∂M (siehe [12, p. 146]). DM ist eine (orientierte) hyperbolische Mannigfaltigkeit ohne Rand, deren Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(DM)$ folgendermassen durch $\chi(M)$ und $\chi(\partial M)$ dargestellt werden kann (siehe auch [67, Proposition V.13–65]):

LEMMA 3.1.1.

Es sei M eine kompakte orientierte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M . Für die Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(DM)$ der Verdoppelung DM von M gilt:

$$\chi(DM) = 2\chi(M) - \chi(\partial M) \quad .$$

Aus Lemma 3.1.1 folgt für kompakte orientierte berandete hyperbolische Mannigfaltigkeiten M ungerader Dimension n , dass $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$ und somit $\chi(\partial M) \equiv 0 \pmod{2}$; für n gerade ergibt sich $2\chi(M) = \chi(DM)$. Für n ungerade ist die Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(M)$ von M proportional zum Volumen $\text{vol}_{n-1}(\partial M)$ des Randes ∂M entsprechend der Formel von Satz 3.1.3.

Die genaue Bestimmung einer einzelnen charakteristischen Grösse für M ist schwierig und in den meisten Fällen unmöglich. Für das Volumen $\text{vol}_n(M)$ beispielsweise ist dieses Unterfangen schon ab $n \geq 7$ praktisch aussichtslos (vgl. §1.3). Unser Bestreben ist es deshalb, möglichst gute Volumenabschätzungen zu finden.

3.2. Universelle untere Volumenschranken

Für hyperbolische Mannigfaltigkeiten M werden nun explizite universelle untere Volumenschranken herausgearbeitet. Wir unterscheiden dabei, ob M kompakt oder nur von endlichem Volumen, mit oder ohne Rand ist. Die Volumenschranken ergeben sich durch die Konstruktion von eingebetteten kugelförmigen Umgebungen, Spitzen- und Kragenumgebungen. In einem weiteren Schritt können diese Schranken mit Hilfe von Dichteabschätzungen für die resultierenden verallgemeinerten Kugelpackungen in der universellen Überlagerung verbessert werden.

3.2.1. Die Existenz universeller unterer Volumenschranken. Es sei ε_n die n -te Margulis-Konstante für Gruppen $\Gamma \subset I(H^n)$ hyperbolischer Isometrien auf H^n (vgl. §2.2.5). Das Lemma von Margulis (vgl. Satz 2.2.4) garantiert die Existenz einer nur von der Dimension n abhängigen, *universellen* unteren Volumenschranke $v_n > 0$ für H^n/Γ , das heisst, für jede n -dimensionale hyperbolische Raumform $M = H^n/\Gamma$ gilt (vgl. auch (3.1.2)):

$$\text{vol}_n(M) \geq v_n \quad . \quad (3.2.1)$$

Dabei kann die Schranke v_n als Volumen $\text{vol}_n(B(\frac{\varepsilon_n}{2}))$ eines Balls vom Radius $\frac{\varepsilon_n}{2}$ angesetzt werden.

Ist M eine hyperbolische Raumform mit total geodätischem Rand ∂M , so kann nach einer Beobachtung von K. Fukaya mit Hilfe des Lemmas von Margulis ein entsprechendes Resultat abgeleitet werden (siehe auch [58, Proposition 1.1]):

SATZ 3.2.1 (K. Fukaya).

Für $n \geq 3$ sei M eine n -dimensionale kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit total geodätischem Rand ∂M . Dann gibt es eine universelle Konstante $v_n^\partial > 0$, sodass

$$\frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_{n-1}(\partial M)} \geq v_n^\partial \quad .$$

Nachdem die Existenz einer universellen unteren Volumenschranke gesichert ist, kann man versuchen, diese quantitativ zu erfassen. In einem ersten Schritt sieht eine solche Abschätzung etwa folgendermassen aus. Es sei M eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit *Inradius* $r(M) := \sup_{p \in M} r(p, M)$. Ist M kompakt, so ist $r(M) \geq \frac{\varepsilon_n}{2}$ und $v_n(M) := \text{vol}_n(B(r(M))) \geq v_n$. Es folgt

$$\text{vol}_n(M) \geq v_n(M) = \Omega_{n-1} \int_0^{r(M)} \sinh^{n-1} t \, dt \geq \frac{\Omega_{n-1}}{n} (r(M))^n \quad , \quad (3.2.2)$$

wobei wie immer $\Omega_{n-1} = \text{vol}_{n-1}(S^{n-1})$, und in der letzten Ungleichung das hyperbolische Ballvolumen durch das euklidische Ballvolumen minorisiert wird.

Ist M nicht kompakt, aber von endlichem Volumen, so kann $v_n(M)$ mit der Grösse der (endlich vielen und disjunkten) Spitzenumgebungen $U_\gamma := N_\gamma^{n-1} \times (0, \infty) \subset M$ verglichen werden, welche zu inäquivalenten Fixpunkten parabolischer Elemente $\gamma \in \Gamma$ gehören (vgl. §3.1.2). Bezeichnet

$$v_n^\infty(M) := \min_{\substack{\gamma \in \Gamma - \{id\} \\ \text{parabolisch}}} \text{vol}_n(U_\gamma)$$

das Volumen der kleinsten in M eingebetteten Spitzenumgebung, so gilt sicherlich

$$\text{vol}_n(M) \geq m \cdot v_n^\infty(M) \quad , \quad (3.2.3)$$

wobei m gleich der Anzahl der Spitzen ist.

Schliesslich sei M berandet. Dann gibt es zu ∂M einen *Kragen* in M , das heisst, eine halbe Tubenumgebung $T(\partial M, s) = \{p \in M \mid \text{dist}(p, \partial M) < s\}$ für ein $s > 0$ (siehe [12, Satz (13.6)]). Die Kragenweite s von $T(\partial M, s)$ ist durch die halbe Länge eines *Umkehrwegs* zu ∂M abschätzbar. Dabei heisst eine in M verlaufende, geodätische Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0), c(1) \in \partial M$ ein Umkehrweg zu ∂M , falls das Segment $c([0, 1])$ orthogonal zu ∂M in $c(0)$ und $c(1)$ ist. Mit anderen Worten, ist $\widetilde{M} \subset H^n$ der Überlagerungsraum zur universellen Überlagerung π von M , so ist \widetilde{M} ein Gebiet berandet von Hyperebenen $H_i, i \in I$, in H^n . Es seien $x_0, x_1 \in \widetilde{M}$, sodass $\pi(x_0) = c(0)$ und $\pi(x_1) = c(1)$. Weiter sei $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ ein Überlagerungsweg von c mit $\tilde{c}(0) = x_0$ und $\tilde{c}(1) = x_1$. Dann gibt es $i_0, i_1 \in I$ derart, dass $x_0 \in H_{i_0}, x_1 \in H_{i_1}$, und dass \tilde{c} das (eindeutig bestimmte) gemeinsame Lot von H_{i_0} und H_{i_1} der Länge $l(c)$ ist (siehe auch [59, §4]).

Bezeichnet nun

$$s(M) := \frac{1}{2} \inf \{ l(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M \text{ ist ein Umkehrweg zu } \partial M \} \geq 0$$

die *Kragenweite* von M , und ist $v_n^\partial(M) := \text{vol}_n(T(\partial M, s(M)))$ das Volumen des grössten eingebetteten Kragens $T(\partial M, s(M))$ in M , so folgt (vgl. auch Satz 3.2.1)

$$\text{vol}_n(M) \geq v_n^\partial(M) = s(M) \cdot \text{vol}_{n-1}(\partial M) \quad . \quad (3.2.4)$$

Die Ergebnisse können in einem nächsten Schritt stark verbessert werden, indem zusätzlich abgeschätzt wird, wieviel Volumen M *ausserhalb* eines eingebetteten Balls, einer Spitzenumgebung oder eines Kragens besitzt. Dies werden wir in den folgenden Paragraphen mit Hilfe von verallgemeinerten Kugelpackungen untersuchen.

3.2.2. Eine Volumenschranke für kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Es sei $M = H^n/\Gamma, n \geq 2$, eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Inradius $r(M)$. Nach (3.2.2) ist $\text{vol}_n(M) \geq v_n(M) = \text{vol}_n(B(r(M)))$. Diese Abschätzung kann mit Hilfe eines Packungsarguments und der simplizialen Dichtefunktion $d_n(x) < 1$ für gewöhnliche Kugelpackungen des H^n wie folgt verbessert werden (vgl. §1.4.2):

LEMMA 3.2.1.

Für $n \geq 2$ sei M eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Inradius $r(M)$. Dann gilt:

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{v_n(M)}{d_n(r(M))} \quad ,$$

wobei $d_n(r)$ die simpliziale Dichtefunktion ist.

Beweis: Nach Voraussetzung enthält M einen Ball isometrisch zu einer Kugel vom Radius $r := r(M)$. Es sei $\pi : H^n \rightarrow M = H^n/\Gamma$ die universelle Überlagerung von M . Ist $B = B(r) \subset H^n$ eine r -Kugel mit $\pi(B) \subset M$, so liefert $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r) = \{\gamma B \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine Packung von H^n mit Kugeln vom Radius r . Jede Dirichlet-Voronöische Zelle

$$D = D(\mathcal{B}) = \{x \in H^n \mid \text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, B') \text{ , } \forall B' \in \mathcal{B}\}$$

ist ein Dirichlet-Fundamentalpolytop für Γ (vgl. §2.2.2). Daraus folgt $\text{vol}_n(D) = \text{vol}_n(M)$.

Die lokale Dichte $ld_n(B, \mathcal{B}) = \frac{\text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(D)}$ von B in D kann nach dem Satz von Böröczky (vgl. Satz 1.4.1) durch die simpliziale Dichtefunktion $d_n(r)$ abgeschätzt werden. Das heisst:

$$ld_n(B, \mathcal{B}) = \frac{\text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(D)} = \frac{\text{vol}_n(B)}{\text{vol}_n(M)} \leq d_n(r) \quad ,$$

wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn D ein reguläres Polytop $P_{reg} = \{q, 3, \dots, 3\}$ mit simplizialen Eckenfiguren (vgl. §1.4.2, Bemerkung) und Inkugel B vom Radius $r(M)$ ist. P_{reg} gibt Anlass zu einer regulären Pflasterung von H^n mit Schläfli-Symbol $\{q, 3, \dots, 3, 3\}$.

Q.E.D.

Bemerkung.

(a) Aus dem Beweis geht hervor, dass die Gleichheit in Lemma 3.2.1 gilt, falls sich $M = H^n/\Gamma$ in endlich viele kompakte reguläre Polytope mit Schläfli-Symbol $\{q, 3, \dots, 3\}$ zerlegen lässt. Nach den Klassifikationsresultaten für hyperbolische Coxeter-Orthoscheme als charakteristische Simplizes für P_{reg} (vgl. Tafel 1.2.2) folgt somit:

$$\text{vol}_n(M) > \frac{v_n(M)}{d_n(r(M))} \quad \text{für } n > 4 \quad .$$

Die simpliziale Dichtefunktion $d_n(r)$, $r > 0$, ist mit dem regulären Simplexvolumen verknüpft. Es sei $S_{reg} = S_{reg}(2\alpha) \subset H^n$ ein reguläres n -Simplex mit Keilwinkel 2α und Kantenlänge $2r$, welche gekoppelt sind entsprechend (vgl. (1.2.8))

$$\frac{1}{n} < \cos(2\alpha) = \frac{\cosh(2r)}{1 + (n-1)\cosh(2r)} < \frac{1}{n-1} \quad . \quad (3.2.5)$$

Das Simplex $S_{reg}(2\alpha) \subset H^n$ ist in $(n+1)!$ Orthoscheme $R(\alpha)$ mit Keilwinkeln $\alpha, \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{\pi}{3}$ und Graph $\Sigma(R(\alpha)) : \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ$ zerlegbar (vgl. (1.2.9)). Nach diesen Vorbereitungen können wir folgende Volumenschranke formulieren (siehe auch [46]):

SATZ 3.2.2.

Für $n \geq 3$ sei M eine n -dimensionale kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Inradius $r(M)$. Dann gilt:

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{2^{n-1}}{n+1} \text{vol}_n(S_{reg}) = 2^{n-1} n! \text{vol}_n(R(\alpha)) \quad ,$$

wobei S_{reg} das reguläre Simplex mit Kantenlänge $2r(M)$ und charakteristischem Orthoschem $\Sigma(R(\alpha)) : \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ$, $\alpha = \alpha(r(M))$, bezeichnet.

Beweis: Es bezeichne $r := r(M)$ und $B := B(r)$ eine r -Kugel in H^n . Nach Lemma 3.2.1 ist $\text{vol}_n(M) \geq \frac{\text{vol}_n(B)}{d_n(r)}$, wobei $d_n(r)$ die simpliziale Dichtefunktion ist gegeben durch (vgl. (1.4.8))

$$d_n(r) = (n+1) \frac{\text{vol}_n(B \cap S_{reg})}{\text{vol}_n(S_{reg})} \quad .$$

Dabei bezeichnet $S_{reg} \subset H^n$ ein reguläres Simplex der Kantenlänge $2r$, welches von den Zentren von $n+1$ sich gegenseitig berührenden Kopien von B aufgespannt wird. Jede Eckenfigur von S_{reg} ist ein reguläres Simplex $s_{reg} = s_{reg}(2\alpha) \subset S^{n-1}$ von demselben Keilwinkel 2α , womit sich das Volumen eines Ballsektors $B \cap S_{reg}$ wie folgt ausdrücken lässt:

$$\text{vol}_n(B \cap S_{reg}) = \frac{\text{vol}_{n-1}(s_{reg})}{\Omega_{n-1}} \cdot \text{vol}_n(B) \quad .$$

Daraus folgt:

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{\text{vol}_n(B)}{d_n(r)} = \frac{\Omega_{n-1}}{n+1} \cdot \frac{\text{vol}_n(S_{reg})}{\text{vol}_{n-1}(s_{reg})} \quad . \quad (3.2.6)$$

Da die Funktion $\text{vol}_k(s_{reg}(x))$, $k \geq 1$, mit x monoton wachsend ist (vgl. Satz 1.3.1), ergibt sich für das Volumen jeder Eckenfigur $s_{reg} \subset S^{n-1}$, $n \geq 3$, von S_{reg} :

$$\text{vol}_{n-1}(s_{reg}) \leq \text{vol}_{n-1}(s_{reg}(\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2^{n-1}} \Omega_{n-1} \quad .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Q.E.D.

Bemerkung.

(b) Der Beweis von Satz 3.2.2 liefert die grössere, aber kompliziertere Schranke (3.2.6) (siehe auch [46, Theorem]), das heisst:

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{\Omega_{n-1}}{n+1} \cdot \frac{\text{vol}_n(S_{reg})}{\text{vol}_{n-1}(s_{reg})} \quad , \quad (3.2.7)$$

wobei $s_{reg} = s_{reg}(2\alpha) \subset S^{n-1}$ eine Eckenfigur von S_{reg} bezeichnet.

Nach Satz 3.2.2 bleibt schliesslich noch die Frage nach der Mindestgrösse $r_n > 0$ des Inradius $r(M)$ einer n -dimensionalen kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit zu beantworten, um universelle untere Volumenschranken v_n explizite angeben zu können. Es existieren verschiedene Abschätzungen $r(M) \geq r_n$ (siehe etwa [15], [28], [29], [49], [53]). In den meisten Fällen beruhen sie auf der (verallgemeinerten) Ungleichung von Jørgensen (vgl. §2.3.3). Dies trifft nicht auf das Resultat von P. Buser–H. Karcher [15] über die Inradiusabschätzung kompakter hyperbolischer Mannigfaltigkeiten der Krümmung $-1 \leq K < 0$ zu, welches die "beste" Grössenabschätzung liefert, welche uns zum jetzigen Zeitpunkt bekannt ist:

SATZ 3.2.3 (P. Buser–H. Karcher; [15, Proposition 2.5.3 (i)]).

Für $n \geq 3$ sei M eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Inradius $r(M)$. Dann gilt:

$$r(M) \geq r_n := \frac{1}{4^{n+3}} .$$

Bemerkungen.

(c) In Kombination mit Satz 3.2.2 folgt für das Volumen einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 3$:

$$\text{vol}_n(M) \geq v_n \geq \frac{2^{n-1}}{n+1} \text{vol}_n(S_{reg}) , \quad (3.2.8)$$

wobei $S_{reg} \subset H^n$ ein reguläres Simplex mit Kantenlänge $2r_n = \frac{2}{4^{n+3}}$ ist.

(d) Für Inhaltsberechnungen von S_{reg} und des zugehörigen charakteristischen Orthoschems R der Dimension n stehen Volumenformeln für $n \leq 6$ zur Verfügung. Für beliebiges $n > 6$ gibt es untere und obere elementare Volumenabschätzungen (vgl. Lemma 1.3.5) in Abhängigkeit der Keilwinkel beziehungsweise der Kantenlängen (vgl. §3.2.5). Das reguläre Simplexvolumen kann auch durch das Inkugelvolumen nach unten begrenzt werden (vgl. Lemma 1.2.2).

(e) Für $n = 3$ existieren weitaus bessere Schranken für $r(M)$. Mit Hilfe der Jørgensenschen Spurngleichung für $I^+(H^3) = PSL(2, \mathbb{C})$ erhielt R. Meyerhoff [54] $r(M^3) \geq 0.05348$; sein Resultat wurde von F. W. Gehring und G. J. Martin [29] mit denselben, aber verfeinerten Methoden für $I(H^3) = O^+(1, 3)$ zu $r(M^3) \geq 0.05725$ verbessert.

3.2.3. Volumenschranken für nichtkompakte hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Es sei ε_n die n -te Margulis-Konstante und $M = H^n/\Gamma$ eine nichtkompakte hyperbolische Raumform von endlichem Volumen. Die Gruppe Γ enthält neben loxodromischen Elementen mindestens eine parabolische Transformation mit einem eindeutig bestimmten Fixpunkt in ∂H^n , wozu eine unbeschränkte Spitzenumgebung $U \subset M_{(0, \varepsilon_n)}$ im dünnen Teil von M gehört (vgl. §3.1.2). Entsprechend zu Lemma 3.2.1 gilt im nichtkompakten Fall (vgl. auch §1.4.3):

LEMMA 3.2.2.

Für $n \geq 2$ sei M eine n -dimensionale nichtkompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen. Ist $U \subset M_{(0,\varepsilon_n)}$ eine Spitzenumgebung, so gilt:

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{\text{vol}_n(U)}{d_n(\infty)} ,$$

wobei $d_n(\infty)$ die simpliziale Horoballdichte ist.

Beweis: Eine Spitzenumgebung $U \subset M_{(0,\varepsilon)}$ ist von der Gestalt $U = V(\Gamma_x, r)/\Gamma_x$ für ein $0 < r < \varepsilon_n$, wobei Γ_x eine Untergruppe von Γ bestehend aus parabolischen Elementen mit gemeinsamem Fixpunkt $x \in \partial H^n$ ist. Es sei $H^n \subset E_+^n$ und, oBdA, $x = \infty$. Dann ist $V(\Gamma_\infty, r) = \{y \in H^n \mid y_n > r\}$ ein exakt invarianter Horoball zum Zentrum ∞ (vgl. §2.2.5). Schreiben wir $B := V(\Gamma_\infty, r)$, so liefert B eine Horoballpackung \mathcal{B}_∞ von $\overline{H^n}$ (vgl. §1.4.3, (I)), das heisst,

$$\mathcal{B}_\infty = \{ \gamma B \mid \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty \} .$$

Zu jedem Horoball B der Packung gehört eine Dirichlet-Voronöische Zelle

$$D = D(B, \mathcal{B}_\infty) = \{ x \in H^n \mid \text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, B') , \forall B' \in \mathcal{B}_\infty \} .$$

Da Γ_∞ nicht-trivial ist, ist D nicht mehr Fundamentalpolyeder für Γ . Ist dagegen G ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ_∞ auf D , so ist G auch Fundamentalbereich für Γ . Dies impliziert $\text{vol}_n(M) = \text{vol}_n(G)$, sowie $D = \cup_{\gamma \in \Gamma_\infty} \gamma G$. Für die lokale Dichte $ld_n(B, \mathcal{B}_\infty)$ ergibt sich daraus (vgl. §1.4.3, (I)):

$$ld_n(B, \mathcal{B}_\infty) = \frac{\text{vol}_n(B \cap G)}{\text{vol}_n(G)} ,$$

und nach dem Satz von Böröczky (vgl. Satz 1.4.2),

$$\frac{\text{vol}_n(B \cap G)}{\text{vol}_n(G)} \leq d_n(\infty) .$$

Die Ungleichung ist scharf, falls die Horobälle Inkugeln einer regulären Pflasterung $\{q, 3, \dots, 3\}$ in $\overline{H^n}$ sind (vgl. §1.4.2, Bemerkung (a)). Da schliesslich $\text{vol}_n(B \cap G) = \text{vol}_n(U)$ und $\text{vol}_n(G) = \text{vol}_n(M)$, folgt die behauptete Ungleichung.

Q.E.D.

Bemerkungen.

(a) Aus dem Beweis geht hervor, dass die Ungleichung in Lemma 3.2.2 scharf ist, falls U eine reguläre Horoballpackung $\{q, 3, \dots, 3\}$ in $\overline{H^n}$ induziert. Aus der Klassifikationsliste für

1-asymptotische Coxeter-Orthoscheme (vgl. Tafel 1.2.2) als charakteristische Simplex liest man ab, dass solche nur für $n \leq 3$ existieren. Daraus folgt:

$$\text{vol}_n(M) > \frac{\text{vol}_n(U)}{d_n(\infty)} \quad \text{für } n > 3 \quad .$$

(b) Die Werte $d_n(\infty)$, $n \geq 2$, sind als Potenzreihen berechenbar (vgl. Satz 1.4.3). Sie erfüllen $d_n(\infty) < d_{n+1}(\infty)$ (vgl. Lemma 1.4.2) und sind für $2 \leq n \leq 10$ in Tafel 1.4.4 aufgeführt.

Als nächstes schätzen wir die Grösse von kugelförmigen Teilmengen $V \subset U$ einer Spitzenumgebung $U \subset M$ und damit den Inradius $r(M)$ von M ab. Dazu machen wir Gebrauch von den kanonischen Horoballumgebungen zu Spitzen von M (vgl. §2.3.3).

Für $n \geq 3$ sei $M = H^n/\Gamma$ mit $\Gamma \subset I^+(H^n) = M(E_+^n) = PSL(2, C_{n-2})$ eine orientierte hyperbolische Raumform von endlichem Volumen und mit Spitzen. Der Punkt ∞ sei Fixpunkt einer parabolischen Transformation $\varphi \in \Gamma$. Dann ist die Stabilisatorgruppe Γ_∞ eine kristallographische Gruppe (vgl. Satz 2.2.3). Es bezeichne $\Lambda := \Lambda(\Gamma_\infty)$ die freie abelsche Gruppe der Translationen in Γ_∞ ; Λ ist von endlichem Index in Γ und vom Rang $n-1$ (vgl. Satz 2.2.1). Interpretieren wir Λ als Gitter von Vektoren in E^{n-1} , so bezeichne $0 \neq \mu \in \Lambda$ den Vektor minimaler Länge in Λ . Die Menge

$$B_\infty(\mu) = \{x \in H^n \mid x_n > |\mu|\}$$

ist der kanonische Horoball zu φ mit den Eigenschaften (vgl. Satz 2.3.5)

$$\varphi(B_\infty(\mu)) = B_\infty(\mu) \quad ; \quad \gamma(B_\infty(\mu)) \cap B_\infty(\mu) = \emptyset \quad , \quad \forall \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty \quad ,$$

das heisst, B_∞ ist exakt invariant für Γ .

Schliesslich kann zu jeder der (endlich vielen) Spitzen von M ein kanonischer Horoball in H^n konstruiert werden. Da die zugehörigen Fixpunkte parabolischer Transformationen paarweise inäquivalent sind, sind die kanonischen Horobälle disjunkt (vgl. Satz 2.3.6). Nach diesen Vorbereitungen und mit den Kenntnissen über kristallographische Gruppen kann folgende Abschätzung für den Inradius $r(M)$ aufgestellt werden (siehe auch [27, Theorem 6.1]):

SATZ 3.2.4.

Für $n \geq 3$ sei M eine n -dimensionale orientierte hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen und mit $m \geq 1$ Spitzen. Es sei $r(M)$ der Inradius von M . Dann gilt:

$$(1) \quad r(M) \geq r_n := 0.3 \cdot e^{-\frac{2\sqrt{2n-1}+1}{2} \log(2\sqrt{2n-1}+1)+\sqrt{2n-1}-1}} \quad ; \quad v_n^\infty(M) \geq \text{vol}_n(B(r_n)) \quad .$$

$$(2) \quad \text{vol}_n(M) \geq m \cdot \frac{\text{vol}_n(B(r_n))}{d_n(\infty)} \quad .$$

Beweis: Der Beweis beruht auf Ideen von S. Friedland. Es sei $M = H^n/\Gamma$ mit $\Gamma \subset M(E_+^n)$. OBdA sei ∞ Fixpunkt einer parabolischen Transformation in Γ , und $0 \neq \mu \in E^{n-1}$ sei der Vektor minimaler Länge zum Translationsgitter Λ in Γ_∞ , welcher den kanonischen Horoball $B_\infty(\mu)$ liefert. Ist $k \geq 1$ die maximale Ordnung von Elementen in der Holonomiegruppe Γ_∞/Λ (vgl. §2.2.3, Bemerkung (b)), so bezeichne weiter $\rho > 0$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\rho = \log \frac{1}{2\rho k} \quad (3.2.9)$$

Der Horoball $B_\infty(\mu)$ ist exakt invariant für Γ , das heisst,

$$\begin{aligned} \gamma(B_\infty(\mu)) \cap B_\infty(\mu) &= \emptyset \quad \text{für } \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty \quad ; \\ \gamma(B_\infty(\mu)) &= B_\infty(\mu) \quad \text{für } \gamma \in \Gamma_\infty \quad . \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Wirkung von Γ_∞ auf den Punkt $u := (0, \dots, 0, \frac{|\mu|}{2\rho k}) \in B_\infty(\mu)$: Die Elemente $\gamma \in \Gamma_\infty$ operieren als euklidische Isometrien auf Horosphären zum Zentrum ∞ . Nach [27, Theorem 5.4] folgt daraus:

$$|\gamma u - u| \geq \frac{|\mu|}{k} \quad \text{für } \gamma \in \Gamma_\infty - \{\text{id}\} \quad .$$

Für die *hyperbolische* Distanz $\text{dist}(u, \gamma u)$ zwischen $u, \gamma u \in B_\infty(\mu)$ ergibt sich somit (vgl. (1.1.3)):

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \text{dist}(\gamma u, u) = \frac{|\gamma u - u|^2}{u_n [\gamma u]_n} \geq \frac{\frac{|\mu|^2}{k^2}}{\frac{|\mu|}{2\rho k} \cdot \frac{|\mu|}{2\rho k}} = 4\rho^2 \quad ,$$

das heisst,

$$\text{dist}(\gamma u, u) \geq 2\rho \quad , \quad \forall \gamma \in \Gamma_\infty - \{\text{id}\} \quad .$$

Der Horoball $B_\infty(\mu)$ enthält also eine Kugel $B(\rho)$ vom Radius ρ . Da $B_\infty(\mu)$ exakt invariant ist, enthält die Spitzenumgebung $U := B_\infty(\mu)/\Gamma_\infty \subset M$ eine kugelförmige Umgebung vom Radius ρ . Für $\rho > 0$ gilt aber nach (3.2.9) $\rho + \log \rho = -\log(2k)$, das heisst, ρ ist monoton wachsend mit $\rho < \frac{1}{2}$. Daraus folgt $\rho > r_n := \frac{0.3}{k}$. Schliesslich gilt nach (2.2.4) für die Ordnung k von Elementen in Γ_∞/Λ in $I(E^{n-1})$:

$$k \leq e^{\frac{2\sqrt{2n-1}+1}{2} \log(2\sqrt{2n-1}+1) - \sqrt{2n-1}+1} \quad .$$

Somit enthält U eine Teilmenge isometrisch zum $B(\rho)$ vom Radius $\rho > r_n$. Damit ist (1) bewiesen.

Da schliesslich die kanonischen Horobälle zu inäquivalenten parabolischen Fixpunkten von Γ paarweise disjunkt sind, folgt in Kombination von (1) mit Lemma 3.2.2 die Behauptung (2).

Q.E.D.

Bemerkung.

(c) Der Beweis zeigt insbesondere, dass für den Inradius $r(M)$ einer nichtkompakten orientierten hyperbolischen Mannigfaltigkeit M gilt:

$$r(M) \geq \frac{0.3}{k} \quad ,$$

wobei k die maximale Ordnung von Elementen in der Holonomiegruppe $\Gamma_*/\Lambda(\Gamma_*)$ einer elementaren Untergruppe $\Gamma_* \subset \Gamma$ vom parabolischen Typ ist.

Die orientierungserhaltenden torsionsfreien kristallographischen Gruppen sind für Dimensionen ≤ 4 bestens bekannt (vgl. §2.2.3, Bemerkungen (a), (b)). Insbesondere sind die Ordnungen der auftretenden Holonomiegruppen bekannt. Dadurch erhält man für nichtkompakte hyperbolische Raumformen M^n der Dimension $n \leq 5$ die verbesserten Abschätzungen

$$\begin{aligned} r(M^3) &\geq 0.3 \quad ; \\ r(M^4) &\geq \frac{0.3}{6} = 0.05 \quad ; \\ r(M^5) &\geq \frac{0.3}{12} = 0.025 \quad . \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Unabhängig von Satz 3.2.4, aber mit ähnlichen Methoden, kann nun sogar die Grösse von eingebetteten Spitzenumgebungen $U \subset M$ abgeschätzt werden. Bezeichnet für $k \geq 2$

$$i_k := \max \{ [\Gamma : \Lambda(\Gamma)] \mid \Gamma \subset I^+(E^k) \text{ kristallographisch} \} < \infty$$

die maximale Ordnung der Holonomiegruppen von orientierbaren kompakten euklidischen Raumformen der Dimension k (vgl. Satz 2.2.1 und auch §2.2.3, Bemerkung (b)), so gilt (siehe auch [36, Theorem 1]):

SATZ 3.2.5.

Für $n \geq 3$ sei M eine n -dimensionale orientierte hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen und mit $m \geq 1$ Spitzen. Dann gilt:

$$\text{vol}_n(M) \geq m \cdot v_n^\infty \quad \text{mit} \quad v_n^\infty \geq \frac{a(n)}{i_{n-1} \cdot d_{n-1} \cdot d_n(\infty)} \quad ,$$

wobei d_{n-1} die euklidische simpliziale Dichte und $d_n(\infty)$ die simpliziale Horoballdichte bezeichnen. Die Konstante $a(n)$ ist gegeben durch

$$a(n) = \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2} \quad .$$

Beweis: Wir schreiben $M = H^n/\Gamma$ mit $\Gamma \subset I^+(H^n) = M(E_+^n) = PSL(2, C_{n-2})$. Γ ist von endlichem Kovolumen und besitzt m inäquivalente Fixpunkte $x_1, \dots, x_m \in \partial H^n$. OBdA sei etwa $x_1 = \infty$. Zum Stabilisator Γ_∞ gehöre das Translationsgitter Λ mit kürzestem nicht-trivialem Vektor $\mu \in E^{n-1}$. Wie gewöhnlich bezeichne $B_\infty(\mu)$ den kanonischen Horoball in E_+^n im Abstand $|\mu|$ von der Grundebene $\{x_n = 0\}$. Jeder Fundamentalbereich des Gitters Λ in E^{n-1} ist ein Parallelotop $P \subset E^{n-1}$, welches einen Ball $B_0 := B(\frac{|\mu|}{2})$ enthält. Wir erhalten somit eine Gitterpackung

$$\mathcal{B} = \{ \gamma B_0 \mid \gamma \in \Lambda \}$$

von E^{n-1} mit Kugeln vom Radius $\frac{|\mu|}{2}$ und Dirichlet-Voronoi-Zellen $\{ \gamma P \mid \gamma \in \Lambda \}$. Es gilt (vgl. (1.4.1)):

$$\text{vol}_{n-1}(P) = \frac{\text{vol}_{n-1}(B_0)}{d_\Lambda} = \frac{\Omega_{n-2} \cdot |\mu|^{n-1}}{2^{n-1} \cdot (n-1) \cdot d_\Lambda} \quad , \quad (3.2.11)$$

wobei d_Λ die euklidische $(n-1)$ -dimensionale Gitterpackungsdichte ist. Nach (1.4.4) und (1.4.5) ist aber $d_\Lambda \leq d_{n-1}$, wobei d_{n-1} die simpliziale Dichte ist (vgl. (1.4.6)).

Für die Operation Λ auf $B_\infty(\mu)$ erhalten wir den Fundamentalbereich (vgl. auch [72, §4])

$$G = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in H^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P ; x_n > |\mu| \}$$

von endlichem Volumen

$$\text{vol}_n(G) = \int_G \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_n^n} = \text{vol}_{n-1}(P) \cdot \int_{|\mu|}^{\infty} \frac{dx_n}{x_n^n} = \frac{\text{vol}_{n-1}(P)}{(n-1) \cdot |\mu|^{n-1}} \quad .$$

Nach (3.2.11) folgt daraus, dass

$$\text{vol}_n(G) = \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2 \cdot d_\Lambda} \geq \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2 \cdot d_{n-1}} \quad .$$

Für die Spitzenumgebung $U := B_\infty(\mu)/\Gamma_\infty$ gilt also (vgl. auch (2.2.1)):

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(U) &= \frac{\text{vol}_n(G)}{[\Gamma_\infty : \Lambda]} = \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2 \cdot d_{n-1} \cdot [\Gamma_\infty : \Lambda]} \\ &\geq \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2 \cdot d_{n-1} \cdot i_{n-1}} \quad . \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Zusammen mit Lemma 3.2.2 ergibt (3.2.12) die behauptete Ungleichung für den Fall $m = 1$. Da aber die kanonischen Horobälle zu $x_i, x_j, i \neq j$, disjunkt sind, folgt schliesslich der allgemeine Fall $m \geq 1$.

Q.E.D.

Bemerkungen.

(d) Der Beweis von Satz 3.2.5 liefert für $3 \leq n \leq 9$ sogar eine bessere Schranke, nämlich

$$\text{vol}_n(M) \geq \frac{\Omega_{n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)^2 \cdot i_{n-1} \cdot \delta_{n-1} \cdot d_n(\infty)} ,$$

wobei δ_{n-1} die Dichte der (eindeutig bestimmten) besten Gitterpackung in E^{n-1} bezeichnet; die Werte δ_{n-1} sind in Tafel 1.4.1 aufgeführt. Für $10 \leq n \leq 13$ gibt es immerhin noch explizite untere Schranken für δ_{n-1} (vgl. Tafel 1.4.2).

(e) Für $n > 9$ kann die simpliziale Dichte d_{n-1} nach Lemma 1.3.5 (1) in elementarer Weise nach oben abgeschätzt werden.

(f) Für die Grösse i_{n-1} gilt in erster Näherung (vgl. (2.2.3)):

$$i_{n-1} \leq 3^{(n-1)^2} .$$

Ist dagegen $3 \leq n \leq 5$, so gilt (vgl. §2.2.3, Bemerkung (b)):

$$i_2 = 1 \quad ; \quad i_3 \leq 6 \quad ; \quad i_4 \leq 12 .$$

(g) Ist M eine 3-dimensionale orientierte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit $m \geq 1$ Spitzen, so liefert Satz 3.2.5 die Schranke

$$\text{vol}_3(M) \geq 0.50747 \cdot m ,$$

welche in bester Übereinstimmung mit einem entsprechenden Resultat von R. Meyerhoff [54] ist: Sein Ergebnis beruht auf der Abschätzung $\text{vol}_3(U) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ für eine (von disjunkten) Spitzenumgebung $U \subset M$, welche zusammen mit der Dichteabschätzung für die zugehörige Horoballpackung den Wert $\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot d_3(\infty)} \simeq 0.50747$ ergibt.

3.2.4. Eine Volumenschranke für berandete hyperbolische Raumformen. Es sei $M = H^n / \Gamma$, $n \geq 3$, eine berandete hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen und mit Kragenweite $s(M) \geq 0$ (vgl. §3.2.1). Nach (3.2.4) gilt:

$$\text{vol}_n(M) \geq v_n^\partial(M) = s(M) \cdot \text{vol}_{n-1}(\partial M) \geq v_n^\partial .$$

Die Hochhebung des Kragens $T := T(\partial M, s(M)) \subset M$ in die universelle Überlagerung \widetilde{M} von M liefert eine Hyperballpackung

$$BH(s(M)) = \{ \gamma T \mid \gamma \in \Gamma \}$$

und einen $s(M)$ -Kragen zu den (abzählbar unendlich vielen) Komponenten H_i , $i \in I$, von $\partial \widetilde{M}$ (vgl. §1.4.3, (II)). Jede Dirichlet-Voronoi-Zelle

$$D_i = \{ x \in \widetilde{M} \mid \text{dist}(x, H_i) \leq \text{dist}(x, H_j) , \forall j \in I , j \neq i \}$$

kann in abgestumpfte Kegel $K_i(F) = \text{Kegel}_{p_i}(F) \cap D_i$ zerlegt werden; dabei ist $p_i = \text{Pol}(H_i)$ der ultra-unendliche Pol zu H_i , und $F \neq D_i \cap H_i$ ist eine $(n-1)$ -dimensionale Seite (Fazette) von D_i , das heisst:

$$D_i = \bigcup_{\substack{F \text{ Fazette von } D_i \\ F \neq D_i \cap H_i}} K_i(F) \quad .$$

Damit ist ganz $\widetilde{M} = \cup_{i \in I} D_i$ in abgestumpfte Kegel zerlegt.

Es sei K ein durch die Hyperebene H_K abgestumpfter Kegel in \widetilde{M} . Da M von endlichem Volumen vorausgesetzt ist, ist auch $\text{vol}_n(K) < \infty$. Nach Satz 1.4.4 folgt für die Hyperdichte

$$\rho(K, H_K) = \frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_{n-1}(K \cap H_K)}$$

von K bezüglich der Hyperebene H_K , dass

$$\rho(K, H_K) \geq \rho_n(s(M)) \quad ,$$

wobei $\rho_n(r)$ die simpliziale Hyperdichte

$$\rho_n(r) = \frac{\text{vol}_n(T_{reg}(2r))}{(n+1) \cdot \text{vol}_{n-1}(S_{reg}(2\alpha))}$$

eines abgestumpften regulären Simplexes $T_{reg}(2r)$ der Kantenlänge $2r$ bezüglich seiner $n+1$ Randkomponenten $S_{reg}(2\alpha)$ ist (vgl. (1.4.15) und (1.4.16)). Summieren wir über die Volumina der abzählbar unendlich vielen Kegelstumpfe $K \subset \widetilde{M}$ der Form $K_i(F)$ für ein $i \in I$ und eine Fazette $F \subset D_i$, $F \neq D_i \cap H_i$, so folgt schliesslich:

$$\text{vol}_n(\widetilde{M}) = \sum_K \text{vol}_n(K) \geq \rho_n(s(M)) \cdot \sum_K \text{vol}_{n-1}(K \cap H_K) = \rho_n(s(M)) \cdot \text{vol}_{n-1}(\partial \widetilde{M}) \quad .$$

In Analogie zu den Lemmata 3.2.1 und 3.2.2 erhalten wir also hier:

LEMMA 3.2.3 (Y. Miyamoto; [59, Lemma 4.1]).

Für $n \geq 3$ sei M eine berandete hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen und mit Kragenweite $s(M)$. Dann gilt:

$$\frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_{n-1}(\partial M)} \geq \rho_n(s(M)) \quad .$$

Bemerkung.

(a) Nach §1.4.3, Bemerkung (c), ist die Ungleichung in Lemma 3.2.3 genau dann scharf, wenn \widetilde{M} und damit M eine Zerlegung in lauter abgestumpfte reguläre Simplizes T_{reg} der Kantenlänge $2s(M)$ zulässt.

Da $\rho_n(r)$ mit r streng monoton wachsend ist (vgl. §1.4.3, (II)), ergibt sich aus Lemma 3.2.3 folgende universelle untere Volumenschranke:

SATZ 3.2.6 (Y. Miyamoto; [59, Theorem 4.2]).

Für $n \geq 3$ sei M eine berandete hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen. Dann gilt:

$$\frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_{n-1}(\partial M)} \geq \rho_n(0) \quad .$$

Bemerkungen.

(b) Die Ungleichung von Satz 3.2.6 ist scharf für eine Raumform M , welche sich in lauter abgestumpfte reguläre Simplexe $T_{reg}(0)$ mit paarweise (asymptotisch) parallelen Polarseiten zerlegen lässt. Ein solches Simplex zerfällt in $(n+1)!$ abgestumpfte und 1-asymptotische Coxeter-Orthoscheme $R_1(\frac{\pi}{q}) \subset H^n$ mit Graph (vgl. (1.2.11))

$$\Sigma(R_1(\frac{\pi}{q})) \quad : \quad \circ \overset{\infty}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \overset{q}{\text{---}} \circ \quad , \quad 2 \leq q \in \mathbb{N} \quad .$$

Diese existieren aber nur für $n \leq 4$ (siehe [40, Table II]). Daraus folgt (siehe auch [59, Proposition 4.3]):

$$\frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_{n-1}(\partial M)} > \rho_n(0) \quad \text{für } n > 4 \quad .$$

(c) In Tafel 1.4.5 sind die Werte $\rho_n(0)$ für $3 \leq n \leq 6$ tabelliert. Die Abschätzung $\rho_{n-1}(r) < \rho_n(r)$ für $r \geq 0$ (vgl. Lemma 1.4.3) liefert die Schranke

$$\rho_n(0) > \rho_6(0) \simeq 0.64652 \quad \text{für } n > 6 \quad .$$

(d) Ist M von gerader Dimension $2m > 2$, so ist der Rand ∂M eine $(2m-1)$ -dimensionale gewöhnliche unberandete hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen. Ist ∂M kompakt, so sind die Voraussetzungen von Satz 3.2.3 erfüllt; besitzt ∂M Spitzen, so kommt Satz 3.2.5 zur Anwendung, und wir erhalten in beiden Fällen universelle Schranken der Form

$$\text{vol}_{2m}(M) \geq v_{2m}^\partial \quad .$$

Ist M von ungerader Dimension $2m+1 \geq 3$ und orientiert, so kann das Volumen von ∂M nach dem Satz von Gauss-Bonnet-Chern (vgl. Satz 3.1.3) zur Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(M)$ in Beziehung gesetzt werden. Es ist $\chi(\partial M) \equiv 0(2)$. Nehmen wir $|\chi(\partial M)| \geq 2$ an, so ergibt sich aus Satz 3.1.3 und Satz 3.2.6 die universelle Schranke (vgl. auch Bemerkung (c))

$$\text{vol}_{2m+1}(M) \geq v_{2m+1}^\partial \quad \text{mit} \quad v_{2m+1}^\partial \geq \Omega_{2m} \cdot \rho_{2m+1}(0) \quad .$$

3.3. Das Volumenspektrum hyperbolischer Raumformen

In diesem letzten Abschnitt studieren wir das Spektrum Vol_n aller Volumina n -dimensionaler hyperbolischer Raumformen und darin besonders den Bereich kleiner Werte. Für gerades n liefert der Satz von Gauss-Bonnet-Chern die formale Gestalt möglicher Volumina. Interessanter ist deshalb die Frage nach dem Volumenspektrum ungeraddimensionaler Raumformen. Da die Euler-Poincaré-Charakteristik als Volumen nicht mehr zur Verfügung steht, sind wir für konkrete Aussagen auf hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit geometrisch einfachem Fundamentbereich angewiesen, sodass eine Volumenbestimmung möglich ist. Der Bestand an n -dimensionalen hyperbolischen Raumformen für $n > 3$ ist sehr bescheiden und reicht nicht über $n = 5$ hinaus. Man sich deshalb sehr bald mit Volumenabschätzungen zu begnügen, sodass die in §3.2 erzielten Resultate über universelle untere Volumenschranken zur Geltung kommen. Im Folgenden stellen wir die wichtigsten geometrischen Konstruktionen hyperbolischer Raumformen zusammen und diskutieren die Implikationen für die Volumenspektren Vol_n für $n \leq 5$. Wir erheben dabei keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere werden arithmetische Betrachtungen völlig ausgespart (für einige Referenzen siehe [43, §14.4]).

3.3.1. Die Struktur der Volumenspektren. Es sei $n \geq 2$ und $M = H^n/\Gamma$ für $\Gamma \subset I(H^n)$ eine n -dimensionale hyperbolische Raumform von endlichem Volumen. Wir lassen zu, dass M berandet ist, und erhalten durch Übergang zur Verdoppelung DM eine unberandete hyperbolische Raumform mit eingebetteter total geodätischer Hyperfläche.

Das n -te Volumenspektrum Vol_n ist definiert als

$$\text{Vol}_n := \{ \text{vol}_n(M) \mid M = H^n/\Gamma, \Gamma \subset I(H^n) \text{ diskret, torsionsfrei} \} \subset \mathbb{R}_+ .$$

Für jedes n gibt es ein kleinstes Element $v_n > 0$ in Vol_n (vgl. §3.2.1). Weiter gilt nach einem Resultat von J. J. Millson [56], dass es für jedes $n \geq 2$ eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit erster Betti-Zahl $b_1(M) > 0$ gibt. Daraus folgt, dass M eine Überlagerung von jedem Grad $d \geq 1$ besitzt, sodass Vol_n eine *unendliche* Teilmenge von \mathbb{R}_+ ist.

Ist $n = 2m \geq 2$ gerade, so liefert der Satz von Gauss-Bonnet-Chern (vgl. Satz 3.1.3) mehr Einblick und eine Strukturaussage über Vol_{2m} : Das Spektrum Vol_{2m} ist *diskret* in \mathbb{R}_+ und von der Form

$$\frac{2^m \cdot \pi^m}{\prod_{k=1}^m (2k-1)} \cdot J ,$$

wobei $J \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge ist. Insbesondere gilt

$$v_{2m} \geq \frac{2^m \cdot \pi^m}{\prod_{k=1}^m (2k-1)} .$$

Ist $n \geq 4$ beliebig und $v > 0$, so gibt es nach einem Ergebnis von H.-C. Wang [69] nur endlich viele isometrisch verschiedene n -dimensionale hyperbolische Raumformen M mit

$\text{vol}_n(M) < v$. Insbesondere ist Vol_n für beliebiges $n \geq 4$ diskret. Ganz anders präsentiert sich der Fall $n = 3$. Nach Arbeiten von T. Jørgensen und W. Thurston (siehe auch [31]) ist das Volumenspektrum Vol_3 eine abgeschlossene, *nicht-diskrete* Teilmenge von \mathbb{R}_+ ; es ist wohlgeordnet, vom Ordnungstyp ω^ω und enthält nur endlich viele verschiedene hyperbolische Mannigfaltigkeiten von vorgegebenem Volumen. Die Häufungspunkte in Vol_3 entsprechen den Volumina nichtkompakter Mannigfaltigkeiten. Die metrische Struktur von Vol_3 nahe der Häufungspunkte wurde von W. D. Neumann–D. B. Zagier [60] beschrieben. Entsprechende Aussagen bleiben für die folgenden Teilmengen bestehen:

$$\begin{aligned}\text{Vol}_n^c &:= \{ \text{vol}_n(M) \in \text{Vol}_n \mid M \text{ ist kompakt} \} \quad ; \\ \text{Vol}_n^\infty &:= \{ \text{vol}_n(M) \in \text{Vol}_n \mid M \text{ ist nichtkompakt} \} \quad ; \\ \text{Vol}_n^\partial &:= \{ \tfrac{1}{2} \text{vol}_n(DM) \in \text{Vol}_n \mid M \text{ ist berandet} \} \quad .\end{aligned}$$

Zu jeder dieser Familien gibt es eine hyperbolische Raumform von minimalem Volumen, welches durch die zugehörige universelle Schranke v_n^c , v_n^∞ oder v_n^∂ abschätzbar ist (vgl. §3.2).

Es ist ein anderes und schwieriges Problem, auf geometrische Weise n -dimensionale hyperbolische Raumformen überhaupt und insbesondere solche von kleinem Volumen zu konstruieren. In der Tat gibt es konkrete Beispiele hyperbolischer Raumformen nur bis zur Dimension $n = 5$; für $n > 3$ sind dies einzelne Konstruktionen, die auf regulären Pflasterungen des \overline{H}^n beruhen. Letztere existieren lediglich für Dimensionen ≤ 5 . Im Folgenden stellen wir die wichtigsten Ergebnisse zusammen und analysieren die Folgen für die Volumenspektren.

3.3.2. Die Volumenspektren Vol_{2m} . Für $n = 2$ ist das Volumenspektrum Vol_2 Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g > 1$ wohlbekannt und gleich (siehe etwa [31] und [52, §2])

$$\text{Vol}_2 = 2\pi \mathbb{N} \quad .$$

Kleinstes Volumen 2π haben genau vier nicht-homöomorphe hyperbolische Flächen, nämlich eine Sphäre mit drei Spitzen, ein Torus mit einer Spitze, die Kleinsche Flasche mit einer Spitze und die projektive Ebene mit einem Henkel. Davon sind zwei nicht orientierbar.

Für $n = 4$ ist das Volumenspektrum Vol_4 erst kürzlich von J. G. Ratcliffe und S. T. Tschantz [62] bestimmt worden. Genauer gilt:

$$\text{Vol}_4^\infty = \frac{4\pi^2}{3} \mathbb{N} \quad . \quad (3.3.1)$$

Für den Beweis konstruierten Ratcliffe und Tschantz ausgehend vom idealen 24 -Zell, dem regulären Polytop $P_{reg} = \{3, 4, 3\} \subset \overline{H}^4$ mit Keilwinkel $\frac{\pi}{2}$ (vgl. §1.2.4), durch geeignetes Verkleben der 24 Oktaederfazetten eine nichtkompakte orientierbare hyperbolische Mannigfaltigkeit. Das Polytop P_{reg} besitzt das charakteristische Orthoschem R mit Graph $\circ \text{---} \overset{4}{\circ} \text{---} \overset{4}{\circ} \text{---} \circ$ und Volumen $\text{vol}_4(R) = \frac{\pi^2}{864}$ (siehe [42, Appendix]). Ist S eine

kleine Sphäre um das Zentrum p von P_{reg} , so liefert die Eckenfigur R_p von R zu p mit Schema $F_4 : \circ \text{---} \circ \text{---}^4 \circ \text{---} \circ$ durch fortgesetztes Spiegeln an den Fazettenebenen eine Pflasterung von S . Da $\text{vol}_3(R_p) = \frac{\pi^2}{576}$, ist schliesslich P_{reg} in 1152 Orthoscheme R zerlegbar und vom Volumen $\text{vol}_4(P_{reg}) = \frac{4\pi^2}{3}$ (vgl. auch (1.2.4)). Die Mannigfaltigkeit M mit Fundamentalbereich P_{reg} hat Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(M) = 1$ und ist nach dem Satz von Gauss-Bonnet-Chern von minimalem Volumen $\frac{4\pi^2}{3}$. Weiter kann gezeigt werden, dass $b_1(M) > 0$ ist, woraus (3.3.1) folgt.

Über das Volumenspektrum Vol_4^c kompakter Raumformen ist sehr wenig bekannt. Es gibt eine einzige Konstruktion einer kompakten orientierbaren hyperbolischen Raumform, welche von M. W. Davis [21] stammt. Durch geeignetes Verkleben der Seiten eines kompakten regulären Polytops $P_{reg} = \{5, 3, 3\} \subset H^4$ vom Keilwinkel $\frac{2\pi}{5}$ und mit 120 Dodekaederseiten, dem sogenannten *120-Zell*, entsteht eine Mannigfaltigkeit M , für welche nach analogen Überlegungen wie bei der 24-Zell-Konstruktion folgt (siehe [42, Appendix]):

$$\text{vol}_4(M) = \text{vol}_4(P_{reg}) = 14,400 \cdot \text{vol}_4(\circ \text{---}^5 \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}^5 \circ) = \frac{104\pi^2}{3} .$$

Daraus folgt, dass die Euler-Poincaré-Charakteristik von M gegeben ist durch $\chi(M) = 26$. Der hyperbolische Raum H^4 kann aber auch mit dem 120-Zell $Q_{reg} = \{5, 3, 3\}$ vom Keilwinkel $\frac{2\pi}{3}$ gepflastert werden. In diesem Fall ist

$$\text{vol}_4(Q_{reg}) = 14,400 \cdot \text{vol}_4(\circ \text{---}^5 \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ) = \frac{4\pi^2}{3} .$$

Bis zum jetzigen Zeitpunkt ist jedoch unklar, ob die Fazetten von Q_{reg} so verklebt werden können, dass eine hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Fundamentalbereich Q_{reg} resultiert. Eine solche hätte aber minimales Volumen $\frac{4\pi^2}{3}$ und Euler-Poincaré-Charakteristik 1. Bezeichnet $\Gamma \subset I(H^4)$ die diskrete Gruppe, welche von den Spiegelungen an den Fazettenebenen von Q_{reg} erzeugt ist, so existiert nach dem Satz von Selberg (vgl. §2.2.4, Bemerkung (b)) eine torsionsfreie Untergruppe $\Gamma' \subset \Gamma$ von endlichem Index $m \geq 1$, so dass der Quotient $M := H^4/\Gamma'$ eine kompakte hyperbolische Raumform ist; M ist in m reguläre Polytope Q_{reg} zerlegbar und deshalb vom Volumen $m \cdot \frac{4\pi^2}{3}$ und mit $\chi(M) = m$. Ist schliesslich M eine berandete hyperbolische Raumform, so gilt nach dem Satz von Miyamoto (vgl. Satz 3.2.6):

$$\frac{\text{vol}_4(M)}{\text{vol}_3(\partial M)} \geq \rho_4(0) \simeq 0.43219 . \quad (3.3.2)$$

Die Gleichheit in (3.3.2) gilt genau dann, wenn M in ideale abgestumpfte reguläre Simplizes $T_{reg}(0)$ zerlegbar ist. Eine solche Mannigfaltigkeit existiert: Das Polytop $T_{reg}(0)$ ist nach (1.4.16) vom Keilwinkel $\frac{\pi}{3}$ und liefert eine reguläre Pflasterung von $\overline{H^4}$. Wie oben finden wir zu der Pflasterung eine diskrete, torsionsfreie Gruppe hyperbolischer Isometrien, deren Quotient M in endlich viele Exemplare von $T_{reg}(0)$ zerfällt.

Für $n = 2m \geq 6$ gibt es unseres Wissens keine Konstruktion einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Fundamentalpolyeder von bekanntem Volumen.

3.3.3. Das Volumenspektrum Vol_3 . Das Volumenspektrum Vol_3 für dreidimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeiten M und spezialisierte Teilmengen darin werden seit den Entdeckungen von Jørgensen und Thurston eingehend untersucht. Neben den bereits erwähnten Strukturaussagen liegen einige Resultate vor (für eine grobe Übersicht, auch über den arithmetischen Fall, siehe [43, §14.4]). Alle bekannten Extremaleigenschaften, die auf geometrischen Überlegungen beruhen, hängen zusammen mit Grössenabschätzungen eingebetteter Kugel-, Spitzen- und Tubenumgebungen in M und einem Packungsargument für deren Hochhebung in die universelle Überlagerung. Diese Methode wurde erstmals von R. Meyerhoff beschrieben und zur Anwendung gebracht; sie führte zum Erfolg bei der Bestimmung von nichtkompakten, eventuell berandeten Mannigfaltigkeiten und Orbifolds (Quotienten von H^3 nach beliebigen diskreten Gruppen hyperbolischer Isometrien) von minimalem Volumen (siehe [53], [54], [55]). Das Folgende beinhaltet ein Résumé der Ergebnisse für Mannigfaltigkeiten.

Für das Spektrum Vol_3^c kompakter Raumformen ist die Frage, für welche Mannigfaltigkeiten das Minimum v_3^c realisierbar ist, aber noch ungeklärt. Es gilt folgende Abschätzung (vgl. §3.2.2, Bemerkungen (b), (d) und (e)):

$$0.00115 < v_3^c \leq \text{vol}_3(W) \simeq 0.94272 \quad , \quad (3.3.3)$$

wobei W die orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit mit $b_1(W) = 0$ ist, welche durch eine Dehnoperation aus dem Komplement des Whitehead-Links auf S^3 hervorgeht. Die Raumform wurde unabhängig von J. Weeks [71] und S. V. Matveev – A. T. Fomenko [51] entdeckt.

Ein klassisches Beispiel einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit ist der Weber-Seifert-Dodekaederraum M (siehe auch [61, p. 439]), welcher als Vorläufer der 120-Zell-Mannigfaltigkeit von Davis angesehen werden kann: Die Mannigfaltigkeit M geht aus dem kompakten regulären Dodekaeder $P_{reg} = \{5, 3\} \subset H^3$ mit Keilwinkel $\frac{2\pi}{5}$ und charakteristischem Orthoschem R mit Graph $\circ \overset{5}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \overset{5}{\text{---}} \circ$ und mit Volumen $\text{vol}_3(R) \simeq 0.09333$ hervor; sie entsteht durch Identifizieren gegenüberliegender Seiten vermöge einer Drehung um $\frac{3\pi}{5}$. Das Volumen von M beträgt

$$\text{vol}_3(M) = 5! \text{vol}_3(R) \simeq 11.19907 \quad . \quad (3.3.4)$$

Für das Spektrum Vol_3^∞ nichtkompakter Raumformen M mit $m \geq 1$ Spitzen folgt nach Satz 3.2.5 und §3.2.3, Bemerkung (g), dass

$$\text{vol}_3(M) \geq 0.50747 \cdot m \quad . \quad (3.3.5)$$

Es sei M eine nichtkompakte Raumform mit Spitzenumgebung $U \subset M$. Nach Lemma 3.2.2 und der daran anschliessenden Bemerkung (a) folgt, dass

$$\text{vol}_3(M) = \frac{\text{vol}_3(U)}{d_3(\infty)}$$

genau dann, wenn die Hochhebung von U in die universelle Überlagerung eine reguläre Horoballpackung des $\overline{H^3}$ induziert. Im hyperbolischen Raum $\overline{H^3}$ gibt es genau eine solche reguläre Pflasterung; sie ist durch das Schläfli-Symbol $\{6, 3, 3\}$ beschrieben. Eine Zelle von $\{6, 3, 3\}$ besteht aus unendlich vielen 1-asymptotischen Coxeter-Orthoschemen $\circ \text{---} \frac{6}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ$. Die Inkugeln der Zellen sind Horobälle, deren Zentren eine Packung von $\overline{H^3}$ mit idealen regulären Simplizes S_{reg}^∞ vom Keilwinkel $\frac{2\pi}{3}$ liefert; es handelt sich dabei um die *duale* Packung von $\{6, 3, 3\}$. Zu S_{reg}^∞ finden wir eine diskrete, torsionsfreie Gruppe Γ' hyperbolischer Isometrien, sodass der Quotient $M' := H^3/\Gamma'$ mit endlich vielen, etwa $m \geq 1$, idealen regulären Simplizes S_{reg}^∞ triangulierbar ist. Das heisst (vgl. (1.3.8)):

$$\text{vol}_3(M) \geq m \cdot \text{vol}_3(S_{reg}^\infty) \simeq m \cdot 1.01494 \quad .$$

Genauer besagt folgender Satz:

SATZ 3.3.1 (C. C. Adams; [2, Theorem 2.5]).

Es sei M eine dreidimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeit von endlichem Volumen und mit $m \geq 1$ Spitzen. Dann gilt die Ungleichung

$$\text{vol}_3(M) \geq m \cdot \text{vol}_3(S_{reg}^\infty) \quad ,$$

welche genau für $m = 1$ und $m = 2$ scharf ist.

Bemerkungen.

(a) Für $m = 1$ wird die Volumenschranke $\text{vol}_3(S_{reg}^\infty)$ einzig von der (nicht-orientierbaren) Gieseking-Mannigfaltigkeit M_1 realisiert, welche durch geeignetes Seitenidentifizieren aus S_{reg}^∞ konstruiert werden kann (siehe [1]).

Für $m = 2$ gibt es eine eindeutig bestimmte (nicht-orientierbare) Raumform M_2 mit zwei Spitzen, welche durch Verkleben zweier Simplizes der Form S_{reg}^∞ entsteht (siehe [2, Theorem 3.2]).

(b) Nach Vergleich mit (3.3.3) folgt aus Satz 3.3.1, dass das minimale Volumen $v_3 \in \text{Vol}_3$ von einer *kompakten* Mannigfaltigkeit angenommen wird. Dies folgt auch aus den Ergebnissen von Neumann und Zagier [60].

Für das Volumenspektrum Vol_3^∂ von Raumformen M mit Rand ist das minimale Volumen bekannt: Nach Lemma 3.2.3 und nach Satz 3.2.6 ist

$$\frac{\text{vol}_3(M)}{\text{vol}_2(\partial M)} \geq \rho_3(r) \geq \rho_3(0) \quad , \quad (3.3.6)$$

wobei $\rho_3(r)$, $r \geq 0$, die simpliziale Hyperballdichte einer r -Packung in H^3 ist. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn sich M in abgestumpfte reguläre Simplizes $T_{reg}(2r)$ der Kantenlänge $2r$ und mit Keilwinkel (vgl. (1.4.16))

$$\frac{1}{2} \leq \cos(2\alpha) = \frac{\cosh(2r)}{2 \cosh(2r) - 1} \leq 1$$

zerlegen lässt. S. Kojima und Y. Miyamoto konstruierten eine kompakte orientierbare berandete hyperbolische Mannigfaltigkeit M durch Verkleben zweier abgestumpfter regulärer Simplizes T_{reg} vom Keilwinkel $\frac{\pi}{6}$ und bewiesen, dass M von minimalem Volumen v_3^∂ ist (siehe auch [59, Corollary 5.6]). Da T_{reg} in $4!$ 1-abgestumpfte charakteristische Orthoscheme R_1 mit Graph $\circ \xrightarrow{12} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \dots \circ$ zerlegbar ist, gilt (vgl. Satz 1.3.3 (A)):

$$\text{vol}_3(M) = 2 \cdot 4! \cdot \text{vol}_3(R_1) \simeq 6.45199 \quad . \quad (3.3.7)$$

Im nichtkompakten Fall gibt es eine Raumform N mit

$$\frac{\text{vol}_3(N)}{\text{vol}_2(\partial N)} = \rho_3(0) \quad :$$

Ausgehend von einem einzelnen idealen abgestumpften regulären Simplex $T_{reg}(0)$ entsteht N durch Verkleben der Seiten (vgl. [59, Example 5.1]). $T_{reg}(0)$ ist ein ideales reguläres Oktaeder mit Keilwinkel $\frac{\pi}{2}$ und charakteristischem Orthoschem R_1 gegeben durch

$$\circ \xrightarrow{\infty} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{\infty} \circ \quad .$$

Am Rande sei bemerkt, dass $T_{reg}(0)$ auch als Baustein für das Komplement des Whitehead-Links auf S^3 auftritt (siehe dazu [61, p. 453–458]). Da nun $\text{vol}_2(\partial N) = 4 \cdot \text{vol}_2(S_{reg}^\infty) = 4\pi$ und $\text{vol}_3(N) = 4! \cdot \text{vol}_3(R_1) \simeq 3.66386$ (vgl. Satz 1.3.3 (A)), gilt nach Vergleich zu (3.3.7):

$$v_3^\partial = \text{vol}_3(N) = 3.66386 \quad . \quad (3.3.8)$$

3.3.4. Das Volumenspektrum Vol_5 . Für 5-dimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeiten gibt es bis zum jetzigen Zeitpunkt eine einzige geometrisch konstruierte Raumform:

SATZ 3.3.2 (J. G. Ratcliffe–S. T. Tschantz; [62, Theorem 3]).

Es gibt eine fünfdimensionale nichtkompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit M , welche vom Volumen $\text{vol}_5(M) = 28 \zeta(3)$ ist und erste Betti-Zahl $b_1(M) > 0$ besitzt.

Die Konstruktion von Ratcliffe und Tschantz einer Mannigfaltigkeit M gemäss Satz 3.3.2 erfolgt durch Verkleben von 184,320 Exemplaren des 1-asymptotischen Coxeter-Orthoschems R mit Schema

$$\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{4} \circ \text{---} \circ$$

zu einem nichtkompakten Polytop $P \subset \overline{H^5}$. Das Orthoschem R ist Fundamentalpolytop einer der drei verbleibenden regulären Pflasterungen des H^5 . Das Volumen von R haben wir bestimmt (vgl. Satz 1.3.4 und (1.3.9)). Es beträgt:

$$\text{vol}_5(R) = \frac{7}{46,080} \zeta(3) \simeq 0.00018 \quad .$$

Die Raumform M , welche das Polytop P zum Fundamentalbereich hat, ist vom Volumen $\text{vol}_5(M) = 28\zeta(3) \simeq 33.65759$. Ratcliffe und Tschantz konnten zudem $b_1(M) > 0$ nachweisen. Für das Volumenspektrum \mathbf{Vol}_5 folgt daraus:

$$28\zeta(3)\mathbb{N} \subset \mathbf{Vol}_5 \quad . \quad (3.3.9)$$

Für die Teilspektren \mathbf{Vol}_5^c , \mathbf{Vol}_5^∞ und \mathbf{Vol}_5^∂ liefern die Resultate von Abschnitt 3.2 und insbesondere die Sätze 3.2.3, 3.2.5 und 3.2.6 über universelle untere Schranken v_n^c , v_n^∞ und v_n^∂ , $n \geq 3$, schliesslich folgende Abschätzungen

$$v_5^c \geq 3.18046 \cdot 10^{-20} \quad ; \quad v_5^\infty \geq 0.01716 \quad ; \quad v_5^\partial \geq 1.08334 \quad . \quad (3.3.10)$$

Bibliographie

- [1] C. C. Adams, The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100** (1987), 601–606.
- [2] C. C. Adams, Volumes of N -cusped hyperbolic 3-manifolds, *J. London Math. Soc.* (2) **38** (1988), 555–565.
- [3] D. V. Alekseevskij, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov, Geometry of spaces of constant curvature, in: *Geometry II, Encyclopaedia of Math. Sciences*, vol. 29, 1993.
- [4] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhäuser, 1985.
- [5] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [6] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, 1992.
- [7] J. Böhm, Inhaltsmessung im \mathbf{R}_3 konstanter Krümmung, *Arch. Math.* **11** (1960), 298–309.
- [8] J. Böhm, E. Hertel, *Polyedergeometrie in n -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Birkhäuser, 1981.
- [9] K. Böröczky, A. Florian, Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964), 237–245.
- [10] K. Böröczky, Packing of spheres in spaces of constant curvature, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **32** (1978), 243–261.
- [11] A. Borel, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.
- [12] T. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer-Verlag, 1973.
- [13] H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek, H. Zassenhaus, *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wiley, 1978.
- [14] M. Burger, V. Schroeder, Volume, diameter and the first eigenvalue of locally symmetric spaces of rank one, *J. Differential Geometry* **26** (1987), 273–284.
- [15] P. Buser, H. Karcher, Gromov's almost flat manifolds, *Astérisque* **81**, Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [16] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, zweite Auflage, Springer-Verlag, 1992.
- [17] H.S.M. Coxeter, The functions of Schläfli and Lobatschewsky, *Quart. J. Math. (Oxford)* **6** (1935), 13–29.
- [18] H. S. M. Coxeter, Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1954), 263–274.
- [19] H. S. M. Coxeter, An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. III, AMS (1963), 53–72.

- [20] H. S. M. Coxeter, Regular polytopes, dritte Auflage, Dover, 1973.
- [21] M. W. Davis, A hyperbolic 4-manifold, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 325–328.
- [22] H.E. Debrunner, Dissecting orthoschemes into orthoschemes, Geom. Dedicata **33** (1990), 123–152.
- [23] J. L. Dupont, C. H. Sah, Scissors congruences, II, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), 159–195.
- [24] L. Fejes Tóth, Über die dichteste Kugellagerung, Math. Z. **48** (1943), 676–684.
- [25] L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Budapest, 1965.
- [26] L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, zweite Auflage, Springer-Verlag, 1972.
- [27] S. Friedland, Discrete groups of unitary isometries and balls in hyperbolic manifolds, Proc. ILAS 4th Conference, Rotterdam, 1994, wird demnächst erscheinen.
- [28] S. Friedland, S. Hersonsky, Jorgensen's inequality for discrete groups in normed algebras, Duke Math. J. **69** No. 3 (1993), 593–614.
- [29] F. W. Gehring, G. J. Martin, Inequalities for Möbius transformations and discrete groups, J. reine angew. Math. **418** (1991), 31–76.
- [30] O. Giering, Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg, 1982.
- [31] M. Gromov, Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen, Séminaire Bourbaki, 32e année, 1979/80, no. 546, 1–14.
- [32] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **56** (1982), 5–100.
- [33] U. Haagerup, H. J. Munkholm, Simplices of maximal volume in hyperbolic n-space, Acta Math. **147** (1981), 1–12.
- [34] T. C. Hales, The status of the Kepler Conjecture, The Mathematical Intelligencer **16** (3) (1994), 47–58.
- [35] E. Heintze, Hyperbolische Mannigfaltigkeiten, Habilitationsschrift, Universität Bonn, 1976.
- [36] S. Hersonsky, Covolume estimates for discrete groups of hyperbolic isometries having parabolic elements, Michigan Math. J. **40** (1993), 467–475.
- [37] S. Hersonsky, A generalization of the Shimizu-Leutbecher and Jorgensen inequalities to Möbius transformations in \mathbb{R}^n , Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 209–215.
- [38] H. Huber, Über die Isometriegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit negativer Krümmung, Helvetica Physica Acta **45** (1972), 277–288.
- [39] W.-Y. Hsiang, A rejoinder to Hales's article, The Mathematical Intelligencer **17** (1) (1995), 35–42.
- [40] H.-C. Im Hof, Napier cycles and hyperbolic Coxeter groups, Bull. Soc. Math. Belgique, Série A, **42** (1990), 523–545.
- [41] R. Kellerhals, On the volume of hyperbolic polyhedra, Math. Ann. **285** (1989), 541–569.
- [42] R. Kellerhals, On Schläfli's reduction formula, Math. Z. **206** (1991), 193–210.

- [43] R. Kellerhals, The Dilogarithm and volumes of hyperbolic polytopes, in: Structural Properties of Polylogarithms, Herausgeber Leonard Lewin, AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 37, 1991.
- [44] R. Kellerhals, On volumes of hyperbolic 5-orthoschemes and the Trilogarithm, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 648–663.
- [45] R. Kellerhals, Volumes in hyperbolic 5-space, Preprint MPI/94-14, wird bei GAFA erscheinen.
- [46] R. Kellerhals, Regular simplices and lower volume bounds for hyperbolic n -manifolds, Preprint MPI/94-65, 1994.
- [47] L. Lewin, Polylogarithms and associated functions, North Holland, 1981.
- [48] N.I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, übersetzt und kommentiert von F. Engel, Teubner, 1898.
- [49] G. J. Martin, Balls in hyperbolic manifolds, J. London Math. Soc. (2) **40** (1989), 257–264.
- [50] G. J. Martin, On discrete Möbius groups in all dimensions: a generalization of Jørgensen's inequality, Acta Math. **163** (1989), 253–289.
- [51] S. V. Matveev, A. T. Fomenko, Constant energy surfaces of hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds, Russian Math. Surveys **43** (1988), 3–24.
- [52] A. D. Mednykh, Automorphism groups of three-dimensional hyperbolic manifolds, Amer. Math. Soc. Transl. **151** (1992), 107–119.
- [53] R. Meyerhoff, Sphere-packing and volume in hyperbolic 3-space, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 271–278.
- [54] R. Meyerhoff, A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds, Can. J. Math. **39** (1987), 1038–1056.
- [55] R. Meyerhoff, A lower bound for the volume of hyperbolic 3-orbifolds, Duke Math. J. **57** (1988), 185–203.
- [56] J. J. Millson, On the first Betti number of a constant negatively curved manifold, Ann. of Math. **104** (1976), 235–247.
- [57] J. Milnor, Geometry, *Collected papers*, Band 1, Publish or Perish, 1994.
- [58] Y. Miyamoto, On the volume and surface area of hyperbolic polyhedra, Geometriae Dedicata **40** (1991), 223–236.
- [59] Y. Miyamoto, Volumes of hyperbolic manifolds with geodesic boundary, Topology **33** (1994), 613–629.
- [60] W. D. Neumann, D. B. Zagier, Volumes of hyperbolic three-manifolds, Topology **24** (1985), 307–331.
- [61] J. G. Ratcliffe, Foundations of hyperbolic manifolds, Springer-Verlag, 1994.
- [62] J. G. Ratcliffe, S. T. Tschantz, Volumes of hyperbolic manifolds, Preprint, 1994.
- [63] A. Reznikov, The volume and the injectivity radius of a hyperbolic manifold, Topology **34** (1995), 477–479.

- [64] C. A. Rogers, *Packing and covering*, Cambridge University Press, 1964.
- [65] C. H. Sah, *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence*, Pitman, 1979.
- [66] L. Schläfli, *Die Theorie der vielfachen Kontinuität*, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Band 1, Birkhäuser, 1950.
- [67] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, 1975.
- [68] E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, in: *Geometry II*, *Encyclopaedia of Math. Sciences*, vol. 29, Springer-Verlag, 1993.
- [69] H.-C. Wang, *Topics in totally discontinuous groups*, in: *Symmetric Spaces*, W. M. Boothby and G. L. Weiss, Editors, *Pure Appl. Math.*, 8, Marcel Dekker, 1972.
- [70] P. L. Waterman, *Möbius transformations in several dimensions*, *Adv. Math.* 101 (1993), 87–113.
- [71] J. Weeks, *Hyperbolic structures on three-manifolds*, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1985.
- [72] N. J. Wielenberg, *Discrete Moebius groups: fundamental polyhedra and convergence*, *Amer. J. Math.* 99 (1977), 861–877.
- [73] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, fünfte Auflage, Publish or Perish, 1984.
- [74] X. Xue, *On the Betti numbers of a hyperbolic manifold*, *GAFSA* 2 (1992), 126–136.

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
53225 Bonn
Deutschland