Modulformen auf $\Gamma_0(N)$ mit rationalen Perioden

Jannis A. Antoniadis

Mathematisches Institut der Universität
Kreta
71409 Iraklio
Kreta

Griechenland

Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Germany

MPI/91-24

Modulformen auf $\Gamma_0(N)$ mit rationalen Perioden

von

Jannis A. Antoniadis

aus Iraklio

§1. Einleitung. Durch den Eichler-Shimura-Isomorphismus werden bekanntlich auf den Räumen $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ der Spitzenformen vom Gewicht $2k$ zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ rationale Strukturen $S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N))$ erklärt, d.h. $S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N)) \subset S_{2k}(\Gamma_0(N))$ sind Vektorräume über $\mathbb{Q}$ und

$$S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = S_{2k}(\Gamma_0(N)).$$

Diese rationalen Strukturen wurden von Kohnen und Zagier für den Fall $N = 1$ in [Ko-Za] studiert. In dieser Arbeit verallgemeinern wir die in [Ko-Za] entwickelten Methoden um eine explizite Beschreibung der rationalen Strukturen für beliebige quadratfreie Stufe N zu geben. Tatsächlich sind die meisten der hier dargestellten Ergebnisse für beliebige Stufe N gültig; die Einschränkung N quadratfrei wird zur Vereinfachung lediglich an einer Stelle benötigt (siehe Ende §4).

Zur Formulierung unserer Ergebnisse haben wir zuvor einige Notation einzuführen. Sei k eine im folgenden fest gewählte positive ganze Zahl. Wir ordnen jeder Spitzenform $f \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$ und jeder Matrix $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ Polynome $\rho_A^+(f)(X)$ und $\rho_A^-(f)(X)$ in der Unbestimmten X zu, indem wir

$$\rho_A^{\pm}(f)(X) = \frac{1}{2}\left\{\rho_A(f)(X) \pm \rho_{\varepsilon A \varepsilon}(f)(-X)\right\}$$

mit

$$\rho_A(f)(X) = \int_0^{i\infty} (f|_{2k}A)(z)(X-z)^w dz$$

setzen. Hier ist $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und wir vereinbaren ein für alle mal $w = 2k-2$. Ferner ist '$|_{2k}$' der übliche 'Strich-Operator', d.h.

$$(f|_{2k}A)(z) = (ad-bc)^k f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-2k}$$

$$(A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),\ ad-bc > 0).$$

Wir setzen für $\iota = \pm 1$

$$S_{2k}^{\iota}(\Gamma_0(N)) = \{f \in S_{2k}(\Gamma_0(N)) \mid \text{für alle} A \in SL_2(\mathbb{Z})\,(\rho_A^{\iota}(f)(X) \in \mathbb{Q}[X])\}.$$

Für jede natürliche Zahl n , $0 \leq n \leq w$, $A \in \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbf{Z})$ und $f \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$ definieren wir

$$\begin{aligned}
r_{n,A}(f) &= \int_0^{i\infty} (f|_{2k}A)(z)z^n dz, \\
r^+_{n,A}(f) &= \frac{1}{2i}\{r_{n,A}(f) + (-1)^n r_{n,\epsilon A\epsilon}(f)\}, \\
r^-_{n,A}(f) &= \frac{1}{2}\{r_{n,A}(f) - (-1)^n r_{n,\epsilon A\epsilon}(f)\}, \\
\rho_{f,A}(X) &= \int_0^{i\infty} (f\ |_{2k}\ A)(z)(X - z)^w dz \\
&= \sum_{n=o}^{w} (-1)^n \binom{w}{n} r_{n,A}(f) X^{w-n}, \\
\rho^+_{f,A}(X) &= \sum_{n=0}^{w} (-1)^n \binom{w}{n} r^+_{n,A}(f) X^{w-n}, \\
\rho^-_{f,A}(X) &= \sum_{n=0}^{w} (-1)^n \binom{w}{n} r^+_{n,A}(f) X^{w-n}.
\end{aligned}$$

Sei $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ gegeben. Wir setzen

$$M_{b,d} := \begin{pmatrix} n/d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

für gegebenen natürliche Zahlen b, d mit $0 \leq b < d$ $d|n$, und bezeichnen mit $A_{b,d}$ diejenige Matrix aus $SL_2(\mathbf{Z})$ so daß $A_{b,d}M_{b,d}A^{-1}$ eine obere Diagonalmatrix ist. Ferner setzen wir

$$B_{b/d,j} = \begin{pmatrix} b_j & (-1)^{j+1}d_{j-1} \\ d_j & (-1)^{j+1}d_{j-1} \end{pmatrix},$$

wobei b_j/d_j, für $j = 1, 2, ..., r(b/d)$, die j-te Konvergente der Kettenbruchentwicklung $b/d = [0; a_1, a_2, ...a_{r(b/d)}]$ (mit $a_{r(b/d)} \geq 2$) von b/d ist. ist.

Unser erstes Hauptergebnis ist dann

Satz A. *Durch die Räume $S^{\pm}_{2k}(\Gamma_0(N))$ werden Hecke-invariante rationale Strukturen auf $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ erklärt, d.h. für $\iota = \pm 1$ enthält der $\mathbf{Q}-$Vektorraum $S^{\iota}_{2k}(\Gamma_0(N))$ eine Basis von $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ und ist invariant unter den Hecke -Operatoren $T(n)$ $((n, N) = 1)$ und den Atkin-Lehner-Involutionen W_ℓ $(\ell|N,\ (\ell, \frac{N}{\ell}) = 1)$. Für die Aktion der Hecke-Operatoren gilt explizit:*

$$\rho^{\pm}_{2k,A}(T(n)f)(X) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0 \\ 0\leq b<d}} d^w \Bigg\{ \rho^{\pm}_{2k,A_{b,d}}(f)\big(M_{b,d}(X)\big) - \sum_{j=1}^{r(b/d)} \rho^{\pm}_{2k,A_{b,d}B_{b/d,j}}\Big(B_{b/d,j}M_{b,d}(X)\Big)\Big(-d_jM_{b,d}(X) + b_j\Big)^w \Bigg\}.$$

Es seien nun $R_{n,A}^{\iota}$ die Kernfunktionen zum $n-$ten Koeffizienten von ρ_A^{ι} bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes, d.h. $R_{n,A}^{\iota}$ ist definiert durch

$$\text{für alle} f \in S_{2k}(\Gamma_0(N)) \ : \qquad \langle f, R_{n,A}^{\iota}\rangle = n-\text{ter Koeffizient von } \rho_A^{\iota}(f)(X).$$

Das Peterssonsche Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist hierbei normiert durch

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0(N)]} \int_{\Gamma_0(N)\backslash \mathbf{H}} f(z)\overline{g(z)} y^{2k-4} dx dy \qquad (z = x+iy).$$

Im zweiten Teil dieser Arbeit geben wir explizite Formeln für die Periodenpolynome der $R_{n,A}^{\iota}$ an. Genauer zeigen wir

Satz B. *Seien A, $B \in SL_2(\mathbf{Z})$, $\iota \in \{\pm 1\}$, und seien m, n ganze Zahlen mit $0 \leq m, n \leq w$, $(m,n) \neq (0,0)$, (w,w). Dann sind die Zahlen*

$$r_{m,B}^{\iota}(R_{n,A}^{-\iota})$$

rational. Sie können explizit durch endliche Linearkompinationen von Bernoullische Polynomen an rationalen Stellen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen beschrieben werden.

Die hier erwähnten Formeln für die Perioden $r_{m,B}^{\iota}(R_{n,A}^{-\iota})$ sind am Ende des §4 zusammengestellt.

Danksagungen. W. Kohnen, N.-P. Skoruppa und Don B. Zagier möchte ich für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Thema und für ihre ständige Bereitschaft zu zahlreichen Hinweisen und Ratschlägen herzlich danken. Mein herzlicher Dank gilt auch dem Max-Planck-Institut für Mathematik, dessen finanzielle Unterstützung diese Arbeit ermöglichte.

§2. **Der Eichler-Shimura-Isomorphismus.** Für eine natürliche Zahl N sei $\Gamma_0(N)$ die Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbf{Z}) : c \equiv 0 \bmod N\}$$

und für $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, bezeichne $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ den Vektorraum aller Spitzenformen vom Gewicht $2k$ auf $\Gamma_0(N)$ und $\mathbf{H}$ die obere Halbebene $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \Im(z) > 0\}$.

Für jeden Unterkörper E von $\mathbf{C}$ sei jetzt $V_E = \{P(X) \in E[X] : degP(X) \leq w\}$, $w = 2k-2$ der Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten aus E und Grad kleiner oder gleich w. Die Gruppe $PGL_2(E)$ operiert auf V_E vermöge

$$PGL_2(E) \times V_E \longrightarrow V_E$$

$$(A, P(X)) \longmapsto A \cdot P(X) := (P|_{-w}A^{-1})(X)$$

wobei

$$(P|_{-w}A)(X) = (cX+d)^w P(\frac{aX+b}{cX+d})$$

für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist.

Die erste parabolische Cohomologie von $\Gamma_0(N)$ ist wie folgt definiert :

$C_E = \{\sigma : \Gamma_0(N) \to V_E$: (i) $\sigma(AB) = \sigma(A) + A \cdot \sigma(B)$ für alle $A, B \in \Gamma_0(N)$ und (ii) zu jedem parabolischen $A \in \Gamma_0(N)$ existiert ein $P(X) \in V_E$ mit $\sigma(A) = P(X) - (A \cdot P)(X)\}$ (1-Kozykel)

$B_E = \{\sigma : \Gamma_0(N) \to V_E$: es gibt ein $P(X) \in V_E$, so daß für alle $A \in \Gamma_0(N)$ gilt : $\sigma(A) = P(X) - (A \cdot P)(X)\}$ (1-Korand)

$$H_P^1(\Gamma_0(N), V_E) := \frac{C_E}{B_E}.$$

Mit Hilfe von $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Involution

$$I : H_P^1(\Gamma_0(N), V_E) \to H_P^1(\Gamma_0(N), V_E)$$

$$\sigma + B_E \mapsto \widetilde{\sigma} + B_E,$$

wobei $\widetilde{\sigma} : \Gamma_0(N) \ni A \mapsto \widetilde{\sigma}(A) = (\varepsilon \cdot \sigma(\varepsilon A \varepsilon))(X) \in V_E$, definiert, und demzufolge erhält man die Zerlegung

$$H_P^1(\Gamma_0(N), V_E) = H_P^1(\Gamma_0(N), V_E)^+ \oplus H_P^1(\Gamma_0(N), V_E)^-.$$

Der Satz von *Eichler – Shimura* liefert uns einen $\mathbb{R}$-Isomorphismus zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ und $H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{R}})$ bezüglich der Abbildung

$$\Phi: \ S_{2k}(\Gamma_0(N)) \longrightarrow H^1_P(\Gamma_0(N), \mathbb{R})$$

$$f \mapsto \sigma_f + B_{\mathbb{R}},$$

wobei $\sigma_f(A) = \frac{1}{2}\Re\left(\int_0^{A(0)} f(z)(X-z)^w dz\right)$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_{2k}(\Gamma_0(N)) & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{R}}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle I^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle I} \\ S_{2k}(\Gamma_0(N)) & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

ist kommutativ, mit

$$I^*: f \mapsto -\overline{f(-\bar{z})}.$$

und

$$I: \sigma \mapsto (\tilde{\sigma}: \tilde{\sigma}(A) = \sigma(\varepsilon A \varepsilon)).$$

Sind $S^{\pm}_{2k}$ die Eigenräume der Involution I^*, so induziert Φ zwei Isomorphismen

$$\Phi^{\pm}: S^{\pm}_{2k} \longrightarrow H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{R}})^{\pm}$$

und nach dem Universellen Koeffizientensatz [MacL] induziert Φ $\mathbb{C}$-isomorphismen

$$S_{2k}(\Gamma_0(N)) \cong S^{\pm}_{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong H^1_p(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^{\pm}.$$

Aus den obigen Bemerkungen ergibt sich die Richtigkeit der

Proposition 1. *Die Abbildungen*

$$f \longmapsto \frac{1}{2i}(\pi_f + \widetilde{\pi}_f)$$

und

$$f \longmapsto \frac{1}{2}(\pi_f - \widetilde{\pi}_f)$$

definieren Isomorphismen

$$\Phi^+: S_{2k}(\Gamma_0(N)) \longrightarrow H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^+$$

und

$$\Phi^-: S_{2k}(\Gamma_0(N)) \longrightarrow H^1_P(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{C}})^-.$$

Hierbei ist

$$\pi_f(A) = \int_0^{A(0)} f(z)(X-z)^w dz$$

und

$$\widetilde{\pi}_f(A) = \int_0^{-A(0)} f(z)(X+z)^w dz$$

.

Seien nun $S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N)) := (\Phi^{\pm})^{-1}\big((H_P^1(\Gamma_0(N), V_{\mathbb{Q}})^{\pm}\big)$.

Dann ist klar , daß $S_{2k}(\Gamma_0(N)) \cong S_{2k}^{+}(\Gamma_0(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ und genauso $S_{2k}(\Gamma_0(N)) \cong S_{2k}^{-}(\Gamma_0(N)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, daß also mittels der Isomorphismen

$\Phi^{\pm}$ *rationale Strukturen* auf $S_{2k}(\Gamma_0(N))$ definiert sind. Wir werden jetzt diese rationalen Strukturen mittels Perioden ausdrücken.

Durch Identifikation von $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ mittels der Abbildung

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto (\gamma \bmod N : \delta \bmod N)$$

kann man

$$\rho^{\pm}(f) = \left\{\rho_{f,A}^{\pm}(X)\right\}_{A \in \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbb{Z})}$$

als ein Element von $\mathbb{C}[X]_w^{\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}$ auffassen. So sind zwei Funktionen

$$\rho^+, \rho^- : S_{2k}(\Gamma_0(N)) \longrightarrow \mathbb{C}[X]_w^{\mathbf{P}^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}$$

$$f \longmapsto \rho^{\pm}(f)$$

definiert. Mit Hilfe des sogenannten Manin-Tricks ($[Man], [L]$) kann man nun folgende Proposition Beweisen:

Proposition 2. *([Sko]) ρ^+ und ρ^- sind injektiv.*

Eine unmittelbare Folge des Beweises der Proposition 2 (loc. cit.) ist die folgende Charakterisierung der Räume $S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N))$:

$$S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N)) = \Big\{f \in S_{2k}(\Gamma_0(N)) : r_{n,A}^{\pm}(f) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \text{ mit } 0 \leq n \leq w \text{ und } A \in SL_2(\mathbb{Z})\Big\}.$$

Als nächstes werden wir die Aktion der *Hecke – Algebra* auf $S_{2k}^{\pm}(\Gamma_0(N))$ betrachten.

Proposition 3. *Die Vektorräume $S^{\pm}_{2k}(\Gamma_0(N))$ bleiben invariant unter der Aktion der Hecke-Operatoren $T(n)$ $((n,N)=1)$ und den Atkin-Lehner Involutionen W_ℓ $(\ell|N, (\ell,\frac{N}{\ell})=1$.*

Beweis: Sei $A \in SL_2(\mathbf{Z})$, $f \in S^{\pm}_{2k}(\Gamma_0(N))$, $n \in \mathbf{N}$ und $(n,N)=1$. Für iede ganze Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $a,d>0$, $ad=n$, $b \bmod d$ gibt es ein $A_{b,d} \in SL_2(\mathbf{Z})$ so daß $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} A = A_{b,d}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, mit geeignete ganzen $a', d' > 0, b', a'd' = n$, gilt. Durchläuft hierbei (a,d,b) die Menge aller ganzahlige Tripel mit $ad=n$ $0 \le b < d$, so durchläuft (a',d',d') die gleiche Menge.

Folglich ist:

$$\rho_{2k,A}\big(T(n)f\big)(X) =$$
$$n^{2k-1}\sum_{\substack{ad=n\\a,d>0}} d^{-2k}\sum_{b \bmod d}\int_0^{i\infty}(f|_{2k}A_{b,d})\Big(\frac{az+b}{d}\Big)(X-z)^w dz.$$

Ersetzen wir nun $\frac{az+b}{d}$ durch z, so finden wir:

$$\rho_{2k,A}\big(T(n)f\big)(X) = n^{2k-1}\sum_{\substack{ad=n\\a,d>0\\0\le b<d}} d^{-2k}\int_{\frac{b}{d}}^{i\infty}(f|_{2k}A_{b,d})(z)\Big(X-\frac{dz-b}{a}\Big)^w\frac{d}{a}dz$$

und weiter

$$\rho_{2k,A}\big(T(n)f\big)(X) =$$
$$n^{2k-1}\sum_{\substack{ad=n\\a,d>0\\0\le b<d}} d^{-2k}\int_{\frac{b}{d}}^{i\infty}(f|_{2k}A_{b,d})(z)\Big(\frac{aX+b}{d}-z\Big)^w\frac{d^{w+1}}{a^{w+1}}dz =$$
$$\sum_{\substack{ad=n\\a,d>0\\0\le b<d}} d^w\rho_{2k,A_{b,d}}(f)\big(\frac{aX+b}{d}\big) - \sum_{\substack{ad=n\\a,d>0\\0\le b<d}} d^w\int_0^{\frac{b}{d}}(f|_{2k}A_{b,d})\big(\frac{aX+b}{d}-z\big)^w dz.$$

Mit Hilfe des Manin-Tricks wieder, kann man das letzte Integral wie folgt schreiben:

$$I_{b,d} := \int_0^{\frac{b}{d}}(f|_{2k}A_{b,d})\big(\frac{aX+b}{d}-z\big)^w dz = \sum_{j=1}^{r(b/d)}\int_{B_{b/d,j}(0)}^{B_{b/d,j}(0)}(f|_{2k}A_{b,d})(z)(M_{b,d}(X)-z)^w dz$$

Hierbei sind $B_{b/d,j}$ und $M_{b,d}$ die in die Einleitung definierende Matrizen. Folglich hat man

$$\rho_{2k,A}\big(T(n)f\big)(X) = \sum_{\substack{ad=n\\ a,d>0\\ 0\le b<d}} d^w \rho_{2k,A_{b,d}}(f)\big(M_{b,d}((X)\big)J$$

$$- \sum_{\substack{ad=n\\ a,d>0\\ 0\le b<d}} d^w \sum_{j=1}^{r(b/d)} \rho_{2k,A_{b,d}B_{b/d,j}}(f)\big((B_{b/d,j}M_{b,d})(X)\big)(-d_jM_{b,d}(X)+b_j)^w.$$

Entsprechend berechnen wir den zweiten Summanden von $\rho^{\pm}_{2k,A}(f)(X)$. Damit finden wir

$$\rho^{\pm}_{2k,A}\big(T(n)f\big)(X) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{ad=n\\ a,d>0\\ 0\le b<d}} d^w\cdot$$

$$\left\{\rho^{\pm}_{2k,A_{b,d}}(f)\big(M_{b,d}(X)\big) - \sum_{j=1}^{r(b/d)} \rho^{\pm}_{2k,A_{b,d}B_{b/d,j}}\big(B_{b/d,j}\cdot M_{b,d}(X)\big)\big(-d_jM_{b,d}(X)+b_j\big)^w\right\}.$$

Aus der letzten Formel ergibt sich die Invarianz der Räume $S^{\pm}_{2k}(\Gamma_0(N))$ unter der Aktion der Hecke-Operatoren $T(n), (n,N) = 1$. Ganz analog kann man die Invarianz unter der Aktion der *Atkin-Lehner-Involution*

$$W_\ell f := f|_{2k}\frac{1}{\sqrt{\ell}}\begin{pmatrix}\ell & \alpha\\ N & \ell\beta\end{pmatrix}$$

$\ell|N, (\ell, \frac{N}{\ell}) = 1, \alpha,\beta\in \mathbf{Z}, \ell\beta - \frac{N}{\ell}\alpha = 1$ beweisen. Man hat

$$\rho_{2k,A}\big(W_\ell(f)\big) = \int_0^{i\infty} \big(f|_{2k}(W_\ell A)\big)(z)(X-z)^w dz,$$

schreibt $W_\ell A = A_{b,d}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$, wobei $A_{b,d}\in SL_2(\mathbf{Z})$, $ad=\ell$, $b \bmod \ell$ und fährt fort wie im obigen Beweis.

Bemerkung: Man beachte daß mit den hier im Beweis berechneten Formeln für die Aktion der Hecke-Operatoren der Satz A vollständig bewiesen ist.

§3. **Kernfunktionen.** Es seien nun $R_{n,A}$ $\left(0 \leq n \leq w, A \in \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbf{Z})\right)$ die Kernfunktionen zum n-ten Koeffizienten von $\rho_{2k,A}(f)(X)$ bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes, d.h. die $R_{n,A}$ sind eindeutig durch

$$\langle f, R_{n,A}\rangle = r_{n,A}(f)$$

für jedes $f \in S_{2k}(\Gamma_0(N))$ definiert. Die Kernfunktionen zum n-ten Koeffizienten von $\rho^{\pm}_{2k,A}$ sind dann

$$R^+_{n,A} = \frac{1}{2}(R_{n,A} + (-1)^n R_{n,\varepsilon A\varepsilon}), \qquad R^-_{n,A} = \frac{1}{2i}(R_{n,A} - (-1)^n R_{n,\varepsilon A\varepsilon}).$$

Zuerst werden wir $R_{n,A}$ in "geschlossener" Gestalt angeben. Es gilt:

Proposition 4. *Für $0 < n < w$ ist $R_{n,A}(z)$ gegeben durch:*

$$R_{n,A}(z) = C^{-1}_{k,n,N} \sum_{B\in\Gamma_0(N)} z^{-(\tilde{n}+1)}|_{2k}A^{-1}B$$

Dabei sind $C_{k,n,N} = \frac{(-1)^{\tilde{n}-k+1}}{[\Gamma:\Gamma_0(N)]}2^{-w}\binom{w}{n}\pi, w = 2k-2$ und $\tilde{n} = w - n$.

Beweis: Zuerst ist es einfach zu sehen , daß die (konvergente) Reihe der Proposition 4 invariant unter $\Gamma_0(N)$ bleibt.

Mit $\Gamma' = A^{-1}\Gamma_0(N)A$ ist:

$$\begin{aligned}\Delta_{n,A} &:= \langle f(z), \sum_{B\in\Gamma_0(N)} z^{-(\tilde{n}+1)}|_{2k}A^{-1}B\rangle_{\Gamma_0(N)} = \\ &= \langle (f|_{2k}A)(z), \sum_{B\in\Gamma_0(N)} z^{-(\tilde{n}+1)}|_{2k}A^{-1}BA\rangle_{\Gamma'} = \\ &= \frac{1}{[\Gamma:\Gamma']}\int_{\Gamma'\backslash\mathbf{H}}(f|_{2k}A)(z)\sum_{B\in\Gamma'}\frac{1}{z^{\tilde{n}+1}}|_{2k}B\Im(z)^{2k}\frac{dx\,dy}{y^2},\end{aligned}$$

wobei $z = x + iy$. Aufgrund der Identität

$$g_A \cdot \frac{1}{\overline{z}^{\tilde{n}+1}}|_{2k}B\Im(z)^{2k} = \frac{g_A(B(z))\Im(B(z))^{2k}}{(\overline{B(z)})^{\tilde{n}+1}}$$

mit $g_A := f|_{2k}A$ gilt nun weiter:

$$
\begin{aligned}
[\Gamma:\Gamma_0(N)]\cdot\Delta_{n,A} &= \frac{[\Gamma:\Gamma_0(N)]}{[\Gamma:\Gamma']}\cdot\int_{\Gamma'\backslash\mathbf{H}}\sum_{B\in\Gamma'}\left(g_A\frac{\Im^{2k}}{\bar{z}^{\tilde{n}+1}}\right)(B(z))\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \int_{\mathbf{H}} g_A(z)\frac{\Im(z)^{2k}}{\bar{z}^{\tilde{n}+1}}\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \int_0^\infty y^{2k-2}dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_A(x+iy)}{(x-iy)^{\tilde{n}+1}}dx\\
&= \int_0^\infty y^w dy\int_{\Im(z)=y}\frac{g_A(z)}{(z-2iy)^{\tilde{n}+1}}dz\\
&= \frac{2\pi i}{\tilde{n}!}\int_0^\infty y^w g_A^{(\tilde{n})}(2iy)dy\\
&= \frac{(-2)\pi i w}{2i\tilde{n}!}\int_0^\infty g_A^{(\tilde{n}-1)}(2iy)y^{w-1}dy = \ldots\\
&= \frac{2\pi i(-1)^{\tilde{n}}w(w-1)\ldots(w+1-\tilde{n})}{\tilde{n}!(2i)^{\tilde{n}}}\int_0^\infty g_A(2iy)y^{w-\tilde{n}}dy\\
&= \frac{2\pi i(-1)^{\tilde{n}}\binom{w}{\tilde{n}}}{(2i)^{\tilde{n}}2^{w-\tilde{n}+1}}\int_0^\infty g_A(iy)y^{w-\tilde{n}}dy\\
&= \binom{w}{\tilde{n}}2^{-w}\pi(-1)^{\tilde{n}-k+1}\int_0^{i\infty}(f|_{2k}A)(z)z^n dz.
\end{aligned}
$$

Also

$$\Delta_{n,A} = C_{k,n,N}\cdot r_{n,A}(f).$$

§4. **Explizite Berechnung der Perioden.** Jetzt werden wir die Perioden $r^+_{m,B}(R^-_{n,A})$ für $0 \leq m, n \leq w = 2k-2$, $(m,n) \neq (0,0)$, (w,w), und $A, B \in \Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbf{Z})$ berechnen.

Wir können folgende Identitäten nachweisen:

$$(1) \qquad r^{\pm}_{m,A}(f) \pm (-1)^m r^{\pm}_{w-m,AS}(f) = 0 \qquad (f \in S_{2k}(\Gamma_0(N)))$$

$$(2) \qquad r^{\pm}_{m,B}(R^{\mp}_{n,A}) = \overline{r^{\mp}_{n,A}(R^{\pm}_{m,B})}$$

wobei "$-$" komplexe Konjugation bedeutet. Aufgrund dieser Identitäten können wir uns im Weiteren bei der Berechnung der Perioden auf die Betrachtung des Falles $0 \leq m \leq w$, $0 < n < w$ beschränken.

Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Definition haben wir

$$C_{k,n,N} r^+_{m,B}(R^-_{n,A}) = \frac{1}{4i}\Big\{ r_{m,B}(R_{n,A}) \\ - (-1)^n r_{m,B}(R_{n,\varepsilon A\varepsilon}) + (-1)^m r_{m,\varepsilon B\varepsilon}(R_{n,A}) - (-1)^{m+n} r_{m,\varepsilon B\varepsilon}(R_{n,\varepsilon A\varepsilon})\Big\}$$

und

$$C_{k,n,N}\ (R_{n,A}|_{2k}B)(z) \cdot z^m = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B} \frac{z^m}{(az+b)^{\tilde{n}+1} \cdot (cz+d)^{n+1}} \quad ,$$

wobei $\overline{\Gamma} = \{\pm I\}\backslash\Gamma_0(N)$ mit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In der letzten Summe werden wir zuerst den Beitrag der Matritzen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{-1}\overline{\Gamma}B$

mit $abcd=0$ betrachten. Dieser Beitrag ist gleich

$$\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\Gamma_B \\ abcd=0}} \frac{z^m}{(az+b)^{\tilde{n}+1}\cdot(cz+d)^{n+1}}$$

$$= \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z} \\ \delta_1\gamma_2 l\equiv(\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2)(\mathrm{mod}\, N)}} \frac{z^m}{(-1)^{\tilde{n}+1}(z+l)^{n+1}}+$$

$$+(-1)^{m+n+1}\frac{1}{z^2} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z} \\ \delta_1\delta_2 l\equiv(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)(\mathrm{mod}\, N)}} \frac{(\frac{-1}{z})^{\tilde{m}}}{(l-\frac{1}{z})^{n+1}}+$$

$$+ \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z} \\ \gamma_1\gamma_2 l\equiv(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)(\mathrm{mod}\, N)}} \frac{z^m}{(z+l)^{\tilde{n}+1}}+$$

$$+(-1)^{\tilde{m}}\frac{1}{z^2} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z} \\ \gamma_1\delta_2 l\equiv(-\gamma_1\gamma_2-\delta_1\delta_2)(\mathrm{mod}\, N)}} \frac{(\frac{-1}{z})^{\tilde{m}}}{(l-\frac{1}{z})^{\tilde{n}+1}}+$$

$$-\begin{Bmatrix} z^{m-\tilde{n}+1}, & \text{wenn } A\sim_{\Gamma} B \\ 0, & \text{sonst}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} z^{m-n+1}, & \text{wenn } AS\sim_{\Gamma} B \\ 0, & \text{sonst}\end{Bmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}F_{m,n}(L_1,M_1;z)+(-1)^{m+n+1}\frac{1}{z^2}F_{\tilde{m},n}(L_2,M_2;\frac{-1}{z})+$$

$$+F_{m,\tilde{n}}(L_3,M_3;z)+(-1)^{\tilde{m}}\frac{1}{z^2}F_{\tilde{m},\tilde{n}}(L_4,M_4;\frac{-1}{z}),$$

wobei die Funktionen $F_{\mu,\nu}$ im Anhang 1 definiert werden und $M_1 := \frac{N}{(N,\gamma_2\delta_1)}$, L_1 Lösung der Kongruenz $\gamma_2\delta_1 x\equiv(\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2)(\mathrm{mod} N)$, $M_2 := \frac{N}{(N,\delta_1\delta_2)}$, L_2 Lösung der Kongruenz $\delta_1\delta_2 x\equiv(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)(\mathrm{mod}\, N)$ $M_3 := \frac{N}{(N,\gamma_1\gamma_2)}$, L_3 Lösung der Kongruenz $\gamma_1\gamma_2 x\equiv(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)(\mathrm{mod}\, N)$, $M_4 := \frac{N}{(N,\gamma_1\delta_2)}$, L_4 Lösung der Kongruenz $\gamma_1\delta_2 x\equiv(-\gamma_1\gamma_2-\delta_1\delta_2)(\mathrm{mod}\, N)$ unter der Konvention, daß der Term $F(L,M;z)$ nicht berücksichtigt (also gleich Null gesetzt) werden soll , falls keine Lösung L existiert. Durch Symmetrisierung bekommen wir:

$$C_{k,n,N}\left\{r_{m,B}(R_{n,A})+(-1)^{m+n+1}r_{m,\epsilon B\epsilon}(R_{n,\epsilon A\epsilon})\right\}_{abcd=0}$$

$$=(-1)^{n+1}\int_0^{i\infty} F^+_{m,n}(L_1,M_1;z)dz+(-1)^{m+n+1}\int_0^{i\infty}\frac{1}{z^2}F^+_{\tilde{m},n}(L_2,M_2;\frac{-1}{z})dz+$$

$$+\int_0^{i\infty} F^+_{m,\tilde{n}}(L_3,M_3;z)dz+(-1)^{\tilde{m}}\int_0^{i\infty}\frac{1}{z^2}F^+_{\tilde{m},\tilde{n}}(L_4,M_4;\frac{-1}{z})dz$$

$$=(-1)^{n+1}\int_0^{i\infty} F^+_{m,n}(L_1,M_1;z)dz+(-1)^{m+n+1}\int_0^{i\infty}F^+_{\tilde{m},n}(L_2,M_2;\frac{-1}{z})d(\frac{-1}{z})+$$

$$+\int_0^{i\infty} F^+_{m,\tilde n}(L_3,M_3;z)dz+(-1)^{\tilde m}\int_0^{i\infty} F^+_{\tilde m,\tilde n}(L_4,M_4;\frac{-1}{z})d(\frac{-1}{z})$$
$$=2\pi i\{(-1)^{n+1}\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1}{M_1})-(-1)^{m+n+1}\frac{\tilde m!}{n!}M_2^{\tilde m-n}\beta_{\tilde m-n}(\frac{L_2}{M_2})+$$
$$+\frac{m!}{\tilde n!}M_3^{m-\tilde n}\beta_{m-\tilde n}(\frac{L_3}{M_3})-(-1)^{\tilde m}\frac{\tilde m!}{\tilde n!}M_4^{\tilde m-\tilde n}\beta_{\tilde m-\tilde n}(\frac{L_4}{M_4})\}$$

nach dem Satz aus Anhang 1. Ähnlich ist

$$C_{k,n,N}\left\{(-1)^{n+1}r_{m,B}(R_{n,\epsilon A\epsilon})+(-1)^{m}r_{m,\epsilon B\epsilon}(R_{n,A})\right\}_{abcd=0}$$
$$=C_{k,n,N}(-1)^{n+1}\left\{r_{m,B}(R_{n,\epsilon A\epsilon})+(-1)^{m-n+1}r_{m,\epsilon B\epsilon}(R_{n,\epsilon(\epsilon A\epsilon)\epsilon})\right\}_{abcd=0}$$
$$=2\pi i(-1)^{n+1}\{(-1)^{n+1}\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1'}{M_1})-(-1)^{m+n+1}\frac{\tilde m!}{n!}M_2^{\tilde m-n}\beta_{\tilde m-n}(\frac{L_2'}{M_2})+$$
$$+\frac{m!}{\tilde n!}M_3^{m-\tilde n}\beta_{m-\tilde n}(\frac{L_3'}{M_3})-(-1)^{\tilde m}\frac{\tilde m!}{\tilde n!}M_4^{\tilde m-\tilde n}\beta_{\tilde m-\tilde n}(\frac{L_4'}{M_4})\}.$$

L_i' , $(i=1,2,3,4)$ ist Lösung der L_i entsprechenden Kongruenz, wobei γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen ist. Der Beitrag zur Berechnung der Perioden $C_{k,n,N}r^+_{m,B}(R^-_{n,A})$ mit der Summationsbedingung $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in A^{-1}\overline{\Gamma}B$ und $abcd=0$ ist:

$$C_{k,n,N}r^+_{m,B}(R^-_{n,A})_{abcd=0}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big\{(-1)^{n+1}\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1}{M_1})-(-1)^{m+n+1}\frac{\tilde m!}{n!}M_2^{\tilde m-n}\beta_{\tilde m-n}(\frac{L_2}{M_2})+$$
$$+\frac{m!}{\tilde n!}M_3^{m-\tilde n}\beta_{m-\tilde n}(\frac{L_3}{M_3})-(-1)^{\tilde m}\frac{\tilde m!}{\tilde n!}M_4^{\tilde m-\tilde n}\beta_{\tilde m-\tilde n}(\frac{L_4}{M_4})$$
$$+\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1'}{M_1})+(-1)^{m}\frac{\tilde m!}{n!}M_2^{\tilde m-n}\beta_{\tilde m-n}(\frac{L_2'}{M_2})+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{m!}{\tilde n!}M_3^{m-\tilde n}\beta_{m-\tilde n}(\frac{L_3'}{M_3})+(-1)^{\tilde m+n+1}\frac{\tilde m!}{\tilde n!}M_4^{\tilde m-\tilde n}\beta_{\tilde m-\tilde n}(\frac{L_4'}{M_4})\Big\}.$$

Jetzt werden wir den Beitrag der Summanden für $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in A^{-1}\overline{\Gamma}B$ mit $abcd\neq 0$ berechnen:

$$C_{k,n,N}r_{m,B}(R_{n,A})_{abcd\neq 0}=\frac{1}{2}\int_0^{i\infty}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B\\ abcd\neq 0}}\frac{z^m\,dz}{(az+b)^{\tilde n+1}(cz+d)^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}i^{m+1}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B\\ abcd\neq 0}}\left(\lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\frac{t^m\,dt}{(ait+b)^{\tilde n+1}(cit+d)^{n+1}}\right)$$

Ähnlich ist mit $A' = \varepsilon A\varepsilon$ und $B' = \varepsilon B\varepsilon$

$$\begin{aligned}&C_{k,n,N}(-1)^{m+n+1}r_{m,B'}(R_{n,A'})_{abcd\neq 0}\\ =&(-1)^{m+n+1}i^{m+1}\frac{1}{2}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{smallmatrix}\right)\in A'^{-1}\overline{\Gamma}B'\\ a'b'c'd'\neq 0}}\left(\lim_{\lambda\to 0}\int_{\lambda}^{\frac{1}{\lambda}}\frac{t^m\,dt}{(a'it+b')^{\tilde{n}+1}(c'it+d')^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Wenn wir jede Matrix $\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_3 & \mu_4\end{pmatrix}\in\overline{\Gamma}$ mit $\begin{pmatrix}-\mu_1 & \mu_2\\ \mu_3 & -\mu_4\end{pmatrix}$ und t mit $-t$ ersetzen, so finden wir

$$\begin{aligned}&C_{k,n,N}(-1)^{m+n+1}r_{m,B'}(R_{n,A'}) =\\ =&\frac{1}{2}i^{m+1}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B\\ abcd\neq 0}}\left(\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{-\lambda}\frac{t^m\,dt}{(ait+b)^{\tilde{n}+1}(cit+d)^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$C_{k,n,N}\left\{r_{m,B}(R_{n,A})+(-1)^{m+n+1}r_{m,B'}(R_{n,A'})\right\} = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}S_\lambda$$

mit

$$S_\lambda = i^{m+1}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B}\left[\int_{\lambda}^{\frac{1}{\lambda}}+\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{-\lambda}\right]\frac{t^m\,dt}{(ait+b)^{\tilde{n}+1}(cit+d)^{n+1}}.$$

Wir schreiben

$$\int_{\lambda}^{\frac{1}{\lambda}}+\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{-\lambda}=\int_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\lambda}^{+\lambda}-\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\lambda}}+\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}$$

und bemerken, daß nach dem Residuensatz das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ gleich Null ist, da $\frac{b}{d}$ und $\frac{d}{c}$ auf der gleichen Seite der y-Achse liegen. In den Integralen von $-\infty$ bis $-\frac{1}{\lambda}$ und von $\frac{1}{\lambda}$ bis ∞ ersetzen wir t mit $-\frac{1}{t}$ bzw. t mit $\frac{1}{t}$ und finden

$$\begin{aligned}S_\lambda =& -i^{m+1}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B\\ abcd>0}}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{t^m\,dt}{(ait+b)^{\tilde{n}+1}(cit+d)^{n+1}}\\ &-i^{m+1}(-1)^k\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in A^{-1}\overline{\Gamma}B\\ abcd>0}}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{t^{\tilde{m}}\,dt}{(bit-a)^{\tilde{n}+1}(dit-c)^{n+1}}\\ =&S'_\lambda+S''_\lambda.\end{aligned}$$

Jetzt können wir den ersten Term S'_λ von S_λ berechnen:

$$\begin{aligned} S'_\lambda = &- i^{m+1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ bd>0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^m\, dt}{(ait+b)^{\bar{n}+1}(cit+d)^{n+1}} \\ &- i^{m+1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ bd<0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^m\, dt}{(ait+b)^{\bar{n}+1}(cit+d)^{n+1}} \\ = &- i^{m+1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ bd>0}} \left(1+(-1)^{m+n+1}\right) \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^m\, dt}{(ait+b)^{\bar{n}+1}(cit+d)^{n+1}} \end{aligned}$$

Für $m \equiv n \bmod 2$ ist offensichtlich, daß $S'_\lambda = 0$ ist. Für $m \not\equiv n \bmod 2$ ist

$$\begin{aligned} S'_\lambda &= -2i^{m+1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ bd>0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^m\, dt}{(ait+b)^{\bar{n}+1}(cit+d)^{n+1}} \\ &= -4i^{m+1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ b,d>0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^m\, dt}{(ait+b)^{\bar{n}+1}(cit+d)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir ersetzen t mit λu und finden

$$\begin{aligned} S'_\lambda = -4i^{m+1}\lambda^m \sum_{\substack{b,d>0 \\ (b,d)=1}} \frac{1}{b^{\bar{n}+1}d^{n+1}} \cdot \\ \cdot \left[\sum_{\substack{a,c\in\mathbf{Z} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B}} \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{t^m\, dt}{(\frac{a}{b}i\lambda t+1)^{\bar{n}+1}(\frac{c}{d}i\lambda t+1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{-1}\overline{\Gamma}B$ ist äquivalent mit

$$N \,|\, [\delta_2(\gamma_1 a + \delta_1 c) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)].$$

Wenn, für feste $b, d \in \mathbf{Z}$, keine Lösung $(a, c) \in \mathbf{Z}^2$ mit $ad - bc = 1$ und

$$N \,|\, [\delta_2(\gamma_1 a + \delta_1 c) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)]$$

existiert, dann ist wieder $S'_\lambda = 0$. Wenn aber Lösungen existieren, dann wählen wir eine feste Lösung $(a_0, c_0) \in \mathbf{Z}^2$ mit $a_0 d - bc_0 = 1$ und

$$N \,|\, [\delta_2(\gamma_1 a_0 + \delta_1 c_0) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)]$$

und stellen fest, daß alle Lösungen durch

$$a = a_0 - b\ell, \quad c = c_0 - d\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad \ell \equiv 0 \bmod N'$$

mit

$$N' = \frac{N}{(N, \delta_2(\gamma_1 b + \delta_1 d))}$$

gegeben sind. Da $\frac{a}{b} = \frac{1}{bd} + \frac{c_0}{d} - \ell$ mit $\ell \equiv 0(\mathrm{mod} N')$, können wir schreiben:

$$S'_\lambda = -4\lambda^m i^{m+1} \lambda^m \sum_{\substack{b,d>0 \\ (b,d)=1}} \frac{1}{b^{\tilde{n}+1} d^{n+1}} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{\mu = \ell + \frac{c_0}{d} \in \mathbb{Z} N' + \frac{c_0}{d}} \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{t^m \, dt}{(1 + \frac{i\lambda t}{bd} + \mu i \lambda t)^{\tilde{n}+1} (1 + i\mu\lambda t)^{n+1}} \right]$$

Der in eckigen Klammern enthaltene Term ist für $\lambda \to 0$ eine Riemannsche Summe des Integrals

$$\frac{1}{N'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{dt\, dx}{(1 + ixt)^{2k}} = \frac{2\pi}{N'(2k-1)} = \frac{(N, \delta_2(\gamma_1 b + \delta_2 d))2\pi}{N(2k-1)}.$$

Aus den obigen Überlegungen ergibt sich, daß für $m \neq 0$ wieder $S'_\lambda = 0$ ist. Für $m = 0$ und $n \equiv 1 \bmod 2$ ist:

$$S'_\lambda = \frac{(-2)2\pi i}{N(2k-1)} \cdot \sum_{\substack{bd>0 \\ (b,d)=1 \\ \exists a_0, c_0 \in \mathbb{Z}: a_0 d - b c_0 = 1 \\ N | \delta_2(\gamma_1 a_0 + \delta_1 c_0) - \delta_1(\gamma_1 b + \delta_1 d)}} \frac{(N, \delta_2(\gamma_1 b + \delta_1 d))}{b^{\tilde{n}+1} d^{n+1}}.$$

Ähnlich kann man

$$\begin{aligned} &C_{k,n,N} \left\{ (-1)^{n+1} r_{m,B}(R_{n,\epsilon A \epsilon}) + (-1)^m r_{m,\epsilon B \epsilon}(R_{n,A}) \right\} \\ =&C_{k,n,N} (-1)^{n+1} \left\{ r_{m,B}(R_{n,\epsilon A \epsilon}) + (-1)^{m+n+1} r_{m,\epsilon B \epsilon}(R_{n,A}) \right\} \\ =&\frac{(-1)^{n+1}}{2} \lim_{\lambda \to 0} (S'''_\lambda + S''''_\lambda) \end{aligned}$$

in zwei Summanden analysieren, wobei $S'''_\lambda = 0$ gilt bis auf den Fall $m = 0$, $n \equiv 1 \bmod 2$. Im letzteren Fall ist

$$S'''_\lambda = \frac{(-2)2\pi i}{N(2k-1)} \sum_{\substack{bd<0 \\ (b,d)=1 \\ \exists a'_0, c'_0 \in \mathbb{Z}: a'_0 d - b c'_0 = 1 \text{und} \\ N | \delta_2(-\gamma_1 a'_0 + \delta_1 c'_0) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)}} \frac{(N, \delta_2(\gamma_1 b + \delta_1 d))}{b^{\tilde{n}+1} d^{n+1}}.$$

Wir bemerken, daß die Existenz von a_0, c_0 in S'_λ äquivalent mit der Existenz von a'_0 und c'_0 ist. Folglich ist im Falle $m = 0$ und $n \equiv 1 \bmod 2$

$$S'_\lambda + S'''_\lambda = \frac{(-2)2\pi i}{N(2k-1)} \cdot \sum_{\substack{b,d=-\infty \\ (b,d)=1 \\ \exists a_0,c_0 \in \mathbb{Z}: a_0 d - b c_0 = 1 \text{ und } \\ N | \delta_2(\gamma_1 a_0 + \delta_1 c_0) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)}}^{\infty}{}' \frac{(N, \delta_2\gamma_1 b + \delta_1\delta_2 d)}{b^{\tilde{n}+1} d^{n+1}}.$$

Ähnlich beweisen wir, daß

$$S''_\lambda = -i^{m+1}(-1)^k \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B \\ abcd > 0}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{t^{\tilde{m}}\, dt}{(bit-a)^{\tilde{n}+1}(dit-c)^{n+1}}$$

immer gleich Null ist bis auf den Fall $\tilde{m} = 0$ (also $w = m$) und $n \equiv 1 \bmod 2$. Im letzteren Fall gilt

$$\begin{aligned} S''_\lambda = &- 4i^m(-1)^k\lambda^{\tilde{m}} \sum_{\substack{a,c>0 \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^{\tilde{n}+1}c^{n+1}} \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{\substack{b,d\in\mathbb{Z} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A^{-1}\overline{\Gamma}B}} \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{t^{\tilde{m}}\, dt}{(\frac{b}{a}i\lambda t - 1)^{\tilde{n}+1}(\frac{d}{c}i\lambda t - 1)^{n+1}} \right] \\ = &\frac{(-4)2\pi i}{N(2k-1)} \sum_{\substack{a,c>0 \\ (a,c)=1 \\ \exists b_0,d_0 \in \mathbb{Z}: a d_0 - b_0 c = 1 \text{ und } \\ N | \delta_2(\gamma_1 a + \delta_1 c) - \gamma_2(\gamma_1 b_0 + \delta_1 d_0)}} \frac{(N, \delta_2\gamma_1 a + \delta_1\delta_2 c)}{a^{\tilde{n}+1}c^{n+1}}. \end{aligned}$$

Wir können auch genauso S''''_λ berechnen, und wir finden (für $\tilde{m} = 0$ und $n \equiv 1 \bmod 2$)

$$S''_\lambda + S''''_\lambda = \frac{(-2)2\pi i}{N(2k-1)} \sum_{\substack{a,c=-\infty \\ (a,c)=1 \\ \exists b_0,d_0 \in \mathbb{Z}: a d_0 - b_0 c = 1 \text{ und } \\ N | \delta_2(\gamma_1 a + \delta_1 c) - \gamma_2(\gamma_1 b_0 + \delta_1 d_0)}}^{\infty}{}' \frac{(N, \gamma_2(\gamma_1 a + \delta_1 c))}{a^{\tilde{n}+1}c^{n+1}}.$$

Insgesamt ist der Beitrag der Summanden $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{-1}\overline{\Gamma}B$ mit $abcd \neq 0$

$$\begin{aligned} &C_{k,n,N} r^+_{m,B}(R^-_{n,A})_{abcd\neq 0} \\ = &\delta_{m,0}\delta^1_n \left(-\frac{\pi}{2N(2k-1)}\right) \sum_{\substack{b,d=-\infty \\ (b,d)=1 \\ \exists a_0,c_0 \in \mathbb{Z}: a_0 d - b c_0 = 1 \text{ und } \\ N | \delta_2(\gamma_1 a_0 + \delta_1 c_0) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)}}^{\infty}{}' \frac{(N, \delta_2\gamma_1 b + \delta_1\delta_2 d)}{b^{\tilde{n}+1}d^{n+1}} \\ + &\delta_{\tilde{m},0}\delta^1_n \left(-\frac{\pi}{2N(2k-1)}\right) \sum_{\substack{a,c=-\infty \\ (a,c)=1 \\ \exists b_0,d_0 \in \mathbb{Z}: a d_0 - b_0 c = 1 \text{ und } \\ N | \delta_2(\gamma_1 a + \delta_1 c) - \gamma_2(\gamma_1 b_0 + \delta_1 d_0)}}^{\infty}{}' \frac{(N, \gamma_1\gamma_2 a + \delta_1\gamma_2 c)}{a^{\tilde{n}+1}c^{n+1}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta_n^1 = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv 1 \bmod 2 \\ 0, & \text{wenn } n \equiv 0 \bmod 2 \end{cases}.$$

Hier wird zum ersten mal die Voraussetzung N sei quadratfrei,benutzt. Unter der Voraussetzung, daß die Kongruenz

$$N | \delta_2(\gamma_1 a_0 + \delta_1 c_0) - \gamma_2(\gamma_1 b + \delta_1 d)$$

$(b, d \in \mathbf{Z},\ (b,d) = 1$ und $\begin{pmatrix} a_0 & b \\ c_0 & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}))$ eine Lösung hat, ist

$$(N, \delta_2) = (N, \delta_2\gamma_1 b + \delta_1\delta_2 d).$$

Für *feste* $A, B \in \mathbf{Z}, \alpha, \beta \in \mathbf{N}$ mit $\alpha + \beta = 2\kappa - 2, \kappa \geq 2$ sei nun

$$\Lambda_M(t; A, B, \alpha, \beta) := \sideset{}{'}\sum_{\substack{k,\ell=-\infty \\ (Ak+B\ell, M)=t}}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}.$$

Für jede feste natürliche Zahl $\tilde{M}$ mit $\tilde{M}|M|N$ läßt sich einfach zeigen, daß

$$\Lambda_M(\tilde{M}; A, B, \alpha, \beta) = \sum_{t|\frac{N}{M}} \Lambda_N(\tilde{M}t; A, B, \alpha, \beta).$$

Folglich gilt

$$\Lambda_N(M; A, B, \alpha, \beta) = \sum_{t|\frac{N}{M}} \mu(t)\Lambda_{Mt}(Mt; A, B, \alpha, \beta).$$

Andererseits ist

$$\Lambda_M(M; A, B, \alpha, \beta) = \frac{1}{\varphi(M)} \sum_{t|M} \mu\left(\frac{M}{t}\right) S_t^*(A, B, \alpha, \beta)$$

mit der Funktion $S_t^*(A, B, \alpha, \beta)$ aus Anhang 2, deren expliziter Wert dort angegeben wird.

Schließlich ist der Beitrag der Summanden $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{-1}\overline{\Gamma}B$ mit $abcd \neq 0$

$$\begin{aligned} &C_{k,n,N} r^+_{m,B}(R^-_{n,A})_{abcd\neq 0} \\ &= \delta_{m,0}\delta_n^1 \left(-\frac{\pi}{2N(2k-1)}\right) \cdot (N, \delta_2) \cdot \Lambda_N((N,\delta_2); \gamma_1\delta_2, \delta_1\delta_2, \tilde{n}+1, n+1) \\ &+\delta_{\tilde{m},0}\delta_n^1 \left(-\frac{\pi}{2N(2k-1)}\right) \cdot (N, \gamma_2) \cdot \Lambda_N((N,\gamma_2); \gamma_1\gamma_2, \delta_1\gamma_2, \tilde{n}+1, n+1). \end{aligned}$$

Ähnlich kann man $r^-_{m,B}(R^+_{n,A})$ für $o \leq m \leq w$ und $0 < n < w$ explizit angeben und damit ist der Beweis des Satzes B beendet.

Der Übersichlichkeit halber fassen wir die in diesem Paragraphen erzielten Ergebnisse zusammen.Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&C_{k,n,N} r^+_{m,B}(R^-_{n,A})_{abcd=0} = \\
&= \frac{\pi}{2}\Bigg\{(-1)^{n+1}\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1}{M_1}) - (-1)^{m+n+1}\frac{\tilde{m}!}{n!}M_2^{\tilde{m}-n}\beta_{\tilde{m}-n}(\frac{L_2}{M_2})+ \\
&+\frac{m!}{\tilde{n}!}M_3^{m-\tilde{n}}\beta_{m-\tilde{n}}(\frac{L_3}{M_3}) - (-1)^{\tilde{m}}\frac{\tilde{m}!}{\tilde{n}!}M_4^{\tilde{m}-\tilde{n}}\beta_{\tilde{m}-\tilde{n}}(\frac{L_4}{M_4}) \\
&+\frac{m!}{n!}M_1^{m-n}\beta_{m-n}(\frac{L_1'}{M_1}) + (-1)^{m}\frac{\tilde{m}!}{n!}M_2^{\tilde{m}-n}\beta_{\tilde{m}-n}(\frac{L_2'}{M_2})+ \\
&+(-1)^{n+1}\frac{m!}{\tilde{n}!}M_3^{m-\tilde{n}}\beta_{m-\tilde{n}}(\frac{L_3'}{M_3}) + (-1)^{\tilde{m}+n+1}\frac{\tilde{m}!}{\tilde{n}!}M_4^{\tilde{m}-\tilde{n}}\beta_{\tilde{m}-\tilde{n}}(\frac{L_4'}{M_4}) \\
&+\delta_{m,0}\delta_n^1\left(-\frac{1}{N(2k-1)}\right)\cdot(N,\delta_2)\cdot\Lambda_N((N,\delta_2);\gamma_1\delta_2,\delta_1\delta_2,\tilde{n}+1,n+1) \\
&+\delta_{\tilde{m},0}\delta_n^1\left(-\frac{1}{N(2k-1)}\right)\cdot(N,\gamma_2)\cdot\Lambda_N((N,\gamma_2);\gamma_1\gamma_2,\delta_1\gamma_2,\tilde{n}+1,n+1)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $0 \leq m \leq w$, $0 < n < w$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

$C_{k,n,N} = \frac{(-1)^{\tilde{n}-k+1}}{[\Gamma:\Gamma_0(N)]}2^{-w}\binom{w}{n}\pi, w = 2k-2$ $\tilde{n} = w-n$ $M_1 := \frac{N}{(N,\gamma_2\delta_1)}$, L_1 Lösung der Kongruenz $\gamma_2\delta_1 x \equiv (\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2)(\text{mod} N)$ $M_2 := \frac{N}{(N,\delta_1\delta_2)}$, L_2 Lösung der Kongruenz $\delta_1\delta_2 x \equiv (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)(\bmod N)$ $M_3 := \frac{N}{(N,\gamma_1\gamma_2)}$, L_3 Lösung der Kongruenz $\gamma_1\gamma_2 x \equiv (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)(\bmod N)$, $M_4 := \frac{N}{(N,\gamma_1\delta_2)}$, L_4 Lösung der Kongruenz $\gamma_1\delta_2 x \equiv (-\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)(\bmod N)$ L_i' , $(i = 1,2,3,4)$ ist Lösung der L_i entsprechenden Kongruenz, wobei γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen ist.

$$\beta_r(X) = \begin{Bmatrix} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\widetilde{B}_{r+1}(X), \ wenn\ r \geq -1 \\ 0, \ wenn\ r < -1 \end{Bmatrix},$$

$\widetilde{B}_n(X) = B_n(X-[X])$ für $n \neq 1$ oder $X \notin \mathbf{Z}$ und $\widetilde{B}_1(X) = 0$ für $X \in \mathbf{Z}$ ($B_n(X)$ ist das n-te Bernoullische Polynom)

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta_n^1 = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv 1 \bmod 2 \\ 0, & \text{wenn } n \equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

$$\Lambda_N(M; A, B, \alpha, \beta) := \sum_{t | \frac{N}{M}} \mu(t) \Lambda_{Mt}(Mt; A, B, \alpha, \beta)$$

mit

$$\Lambda_M(M; A, B, \alpha, \beta) = \frac{1}{\varphi(M)} \sum_{t|M} \mu\left(\frac{M}{t}\right) S_t^*(A, B, \alpha, \beta),$$

und

$$S_N^*(A, B; \alpha, \beta) = -2 \frac{(2k)!}{(\alpha+1)!(\beta+1)!} \frac{1}{B_{2k} \prod_{p|N}(1 - \frac{1}{p^{2k}})} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\tau | N} \mu(\tau) \frac{1}{\tau^{2k-1}} S^0_{\frac{N}{\tau}}(A, B; \alpha, \beta)$$

mit der Abkürzung

$$S^0_{\frac{N}{\tau}}(A, B; \alpha, \beta) := \sum_{d | \frac{N}{\tau}} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} \tilde{B}_{\alpha+1}\left(\frac{A\delta}{d}\right) \tilde{B}_{\beta+1}\left(\frac{B\delta}{d}\right)$$

wobei φ die Eulersche φ-Funktion und μ die Möbiusche Funktion ist.

Bemerkung. Aus der Rationalität der Perioden ergibt sich nicht nur, daß die Spitzenformen $R^+_{n,A}$, $0 \leq n \leq w$, $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ den $\mathbf{Q}$-Vektorraum $S^-_{2k}(N)$ und $R^-_{n,A}$, $0 \leq n \leq w$, $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ den $\mathbf{Q}$-Vektorraum $S^+_{2k}(N)$ erzeugen, sondern auch, daß $S^+_{2k}(N)$ und $S^-_{2k}(N)$ dual bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes sind, d.h.

$$F \in S^+_{2k}(N) \Longleftrightarrow \langle F, G \rangle \in \mathbf{Q} \text{ für alle} G \in S^-_{2k}(N)$$

Siehe auch [Ka-Mi].

§5. Ein Beispiel.

Wir betrachten jetzt den eindimensionalen Raum $S_4(\Gamma_0(5))$. Die ersten 100 Fourierkoeffizienten der (einzigen) Hecke-Eigenform $f(z) \in S_4(\Gamma_0(5))$ findet man in [Co-Sko-Za]. Es gilt:

$$f(z) = 13\left((E_2^{(5)}(z))^2 - \frac{10}{3}E_4(z) - \frac{250}{3}E_4(5z)\right),$$

wobei

$$E_4(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n \qquad (q := e^{2\pi i z}, z \in \mathbb{H}, \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3)$$

und

$$E_2^{(5)}(z) = \frac{1}{6} + \sum_{n\geq 1}\sigma_1^*(n)q^n \qquad (\sigma_1^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\not\equiv 0 \bmod 5}} d)$$

Es ist $r_{m,B}^+(f) = \langle f, R_{m,B}^+\rangle$, also $R_{m,B}^+ = \frac{r_{m,B}^+(f)}{\langle f,f\rangle}f$ und daraus folgt

$$r_{m,B}^+(R_{n,A}^-) = \frac{r_{m,B}^+(f)r_{n,A}^-(f)}{\langle f,f\rangle}.$$

Ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $\Gamma_0(5)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ bilden die Matrizen $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & j\end{pmatrix}$ $(j = 0,1,2,3,4)$. Im folgenden seien $m = 0$ und $n = 1$ (also $\widetilde{m} = 2$ und $\widetilde{n} = 1$) festgesetzt. Für $A = B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ haben wir nach den Formeln am Ende von §4

$$\begin{aligned} C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,I}^-) =& C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,I}^-)_{abcd=0} + C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,I}^-)_{abcd\neq 0} \\ =& \frac{\pi}{6} - \frac{25\pi}{2\cdot 3\cdot 13} = -\frac{12\pi}{2\cdot 3\cdot 13} = -\frac{2\pi}{13}, \text{also } r_{0,I}^+(R_{1,I}^-) = -\frac{24}{13}. \end{aligned}$$

Für $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-) =& C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-)_{abcd=0} + C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-)_{abcd\neq 0} \\ =& \frac{-\pi}{15} - \frac{47\pi}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{-60\pi}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{-4\pi}{13},\ also\ r_{0,I}^+(R_{1,A}^-) = -\frac{48}{13}. \end{aligned}$$

Für $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-) =& C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-)_{abcd=0} + C_{2,1,5}r_{0,I}^+(R_{1,A}^-)_{abcd\neq 0} \\ =& \frac{11\pi}{3\cdot 5} - \frac{53\pi}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{90\pi}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{6\pi}{13},\ also\ r_{0,I}^+(R_{1,A}^-) = \frac{72}{13}. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle hat D.B.Zagier das Peterssonsche Skalarprodukt

$$\langle f, f \rangle = 0{,}00145133350829781876 1409...$$

mit sehr großer Genauigkeit berechnet und für die Perioden, mit Hilfe des Computers, folgende Tabelle aufgestellt:

Tabelle

A	$\frac{r^+_{0,A}(f)}{\omega_2}$	$\frac{r^-_{0,A}(f)}{\omega_1}$	$\frac{r^+_{1,A}(f)}{\omega_1}$	$\frac{r^-_{1,A}(f)}{\omega_2}$	$\frac{r^+_{2,A}(f)}{\omega_2}$	$\frac{r^-_{2,A}(f)}{\omega_1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	10	0	0	-1	-2	0
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2	0	0	-1	-10	0
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	10	2	0	-2	-10	2
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	-16	-4	-13	3	16	4
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	-16	4	13	3	16	-4
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	10	-2	0	-2	-10	-2

Dabei sind: $\omega_1 = 0{,}0104325693222...$, $\omega_2 = 0{,}00256828865034...$ und $\langle f, f \rangle = \frac{65}{12}\omega_1\omega_2$. Man kann auch einfach die Übereinstimmung der Perioden prüfen. Für eine interessante Annäherung an die ganze Theorie von Modulformen mit rationalen Perioden über $SL_2(\mathbf{Z})$, siehe [Za].

Anhang 1.

Für $M \in \mathbb{N}, m, n \in \mathbb{N}, m \geq 0, n > 0, L \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ und $z \in \mathbb{H}$ definieren wir:

$$F(z) := F_{m,n}(L,M;z) = \begin{cases} \sum_{\ell \equiv L (\mathrm{mod}\, M)} \frac{z^m}{(z+\ell)^{n+1}}, & \text{wenn } m > n \\ \sum'_{\ell \equiv L (\mathrm{mod}\, M)} \frac{z^m}{(z+\ell)^{n+1}}, & \text{wenn } m \leq n \end{cases}$$

Das Summationssymbol $\sum'$ bedeutet,daß im Falle $m \leq n$ und $L \equiv 0(\mathrm{mod} M)$ der Term für $\ell = 0$ bei der Summation nicht berücksichtigt werden soll. Wir symmetrisieren, indem wir die Funktionen

$$F^+(z) = F^+_{m,n}(L,M;z) := F_{m,n}(L,M;z) + (-1)^{m+n+1} F_{m,n}(-L,M;z)$$

bilden.Für diese Funktionen beweisen wir nun den folgenden

Satz. *Es existiert das Integral* $\int_0^{i\infty} F^+_{m,n}(L,M;z)dz$ *und sein Wert ist gleich*

$$2\pi i \frac{m!}{n!} M^{m-n} \beta_{m-n}\left(\frac{L}{M}\right),$$

wobei

$$\beta_r(X) = \left\{ \begin{matrix} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \widetilde{B}_{r+1}(X), \text{ wenn } r \geq -1 \\ 0, \text{ wenn } r < -1 \end{matrix} \right\}$$

$\widetilde{B}_n(X) = B_n(X - [X])$ *für* $n \neq 1$ *oder* $X \notin \mathbb{Z}$ *und* $\widetilde{B}_1(X) = 0$ *für* $X \in \mathbb{Z}$ *(* $B_n(X)$ *ist das* n*-te Bernoullische Polynom).*

Beweis: Sei zuerst $m > n$.Mit Hilfe der Lipschitzformel ergibt sich:

$$F_{m,n}(L,M;z) = \frac{z^m}{n!} \left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^n e^{2\pi i \ell \frac{z+L}{M}}.$$

Das Integral $\int_0^{i\infty} F_{m,n}(L,M;z)dz$ ist konvergent,weil $F_{m,n}(L,M;z)$ exponential klein für $z \to i\infty$ und beschränkt für $z \to 0$ ist.Wir dürfen Summation und Integration vertauschen:

$$\int_0^{i\infty} F_{m,n}(L,M;z)dz = \frac{i^{m+1}}{n!} \left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^n \xi^\ell \int_0^\infty t^m e^{\frac{-2\pi \ell t}{M}} dt$$

$$= \frac{m!}{(2\pi)^{m+1}} \frac{i^{m+1}}{n!} \left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n+1} M^{m+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\xi^\ell}{\ell^{m-n+1}} \ (\xi := e^{\frac{2\pi i L}{M}}).$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Relation $\sum'_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i \ell x}}{\ell^n} = -\frac{(2\pi i)^n}{n!}\tilde{B}_n(X) \quad (n \geq 2)$ (siehe z.B.[Apos]) finden wir:

$$\int_0^{i\infty} F^+_{m,n}(L,M;z) = 2\pi i \frac{m!}{n!} M^{m-n} \beta_{m-n}(\frac{L}{M})$$

Sei jetzt $m = n$. Es ist offensichtlich, daß $F^+_{m,n}(L,M;z) \equiv 0$ für $m \equiv n(\mathrm{mod} 2)$, falls $L \equiv 0(\mathrm{mod} M)$ ist. Genauso wie beim ersten Fall findet man:

$$\begin{aligned}\int_0^{i\infty} F_{n,n}(L,M;z)dz &= \frac{i^{n+1}}{n!}\left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n+1} M^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\xi^\ell}{\ell} = -log(1-\xi) \\ &= -\log(2\sin\frac{\pi L}{M}) - i\pi\{\frac{L}{M} - \frac{1}{2}\} \quad (0 < L < M)\end{aligned}$$

Zur Symmetrisierung ersetzen wir L mit$M - L$ und subtrahieren.So finden wir

$$\int_0^{i\infty} F^+_{n,n}(L,M;z)dz = -2\pi i \tilde{B}_1(\frac{L}{M}) = 2\pi i \beta_0(\frac{L}{M}).$$

Schließlich sei $m < n$. Die Lipschitz-Summationsformel liefert nun:

$$F_{m,n}(L,M;z) = \frac{z^m}{n!}\left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^n \xi^\ell e^{\frac{2\pi i \ell z}{M}} - \frac{\delta_{L,0}}{z^{n+1-m}},$$

wobei

$$\delta_{L,0} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } L \equiv 0(\mathrm{mod} N) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einfaches Rechnen zeigt, daß

$$\begin{aligned}\frac{M}{2\pi} iF(\frac{Mit}{2\pi}) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{-2\pi i}{M}\right)^{n-m}\left[t^m \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^n \xi^\ell e^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0} n!}{t^{n-m+1}}\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{-2\pi i}{M})^{n-m} t^m \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{l=1}^{\infty} \xi^\ell e^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0}}{t}\right]\end{aligned}$$

ist.

So ist $\frac{M}{2\pi} iF(\frac{M}{2\pi} it)$ der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{t^2})$ für $t \to \infty$ und der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ für $t \to 0$.(Es sei noch erwähnt, daß die Ausdrücke in den eckigen Klammern holomorph für $t = 0$ sind) Folglich existiert wieder das Integral

$$\int_0^{i\infty} F_{m,n}(L,M;z)dz = \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{-2\pi i}{M})^{n-m} \int_0^{\infty} t^m \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \xi^\ell e^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0}}{t}\right].$$

Durch wiederholte partielle Integration ergibt sich nun:

$$\int_0^{i\infty} F_{m,n}(L,M;z)dz = \frac{m!}{n!}\Big(\frac{2\pi i}{M}\Big)^{n-m} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}\left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \xi^{\ell} \mathrm{e}^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0}}{t}\right]$$

$$= -\frac{m!}{n!}\Big(\frac{2\pi i}{M}\Big)^{n-m} \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}}\left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \xi^{\ell} \mathrm{e}^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0}}{t}\right]_{|t=0}$$

Andererseits ist, aufgrund der Definition der Bernoullischen Polynome

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \xi^{\ell} \mathrm{e}^{-\ell t} - \frac{\delta_{L,0}}{t} = \sum_{r=1}^{M} \xi^{r} \frac{\mathrm{e}^{-rt}}{1-\mathrm{e}^{-Mt}} - \frac{\delta_{L,0}}{t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k M^{k-1}}{k!} \Big(\sum_{r=1}^{M} \xi^r B_k\big(\frac{r}{M}\big)\Big) t^{k-1}$$

und daraus folgt:

$$\int_0^{i\infty} F_{m,n}(L,M;z)dz = -\frac{m!}{n!}\frac{(-2\pi i)^{n-m}}{n-m}\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} B_{n-m}\big(\frac{r}{M}\big)\xi^r$$

Durch Symmetrisierung ergibt sich schließlich:

$$\int_0^{i\infty} F^{+}_{m,n}(L,M;z)dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{nM}, & \text{wenn } n = m+1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anhang 2.
Über die geschlossene Summation der Doppelreihe

$$S_N^*(A,B;\alpha,\beta) := \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(Ak+B\ell,N)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}$$

Dabei sind vorgegeben: A, B beliebige ganze Zahlen, N eine natürliche Zahl, α, β natürliche Zahlen von gleicher Parität mit $\alpha+\beta = 2k-2, k \geq 2$. Zuerst bemerken wir, daß sich der größte gemeinsame Teiler (m,n) zweier ganzer Zahlen $m,n \neq 0$ als $(m,n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} e^{\frac{2\pi i m}{d}\delta}$ ausdrücken läßt. Mit Hilfe dieser Formel kann man einfach die uneingeschränkte Doppelreihe $S_N(A,B;\alpha,\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(Ak+B\ell,N)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}$ berechnen,wobei die Akzente an den Summationszeichen Auslaßen von $k=0$ bzw.$\ell=0$ andeuten sollen.

$$\begin{aligned}
S_N(A,B;\alpha,\beta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}} \sum_{d|N} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} e^{\frac{2\pi i(Ak+B\ell)}{d}\delta} \\
&= \sum_{d|N} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2\pi i A\delta}{d}k}}{k^{\alpha+1}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{\frac{2\pi i B\delta}{d}\ell}}{\ell^{\beta+1}} \\
&= \frac{(2\pi)^{2k}(-1)^k}{(\alpha+1)!(\beta+1)!} \sum_{d|N} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} \tilde{B}_{\alpha+1}(\frac{A\delta}{d}) \tilde{B}_{\beta+1}(\frac{B\delta}{d})
\end{aligned}$$

Jetzt werden wir $S_N^*(A,B;\alpha,\beta)$ mit $S_N(A,B;\alpha,\beta)$ in Verbindung setzen.Mit $(k,\ell) = t$ ist:

$$\begin{aligned}
S_N(A,B;\alpha,\beta) :&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(t(Ak+B\ell),N)}{(tk)^{\alpha+1}(t\ell)^{\beta+1}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{2k}} \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(t(Ak+B\ell),N)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}
\end{aligned}$$

Sei nun $(t,N) =: \tau$, also $t = \tau t_0$, $N = \tau N_0$ und $(t_0, N_0) = 1$.

$$S_N(A,B;\alpha,\beta) = \sum_{\tau|N} \sum_{\substack{t_0=1\\(t_0,N_0)=1}}^{\infty} \frac{1}{(\tau t_0)^{2k}} \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(\tau t_0(Ak+B\ell),\tau N_0)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}$$

Aufgrund der Identität $(\tau t_0(Ak+B\ell), \tau N_0) = \tau\cdot(Ak+B\ell, N_0)$ folgt nun weiter

$$\begin{aligned}
S_N(A,B;\alpha,\beta) &= \sum_{\tau|N} \sum_{\substack{t_0=1\\(t_0,N_0)=1}}^{\infty} \frac{\tau}{(\tau t_0)^{2k}} \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(Ak+B\ell,N_0)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}} \\
&= \sum_{\tau|N} \frac{1}{N^{2k-1}} (\frac{N}{\tau})^{2k-1} \sum_{\substack{t_0=1\\(t_0,N_0)=1}}^{\infty} \frac{1}{t_0^{2k}} \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\(k,\ell)=1}}{}' \frac{(Ak+B\ell,N)}{k^{\alpha+1}\ell^{\beta+1}}
\end{aligned}$$

So erhalten wir die Endformel:

$$N^{2k-1} S_N(A,B;\alpha,\beta) = \sum_{N_0|N} N_0^{2k-1} \sum_{\substack{t_0=1 \\ (t_0,N_0)=1}}^{\infty} \frac{1}{t_0^{2k}} S^*_{N_0}(A,B;\alpha,\beta)$$

Durch Anwendung der Möbiusschen Umkehrformel erhalten wir:

$$N^{2k-1} \sum_{\substack{t_0=1 \\ (t_0,N)=1}}^{\infty} \frac{1}{t_0^{2k}} S^*_N(A,B;\alpha,\beta) = \sum_{\tau|N} \mu(\frac{N}{\tau}) \tau^{2k-1} S_\tau(A,B;\alpha,\beta)$$

mit

$$S_\tau(A,B;\alpha,\beta) = \frac{(2\pi)^{2k}(-1)^k}{(\alpha+1)!(\beta+1)!} \sum_{d|\tau} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} \tilde{B}_{\alpha+1}(\frac{A\delta}{d}) \tilde{B}_{\beta+1}(\frac{B\delta}{d})$$

Bekanntlich ist der Wert der Reihe

$$\sum_{\substack{t_0=1 \\ (t_0,N)=1}}^{\infty} \frac{1}{t_0^{2k}} = \zeta(2k) \cdot \prod_{p|N} (1 - \frac{1}{p^{2k}}) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \prod_{p|N} (1 - \frac{1}{p^{2k}}).$$

Ersetzen wir noch τ mit $\frac{N}{\tau}$, so erhalten wir den

Satz. *Die eingeschränkte unendliche Doppelreihe $S^*_N(A,B;\alpha,\beta)$ ist konvergent und hat einen rationalen Wert. Diese rationale Wert ist durch verallgemeinerte Dedekindsche Summen bestimmt. Explizit gilt:*

$$S^*_N(A,B;\alpha,\beta) = -2 \frac{(2k)!}{(\alpha+1)!(\beta+1)!} \frac{1}{B_{2k} \prod_{p|N}(1 - \frac{1}{p^{2k}})} \cdot \sum_{\tau|N} \mu(\tau) \frac{1}{\tau^{2k-1}} S^0_{\frac{N}{\tau}}(A,B;\alpha,\beta)$$

mit der Abkürzung

$$S^0_{\frac{N}{\tau}}(A,B;\alpha,\beta) := \sum_{d|\frac{N}{\tau}} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta \bmod d} \tilde{B}_{\alpha+1}(\frac{A\delta}{d}) \tilde{B}_{\beta+1}(\frac{B\delta}{d}).$$

Literatur

[Apos] *T.M.Apostol:* Introduction to Analytic Number Theory. Springer Verlag 1976.

[Co-Sko-Za] *H. Cohen, N.-P. Skoruppa, D. Zagier:* Tables of modular forms. In Vorbereitung.

[Ka-Mi] *S.Katok, J.Millman:* Eichler-Shimura homology, intersection numbers and rational structures on space of modular forms. Trans. of the A.M.S. 300 (1987),737-757.

[Ko-Za] *W.Kohnen,D.B.Zagier:* Modular Forms with Rational Periods. In Modular Forms (ed. R. A. Rankin), Ellis Horwood,Chichester, 1984,197-249.

[L] *S.Lang:* Introduction to Modular Forms. Springer Verlag 1976.

[MacL] *S.MacLane:* Homology. Springer Verlag 1963.

[Man] *J.I.Manin:* Periods of Parabolic Forms and p-adic Hecke Series. Mat. Sbornik (N.S.) 21 (1973), 371-393.

[Sko] *N.-P.Skoruppa:* Binary Quadratic Forms and the Fourier Coefficients of Elliptic and Jacobi Modular Forms. Journal reine und angew. Math. 411(1990),66-95.

[Za] *D.B.Zagier:* Periods of Modular Forms and Jacobi Theta Functions. Erscheint in Inv. Math.

Jannis A. Antoniadis
Mathematisches Institut der Universität Kreta, 71409 Iraklio, Kreta
Griechenland
und
Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Straße 26, D-5300 Bonn 3
Deutschland