Transformée de Mellin des intégrales- fibres associées à l'intersection complète non-dégénérée

Susumu TANABÉ

RÉSUMÉ. *La transformée de Mellin de l'intégrale -fibre est calculée pour certaines classes d'intersection complète non-dégénérée affine, surtout les cas nommés simpliciables. On met à jour la structure de réseaux des pôles de la transformée de Mellin à l'aide des données topologiques qui décrivent la structure de Hodge de la variété affine. On établit la relation de l'intégrale-fibre avec la fonction hypergéométrique de Horn et de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski. Comme application, nous démontrons une hypothèse proposée par Berglund et autres sur la symétrie de miroir.*

0 Introduction

Ici on calcule concrètement l'intégrale-fibre associée à la variété affine d'intersection complète (IC) non-dégénérée au moyen de sa transformée de Mellin.

D'abord nous fixons la situation. Pour les deux variétés complexes $X =$ soit $\mathbf{C}^N$ soit $(\mathbf{C}^\times)^N$ et $S = \mathbf{C}^k$, on regarde une application

$$f : X \to S \tag{0.1}$$

telle que $X_s := \{(x_1, \cdots, x_N) \in X; f_1(x) + s_1 = 0, \ldots, f_k(x) + s_k = 0\}$. Soient $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ des polynômes qui définissent l'intersection complète, non-dégénérée au sens de Danilov-Khovanski [11]. Soit n la dimension de la variété $X_0 = n \geq 0$. Regardons une hypersurface de dimension $N + k - 1$, $W_s := \{(x_1, \cdots, x_N, y_1, \cdots, y_k) \in X \times (\mathbf{C}^\times)^k; y_1(f_1(x) + s_1) + \ldots + y_k(f_k(x) + s_k) = 0\}$. Pour la compactification $\mathcal{X}_s$ (resp. $\mathcal{W}_s$) des variétés X_s (resp. W_s) dans les variétés toriques proprement construites, les résultats de Terasoma (cas homogène) [32], Dimca (cas quasihomogène) [9], Mavlyutov (cas général) [19] impliquent l'existence d'un isomorphisme entre les parties primitives de la cohomologie $PH^{N-k}(\mathcal{X}_s)$ et $PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s)$. Récemment Terasoma a établi la version affine de cet isomorphisme pour X_s et W_s définis dans les tores [33], [34]. L'utilisation effective de cet isomorphisme (et de ses analogues) s'est baptisée sous le nom de "technique de Cayley" (Cayley trick). Dans ce travail, on regarde cet isomorphisme entre les structures de Hodge d'une façon un peu plus détaillée. C'est à dire, on calcule la transformée de Mellin des intégrales fibres associées à X_s au moyen de l'isomorphisme en se servant de la technique de Cayley pour la variété affine.

AMS Subject Classification: 14M10, 32S25, 32S40.

Key words and phrases: Gauss-Manin connexion, complete intersection, Hodge structure.

[1] Travail réalisé par le soutien du Max Planck Institut für Mathematik.

Surtout, dans cette deuxième partie du travail, à part des cas quasihomogènes, nous nous intéressons au cas de la singularité du type d'A'Campo:

$$f_i(x) = x_1^{\alpha_{1i}} + x_2^{\alpha_{2i}} + \cdots + x_N^{\alpha_{N,i}} \ , 1 \leq i \leq k. \tag{0.2}$$

Pour le cas $N = 2, (\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (3,2), (\alpha_{12}, \alpha_{22}) = (2,3)$, la monodromie locale de la singularité $f_1(x)f_2(x) = 0$ a été étudiée par A'Campo dans [1]. L'IC de ce type là nous fournit des exemples importants des cas simpliciables (voir §1.4).

Ici nous nous servons de la transformée de Mellin d'intégrales-fibres parce qu'elle permet de mieux visualiser les propriétés importantes des variétés d'IC non-dégénénérées par rapport aux autres représentations soit d'intégrales elles mêmes soit des équations différentielles (connexion de Gauss-Manin). Cette situation a incité certains auteurs comme C.Sabbah [26], [27], D.Barlet[3], F.Loeser [18] à poursuivre des recherches sur la transformée de Mellin d'intégrales fibres qui etaient, entre autres, motivées par une idée de P.Deligne reproduite dans [25].

Dans le §1 nous nous souvenons des faits utiles sur la technique de Cayley pour l'IC afin de définir l'intégrale fibre associée à f. Dans le §2, nous interprétons l'intégrale- fibre comme fonction hypergéométrique généralisée au sens de Mellin-Barnes-Pincherle. Du surcroit, on montre que l'intégrale fibre satisfait le système des équations différentielles du type de Horn. Pourtant le degré de chaque équation différentielle est exprimé au moyen du caractéristique d'Euler d'une variété d'IC. Dans le §3, les pôles de la transformée de Mellin de l'intégrale- fibre sont exprimés au moyen de la structure de Hodge mixte décrite dans [4].

Dans le §4.1, on établit une relation entre les notions des deux fonctoins hypegéométriques généralisées: celle de Horn et celle de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski. Dans le §4.2, 4.3, nous regardons les applications de notre calcul à la symétrie de miroir: les cas d'IC projective de Givental' et les cas d'IC à des poids multiples quasihomogènes. En se servant des résultats du §2, nous démontrons une hypothèse proposée par Berglund, Candelas et les autres.

Je tiens à remercier T.Terasoma, V.Golyshev de leurs discussions utiles. J'aimerais aussi mentionner les intêrets sincères de H.Kimura et de Y.Haraoka comme motivation importante pour l'amélioration des §2, §3 et §4.1.

1 Technique de Cayley

1.1. Quasihomogénisation On reprend la situation et les notations de §0. On introduit encore les notations suivantes. Soit $\mathbf{T}^m = (\mathbf{C} \setminus \{0\})^m = (\mathbf{C}^\times)^m$ un tore complexe de dimension m. On note par $x^{\mathbf{i}}$ le monôme $x^{\mathbf{i}} := x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}$ pour le multi-indice $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_N) \in \mathbf{Z}^N$, et par dx la $N-$forme volume $dx := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$. Avec la lettre ζ, on note le multi-indice $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_k) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^k$. Nous nous servons aussi des notations $x^{\mathbf{1}} := x_1 \cdots x_N$, $y^\zeta = y_1^{\zeta_1} \cdots y_k^{\zeta_k}$, $s^{\mathbf{z}} = s_1^{z_1} \cdots s_k^{z_k}$ et $ds = ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_k$. Dans cette section on considère l'extension de l'application f de la variété torique $\mathbf{P}_\Sigma$ dans $\mathbf{C}^k$. Nous poursuivons la construction de [6] et [19]. On définit le nombre M comme la dimension de l'espace ambiant minimum pour que nous puissons rendre les polynômes $(f_1(x), \cdots, f_k(x))$ simultanément quasihomogènes en multipliant certains termes par des nouvelles variables:

$$x^{\mathbf{i}} \rightarrow x'_j x^{\mathbf{i}} \ j = 1, 2, \cdots .$$

Notons par $(f_1(x, x'), \cdots, f_k(x, x'))$ les polynômes ainsi obtenus. Ils so nt quasihomogènes par rapport à certain poids c.à.d. il existe des nombres entiers positifs $(w_1, \cdots, w_N, w'_1, \cdots, w'_{M-N})$ tels que leur pgdc soit égal à 1 et qu'on ait la relation suivante:

$$E(x,x') = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M-N} w'_j x'_j \frac{\partial}{\partial x'_j}, \tag{1.1.1}$$

de telle sorte que

$$E(x,x')(f_\ell(x,x')) = p_\ell f_\ell(x,x') \quad \text{pour } \ell = 1,\cdots,k,$$

où on appelle E le champ d'Euler.

Exemple On ajoute au polynôme $f(x) = x_1^a + x_1x_2 + x_2^b$, avec $a, b > 2$, la variable nouvelle x'_1 en telle sorte que le polynôme $f(x,x') = x_1^a + x'_1x_1x_2 + x_2^b$, devienne quasihomogène par rapport au poids $(b, a, ab-a-b)$.

Il y a en général des choix des termes que l'on modifie pour réaliser une quasihomogénéité (voir §1.5, 1.6, §3.2).

Désormais nous nous servirons de la notation des variables $X := (X_1, \cdots X_M) := (x_1, \cdots, x_N, x'_1, \cdots, x'_{M-N})$ et celle du polynôme par $f_\ell(X) := f_\ell(x,x')$. Si on introduit un champ d'Euler,

$$E(X') = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M-N} w'_j x'_j \frac{\partial}{\partial x'_j} + X_{M+1} \frac{\partial}{\partial X_{M+1}},$$

alors on a la relation suivante:

$$E(X')(f_\ell(X) + X_{M+1}^{p_\ell} s_\ell) = p_\ell (f_\ell(X) + X_{M+1}^{p_\ell} s_\ell) \quad \text{pour } \ell = 1,\cdots,k.$$

D'ici bas on note $X' := (X, X_{M+1})$. Soit $\mathbf{M_Z}$ un réseau intégral de rang N et $\mathbf{N_Z}$ son réseau dual, $\mathbf{N_Z} = Hom(\mathbf{M_Z}, \mathbf{Z})$. Nous notons par $\mathbf{M_R}$ (resp. $\mathbf{N_R}$) l'extension naturelle à l'espace réel de $\mathbf{M_Z}$ (resp. $\mathbf{N_Z}$). Nous considérons la situation pour $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{M+1}$ générateurs des cônes unidimensionels tels que $\sum_{\ell=1}^{M+1} \mathbf{R}\vec{e}_\ell = \mathbf{N_R}$. On peut définir un éventail rationel simplicial Σ dans $\mathbf{N_R}$ comme ensemble des cônes simpliciaux engendrés par $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_{M+1}$ ci-dessus. Notre construction ci-dessus du champ $E(X')$ correspond à l'exhaussement d'un espace $\mathbf{N_R} \times \mathbf{N'_R}$ avec une base des générateurs $\vec{\tilde{e}}_{N+1}, \cdots \vec{\tilde{e}}_{M+1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \vec{\tilde{e}}_i + \sum_{j=1}^{M-N} w'_j \vec{\tilde{e}}_j + \vec{\tilde{e}}_{M+1} = 0.$$

Ici on a $p_{\mathbf{N}}(\vec{\tilde{e}}_j) = \vec{e}_j$ pour la projection $p_{\mathbf{N}} : \mathbf{N_R} \times \mathbf{N'_R} \to \mathbf{N_R}$. Pourtant la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{N_R} \times \mathbf{N'_R}$ doit être minimale c.à .d. $dim(\mathbf{N_R} \times \mathbf{N'_R}) = M$.

Dans la suite, regardons l'homomorphisme injectif

$$\varphi : \mathbf{M_Z} \to \mathbf{Z}^{M+1},$$

défini par

$$\varphi(\vec{m}) = (<\vec{m}, \vec{e}_1>, \cdots, <\vec{m}, \vec{e}_{M+1}>).$$

Le conoyau de cette application est un groupe abélien fini

$$Cl(\Sigma) = \mathbf{Z}^{M+1}/\varphi(\mathbf{M_Z})$$

dont on peut définir le groupe (dit le tore de Néron-Severi),

$$\mathbf{D}(\Sigma) := Spec\mathbf{C}[Cl(\Sigma)].$$

En plus on introduit l'espace affine,

$$\mathbf{A}^{M+1} = Spec\mathbf{C}[X'].$$

Soit $\hat{X}_\sigma := \prod_{\vec{e}_i \notin \sigma} X_i$, et on définit l'idéal

$$B(\Sigma) =< \hat{X}_\sigma : \sigma \in \Sigma >\subset \mathbf{C}[X_1, \cdots, X_{M+1}].$$

Soit $Z(\Sigma) := \mathbf{V}(B(\Sigma)) \subset \mathbf{A}^{M+1}$ la variété définie par $B(\Sigma)$.

A l'instar de la méthode initiée par M.Audin, on construit la variété torique $\mathbf{P}_\Sigma$ comme le quotient de $U(\Sigma) := \mathbf{A}^{M+1} \setminus Z(\Sigma)$ par l'action du groupe $\mathbf{D}(\Sigma)$:

$$\mathbf{P}_\Sigma = U(\Sigma)/\mathbf{D}(\Sigma),$$

avec $dim\, \mathbf{D}(\Sigma) = M + 1 - N, dim\, U(\Sigma) = M + 1$.

Grâce à la compatibilité de l'action de $\mathbf{D}(\Sigma)$ sur $U(\Sigma)$ et celle sur $V_s := \mathbf{V}(f_1(X)+X_{M+1}^{p_1}s_1, \cdots, f_k(X)+X_{M+1}^{p_k}s_k) \subset \mathbf{A}^{M+1}$, on est ramené à définir le sous-ensemble fermé $\mathcal{X}_s$ de $\mathbf{P}_\Sigma$ vu que celui-ci est un quotient géométrique,

$$\mathcal{X}_s := V_s \cap U(\Sigma)/\mathbf{D}(\Sigma).$$

Nous notons aussi $V_{s_i} := \mathbf{V}(f_i(X) + X_{M+1}^{p_i}s_i)$, $\mathcal{X}_{s_i} := \mathbf{V}_{s_i} \cap U(\Sigma)/\mathbf{D}(\Sigma)$.

Définition 1 *([19]) On dit que $\mathcal{X}_s$ est une IC non-dégénérée si pour chaque $\{i_1, \cdots, i_\ell\} \subset \{1, \cdots, k\}$ l'ensemble $\mathcal{X}_{s_{i_1}} \cap \cdots \cap \mathcal{X}_{s_{i_\ell}} \cap \mathbf{T}_\tau$ définit une sous-variété lisse de codimension ℓ pour n'importe quel $\tau \subset \Sigma$, où $\mathbf{T}_\tau = \{X \in \mathbf{A}^{M+1} : \hat{X}_\tau \neq 0, X_j = 0 \ si\ \vec{e}_j \subset \tau\}$.*

Dorénavant on prend pour s telle valeur de $\mathbf{C}^k$ que sa fibre $\mathcal{X}_s$ soit non singulière. On dit que $\mathcal{X}_s$ est une intersection quasi-lisse si $V_s \cap U(\Sigma)$ est soit vide soit une sous-variété lisse de codimension k dans $U(\Sigma)$. Il est connu qu'il existe un ensemble fermé $D(f)$ de $\mathbf{C}^k$ tel que $\mathcal{X}_s$ pour $s \in \mathbf{C}^k \setminus D(f)$ est une intersection non- dégénérée si V_0 définit la singularité isolée d'intersection complète dans $\mathbf{A}^M = Spec\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_M]$.

Ici on se souvient de l'espace projectif quasihomogène $\mathbf{P}^{(k-1)}(w''_1, \cdots, w''_k)$ [10], [6] qui est défini comme la variété torique associée aux cônes simpliciaux de l'espace vectoriel réel de dimension k engendré par les vecteurs non-zéros $\{\vec{\epsilon}_1, \cdots, \vec{\epsilon}_k\}$ qui satisfont la relation $w''_1\vec{\epsilon}_1 + \cdots + w''_k\vec{\epsilon}_k = 0$. Considérons maintenant un polynôme

$$G(X', s, y) := y_1(f_1(X) + X_{M+1}^{p_1}s_1) + \cdots + y_k(f_k(X) + X_{M+1}^{p_k}s_k), \tag{1.1.4}$$

défini sur une variété torique $\mathbf{P}(E)$ qui est un espace fibré par $\mathbf{P}^{(k-1)}(w''_1, \cdots, w''_k)$ de la variété $\mathbf{P}_\Sigma$: $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}_\Sigma \times \mathbf{P}^{(k-1)}(w''_1, \cdots, w''_k)$ muni d'un bidegré

$$(w(y_1), \cdots, w(y_k)) = (1, 1, \cdots, 1), (w(X_1), \cdots, w(X_{M+1})) = (0, 0, \cdots, 0).$$

L'anneau des coordonées homogènes au sens de [19] de $\mathbf{P}(E)$ est $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_{M+1}, y_1, \cdots, y_k]$. Cela veut dire qu'il existe le champ d'Euler

$$E(X', y) = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M-N} w'_j x'_j \frac{\partial}{\partial x'_j} + X_{M+1}\frac{\partial}{\partial X_{M+1}} + \sum_{\ell=1}^{k} w''_\ell y_\ell \frac{\partial}{\partial y_\ell}, \tag{1.1.5}$$

en sorte que

$$E(X', y)y_b f_b(X) = (w''_b + p_b)y_b f_b(X),\ 1 \leq b \leq k,$$
$$E(X', y)G(X', s, y) = w(F)G(X', s, y),$$

pour $w(G) = w_1'' + p_1 = \cdots = w_k'' + p_k$. Dans cette situation on peut définir la variété:

$$\mathcal{W}_s := \{(X', y) \in \mathbf{P}(E) : G(X', s, y) = 0\},$$

avec $dim\ \mathcal{W}_s = N+k-2$. Désormais on va se servir de la notation $w(\bullet)$ pour le poids quasihomogène d'un polynôme, d'une forme etc. determiné par le champ d'Euler $E(X', y)$ un objet quasihomogène $\bullet$.

On peut considérer le technique de Cayley sans référence au [19]. Notamment on introduit un polynôme,

$$H(x, y) := y_1 f_1(x) + \cdots + y_k f_k(x) \in \mathbf{Z}[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k].$$

Soient $\vec{n}_1, \cdots, \vec{n}_{M+k}$ les éléments de l'ensemble $supp(H(x, y)) \subset \mathbf{Z}^{N+k}$. On définit un éventail rationel simplicial $\tilde{\Sigma}$ dans $\mathbf{R}^{N+k}$ comme ensemble des cônes simpliciaux engendrés par $\vec{n}_1, \cdots, \vec{n}_{M+k}$. Pour $\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{M}_{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}^k$, on regarde l'homomorphisme injectif

$$\varphi : \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}^{M+k},$$

défini par

$$\varphi(\vec{\tilde{m}}) = (< \vec{\tilde{m}}, \vec{n}_1 >, \cdots, < \vec{\tilde{m}}, \vec{n}_{M+k} >).$$

Le conoyau de cette application est un groupe abélien fini

$$Cl(\tilde{\Sigma}) = \mathbf{Z}^{M+k} / \varphi(\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{Z}})$$

dont on peut définir le groupe

$$\mathbf{D}(\tilde{\Sigma}) := Spec\mathbf{C}[Cl(\tilde{\Sigma})]. \tag{1.1.6}$$

On peut construire la variété torique $\mathbf{P}_{\tilde{\Sigma}}$ associée à l'espace affine,

$$\mathbf{A}^{M+k} = Spec\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_M, y_1, \cdots, y_k],$$

d'une façon parallèlle à la construction de la variété $\mathbf{P}_{\Sigma}$.

1.2. Situation torique Dorénavant nous notons par F le polynôme suivant,

$$F(X, s, y) := y_1(f_1(X) + s_1) + \cdots + y_k(f_k(X) + s_k), \tag{1.2.1}$$

Pour la hypersurface $\mathcal{W}_s$ on se souvient du fait fondamental ([11] 6.2, [19] lemma 4.3) lors d'application du technique de Cayley.

Lemme 1.1 *Si $\mathcal{X}_s$ est une intersection non-dégénérée au sens de la Définition 1, alors l'hypersurface $\mathcal{W}_s$ est aussi non-dégénérée.*

Pour $\mathcal{W}_s$ non-dégénérée on définit l'anneau de Jacobi comme suit:

$$J(G) :=< \frac{\partial G(X', s, y)}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial G(X', s, y)}{\partial X_M}, \frac{\partial G(X', s, y)}{\partial X_{M+1}}, \frac{\partial G(X', s, y)}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial G(X', s, y)}{\partial y_k} >, \tag{1.2.2}$$

pour $s \in \mathbf{C}^k \setminus D(f)$ défini indépendamment du choix concrèt de s. De plus, il est connu qu'il existe une correspondance entre variation inifinitesimale de structure de Hodge $Gr_F^i\ PH^n(\mathcal{X}_s)$ et $Gr_F^{i+k-1}\ PH^{n+2k-2}(\mathcal{W}_s)$, pour $0 \leq i \leq n$. Voir [32] (pour le cas f homogène), [9] (cas quasihomogène) et [19] (cas général).

On note par $PH^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i})$ la partie primitive définie comme quotient

$$H^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i}) / \sqcup_{\ell=1}^k (j_\ell^* H^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i}))$$

où $j_\ell : \mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i} \to \mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i\neq \ell}\mathcal{X}_{s_i}$. Selon [9] on trouve l'isomorphisme provoqué par le résidu de Poincaré:

$$R_{\mathcal{X}_s} : H^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i}) \to PH^{N-k}(\mathcal{X}_s),$$

dont le noyau est égal à $\sqcup_{\ell=1}^k j_\ell^*(H^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i}))$. D'autre part on a la suite exacte ([6], 10.11):

$$0 \to H^{N+k-3}(\mathbf{P}(E)) \overset{[\mathcal{W}_s]}{\to} H^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)) \overset{i_\Sigma}{\to} H^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)\setminus \mathcal{W}_s) \overset{Res}{\to} PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s) \to 0.$$

Nous introduisons encore une autre partie primitive $PH^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)\setminus \mathcal{W}_s)$ que l'on définit comme conoyau de l'injection

$$i_\Sigma : H^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)) \to H^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)\setminus \mathcal{W}_s).$$

D'autre part d'après [19] on a l'isomorphisme entre $PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s)$ et $PH^{N-k}(\mathcal{X}_s)$. Avant de formuler l'énoncé central de la section, on introduit quelques notations associées à un ensemble des indices $I \subset \{1, \cdots, M+1\}$ avec $|I| = N$. Notamment,

$$\hat{X}_I = \prod_{i \notin I} X_i, \;\; dX_I = dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_N}, \;\; det(e_I) = det(< \vec{m}_j, \vec{e}_{i_k} >)_{1\leq j\leq N, 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_N\leq M+1},$$

où $\vec{m}_1, \cdots, \vec{m}_N$ une base du réseau $\mathbf{M_Z}$. On définit

$$\Omega_0(X') = \sum_{|I|=N} det(e_I)\hat{X}'_I dX'_I,$$

qui s'avère le générateur de $H^0\left(\mathbf{P}_\Sigma, \Omega^N_{\mathbf{P}_\Sigma}(w_1, \cdots, w_N, w'_1, \cdots, w'_{M-N})\right)$. D'ici bas on utilise la notation $X'^{\mathbf{J}'} y^\zeta = x_1^{i_1}\cdots x_N^{i_N} x'^{i'_1}_1 \cdots x'^{i'_{M-N+1}}_{M-N+1} y_1^{\zeta_1}\cdots y_k^{\zeta_k}$. Alors on obtient la Proposition suivante.

Proposition 1.2 *(Transformation cohomologique de Radon cf. [19], [33])*
Il existe l'isomorphisme entre les parties primitives des groupes de cohomologie comme suit:

$$(1.2.3) PH^N(\mathbf{P}_\Sigma \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{X}_{s_i}) \to PH^{N+k-1}(\mathbf{P}(E)\setminus \mathcal{W}_s)$$

$$\frac{X'^{\mathbf{J}'}\Omega_0(X')}{(f_1(X)+X_{M+1}^{p_1}s_1)^{\zeta_1+1}\cdots(f_k(X)+X_{M+1}^{p_k}s_k)^{\zeta_k+1}} \;\; \mid\to \frac{X'^{\mathbf{J}'}\omega^\zeta\Omega_0(X')\wedge\Omega_1(\omega)}{F(X',\omega,s)^{\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k}},$$

où $\Omega_1(\omega) = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} w''_\ell \omega_\ell d\omega_1 \wedge \overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots}} \wedge d\omega_k$. *Et l'élément* $X'^{\mathbf{J}'}y^\zeta \in \mathbf{C}[X', y]/J(F)$, *avec* $w(X'^{\mathbf{J}'+\mathbf{1}}y^{\zeta+\mathbf{1}}) = (\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k)w(F)$.

1.3. Situation affine

Si on restreint la variété torique $\mathbf{P}(E)$ ci-dessus à son intersection avec le tore maximal $\mathbf{T}^{N+k-1}$, la partie primitive de la cohomologie $H^{N+k-2}(\mathcal{W}_s \cap \mathbf{T}^{N+k-1})$ peut hériter certaines propriétés de $PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s)$. Notamment il est connu ([6], 11.6) que $W_{N+k-2}H^{N+k-2}(\mathcal{W}_s \cap \mathbf{T}^{N+k-1}) \cong PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s)$. Il est naturel d'espérer que l'on trouve dans des propriétés de l'intégrale $I^\zeta_{X'^{\mathbf{J}'},\partial\gamma}(s)$ certaine réflexion de celles de la structure de Hodge $PH^{N+k-2}(\mathcal{W}_s)$. Dans la suite, nous étudions l'intégrale fibre définie sur un $(M+1)-$cycle dans $\mathbf{T}^{M+1}$.

On prend un cycle $\gamma(s) \in H_{M+1-k}(V_s \cap \mathbf{T}^{M+1})$ et définit l'intégrale fibre y associée,

$$(1.3.1) \qquad I^\zeta_{X'^{\mathbf{J}'},\partial\gamma}(s) := \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^k \int_{\partial\gamma(s)} \frac{X'^{\mathbf{J}'}dX'}{(f_1(X)+X_{M+1}^{p_1}s_1)^{\zeta_1+1}\cdots(f_k(X)+X_{M+1}^{p_k}s_k)^{\zeta_k+1}},$$

où $\partial\gamma(s) \in H_{M+1}(\mathbf{T}^{M+1}\setminus \cup_{i=1}^k V_{s_i} \cap \mathbf{T}^{M+1})$ est un cycle obtenu à l'aide de ∂, l'opérateur de cobord de Leray. Quant à l'opération de Leray, on renvoie au livre de F.Pham [24], ou bien à celui de V.A.Vassiliev [37]. Nous notons par $\psi_{\mathbf{J}'}$ une $(M+1-k)$-forme méromorphe telle que

$$X'^{\mathbf{J}'}dX' = df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \psi_{\mathbf{J}'}.$$

Alors le théorème de résidus de Leray implique l'égalité suivante:

$$I^{\zeta}_{X'^{\mathbf{J}'},\partial\gamma}(s) = \frac{1}{\Gamma(\zeta_1+1)\dots\Gamma(\zeta_k+1)}(\frac{\partial}{\partial s})^{\zeta}\int_{\gamma(s)}\psi_{\mathbf{J}'} \tag{1.3.2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\zeta_1+1)\dots\Gamma(\zeta_k+1)}(\frac{\partial}{\partial s})^{\zeta} I^{0}_{X'^{\mathbf{J}'},\partial\gamma}(s)$$

où $(\frac{\partial}{\partial s})^{\zeta} = (\frac{\partial}{\partial s_1})^{\zeta_1}\dots(\frac{\partial}{\partial s_k})^{\zeta_k}$.

Dans cette situation, on formule la version intégrale de la Proposition 1.2.

Proposition 1.3 *Pour un cycle de Leray $\Gamma_s \subset H_{M+1}(\mathbf{T}^{M+1}\setminus\cup_{i=1}^k V_{s_i}\cap\mathbf{T}^{M+1})$ tel que $\Re(f_i(X)+X_{M+1}^{p_i}s_i)|_{\Gamma_s}<0$ hors sa partie compacte, l'égalité suivante a lieu:*

$$\Gamma(\zeta_1+1)\cdots\Gamma(\zeta_k+1)\int_{\Gamma_s}(f_1(X)+X^{p_1}_{M+1}s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(X)+X^{p_k}_{M+1}s_k)^{-\zeta_k-1}\frac{X'^{\mathbf{J}'+\mathbf{1}}dX'}{X'^{\mathbf{1}}}$$

$$= \Gamma(\zeta_1+\dots+\zeta_k+k)\int_{S^{k-1}_+(w'')\times\Gamma_s}\frac{X'^{\mathbf{J}'}\omega^{\zeta}dX'\wedge\Omega_0(\omega)}{(\omega_1(f_1(X)+X^{p_1}_{M+1}s_1)+\dots+\omega_k(f_k(X)+X^{p_k}_{M+1}s_k))^{\zeta_1+\dots+\zeta_k+k}}.$$

où $S^{k-1}_+(w") = \{(\omega_1,\cdots,\omega_k) : \omega_1^{\frac{\mathbf{w}''}{w''_1}}+\dots+\omega_k^{\frac{\mathbf{w}''}{w''_k}} = 1, \omega_\ell > 0$ pour tout $\ell, \mathbf{w}'' = \prod_{1\le i\le k} w''_i\}$ et $\Omega_0(\omega)$ la $(k-1)-$forme de volume sur $S^{k-1}_+(w'')$,

$$\Omega_0(\omega) = \frac{1}{w(F)}\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}w"_{\ell}\omega_\ell d\omega_1\wedge\overset{\ell}{\overset{\vee}{\cdots}}\wedge d\omega_k.$$

Démonstration D'abord on se souvient de la relation classique:

$$\int_{\Gamma_s}\int_{\mathbf{R}_+}e^{y_j(f_j(X)+X^{p_j}_{M+1}s_j)}y_j^{\zeta_j}dy_j\wedge dX' = \Gamma(\zeta_j+1)\int_{\Gamma_s}(f_j(X)+X^{p_j}_{M+1}s_j)^{-\zeta_j-1}dX', \tag{1.3.3}$$

qui se déduit de la définition de la fonction délta de Dirac comme résidu. Alors on a l'égalité:

$$\int_{(\mathbf{R}_+)^k}\int_{\Gamma_s}e^{(y_1(f_1(X)+X^{p_1}_{M+1}s_1)+\dots+y_k(f_k(X)+X^{p_k}_{M+1}s_k))}X'^{\mathbf{J}'}y^{\zeta}dy\wedge dX' \tag{1.3.4}$$

$$= \Gamma(\zeta_1+1)\cdots\Gamma(\zeta_k+1)\int_{\Gamma_s}X'^{\mathbf{J}'}(f_1(X)+X^{p_1}_{M+1}s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(X)+X^{p_k}_{M+1}s_k)^{-\zeta_k-1}dX'$$

$$= \Gamma(\zeta_1+1)\cdots\Gamma(\zeta_k+1)(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}})^k I^{\zeta}_{X'^{\mathbf{J}'},\Gamma_s}(s).$$

Si on transforme le terme gauche de (1.3.4) en effectuant le changement des variables $(y_1,\cdots,y_k) := (\sigma^{\frac{w''_1}{w(F)}}\omega_1,\cdots,\sigma^{\frac{w''_k}{w(F)}}\omega_k)$, avec $\sigma\in\mathbf{R}$, $(\omega_1,\cdots,\omega_k)\in S^{k-1}_+(w")$ et l'homothétie naturelle induite $X'\to(\sigma^{\frac{w_1}{w(F)}}X_1,\cdots,\sigma^{\frac{w_N}{w(F)}}X_N,\sigma^{\frac{w'_1}{w(F)}}X_{N+1},\cdots,\sigma^{\frac{w'_M}{w(F)}}X_M,\sigma^{\frac{1}{w(F)}}X_{M+1})$, on aura

$$\int_{\Gamma_s}\int_{S^{k-1}_+(w")}\int_{\mathbf{R}_+}e^{\sigma(\omega_1(f_1(X)+X^{p_1}_{M+1}s_1)+\dots+\omega_k(f_k(X)+X^{p_k}_{M+1}s_k))}\sigma^{\zeta_1+\dots+\zeta_k+k-1}X'^{\mathbf{J}'}\omega^{\zeta}d\sigma\wedge\Omega_0(\omega)\wedge\ dX'$$

$$= \Gamma(\zeta_1+1)\cdots\Gamma(\zeta_k+1)\int_{\Gamma_s}\int_{S_+^{k-1}(w")}\frac{X'^{\mathbf{J}'}\omega^\zeta\Omega_0(\omega)\wedge dX'}{\left(\sum_{\ell=1}^k\omega_\ell(f_\ell(X)+X_{M+1}^{p_\ell}s_\ell)\right)^{\zeta_1+\cdots\zeta_k+k}}.$$

Ici on se sert des formules (1.3.3), $dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k = \sigma^{\frac{w_1''+\cdots+w_k''}{w(F)}-1}d\sigma\wedge\Omega_0(\omega)$ et de la relation $w(X'^{\mathbf{J}'+\mathbf{1}})+\sum_{\ell=1}^k(\zeta_\ell+1)w_\ell''-(\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k)w(F)=0$. **C.Q.F.D.**

On remarque ici que si on applique le changement de variables

$$(X',y)\to(X_{M+1}^{\frac{w_1}{w(F)}}X_1,\cdots,X_{M+1}^{\frac{w_N}{w(F)}}X_N,X_{M+1}^{\frac{w_1'}{w(F)}}X_{N+1},\cdots,X_{M+1}^{\frac{w_M'}{w(F)}}X_M,X_{M+1},X_{M+1}^{\frac{w_1''}{w(F)}}y_1,\cdots,X_{M+1}^{\frac{w_k''}{w(F)}}y_k),$$

au terme gauche de (1.3.4), on obtient l'intégrale

$$\int_{(\mathbf{R}_+)^k}\int_{\Gamma_s}e^{X_{M+1}(y_1(f_1(X)+s_1)+\cdots+y_k(f_k(X)+s_k))}X^{\mathbf{J}}y^\zeta X_{M+1}^{\zeta_1+\cdots\zeta_k+k-1}dy\wedge dX\wedge dX_{M+1}$$

qui est égale à

$$I^\zeta_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s) := \int_{\gamma_s}X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}}(f_1(X)+s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(X)+s_k)^{-\zeta_k-1}\frac{dX}{X} \tag{1.3.5}$$

à constante près. Ici l'indice dénote $\mathbf{J}=(i_1,\cdots,i_M)$ et le cycle $\gamma_s\in H^M(\mathbf{T}^M\setminus\mathcal{X}_s|_{X_{M+1}=1})$ est une projection de Γ_s sur $\mathbf{T}^M$). On va donc préferer le travaille avec l'intégrale (1.3.5) à celui avec (1.3.1). L'indice i_{M+1} perdue dans l'expression (1.3.5) peut être recuperée par la relation $i_{M+1}=-1-w(X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}})-\sum_{\ell=1}^k(\zeta_\ell+1)w_\ell''+(\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k)w(F)$.

Dans cette situation nous pouvons formuler la version affine de la Proposition 1.2. On se sert de la notation de la variété affine

$$Z_{F(X,0,y)}=\{(X,y)\in\mathbf{T}^{M+k};F(X,0,y)=0\}.$$

Proposition 1.4 *([33]) Soit $(f_1(X),\cdots,f_k(X))$ comme dans §1.1. On dénote par $X_q=\{X\in\mathbf{T}^M;f_q(X)=0\},1\leq q\leq k$ l'hypersurface dans $\mathbf{T}^M$. Soit $F(X,s,y)$ un polynôme comme* (1.2.1)*, alors on a l'isomorphisme ci-dessous comme structure de Hodge,*

$$\begin{array}{ccc} PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)}) & \to & PH^M(\mathbf{T}^M\setminus X_1\cup\cdots\cup X_k)\\ X^{\mathbf{J}}y^\zeta\frac{dX\wedge dy}{dF} & \mapsto & \frac{X^{\mathbf{J}}dX}{f_1(X)^{\zeta_1+1}\cdots f_k(X)^{\zeta_k+1}}\end{array} \tag{1.3.6}$$

où

$$X^{\mathbf{J}}y^\zeta\in\frac{\mathbf{C}[X,y]}{\langle X_1\frac{\partial F(X,0,y)}{\partial X_1},\cdots,X_M\frac{\partial F(X,0,y)}{\partial X_M},y_1f_1(X),\cdots,y_kf_k(X)\rangle}.$$

La structure de Hodge mixte de $PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$ sera décrite dans §3.1 d'une façon plus détaillée.

En se servant de la Proposition 1.3 on reduit la transformée de Mellin de l'intégrale (1.3.1) à une intégrale du type d'Euler:

$$M^\zeta_{\mathbf{J},\gamma_s}(\mathbf{z}) := \int_\Pi s^{\mathbf{z}}I^\zeta_{X^{\mathbf{J}},\gamma_s}(s)\frac{ds}{s^{\mathbf{1}}} \tag{1.3.7}$$

$$=\int_{S_+^{k-1}(w'')\times\gamma^\Pi}\frac{X^{\mathbf{J}}\omega^\zeta s^{\mathbf{z}-\mathbf{1}}dX\wedge\Omega_0(\omega)\wedge ds}{(\omega_1(f_1(X)+s_1)+\cdots+\omega_k(f_k(X)+s_k))^{\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k}}$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+} \sigma^{\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k} \frac{d\sigma}{\sigma} \int_{S_+^{k-1}(w'')} \omega^{\zeta}\Omega_0(\omega) \int_{\gamma_s} X^{\mathbf{J}} dX \int_{\Pi} s^{\mathbf{z}-\mathbf{1}} e^{\sigma(\omega_1(f_1(X)+s_1)+\cdots\omega_k(f_k(X)+s_k))} ds,$$

ici le cycle Π est choisi en sorte qu'il évite les pôles de l'intégrale $I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ et qu'il soit homologue à $\mathbf{R}^k$ (cf. [22], (2.1.4)). On se sert de la notation $\gamma^{\Pi} := \cup_{s\in\Pi}(s,\gamma_s)$. Il ne faut pas le confondre avec l'onglet de Lefschetz, car γ^{Π} est plus tôt un tuyau sans onglet.

Et puis, nous reécrivons, à constante près, la dernière expression par

$$\int_{(\mathbf{R}_+)^k\times\gamma^{\Pi}} e^{\Psi(T)} X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}} y^{\zeta+\mathbf{1}} s^{\mathbf{z}} \frac{dX}{X^{\mathbf{1}}} \wedge \frac{dy}{y^{\mathbf{1}}} \wedge \frac{ds}{s^{\mathbf{1}}} \tag{1.3.8}$$

où

$$\Psi(T) = T_1(X,s,y) + \cdots + T_L(X,s,y) = F(X,s,y), \tag{1.3.9}$$

dans lequel chaque terme $T_i(X,s,y)$ représente un monôme des variables X,s,y du polynôme (1.2.1). Nous allons appeler le polynôme (1.1.6) (noté par $\Psi(T)$) *fonction de phase.*

1.4. Lemmes combinatoires Ici on prépare quelques lemmes de caractère combinatoire qui sont utiles pour le calcul de la transformée de Mellin (1.3.7).

Désormais on note par L le nombre des monômes en (X,s,y) qui prennent part à la fonction de phase. Dans le cas de la singularité d'A'Campo (0.2), on a $L=(N+1)k$, avec

$$T_1 = y_1 x_1^{\alpha_{1,1}}, T_2 = y_1 x_2^{\alpha_{2,1}}, \cdots, T_L = y_k s_k. \tag{1.4.1}$$

D'ici bas pour (0.2), on suppose toujours que la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \cdots & \alpha_{k,N} \end{bmatrix}, \tag{1.4.2}$$

est de rang k.

Si le nombre L est strictement plus petit que le nombre des variables $(X,s,y) = M+2k$, alors nous appelons le cas “abondant”. Par contre, si $M+2k<L$ le cas “déficitaire”.

Dans le cas déficitaire, on peut définir le nombre m comme le nombre minimal des nouvelles variables

$$x'' = (x'_1, \cdots, x'_m) \tag{1.4.3}$$

pour rendre le nombre des variables égal à celui des termes selon la façon introduite au §**1.1**. Par exemple, la relation (1.4.1) devient comme suit:

$$T_1 = y_1 x'_1 x_1^{\alpha_{1,1}}, T_2 = y_1 x'_2 x_2^{\alpha_{2,1}}, \cdots, T_{(N+1)k-1} = y_k x'_m x_N^{\alpha_{N,k}}, T_{(N+1)k} = y_k s_k. \tag{1.4.4}$$

Pour simplifier nous introduisons l'écriture des polynômes

$$f_i(X) = X^{\vec{\alpha}_{1,i}} + \cdots + X^{\vec{\alpha}_{\tau_i,i}}, 1 \le i \le k,$$

où $X^{\vec{\alpha}_{j,i}} = X_1^{\alpha_{j,i,1}} \cdots X_M^{\alpha_{j,i,M}} = x_1^{\alpha_{j,i,1}} \cdots x_N^{\alpha_{j,i,N}} x_1'^{\alpha_{j,i,N+1}} \cdots x_{M-N}'^{\alpha_{j,i,M}}$. Le nombre τ_i dénote le nombre des termes qui sont présents dans l'expression $f_i(X)$. On a ainsi $\tau_1+\cdots+\tau_k+k=L$.

Proposition 1.5 *Pour la variété torique $\mathbf{P}_{\Sigma}$ (resp. $\mathbf{P}_{\tilde{\Sigma}}$) associée à $\mathcal{X}_s$ définie par (0.2), (1.4.1), on a $dim\mathbf{D}(\Sigma) = dim\mathbf{D}(\tilde{\Sigma}) + 1 = (N-1)(k-1)$, et*

$$m = dim\mathbf{D}(\Sigma) - 1 = dim\mathbf{D}(\tilde{\Sigma}) = (N-1)(k-1) - 1. \tag{1.4.5}$$

C'est à dire, l'addition convenable (voir Lemme 3.5. ci-dessous) des nouvelles variables $x' = (x'', x'_{m+1}) = (x'_1, \cdots, x'_m, x'_{m+1})$ à $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ rend notre polynôme $G(X', 0, y)$ de (1.1.4) quasi-homogène.

Démonstration D'abord on remarque que $\vec{\alpha}_{j,i} = (0, \cdots, 0, \cdots, 0, \overset{\overset{j}{\vee}}{\cdots}, \alpha_{j,i,j}, 0, \cdots, 0)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq N$, selon la notation ci-dessus. Pour démontrer la proposition, il suffit de trouver l'ensemble minimal de vecteurs supplémentaires $\vec{e}_{j,i}, (j,i) \in \tilde{A}$, $|\tilde{A}| = m+1$ tel que $\vec{\alpha}_{j,i} - \vec{\alpha}_{j+1,i} + \vec{e}_{j,i}$ possède un unique vecteur vertical dans $\mathbf{C}^{N+m+1}$. Si la condition (1.4.2) est satisfaite, on voit que l'espace vectoriel engendré par

$$\vec{\alpha}_{j,1} - \vec{\alpha}_{j+1,1}, 1 \leq j \leq N-1$$

$$\vec{\alpha}_{j,i} - \vec{\alpha}_{j+1,i} + \vec{e}_{j,i}, 1 \leq j \leq N-1, 2 \leq i \leq k,$$

avec $\bigwedge_{1 \leq j \leq N-1, 2 \leq i \leq k} \vec{e}_{j,i} \neq 0$ possède unique vecteur vertical

$$\bigwedge_{1 \leq j \leq N-1} \left(\vec{\alpha}_{j,1} - \vec{\alpha}_{j+1,1}\right) \bigwedge_{1 \leq j \leq N-1, 2 \leq i \leq k} \left(\vec{\alpha}_{j,i} - \vec{\alpha}_{j+1,i} + \vec{e}_{j,i}\right)$$

dans $\mathbf{C}^{N+(N-1)(k-1)}$. On en déduit que la dimension de l'espace desiré doit être $m+1 = (N-1)(k-1)$. **C.Q.F.D.**

1.5 En suite, on va considérer une paramétrisation simple de la variété définie par (0.1). Pour fixer la situation, désormais on tient uniquement compte du cas déficitaire des variables. Les cas abondants des variables seront traités ailleurs (par exemple (4.2.1), (4.2.2) ci-dessous). On note

$$\Xi :=^t (x_1, \cdots, x_N, x'_1, \cdots, x'_m, s_1, \cdots, s_k, y_1, \cdots, y_k), \tag{1.5.1}$$

$$Log\ T :=^t (log\ T_1, \cdots, log\ T_L) \tag{1.5.2}$$

$$Log\ \Xi :=^t (\log\ x_1, \cdots, \log\ x_N, log\ x'_1, \cdots, log\ x'_m, \log\ s_1, \cdots, log\ s_k, \log\ y_1, \cdots, log\ y_k). \tag{1.5.3}$$

Ici on oublie la variable x'_{m+1} en la fixant $x'_{m+1} = 1$. Alors, une équation linéaire équivalente à (1.4.4) s'écrit comme,
(1.5.4)
$log\ T_1 = log\ y_1 + log\ x'_1 + \alpha_{1,1} log\ x_1, log\ T_2 = log\ y_1 + log\ x'_2 + \alpha_{2,1} log\ x_2, \cdots, log\ T_{(N+1)k} = log\ y_k + log\ s_k.$

Reécrivons cette relation linéaire (1.5.4) au moyen d'une matrice $\mathsf{L} \in End(\mathbf{Z}^L)$,

$$Log\ T = \mathsf{L} \cdot Log\ X. \tag{1.5.5}$$

Dorénavant, les colonnes des matrices $\mathsf{L}, \mathsf{L}^{-1}$ etc. seront toujours rangées en correspondance avec l'ordre des variables donné ci-dessus dans (1.5.1), (1.5.2), (1.5.3).

Bien entendu, on peut modifier, avec une certaine liberté, de monômes du polynôme f en y ajoutant des paramètres $(x'_1, \cdots, x'_m)$, comme on verra dans l'exemple suivant. C'est à dire, on peut ajouter x' comme chez (1.6.3) ou bien (1.6.7) ci-dessous. On va revenir à cette question plus tard au §3.2. Voir Remarque 5 à propos de la compactification de Terasoma.

Néanmoins, dans le cas de la singularité (0.2), le choix des monômes auxquels on multiplié les paramètres supplémentaires est un peu délicat. Notamm ent, il faut suivre les règles suivantes pour éviter la dégénérescence de la matrice L de la relation (1.5.5).

Lemme 1.6 *Pour (0.2) et* (1.4.3)*, on a une matrice non-dégénérée* L *si on suit les règles suivantes:*

a. *Pour l'indice* $i \in \{1, \cdots, N\}$ *fixé, il faut choisir au moins un des monômes* $x_j^{\alpha_{j,i,j}}, 1 \leq i \leq k$ *que on ne modifie pas.*

b. *Pour l'indice* $i \in \{1, \cdots, k\}$ *fixé, il faut choisir au moins un des termes* $x_j^{\alpha_{j,i,j}}, 1 \leq j \leq N$ *que on ne modifie pas.*

Par exemple, on peut modifier les termes de $y_\ell(f_\ell(x)+s_\ell)$ pour ℓ assez grand de la façon suivante:

$$y_\ell(f_\ell(x,x')+s_\ell) = y_\ell(x_1^{\alpha_{1\ell}} + \sum_{i=2}^{N} x'_{i,\ell} x_i^{\alpha_{i\ell}} + s_\ell). \tag{1.5.6}$$

Ainsi on crée un polynôme qui dépend des $(N-1)$ nouveaux paramètres $(x'_{2,\ell},\cdots,x'_{N,\ell})$ qui n'apparaîssent pas aux $f_1(x,x')+s_1,\cdots f_{\ell-1}(x,x')+s_{\ell-1}$. On arrive à une notion naturelle qui contient le cas (0.2).

Définition 2 *Nous appelons une IC (0.1) simpliciable, s'il existe un polynôme* (1.1.4) *tel que* $dim\mathbf{D}(\Sigma) = L-2k-N+1$ *et tel que la matrice* L *définie par* (1.5.5) *soit non-dégénérée. Nous appelons tel polynôme* (1.1.4) *simplicial.*

Dans le cas où l'IC est simpliciable, on peut énoncer une nouvelle proposition, analogue à la Proposition 1.5. C'est à dire une relation entre le nombre des variables nécessaires pour la quasihomogénéité et le nombre m de (1.4.3).

Proposition 1.7 *Pour l'IC simpliciable plongée dans* $\mathbf{P}_\Sigma$ *(resp.* $\mathbf{P}_{\tilde\Sigma}$*), on a la relation suivante;*

$$m = dim\ \mathbf{D}(\Sigma) - 1 = dim\mathbf{D}(\tilde\Sigma) = M - N. \tag{1.5.7}$$

Dorénavant, on va donc identifier $M = N+m$.

On se souvient ici de la notion de non-dégénérescence d'un polynôme qui s'entraîne de sa simpliciabilité.

Définition 3 *L'hypersurface définie par un polynôme* $g(x) = \sum_{\alpha\in supp(g)} g_\alpha x^\alpha \in \mathbf{C}[x_1,\cdots,x_n]$ *se dit non-dégénéré si et seulement si pour n'importe quel* $\xi \in \mathbf{R}^n_{\geq 0}$ *l'inclusion suivante a lieu,*

$$\{x\in\mathbf{C}^n; x_1\frac{\partial g^\xi}{\partial x_1} = \cdots = x_n\frac{\partial g^\xi}{\partial x_n} = 0\} \subset \{x\in\mathbf{C}^n; x_1\cdots x_n = 0\}$$

où $g^\xi(x) = \sum_{\{\beta;<\beta,\xi>\leq<\alpha,\xi>,\ \text{pour tout}\ \alpha\in supp(g)\}} g_\alpha x^\alpha$.

Proposition 1.8 *Si la matrice* L *est non-dégénérée, l'hypersurface* $Z_{F(X,0,y)}$ *est non-dégénérée au sens de la Définition 3.*

Démonstration D'abord on remarque que pour $\xi = (\overbrace{0,\cdots,0}^{M},\overbrace{1,\cdots,1}^{k})$ on a $F^\xi(X,0,y) = F(x,0,y)$. Il est nécessaire que l'équation suivante ait aucune solution dans $\mathbf{T}^{M+k}$ pour la non-dégénérescence de l'hypersurface $Z_{F(X,0,y)}$,

$$X_1\frac{\partial F(X,0,y)}{\partial X_1} = \cdots = X_M\frac{\partial F(X,0,y)}{\partial X_M} = y_1f_1(X) = \cdots = y_kf_k(X) = 0.$$

Cett'équation entraîne,

$$T_1(X,y) = T_2(X,y) = \cdots = T_{\tau_1}(X,y) = T_{d^1+1}(X,y),\cdots,T_{d^2+1}(X,y),\cdots,T_{d^k-1}(X,y) = 0, \tag{1.5.8}$$

avec $d^q := \sum_{i=1}^q \tau_i + q$. Pour resoudre l'équation (1.5.8) dans $\mathbf{T}^{M+k}$, il suffit de chercher la solution non-triviale du système,

$$\mathsf{L}Log\ \Xi_0 = {}^t(-\infty,\cdots,-\infty),$$

$$Log\ \Xi_0 := {}^t(\log\ x_1,\cdots,\log\ x_N, log\ x'_1,\cdots,log\ x'_m,0,\cdots,0,\log\ y_1,\cdots,log\ y_k).$$

Si $det\mathsf{L} \neq 0$ une solution quelconque $Log\ \Xi_0$ contient un élément $-\infty$. Cela veut dire que l'équation (1.5.8) n'a pas de la solution dans $\mathbf{T}^{M+k}$. **C.Q.F.D.**

1.6. Exemple On considère un exemple de l'IC non-dégénérée défini par 3 polynômes qui dépendent de deux variables,

$$f_i(x) = x_1^{\alpha_i} + x_2^{\beta_i}\ , 1 \leq i \leq 3. \tag{1.6.1}$$

Alors la fonction de phase a 9 termes, pourtant elle dépend de 8 variables-paramètres: $y_1(x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + s_1) + y_2(x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + s_2) + y_3(x_1^{\alpha_3} + x_2^{\beta_3} + s_3)$.

On se trouve au cas déficitaire. On ajoute un autre paramètre x_1' qui met notre polynôme sous forme convenable. Notamment, on regarde

$$y_1(x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + s_1) + y_2(x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + s_2) + y_3(x_1^{\alpha_3} + x_1' x_2^{\beta_3} + s_3), \tag{1.6.2}$$

au lieu de la fonction de phase initiale.Alors on a

(1.6.3)

$$T_1 = y_1 x_1^{\alpha_1}, T_2 = y_1 x_2^{\beta_1}, T_3 = y_1 s_1, T_4 = y_2 x_1^{\alpha_2}, T_5 = y_2 x_2^{\beta_2}, T_6 = y_2 s_2, T_7 = y_3 x_1^{\alpha_3}, T_8 = y_3 x_1' x_2^{\beta_3}, T_9 = s_3.$$

Dans ce cas là, on est ramené à resoudre l'équation linéaire suivant:

$$Log\ T = \mathsf{L}_3 \cdot Log\ X. \tag{1.6.4}$$

où

$$\mathsf{L}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.6.5}$$

$$Log\ T =^t (log\ T_1, log\ T_2, log\ T_3, log\ T_4, log\ T_5, log\ T_6, log\ T_7, log\ T_8, log\ T_9)$$

$$Log\ X =^t (log\ x_1, log\ x_2, log\ x_1', log\ s_1, log\ s_2, log\ s_3, log\ y_1, log\ y_2, log\ y_3).$$

Autrement dit, on a relation:

$$Log\ X = {\mathsf{L}_3}^{-1} \cdot Log\ T,$$

avec

$${\mathsf{L}_3}^{-1} =$$

(1.6.6)

$$\frac{1}{\delta(1,2)}\begin{bmatrix} \beta_2 & -\beta_2 & 0 & -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta(2,3) & \delta(2,3) & 0 & \delta(1,3) & -\delta(1,3) & 0 & -\delta(1,2) & \delta(1,2) & 0 \\ \beta_1\,\alpha_2 & -\alpha_1\,\beta_2 & \delta(1,2) & -\alpha_1\,\beta_1 & \alpha_1\,\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2\,\alpha_2 & -\beta_2\,\alpha_2 & 0 & -\alpha_1\,\beta_2 & \beta_1\,\alpha_2 & \delta(1,2) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3\,\beta_2 & -\alpha_3\,\beta_2 & 0 & -\beta_1\,\alpha_3 & \beta_1\,\alpha_3 & 0 & -\delta(1,2) & 0 & \delta(1,2) \\ -\beta_1\,\alpha_2 & \alpha_1\,\beta_2 & 0 & \alpha_1\,\beta_1 & -\alpha_1\,\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_2\,\alpha_2 & \beta_2\,\alpha_2 & 0 & \alpha_1\,\beta_2 & -\beta_1\,\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3\,\beta_2 & \alpha_3\,\beta_2 & 0 & \beta_1\,\alpha_3 & -\beta_1\,\alpha_3 & 0 & \delta(1,2) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ici on s'est servi de la notation $\delta(i,j) = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i, 1 \leq i,j \leq 3$. Pourtant on note que $det(\mathsf{L}_3) = \delta(1,2)$. Si on regarde une autre paramétrisation:

$$y_1(x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + s_1) + y_2(x_1^{\alpha_2} + \tilde{x}_1' x_2^{\beta_2} + s_2) + y_3(x_1^{\alpha_3} + x_2^{\beta_3} + s_3). \tag{1.6.7}$$

On aura $Log\,\tilde{T} = \mathsf{L}_2 \cdot (log\,\tilde{X}')$ avec la matrice:

$$\mathsf{L}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.6.8}$$

(1.6.9)

$$\mathsf{L}_2^{-1} =$$

$$\frac{1}{\delta(1,3)}\begin{bmatrix} \beta_3 & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ \delta(2,3) & -\delta(2,3) & 0 & -\delta(1,3) & \delta(1,3) & 0 & \delta(1,2) & -\delta(1,2) & 0 \\ \beta_1\,\alpha_3 & -\alpha_1\,\beta_3 & \delta(1,3) & 0 & 0 & 0 & -\beta_1\,\alpha_1 & \beta_1\,\alpha_1 & 0 \\ \beta_3\,\alpha_2 & -\beta_3\,\alpha_2 & 0 & -\delta(1,3) & 0 & \delta(1,3) & -\beta_1\,\alpha_2 & \beta_1\,\alpha_2 & 0 \\ \alpha_3\,\beta_3 & -\alpha_3\,\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1\,\beta_3 & \alpha_3\beta_1 & \delta(1,3) \\ -\beta_1\,\alpha_3 & \alpha_1\,\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\,\alpha_1 & -\beta_1\,\alpha_1 & 0 \\ -\beta_3\,\alpha_2 & \beta_3\,\alpha_2 & 0 & \delta(1,3) & 0 & 0 & \beta_1\,\alpha_2 & -\beta_1\,\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_3\,\beta_3 & \alpha_3\,\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1\,\beta_3 & -\beta_1\,\alpha_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.6.10) $$\mathsf{L}_3 \cdot \mathsf{C}_{32} = \mathsf{L}_2$$

avec $\mathsf{C}_{32} = -\frac{\delta(1,3)}{\delta(1,2)}$. On a $det(\mathsf{L}_2) = -\delta(1,3)$.

2 Représentation Mellin-Barnes-Pincherle de l'intégrale fibre

2.1 L'intégrale- fibre en tant qu'une fonction hypergéométrique généralisée

Nous notons par $X^{\mathbf{J}}$ le monôme $x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} {x'}_1^{i'_1} \cdots {x'}_m^{i_m}$. Dans le cas de l'IC simpliciable, on a $m = M - N$. On reprend la forme

(2.1.1) $$M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma_s}(\mathbf{z}) := \int_{\Pi} s^{\mathbf{z}} I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma_s}(s) \frac{ds}{s^{\mathbf{1}}},$$

pour certain cycle Π qui évite les pôles de $I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$. D'ailleurs il serait utile de voir le calcul du chapitre précédent, en liaison avec la notion des fonctions hypergéométriques généralisées (FHG) au sens de Mellin-Barnes-Pincherle [2], [20]. Par cette formulation la FHG de Gauss s'exprime par l'intégrale,

$$_2F_1(\alpha, \beta, \gamma|s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 - i\infty}^{z_0 + i\infty} (-s)^z \frac{\Gamma(z+\alpha)\Gamma(z+\beta)\Gamma(-z)}{\Gamma(z+\gamma)} dz, \quad -\Re\alpha, -\Re\beta < z_0.$$

L'ensemble des indices des colonnes et des rayons de la matrice L sera noté par I,

$$I := \{1, \cdots, L\}.$$

Ici on se souvient de la relation $L = N + m + 2k = M + 2k$. La notion suivante facilitera notre formulation des résultats.

Définition 4 *Nous appelons une fonction $g(z) = g(z_1, \cdots, z_k)$ $\Delta-$ périodique pour $\Delta \in \mathbf{Z}_{>0}$, si*

$$g(z) = h(e^{\pi\sqrt{-1}\frac{z_1}{\Delta}}, \cdots, e^{\pi\sqrt{-1}\frac{z_k}{\Delta}}),$$

pour une fonction rationnelle $h(\zeta_1, \cdots, \zeta_k)$ quelconque.

Pour (0.1) une IC simpliciable, on a l'énoncé comme suit.

Proposition 2.1 *1)Il existe un cycle $\Pi \in H_k(\mathbf{T}^k \setminus S.S.I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s))$ tel que la transformée de Mellin* (2.1.1) *se représente comme produit des $\Gamma-$ fonctions à un facteur $g(z)$ de fonction $\Delta-$ périodique près:*

$$M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(\mathbf{z}) = g(z) \prod_{a \in I} \Gamma\big(\mathcal{L}_a(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta)\big),$$

avec

(2.1.2) $$\mathcal{L}_a(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) = \frac{\sum_{j=1}^N A^a_j(i_j+1) + \sum_{j=1}^m C^a_j(i'_j+1) + \sum_{\ell=1}^k (B^a_\ell z_\ell + D^a_\ell(\zeta_\ell+1))}{\Delta}, a \in I.$$

Ici on a la matrice aux éléments entiers,

(2.1.3) $${}^t\mathsf{T} = (A^a_1, \cdots, A^a_N, C^a_1, \cdots, C^a_m, B^a_1, \cdots, B^a_k, D^a_1, \cdots, D^a_k)_{1 \leq a \leq L},$$

avec p.g.d.c.$(A^a_1,\cdots,A^a_N,C^a_1,\cdots,C^a_m,B^a_1,\cdots,B^a_k,D^a_1,\cdots,D^a_k)=1$, *pour tout* $a\in[1,L]$, *où la matrice* $\Delta^{-1}\mathsf{T}$ *est l'inverse de* L. *Ainsi* $\Delta>0$ *est determiné d'une manière unique. Pourtant les coefficients (2.1.2) satisfont les propriétés suivantes pour chaque indice* $a\in I$:

a *Soit* $\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)=\frac{\Delta}{\Delta}z_\ell$, *c.à.d.* $A^a_1=\cdots=A^a_N=0$, $B^a_1=\cdots\overset{\ell}{\vee}\cdots=B^a_k=0$, $B^a_\ell=1$.
b *Soit*

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)=\frac{\sum_{j=1}^N A^a_j(i_j+1)+\sum_{j=1}^m C^a_j(i'_j+1)+\sum_{\ell=1}^k B^a_\ell(z_\ell-\zeta_\ell-1)}{\Delta}$$

2) Pour chaque l'indice $1\le\ell\le N, 1\le q\le k,\ 1\le j\le m$ *fixé les égalités suivantes ont lieu:*

$$\sum_{a\in I}A^a_\ell=0,\ \sum_{a\in I}B^a_q=0,\sum_{a\in I}C^a_j=0. \tag{2.1.4}$$

3)Parmi les fonction linéaires $\mathcal{L}_a$, $a\in I$ *la relation suivante a lieu:*

$$\sum_{a\in I}\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)=\zeta_1+\cdots+\zeta_k+k.$$

Démonstration

1) D'abord on se souvient de la définition de la $\Gamma-$fonction,

$$\int_{C_a}e^{-T_a}T_a^{\sigma_a}\frac{dT_a}{T_a}=(1-e^{2\pi i\sigma_a})\Gamma(\sigma_a),$$

pour l'unique cycle C_a nontrivial qui tourne autour de $T_a=0$ avec les asymptotes $\Re T_a\to+\infty$. On transforme l'intégrale (1.3.8) à l'aide de l'application (1.5.5),

$$\int_{(\mathbf{R}_+)^k\times\gamma^\Pi}e^{\Psi(T(X,s,y))}X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}}s^{\mathbf{z}}y^{\zeta+\mathbf{1}}\frac{dX}{X^{\mathbf{1}}}\wedge\frac{dy}{y^{\mathbf{1}}}\wedge\frac{ds}{s^{\mathbf{1}}} \tag{2.1.5}$$

$$=(det\mathsf{L})^{-1}\int_{L_*(\mathbf{R_+}^k\times\gamma^\Pi)}e^{\sum_{a\in I}T_a}\prod_{a\in I}T_a^{\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)}\bigwedge_{a\in I}\frac{dT_a}{T_a}.$$

Evidemment l'intégrale (2.1.5) est égale au (1.3.8) à des fonctions $\Delta-$ périodiques près. Ici $L_*(\mathbf{R_+}^k\times\gamma^\Pi)$ dénote l'application d'un chaîne dans $\mathbf{C}^M_X\times\mathbf{C}^k_s\times\mathbf{C}^k_y$ au celui dans $\mathbf{C}^{M+2k}_T$ induite par la transformation (1.5.5). On peut considérer une action naturelle $\lambda: C_a\to\lambda(C_a)$ définie par la relation,

$$\int_{\lambda(C_a)}e^{-T_a}T_a^{\sigma_a}\frac{dT_a}{T_a}=\int_{(C_a)}e^{-T_a}(e^{2\pi\sqrt{-1}}T_a)^{\sigma_a}\frac{dT_a}{T_a}.$$

A l'aide de cett'action le chaîne $\mathsf{L}_*(\mathbf{R_+}^k\times\gamma^\Pi)$ s'avère homologue au chaîne,

$$\sum_{(j_1^{(\rho)},\cdots,j_L^{(\rho)})\in[1,\Delta]^L}m_{j_1^{(\rho)},\cdots,j_L^{(\rho)}}\prod_{a=1}^k\lambda^{j_a^{(\rho)}}(\mathbf{R}_+)\prod_{a'=k+1}^L\lambda^{j_{a'}^{(\rho)}}(C_{a'}),$$

avec $m_{j_1^{(\rho)},\cdots,j_L^{(\rho)}}\in\mathbf{Z}$. Celui-ci explique l'apparition du facteur $g(z)=\sum_{(j_1^{(\rho)},\cdots,j_L^{(\rho)})\in[1,\Delta]^L}m_{j_1^{(\rho)},\cdots,j_L^{(\rho)}}$ $\prod_{a=1}^k e^{2\pi\sqrt{-1}j_a^{(\rho)}\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)}\prod_{a'=k+1}^L e^{2\pi\sqrt{-1}j_{a'}^{(\rho)}\mathcal{L}_{a'}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)}(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\mathcal{L}_{a'}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)})$ à part de la fonction $\Gamma(\bullet)$.

Dans la suite, on s'occupe de l'analyse des facteurs de la fonction Γ chez l'intégrale (2.1.5). Dans ce but, on représente la matrice L (resp.L^{-1}) comme un ensemble des L colonnes proprement rangées:

$$\mathsf{L} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, , \cdots, \vec{v}_L), \mathsf{L}^{-1} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, , \cdots, \vec{w}_L), \vec{w}_a =^t (w_{a,1}, \cdots, w_{a,L}). \tag{2.1.6}$$

Les vecteurs colonnes de L^{-1} sont divisées en 3 groupes:

1 les colonnes avec tous les éléments formellement non-zéros.

2 avec unique élément non-zéro ($= 1$) qui produit $z_i, 1 \leq i \leq k$.

3 avec les éléments non-zéros qui produisent une fonction linéaire en $\zeta + \mathbf{1}, \mathbf{J} + \mathbf{1}$ d'après (2.1.2).

Dans l'argument plus loin, les premières deux groupes des colonnes nous importent.

Le produit intérieur des vecteurs $(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta)$ et $\vec{w}_a$ définit la fonction linéaire sous question:

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) = (\mathbf{J} + \mathbf{1}, \mathbf{z}, \zeta + \mathbf{1}) \cdot \vec{w}_a. \tag{2.1.7}$$

La colonne qui correspond à la variable $log\ s_i$ de L consiste en un seul élément non-zéro ($= 1$) à la position $\tau_1 + \cdots + \tau_i + i$. Pourtant la colonne de L qui correspond à la variable $log\ x'_\ell$ aussi consiste d'un élément non-zéro ($= 1$) qui n'est pas en position $\tau_1 + \cdots + \tau_i + i, (1 \leq i \leq k)$. Notons simplement, cette correspondance par

$$\vec{v}_{\rho(i)} =^t (0, \cdots, 0, \cdots \overset{\sigma(i)}{\vee}\!\!1, 0, \cdots, 0),$$

qui entraîne chez L^{-1},

$$\vec{w}_{\sigma(i)} =^t (0, \cdots, 0, \cdots \overset{\rho(i)}{\vee}\!\!1, 0, \cdots, 0).$$

Ici $\rho, \sigma : \{N + 1, \cdots, M + k\} \to I$ est l'injection qui envoye les numéros des colonnes correspondant aux variables s, x' à l'ensemble total des indices I. En suite, on divise les colonnes de L^{-1} en k groupes $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k \subset I$ dont chacun représente $\Lambda_b = \{\tau_1 + \cdots + \tau_{b-1} + b, \cdots, \tau_1 + \cdots + \tau_b + b\} \subset I$. Pour ce groupe, on peut constater les propriétés suivantes. $a)$ La colonne $\vec{v}_{M+k+b} =^t (0, \cdots, 0, 0, \cdots 0, \overset{\tau_1+\cdots+\tau_{b-1}+b}{\vee}\!\!1, 1, \cdots, \cdots, 1, \cdots \overset{\tau_1+\cdots+\tau_b+b}{\vee}\!\!1, 0, \cdots, 0)$, avec $\tau_b + 1$, $(1 \leq b \leq k)$ éléments non-zéros ($= 1$). $b)$ Pour les vecteurs $\vec{w}_a$ du cas **1** ci-dessus,

$$\sum_{a \in \Lambda_b} w_{a,j} = 0 \ \text{ si } j \neq M + k + b, 1 \leq b \leq k, \tag{2.1.8}$$

et puis il existe un autre vecteur du même groupe Λ_b qui satisfait:

$$w_{\sigma(i),j} = \delta_{\rho(i),j}, \tag{2.1.9}$$

où $\delta_{\cdot,*}$ est le symbole delta de Kronecker. Le vecteur (2.1.9) corresopnd au groupe **2**.

2) Les 1ère $, \cdots, M + k-$ième vecteurs rayons de la matrice L^{-1} sont orthogonaux aux vecteurs $\vec{v}_{M+k+1}, \cdots, \vec{v}_{M+2k}$ ci-dessus. Cela signifie les relations (2.1.4).

3) L'énoncé se déduit du point 2). **C.Q.F.D.**

En vue de la Proposition 2.1, on peut introduire les sous-ensembles des indices $a \in \{1, 2, \cdots, M\}$ comme suit.

Définition 5 *Le sous-ensemble $I_q^+ \subset \{1, 2, \cdots, k\}$ (resp. I_q^-, I_q^0) consiste en indices a tels que le coefficient B_q^a de $\mathcal{L}_a(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta)$ (2.1.2) soit positif (resp. negatif, zéro). D'une façon analogue, on définit le sous-ensemble $J_r^+ \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ (resp. J_r^-, J_r^0) qui consiste en les indices a tels que le coefficient C_r^a de $\mathcal{L}_a(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta)$ soit positif (resp. negatif, zéro)*

2.2. Système de Horn Pour assurer la convergence de la transformée de Mellin inverse de $M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z)$ de (2.1.1), on vérifie que la transofrmée de Mellin $M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z)$ admet l'éstimation suivante quitte à multiplier une fonction $\Delta-$ périodique $g(z)$.

$$| M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z) | < C_{\mathbf{J}} exp(-\epsilon \mid Im\ z \mid) \ \text{lorsque}\ Im\ z \rightarrow \infty,\ \text{dans un secteur d'ouverture}\ \ < 2\pi.$$

pour un certain $\epsilon > 0$,

Avant d'énoncer un lemme directement applicable à notre situation, on se rappelle un lemme élémentaire pour l'intégrale:

$$\int_{z_0-i\infty}^{z_0+i\infty} s^z g(z) \prod_{j=1}^{\nu} \frac{\Gamma(z+\alpha_j)}{\Gamma(z+\rho_j)} dz. \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2 *Si on choit une des fonctions suivantes $g^+(z)$ (resp. $g^-(z)$) en tant que $g(z)$, alors l'intégrand de (2.2.1) est de décroissance exponentielle lorsque $Im\ z$ tend vers ∞ dans le secteur $0 \leq arg\ z < 2\pi$, (resp. $-\pi \leq arg\ z < \pi$.)*

$$g^{\pm}(z) = 1 + e^{\pm 2\pi i \beta_\nu} \prod_{j=1}^{\nu} \frac{sin 2\pi(z+\alpha_j)}{sin 2\pi(z+\rho_j)},$$

avec $\beta_\nu = -1 + \sum_{j=1}^{\nu} (\rho_j - \alpha_j)$

Démonstration

Il suffit de se rappeler

$$\prod_{j=1}^{\nu} \frac{\Gamma(x+iy+\alpha_j)}{\Gamma(x+iy+\rho_j)} \rightarrow const. \mid y \mid^{-(\beta_\nu+1)}$$

lorsque $y \rightarrow \pm\infty$. Ici, on se sert de la formule de Binet:

$$log\, \Gamma(z+a) = \log\ \Gamma(z) + a \log\ z - \frac{a-a^2}{2z} + \mathcal{O}(\mid z \mid^{-2})$$

si $\mid z \mid >> 1$, . Le facteur $\mid s^{-(x+iy)} \mid = r^{-x} e^{\theta y}$, pour $s = re^{i\theta}$ donne la contribution exponentiellement décroissante dans chaque cas. **C.Q.F.D.**

Nous introduisons la notation

$$\mathcal{L}_j(z) = A_{j1}z_1 + A_{j2}z_2 + \cdots + A_{jk}z_k + A_{j0},\ 1 \leq j \leq p$$

$$\mathcal{M}_j(z) = B_{j1}z_1 + B_{j2}z_2 + \cdots + B_{jk}z_k + B_{j0},\ 1 \leq j \leq r.$$

Lemme 2.3 *Pour que l'intégrale*

$$\int_{\breve{\Pi}} s^{\mathbf{z}} g(z) \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\mathcal{L}_j(z))}{\prod_{j=1}^{r} \Gamma(\mathcal{M}_j(z))} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k \tag{2.2.2}$$

avec $g(z)$ une fonction $\Delta-$ périodique convenable définisse une fonction à croissance polynomiale à ses lieux singuliers (y compris ∞) il suffit que les conditions suivantes soient safisfait.

i) Pour chaque $i > 0$

$$\sum_{j=1}^{p} A_{j,i} = \sum_{j=1}^{r} B_{j,i} \tag{2.2.3}$$

ii) Le nombre

$$\alpha = min_{z\in S^{k-1}}\big(\sum_{j=1}^{p}|\mathcal{L}_j(z)-A_{j0}| - \sum_{j=1}^{r}|\mathcal{M}_j(z)-B_{j0}|\big) \tag{2.2.4}$$

soit non-negatif.

Démonstration Pour voir l'existence d'une direction d'intégration lelong laquelle l'intégrand de (2.2.2) est de décroissance exponentielle, on recourt à une astuce de Nörlund [20] comme au lemme 2.2. Si on utilise la notation comme suit:

$$\beta_i = \sum_j A_{j,i} - \sum_j B_{j,i}$$

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} A_{j,0} - \sum_{j=1}^{r} B_{j,0} - \frac{1}{2}(p-r)$$

l'intégrand de (2.2.2) se comporte comme $e^{\sum_{j=1}^{k}(-\frac{1}{2}\alpha\pi|u_j|+\theta_j u_j)}\prod_{j=1}^{k}|v_j|^{\beta_j v_j+\eta}(R_j/\rho_j)^{\gamma}$ pour certain $\gamma,\rho_1,\cdots,\rho_k \in \mathbf{R}$ et $s=(R_1e^{i\theta_1},\cdots,R_ke^{i\theta_k})$ lorsque le norme de la variable $z_j=u_j+iv_j$ tend vers l'infini. Il est facile de voir cela de la formule de Stirling (Whittaker-Watson, Chapter XII, Exemple 44). L'estimation ci-dessus entraîne immédiatement le lemme. **C.Q.F.D.**

Remarque 1 *Dans [22] les auteurs ont établi un théorème semblable à notre dans le cas où α de (2.2.4) est strictement positif.*

Si on applique ce lemme à notre intégrale, on voit qu'il existe un cycle $\check{\Pi}$

$$I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s) := \int_{\check{\Pi}} g(z)\frac{\prod_{a\in I_q^+\cup I_q^0}\Gamma\big(\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)\big)}{\prod_{\bar{a}\in I_q^-}\Gamma\big(1-\mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)\big)}s^{-\mathbf{z}}dz, \tag{2.2.5}$$

avec une fonction $g(z)$ rationelle en $e^{\pi i\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)}$, $a\in I$. Ici on se souvient de la relation $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin\ \pi z}$. Une autre consequence importante de la proposition ci-dessus est le théorème suivant:

Théorème 2.4 *L'intégrale $I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ satisfait un système des équations du type de Horn comme suit:*

$$L_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,s,\zeta)I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s) = \Big[P_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta)-s_q^{\Delta}Q_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta)\Big]I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s)=0, 1\le q\le k \tag{2.2.6}$$

avec

$$P_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta) = \prod_{a\in I_q^+}\prod_{j=0}^{B_q^a-1}\big(\mathcal{L}_a(\mathbf{J},-\vartheta_s,\zeta)+j\big) \tag{2.2.7}$$

$$Q_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta) = \prod_{\bar{a}\in I_q^-}\prod_{j=0}^{-B_q^{\bar{a}}-1}\big(-\mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{J},-\vartheta_s,\zeta)-j\big), \tag{2.2.8}$$

où $I_q^+, I_q^-, 1\le q\le k$. sont les ensembles des indices définis dans la Définition 5. Pourtant les degrés des deux opératuers $P_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta)$, $Q_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta)$ sont égaux. Notamment ils s'expriment par la relation suivante,

$$\sum_{a\in I_q^+} B_q^a = |\chi(X_q)| = |\chi(\tilde{X}_q)|, \tag{2.2.9}$$

ici X_q signifie la variété affine de dimension $M-1$,

$$X_q := \{(X,s)|_{s_q=1} \in \mathbf{T}^{M+k-1}; f_1(X)+s_1 = \cdots = f_{q-1}(X)+s_{q-1} =$$

$$= f_q(X)+1 = f_{q+1}(X)+s_{q+1} = \cdots = f_k(X)+s_k = 0\}.$$

Nous notons par $\tilde{X}_q$ l'IC définie dans $\mathbf{T}^{M+1}$,

$$\tilde{X}_q := \{(x,s_q) \in \mathbf{T}^{M+1}; f_1(x) = \cdots = f_{q-1}(x) = f_q(x)+s_q = f_{q+1}(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}.$$

Démonstration Pour un cycle γ qui réalise l'expression (2.1.1) de la transformée de Mellin, l'énoncé est une conséquence évidente du (2.2.5). Pour l'autre cycle γ', on applique l'argument de [4], [5], [25] 3.4.1, qui dit que l'intégrand de l'expression

$$\int_{\gamma'}\int_{\Gamma}\Big[P_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta) - s_q^{\Delta}Q_{q,\mathbf{J}}(\vartheta_s,\zeta)\Big](f_1(X)+s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(X)+s_k)^{-\zeta_k-1}X^{\mathbf{J}}dX,$$

donne derivée d'une forme rationelle sur $\mathbf{T}^M \setminus X_1 \cup \cdots \cup X_k$ (notation de la Proposition 1.4).

Nous prouvons ici donc (2.2.9). Soit E_q sous-espace de $\mathbf{R}^L_{(z,\zeta,\mathbf{J})}$ défini par $z_q = 0, \zeta = 0$. Alors on a l'égalité pour $a \in I_q^+$

$$B_q^a = (M+k-1)!vol_{M+k-1}(\langle \vec{v_1}|_{E_q}, \overset{\overset{a}{\vee}}{\cdots}, \vec{v_L}|_{E_q}\rangle),$$

où $\vec{v_i}$ $i-$ème vecteur rayon de la matrice L. En fait $\langle \vec{v_1}|_{E_q}, \overset{\overset{a}{\vee}}{\cdots}, \vec{v_L}|_{E_q}\rangle$ est formellement un polyèdre avec $L-1$ vertexes (y compris $\{0\}$) dans E_q dont le volume est égal au volume d'un simplexe avec $(M+k-1)$ vertexes dans E_q qui appartiennent à l'un des polyèdres de Newton $\Delta(f_1(X)+s_1)$,$\Delta(f_{q-1}(X)+s_{q-1})$, $\Delta(f_q(X)+1)$, $\Delta(f_{q+1}(X)+s_{q+1})$, $\cdots$, $\Delta(f_k(X)+s_k)$.

Dans la matrice L on multiplie les rayons qui correspondent aux termes de $f_\ell(X)$ par λ_ℓ ($\ell \neq q$). Notons par $\mathsf{L}(\lambda)$ la matrice ainsi modi fiée. Alors

$$det(\mathsf{L}(\lambda)) = \lambda_1^{\tau_1}\cdots\lambda_k^{\tau_k}det(\mathsf{L}),$$

où $\tau_i =$ nombre des termes dans l'expression $f_i(X)$. Evidemment $\tau_1 + \cdots \tau_k + k = L$. Si on calcule le $(M+q,\ell)-$mineur (déterminant de la matrice que l'on obtient de L en enlevant $(M+q)-$ième colonne et $\ell-$ième rayon de $\mathsf{L}(\lambda)$). On remarque ici que $M+1, \cdots M+k$ colonnes sont ceux qui correspondent à $z_1, \cdots, z_k$. Le $(M+q,\ell)-$mineur sous question nous donne le $(M+q,\ell)-$mineur de L multiplié par $\lambda_1^{\tau_1}\cdots\lambda_\ell^{\tau_\ell-1}\lambda_k^{\tau_k}$ dont l'homogénéité en $(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ est égal à $L-k-1 = M+k-1$. D'après la définition du volume mixte de Minkowski, le somme de tous les simplexes possibles engendrés par $M+k-1$ vertexes qui appartiennent à l'un des polyèdres de Newton $\Delta(f_1(X)+s_1)$,$\Delta(f_{q-1}(X)+s_{q-1})$, $\Delta(f_q(X)+1)$, $\Delta(f_{q+1}(X)+s_{q+1})$, $\cdots$, $\Delta(f_k(X)+s_k)$ doit être le somme des coefficients positifs de $\lambda_1^{a_1}\cdots\lambda_k^{a_k}$,

$$a_1+\cdots+a_k = M+k-1, a_1 \geq 1, \cdots, a_k \geq 1$$

chez les $(M+q,\ell)-$mineurs avec $1 \leq \ell \leq L$. Ce somme est égal à $\sum_{a\in I_q^+} B_q^a$. D'autre part d'après le théorème de Khovanski-Oka [16], [21] le caractéristique d'Euler de l'intersection complète X_q s'exprime par des données combinatoires,

$$\frac{1}{(M+k-1)!}|\chi(X_q)| =$$

$$vol_{M+k-1}\big(\Delta(f_1(X)+s_1), \Delta(f_{q-1}(X)+s_{q-1}), \Delta(f_q(X)+1), \Delta(f_{q+1}(X)+s_{q+1}), \cdots, \Delta(f_k(X)+s_k)\big).$$

L'égalité $|\chi(\tilde{X}_q)| = |\chi(X_q)|$ est une conséquence facile d'algèbre linéaire. **C.Q.F.D.**

On peut formuler une condition de non-résonance pour le système (2.2.6). Notamment, l'ensemble des fonctions linéaires

$$\bigcup_{a\in I_q^+} \{\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta), \mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)+1, \cdots, \mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)+B_q^a-1\},$$

ait aucune intersection avec l'ensemble

$$\bigcup_{\bar{a}\in I_q^-} \{\mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta), \mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)+1, \cdots, \mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)-B_q^{\bar{a}}-1\}.$$

Dans le cas de non-résonance ci-dessus, le dégré de l'opérateur $L_{q,\mathbf{J}}(\vartheta,\zeta)$ est égal à $|\chi(X_q)|$.

Corollaire 2.5 *La variété caractéristique du système (2.2.6) est égale à la variété*

$$\Lambda = \{(s,\xi) \in T^*\mathbf{C}_s^k; \sigma(L_q)(s,\xi) = \Big[P_{q,0}(s\xi,0) - s_q^{\Delta} Q_{q,0}(s\xi,0)\Big] = 0, 1 \le q \le k\}$$

où $s\xi = (s_1\xi_1, \cdots, s_k\xi_k)$. Le lieu singulier de (2.2.6) est contenu dans l'ensemble $\mathcal{R} = \{s \in \mathbf{C}_s^k; R[\sigma(L_1)(s,\xi), \cdots, \sigma(L_k)(s,\xi)] = 0\}$ où $R[\sigma(L_1)(s,\xi), \cdots, \sigma(L_k)(s,\xi)] \in \mathbf{C}[s]$ est le résultant des polynômes $\sigma(L_1)(s,\xi), \cdots, \sigma(L_k)(s,\xi)$.

Malheureusement dans plusieurs cas le résultant $R[\sigma(L_1)(s,\xi), \cdots, \sigma(L_k)(s,\xi)]$ est identiquement zéro. Pour déduire des informations essentielles sur le lieu singulier du sysème (2.2.6), on introduit la notion de "résultant résiduel". Soit $L_0(s,\xi)$ le p.g.d.c. des polynômes $\sigma(L_1)(s,\xi), \cdots, \sigma(L_k)(s,\xi)$ alors le résultant résiduel est défini comme le résultant des polynômes $\frac{\sigma(L_1)(s,\xi)}{L_0(s,\xi)}, \cdots, \frac{\sigma(L_k)(s,\xi)}{L_0(s,\xi)}$. Divers experiments sur les cas concrèts nous permettent de formuler la conjecture suivante.

Conjecture Le polyèdre de Newton du résultant résiduel $R[\frac{\sigma(L_1)(s,\xi)}{L_0(s,\xi)}, \cdots, \frac{\sigma(L_k)(s,\xi)}{L_0(s,\xi)}]$ dépourvu du facteur de forme $s_1^{d_1} \cdots s_k^{d_k}$ coincide avec le somme mixte de Minkowski $\sum_{q=1}^k \sum_{\bar{a}\in I_q^-} \Delta(L_{\bar{a}})$ pour $\Delta(L_{\bar{a}}) := \{z \in \mathbf{R}_+^k; \sigma(L_q)(s,\xi) \le \ell_{\bar{a}}\}$ pour le choix propre des $l_{\bar{a}}$.

Ici on définit le somme mixte de Minkowski pour deux polyèdres par $\Delta_1 + \Delta_2 = \{z_1 + z_2; z_1 \in \Delta_1, z_2 \in \Delta_2\}$. On peut trouver des exemples qui supportent cette conjecture dans [23] pour des systèmes de Horn qui n'ont pas forcément d'origine géométrique. Il est probable que une étude détaillée du polytôpe secondaire introduit par les auteurs du [14] peut donner une réponse combinatoire à cette question.

Corollaire 2.6 *Chaque solution du système (2.2.6) peut être representée comme combinaison linéaire des fonctions:*

$$I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma_\delta}(s) := \int_{\check{\Pi}_\delta} \frac{\prod_{a\in I_q^+\cup I_q^0} \Gamma(\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta))}{\prod_{a\in I_q^-}\big(\Gamma(1-\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)\big)} s^{-\mathbf{z}} dz,$$

associée à un cycle $\check{\Pi}_\delta \subset \{z \in \mathbf{C}^k; \mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) \in \mathbf{Z}_{\le 0}\}$.

Il s'agit d'une méthode généralisée de Frobenius. Voir [28], Chap. 2, 3.

Ici nous introduisons la notion du support de la transformée de Mellin $M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z)$ qui contribue essentiellement à l'inversion décrite au corollaire 2.6.

Définition 6 *Pour un indice $q \in [1,k]$ fixé on note par $supp^{(q)}(M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma})(z)$ l'ensemble des pôles d'ordre $\ge k$ de l'expression*

$$\frac{\prod_{a\in I_q^+} \Gamma(\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta))}{\prod_{a\in I_q^-}\big(\Gamma(1-\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)\big)}.$$

Remarque 2 On remarque ici que les réseaux de l'ensemble $supp^{(q)}(M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma})(z)$ donnent naissance à la bonne κ-filtration (κ =k) introduite par C.Sabbah [25], [26].

Nous introduisons une fonction méromorphe qui depend de $\mathbf{z}$, $(\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(k)})$, $(\eta'^{(1)}, \cdots, \eta'^{(k)}) \in \mathbf{Z}^k$, $(\alpha_1^{(\ell)}, \cdots, \alpha_k^{(\ell)})$, $(\beta_1^{(\ell)}, \cdots, \beta_k^{(\ell)}) \in \mathbf{Q}^k$ et Δ un entier positif.

$$a(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{\ell=1}^k \Gamma(\frac{<\alpha^{(\ell)},\mathbf{z}>}{\Delta} + \eta^{(\ell)})}{\prod_{\ell=1}^k \Gamma(\frac{<\beta^{(\ell)},\mathbf{z}>}{\Delta} + \eta'^{(\ell)})},$$

où $< \alpha^{(\ell)}, \mathbf{z} >= \alpha_1^{(\ell)} z_1 + \cdots + \alpha_k^{(\ell)} z_k$. L'expression $< \beta^{(\ell)}, \mathbf{z} >$ se définit d'une façon analogue. Nous introduisons la notation, $z + \Delta e_r = (z_1, \cdots, z_{r-1}, z_r + \Delta, z_{r+1}, \cdots, z_k)$.

Lemme 2.7 *Pour la fonction $a(\mathbf{z})$ on a la relation suivante:*

$$\frac{a(\mathbf{z}+\Delta e_q)}{a(\mathbf{z})} = \frac{\prod_{\ell:\alpha_q^{(\ell)}>0}^k \prod_{j=0}^{\alpha_q^{(\ell)}-1} \left(\frac{<\alpha^{(\ell)},\mathbf{z}>}{\Delta} + j + \eta^{(\ell)}\right) \prod_{m':\beta_q^{(m')}<0}^k \prod_{j=1}^{-\beta_q^{(m')}} \left(\frac{<\beta^{(m')},\mathbf{z}>}{\Delta} - j + \eta'^{(m')}\right)}{\prod_{m:\alpha_q^{(m)}<0}^k \prod_{j=1}^{-\alpha_q^{(m)}} \left(\frac{<\alpha^{(m)},\mathbf{z}>}{\Delta} - j + \eta^{(m)}\right) \prod_{\ell':\beta_q^{(\ell')}>0}^k \prod_{j=0}^{\beta_q^{(\ell')}-1} \left(\frac{<\beta^{(\ell')},\mathbf{z}>}{\Delta} - j + \eta'^{(\ell')}\right)}.$$

Démonstration L'énoncé s'entraîne de la relation recurrente bien connue:

$$\Gamma(\frac{\alpha(n+\Delta)}{\Delta} + \zeta) = \Gamma(\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta)(\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta)(\frac{\alpha n}{\Delta} + 1 + \zeta) \cdots (\frac{\alpha n}{\Delta} + \alpha - 1 + \zeta),$$

si $\alpha > 0$.

$$\Gamma(\frac{\alpha(n+\Delta)}{\Delta} + \zeta) = \Gamma(\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta)(\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta - 1)^{-1}(\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta - 2)^{-1} \cdots (\frac{\alpha n}{\Delta} + \zeta + \alpha)^{-1},$$

si $\alpha < 0$.**C.Q.F.D.**

La compatibilité du système (2.2.6) au sens d'Ore-Sato ([28]) se déduit de la proposition cidessus.

Proposition 2.8 *Les coefficients rationels*

$$R_q(z) = \frac{P_{q,\mathbf{J}}(\mathbf{z},\zeta)}{Q_{q,\mathbf{J}}(\mathbf{z}+\Delta e_q,\zeta)}, \tag{2.2.10}$$

définis pour les opérateurs (2.2.7), (2.2.8) satisfont la condition de compabitilité:

$$R_q(z+\Delta e_r)R_r(z) = R_r(z+\Delta e_q)R_q(z), \quad q, r = 1, \cdots, k. \tag{2.2.11}$$

3 Structure de Hodge de l'intégrale fibre

3.1. Structure de Hodge du groupe de cohomologie d'une hypersurface dans un tore

Nous nous souvenons des notions fondamentales sur la structure de Hodge mixte du groupe de cohomologie d'une hypersurface dans un tore selon [4], [11].

Soit Π un polyèdre convexe de dimension n dans $\mathbf{R}^n$ avec tous les vertexes dans $\mathbf{Z}^n$. Soit $S_\Pi \subset \mathbf{C}[x_1^{\pm}, \cdots, x_n^{\pm}]$ un sous-anneau de l'anneau des polynômes de Laurent défini comme suivant:

$$S_\Pi := \mathbf{C} \oplus \bigoplus_{\frac{\vec{\alpha}}{k} \in \Pi, \exists k \geq 1} \mathbf{C} \cdot x^{\vec{\alpha}}. \tag{3.1.1}$$

Nous notons par $\Delta(f)$ l'envelope convexe de l'ensemble $\vec{\alpha} \in supp(f)$ qui s'appelle polyèdre de Newton d'un polynôme de Laurent $f(x)$. Nous introduisons l'ideal de Jacobi comme suit:

$$J_{f,\Delta(f)} = \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle \cdot S_{\Delta(f)}. \tag{3.1.2}$$

Soit τ une facette $\ell-$dimensionelle du $\Delta(f)$ et on définit

$$f^\tau(x) = \sum_{\vec{\alpha} \in \tau \cap supp(f)} a_{\vec{\alpha}} x^{\vec{\alpha}}, \tag{3.1.3}$$

où $f(x) = \sum_{\vec{\alpha} \in supp(f)} a_{\vec{\alpha}} x^{\vec{\alpha}}$. Le polynôme de Laurent $f(x)$ s'appelle $\Pi-$ régulier, si $\Delta(f) = \Pi$ et pour chaque facette $\ell-$dimensionelle $\tau \subset \Delta(f)$ $(\ell > 0)$ les équations polynomiales:

$$f^\tau(x) = x_1 \frac{\partial f^\tau}{\partial x_1} = \cdots = x_n \frac{\partial f^\tau}{\partial x_n} = 0,$$

ne possèdent pas de solutions communes dans $\mathbf{T}^n = (\mathbf{C}^\times)^n$.

Proposition 3.1 *Soit f un polynôme de Laurent tel que $\Delta(f) = \Pi$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Les éléments $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ donne naissance à une suite régulière dans $S_{\Delta(f)}$.

(ii)

$$dim(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}) = n! vol(\Pi).$$

(iii) f est $\Pi-$régulier.

Pour un polynôme f $\Pi-$régulier, il est possible d'introduire une filtration sur $\Pi = S_\Delta(f)$ qui est définie comme suit. L'inclusion $\vec{\alpha} \in S_k$ soit vraie si et seulement si $\frac{\vec{\alpha}}{k} \in \Delta(f)$. Par conséquence nous avons une filtration croissante;

$$\mathbf{C} \cong \{0\} = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots,$$

dont une filtration décroissante est déduit sur $\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}$:

$$F^n(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}) \subset F^{n-1}(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}) \subset \cdots \subset F^0(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}).$$

Elle s'appelle filtration de Hodge de $\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}$. Il faut remarquer ici que la filtration de Hodge se termine par le $n-$ième terme.

Nous nous rapelons la notion du polynôme d'Ehrhart:

Définition 7 *Soit Π un polytôpe convexe de dimension n. Nous notons la série de Poincaré d'un algèbre gradué S_Π par*

$$P_\Pi(t) = \sum_{k \geq 0} \ell(k\Pi) t^k,$$

$$Q_\Pi(t) = \sum_{k\geq 0} \ell^*(k\Pi)t^k,$$

où $\ell(k\Pi)$ *(resp.*$\ell^*(k\Pi)$ *) dénote le nombre des points entiers dans* $k\Pi$*. (resp. points entiers intérieurs dans* $k\Pi$ *). Alors nous appelons*

$$\Psi_\Pi(t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(\Pi)t^k = (1-t)^{n+1}P_\Pi(t),$$

$$\Phi_\Pi(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(\Pi)t^k = (1-t)^{n+1}Q_\Pi(t),$$

les polynômes d'Ehrhart.

Les polynômes d'Erhart satisfont la relation suivante,

$$t^{n+1}\Psi_\Pi(t^{-1}) = \Phi_\Pi(t).$$

Dorénavant notre objet central sera le groupe de cohomologie de l'hypersurface $Z_f := \{x \in \mathbf{T}^n; f(x) = 0\}$. On a un isomorphisme important pour la filtration de Hodge filtration du $PH^{n-1}(Z_f)$.

Théorème 3.2 *([4]) Pour la partie primitive* $PH^{n-1}(Z_f)$ *du* $H^{n-1}(Z_f)$*, on a isomorphisme suivant;*

$$\frac{F^iPH^{n-1}(Z_f)}{F^{i+1}PH^{n-1}(Z_f)} \cong Gr_F^{n-i}\Big(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}\Big) = \frac{F^i\big(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}\big)}{F^{i+1}\big(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}\big)}. \tag{3.1.4}$$

En plus

$$dim\ Gr_F^{n-i}\Big(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}\Big) = \sum_{q\geq 0} h^{i,q}(PH^{n-1}(Z_f)) = \psi_{n-i}(\Delta(f)),$$

pour $i \leq n-1$*.*

Quant'à la filtration par le poids, nous avons la caractérisation comme suit. Afin d'introduire la notion du strate du support de l'algèbre $\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}$ nous nous servons de la convention d'identifier un polynôme $x^{\vec{\alpha}} \in S_\Delta(f)$ avec $\vec{\alpha} \in \mathbf{Z}^n$. Un strate de dimension $(n-j)$ du *supp*$(S_\Delta(f))$ est défini comme l'ensemble des points $\vec{i} \in k\Delta(f)$, $k = 1, 2, \cdots$ tels que $\frac{\vec{i}}{k}$ se trouve sur la facette $(n-j)-$dimensionelle du $\Delta(f)$ et au même temps il n'appartient à aucune facette $(n-j-1)-$dimensionelle $\Pi' \subset \Delta(f)$.

Théorème 3.3 *On peut identifier la filtration par le poids sur* $PH^{n-1}(Z_f)$ *avec la filtration décroissante*

$$0 = W_{n-2} \subset W_{n-1} \subset \cdots \subset W_{2n-2} = PH^{n-1}(Z_f),$$

telle que $W_{n+i-1} \cong \{$ *les points entiers situés sur le strate du supp*$\big(\frac{S_\Delta(f)}{J_{f,\Delta(f)}}\big)$ *de dimension* $\geq (n-i)$ *mais sur aucun strate de dimension* $(n-i-1)$ $\}$ *pour* $0 \leq i \leq n-2$*.*

Le théorème ci-dessus est une conséquence facile du Theorem 8.2 [4]. Tout d'abord nous notons que la suite exacte suivante a lieu,

$$0 \to H^n(\mathbf{T}) \to H^n(\mathbf{T} \setminus Z_f) \stackrel{Res}{\to} H^{n-1}(Z_f) \to 0.$$

L'application de résidu de Poincaré Res donne un morphisme de la structure de Hodge mixte du type $(-1,-1)$,

$$Res(F^j\ H^n(\mathbf{T}\setminus Z_f)) = F^{j-1}\ H^{n-1}(Z_f),\ \ Res(W_j\ H^n(\mathbf{T}\setminus Z_f)) = W_{j-2}\ H^{n-1}(Z_f).$$

On a donc,

$$0 \to W_{n+i}\ H^n(\mathbf{T}) \to W_{n+i}H^n(\mathbf{T}\setminus Z_f) \stackrel{Res}{\to} W_{n+i-2}H^{n-1}(Z_f) \to 0,$$

pour $i = 2,\cdots,n-1$ où

$$W_{2n-1}\ H^n(\mathbf{T}) = \cdots = W_{n-1}\ H^n(\mathbf{T}) = 0, \tag{3.1.5}$$

et $dim\ W_{2n}\ H^n(\mathbf{T}) = 1$. En tenant compte du (3.1.5) on voit que l'application de résidu de Poincaré Res entraîne l'isomorphisme

$$Res : W_{n+i}H^n(\mathbf{T}\setminus Z_f) \stackrel{Res}{\to} W_{n+i-2}H^{n-1}(Z_f),$$

pour $i = 1,\cdots,n-1$. La structure combinatoire $W_{n+i}H^n(\mathbf{T}\setminus Z_f)$, $i = 1,\cdots,n-1$ est bien établie par le Theorem 8.2 [4].

3.2. La transition

Notons par x' les paramètres supplémentaires qui ont été introduits dans §1 pour le cas déficitaire des variables. On s'interesse ici à la façon de modifier les termes par les variables supplémentaires $x' = (x'_1,\cdots,x'_m)$. Nous supposons que le terme $T_{i_j}, 1 \leq j \leq m$ du (1.3.9) contient le facteur x'_j. Nous notons par l'intégrale- fibre $I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ pour ce choix de modification concret

$$I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s) = \int_{\gamma}(f_1(x,x')+s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(x,x')+s_k)^{-\zeta_k-1}x^{\mathbf{J}+\mathbf{1}}\frac{dx}{x^{\mathbf{1}}}\frac{dx'}{\tilde{x}'^{\mathbf{1}}} \tag{3.2.1}$$

Définition 8 *On considère la transformée de Mellin (2.1.1) pour l'intégrale (3.2.1) pour $q \in [1,k]$ fixé comme (2.2.5). Nous notons l'envelope convexe de l'ensemble $supp^{(q)}(M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z))$ (défini dans la Définition 6) qui contient infiniment beaucoup des points z avec $z_q < 0$, par $\Sigma^q_{\mathbf{J}} \subset \mathbf{R}^k$. Alors nous appelons le bord de cet ensemble $\partial\Sigma^q_{\mathbf{J}}$ les spectres de l'intégrale-fibre $I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$.*

Proposition 3.4 *Les spectres de l'intégrale-fibre (3.2.1) $I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ sont donnés par des hyperplanes affines:*

$$\partial\Sigma^q_{\mathbf{J}} = \partial\Big\{\bigcup_{a\in I}\{z;\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) \leq 0,\ \text{pour}\ a \in I^+_q, z_i \geq 0, i \neq q\ \}\Big\}.$$

Démonstration Dans le domaine défini comme $\{z \in \mathbf{R}^M;\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) < 0,\ p^{(a)}_q > 0,\ z_q < 0$ et $z_i > 0, (i \neq q)\}$ pour $a \in [1,L] = I$ fixé, on trouve infiniment beaucoup de points-pôles chez une représentation de la transformée de Mellin indexée par $q \in [1,k]$,

$$M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z) = \frac{\prod_{a\in I^+_q\cup I^0_q}\Gamma(\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta))}{\prod_{a\in I^-_q}\Gamma\big(1-\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)\big)}.$$

Pourtant $\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) = 0$ est une équation qui prend part à la définition du $\partial\Sigma^q_{\mathbf{J}}$ comme un ensemble semi-algébrique. **C.Q.F.D.**

Bien entendu les spectres $\partial\Sigma^q_{\mathbf{J}}$ se diffère de ceux de

$$\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s) = \int_{\tilde{\gamma}}(f_1(x,\tilde{x}')+s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(x,\tilde{x}')+s_k)^{-\zeta_k-1}x^{\mathbf{J}+\mathbf{1}}\frac{dx}{x^{\mathbf{1}}}\frac{d\tilde{x}'}{\tilde{x}'^{\mathbf{1}}}$$

que nous notons $\partial\tilde{\Sigma}^q_{\mathbf{J}}$ qui est définie pour une autre façon d'ajouter des paramètres supplementaires $\tilde{x}' = (\tilde{x}'_1, \cdots, \tilde{x}'_m)$ dans laquelle le terme $T_{\tilde{i}_j}, 1 \leq j \leq m$ du (1.3.9) contient le facteur $\tilde{x}'_j$.

On a déjà remarqué telle sorte d'ambiguité de choix des paramètres supplémentaires dans l'exemple **1.6**, (1.6.2) et (1.6.7). Heureusement cette différence est controlable par une procédure assez simple.

Proposition 3.5 *Soient*

$$Log\ \Xi =^t (log\ x_1, \cdots, log\ x_N, log\ x'_1, \cdots, log\ x'_m, log\ s_1, \cdots, log\ s_k, log\ y_1, \cdots, log\ y_k),$$

et

$$Log\ \tilde{\Xi} =^t (log\ x_1, \cdots, log\ x_N, log\ \tilde{x}'_1, \cdots, log\ \tilde{x}'_m, log\ s_1, \cdots, log\ s_k, log\ y_1, \cdots, log\ y_k),$$

deux systèmes des variables-paramètres différents. Soient les paramétrisations de Cayley correspondant:

$$Log\ T = \mathsf{L} \cdot Log\ \ \Xi = \tilde{\mathsf{L}} \cdot Log\ \ \tilde{\Xi}.$$

Alors les spectres de l'intégrale-fibre $I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ sont transformées dans ceux de $\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ par la règle suivante:

$$\tilde{\mathsf{L}} \cdot \mathsf{L}^{-1}(\partial\Sigma^q_{\mathbf{J}}) = \partial\tilde{\Sigma}^q_{\mathbf{J}}.$$

En fait cette transition peut être mieux comprise dans le cadre de la théorie de Terasoma sur la compactification de l'espace produit des fibres et celui des paramètres (voir Remarque 5 ci-dessous).

3.3 Il existe un système de poids pour les variables (x, x'', s, y) pour que la relation suivante associée au monôme $T_\nu(y, X), 1 \leq \nu \leq L$ de (1.3.9) soit vraie. Il existe le champ d'Euler $E^{(\nu)}$,

$$E^{(\nu)}(x, x'', 1, y, s) = \tag{3.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^{(\nu)} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} {w'}_j^{(\nu)} x'_j \frac{\partial}{\partial x'_j} - x'_{m+1}\frac{\partial}{\partial x'_{m+1}} + \sum_{\ell=1}^{k}(q_\ell^{(\nu)} y_\ell \frac{\partial}{\partial y_\ell} + p_\ell^{(\nu)} s_\ell \frac{\partial}{\partial s_\ell}),$$

qui agit sur le polynôme $F(x, x", 1, y, s) + (x'_{m+1} - 1)T_\nu(x, s, y)$ en sorte que

$$E^{(\nu)}(x, x", 1, y, s)(F(x, x", 1, y, s) - T_\nu(x, s, y)) = 0,$$

$$E^{(\nu)}(x, x", 1, y, s)T_\nu(x, s, y) = T_\nu(x, s, y). \tag{3.3.2}$$

Autement dit, le polynôme $F(x, x", 1, y, s) + (x'_{m+1} - 1)T_\nu(y, X)$ est quasihomogène par rapport au poids (3.3.1) qui est déterminé de telle façon que ${w'}^{(\nu)}_{m+1} = w^{(\nu)}(x'_{m+1}) = -1$. Le remplacement de $T_\nu(x, s, y)$ par $x'_{m+1}T_\nu(x, s, y)$ dans $F(x, x", 1, y, s)$ entraîne la quasihomogénéité. Nous introduisons les vecteurs-poids pour chaque ν:

$$\vec{w}^{(\nu)} = (w_1^{(\nu)}, \cdots, w_N^{(\nu)}),$$

$$\vec{w'}^{(\nu)} = ({w'}_1^{(\nu)}, \cdots, {w'}_m^{(\nu)}),$$

$$\vec{p}^{(\nu)} = (p_1^{(\nu)}, \cdots, p_k^{(\nu)}). \tag{3.3.3}$$

Nous appelons une quasihomogénéité $w^{(\nu)}(\bullet)$ triviale s'il existe i_ν tel que $p_i^{(\nu)} = 0$ pour tous les indices $i \neq i_\nu$ et $p_{i_\nu}^{(\nu)} > 0$. Nous désignons par $I^T \subset I$ (resp. I^{NT}) l'ensemble des poids triviaux (resp. non-triviaux). Il est facile de voir que $|I^T| = k$.

Les autres quasihomogénéités seront appelées non-triviales.

Lemme 3.6 *1). La quasihomogénéité définie par (3.3.1) correspond au vecteur-colonne $\vec{v}_\nu$ de la matrice* L^{-1}, (2.1.6)*.Et elle donne naissance à la fonction linéaire $\mathcal{L}_\nu(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta)$, $1 \le \nu \le L$.*

2) Il existe $M+1$ poids non-triviaux. C'est à dire $|I^{NT}| = M+1$.

Démonstration 1). Pour simplifier, supposons que l'expression $y_1 f_1(X)$ de (1.1.4) ne contient pas des variables x'. Alors le vecteur $\vec{v}_1$ de (2.1.6) correspond à la quasihomogénéité non-trivaile qui provient de la multiplication $x_1^{\alpha_{1,1}} \to x'_{m+1} x_1^{\alpha_{1,1}}$ car $\vec{v}_1$ est vertical à tout les vecteurs horizontaux de L sauf le premier,

$$\left[\begin{array}{cc} \mathsf{L} & 1 \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.3.4}$$

Ainsi en général le vecteur $\vec{v}_i$ nous donne la quasihomogénéité (soit triviale soit non-triviale) qui provient de la multiplication $T_i(x,s,y) \to x'_{m+1} T_i(x,s,y)$. 2). Pour chaque polytôpe simplicial, il existe $M+1$ façons d'ajouter un vertexe nouveau tel qu'il produise une quasihomogénéité non-triviale. En fait, les cas triviaux correspondent soit à la multiplication des types $s_\ell \to x'_{m+1} s_\ell$, ($k$ cas) $x'_j T_i(x, x'', s, y) \to x'_{m+1} x'_j T_i(x, x'', s, y)$ (m cas), soit à la multiplication telle que les règles **a** et **b** du lemme 1.5 soient violées ($k-1$ cas). Nous avons $L - (m + 2k - 1) = M + 1$. **C.Q.F.D.**

Le système de poids $\vec{w}^{(\nu)}(\bullet), \vec{w'}^{(\nu)}(\bullet)$, $\nu \in I$ est donnée par les vecteurs-poids (3.3.3) ci-dessous.

Théorème 3.7 *1). Pour un monôme $X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}} y^{\zeta+\mathbf{1}} \frac{dX \wedge dy}{dF} \in Gr_F^r PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$, l'inclusion suivante a lieu:*

$$\partial \Sigma_{\mathbf{J}}^\ell \supset \partial \Big\{ \bigcup_{\nu \in I_\ell^+} \{\{z; \mathcal{L}_\nu(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) \ge 0, p_\ell^{(\nu)} > 0\} \cap_{q \ne \ell} \{z_q \ge 0\}\} \Big\} \tag{3.3.5}$$

où l'inégalité comme suit est satisfaite,

$$M + k - r < \mathcal{L}_\nu(\mathbf{J}, 0, \zeta) \le M + k - r + 1. \tag{3.3.6}$$

2). Quant à la filtration par le poids on a l'éstimation suivante. Pour l'élément $X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}} y^{\zeta+\mathbf{1}} \frac{dX \wedge dy}{dF}$ $\in Gr_F^r Gr_{M+k-1+q}^W PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$, $1 \le q \le M+k-2$, il existe $q-$ paire d'indices $\{\nu_1, \cdots, \nu_q\} \subset I_\ell^+$ tel que l'intersection des pôles de $M_{\mathbf{J}}^\zeta(z)$

$$\partial \Sigma_{\mathbf{J}}^\ell \supset \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k; \mathcal{L}_{\nu_1}(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) = \cdots = \mathcal{L}_{\nu_q}(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) = 0\} \ne \emptyset.$$

Par contre, si on prend $I_\ell^+ \ni \nu_{q+1} \notin \{\nu_1, \cdots, \nu_q\}$ quelconque, on a

$$\bigcap_{j=1}^{q+1} \{\mathcal{L}_{\nu_j}(\mathbf{J}, \mathbf{z}, \zeta) = 0\} = \emptyset.$$

Démonstration 1) On applique le Théorème 3.2 au simplexe Π défini comme $\Pi = \Delta(F(X,0,y) + 1)$. On remarque la relation

$$\Pi = \{\{(\mathbf{J} + \mathbf{1}, \zeta + \mathbf{1}) \in \mathbf{R}^{M+k}; 0 \le \mathcal{L}_\nu(\mathbf{J}, 0, \zeta) \le 1, \nu \in I^T \cup I^{NT}\}$$

qui découle du fait que le vecteur $(\vec{w}^{(\nu)}, \vec{w'}^{(\nu)}, \vec{p}^{(\nu)}, -\vec{p}^{(\nu)})$ non-trivial est vertical à l'hyperplan engendré par les vertexes du simplexe Π exceptés le vertexe $\vec{\ell}_\nu$ qui correspond au $\nu-$ième rayon de la matrice L. On se souvient ici que $|I^T \cup I^{NT}| = M+k+1$ d'après lemme 3.6, 2). Puisque pour tel ν, le monôme $T_\nu(X,y)$ ne dépend pas des variables $(s_1,\cdots,s_k)$, on peut considérer la projection $pr(\vec{\ell}_\nu) \in \mathbf{R}^{M+k}$. On voit que

$$\langle pr(\vec{\ell}_{\nu'}), (\vec{w}^{(\nu)}, \vec{w'}^{(\nu)}, -\vec{p}^{(\nu)})\rangle = 0, \quad si \ \ \nu' \neq \nu,$$

$$\langle pr(\vec{\ell}_{\nu}), (\vec{w}^{(\nu)}, \vec{w'}^{(\nu)}, -\vec{p}^{(\nu)})\rangle = 1,$$

Ces relations nous donnent la déscription désirée du simplexe Π. On remarque ici,

$$\Delta(F(X,0,y)) = \Pi \cap \{(\mathbf{J},\zeta) \in \mathbf{R}^{M+k}; <\zeta, \mathbf{1}>= 1\},$$

et $\Pi \cap \mathbf{Z}^{M+k} = \{0\} \cup (\Delta(F(X,0,y)) \cap \mathbf{Z}^{M+k})$. Il est donc possible d'appliquer les argments ci-dessus du $PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)+1})$ au groupe $PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$. D'après la proposition 3.4, le bord $\partial\Sigma^\ell_{\mathbf{J}}$ est défini par $\mathcal{L}_\nu(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) = 0$, $\nu \in I^+_\ell$. En revanche les hyperplans

$$\{(\mathbf{J}+\mathbf{1}, \zeta+\mathbf{1}) \in \mathbf{R}^{M+k}; \mathcal{L}_\nu(\mathbf{J},0,\zeta) = 0, \nu \in I^+_\ell \cup I^-_\ell\}$$

contiennent le bord du simplexe $(M+k-r)\cdot\Pi$ si $X^{\mathbf{J}+\mathbf{1}}y^{\zeta+\mathbf{1}}\frac{dX\wedge dy}{dF} \in Gr^r_F PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$. On en déduit que l'ensemble $\left\{\{z; \mathcal{L}_\nu(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) \geq 0, p^{(\nu)}_\ell > 0\} \cap_{q\neq \ell} \{z_q \geq 0\}\right\}$ est contenu dans l'ensemble complémentaire de $\Sigma^\ell_{\mathbf{J}}$ dans $\mathbf{R}^M$.

2) Si le point $(i^0+\mathbf{1}, i'^0+\mathbf{1}, \zeta^0+\mathbf{1}) = (\mathbf{J}^0+\mathbf{1}, \mathbf{z}^0+\mathbf{1}) \in \mathbf{R}^{M+k}$ satisfait un système d'équations

$$\mathcal{L}_{\nu_j}(\mathbf{J}^0, 0, \zeta^0) = \langle \vec{p}^{(\nu_j)}, -(\zeta^0+\mathbf{1})\rangle + \langle \vec{w}^{(\nu_j)}, i^0+\mathbf{1}\rangle + \langle \vec{w'}^{(\nu_j)}, i'^0+\mathbf{1}\rangle = 0, \tag{3.3.7}$$

pour ν_j, $j = 1,2,\cdots,q \leq M+k-2$, alors il existe une solution $\mathbf{z}^0$ de multiplicité q telle que

$$\mathcal{L}_{\nu}(\mathbf{J}^0, \mathbf{z}^0, \zeta^0) = \langle \vec{p}^{(\nu_j)}, \mathbf{z}^0-(\zeta^0+\mathbf{1})\rangle + \langle \vec{w}^{(\nu_j)}, i^0+\mathbf{1}\rangle + \langle \vec{w'}^{(\nu_j)}, i'^0+\mathbf{1}\rangle = 0. \tag{3.3.7$'$}$$

Car ce système là est équivalent au (3.3.7) après remplacement de la variable $\zeta^0+\mathbf{1}$ par $\mathbf{z}^0-(\zeta^0+\mathbf{1})$. Évidemment tel $\mathbf{z}^0$ s'associe à un hyperplan de codimension q dans $\mathbf{R}^{M+k}_{\mathbf{J},\zeta} \times \mathbf{R}^k_{\mathbf{z}}$ qui passe par $(\mathbf{J}^0+\mathbf{1}, \mathbf{z}^0, \zeta^0+\mathbf{1})$. D'après le théorème 3.3, le fait que le point $(i^0+\mathbf{1}, i'^0+\mathbf{1}, \zeta^0+\mathbf{1})$ satisfait le système (3.3.7) est équivalent à l'appartenance du monôme $x^{i^0+\mathbf{1}}x'^{i'^0+\mathbf{1}}y^{\zeta^0+\mathbf{1}}\frac{dX\wedge dy}{dF} \in W_{M+k-1+q}$ du groupe $PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$. Pour considérer la graduation $Gr^W_{M+k-1+q}$, il suffit d'exclure les strates qui correspondent à $W_{M+k-1+q'}$, $0 \leq q' \leq q$. **C.Q.F.D.**

Remarque 3 *En se servant de l'isomorphisme* (1.3.6), *on peut formuler le théorème pour*

$$\frac{X^{\mathbf{J}}dX}{f_1(X)^{\zeta_1+1}\cdots f_k(X)^{\zeta_k+1}} \in PH^M(\mathbf{T}^M \setminus X_1 \cup \cdots \cup X_k),$$

par rapport à la structure de Hodge induite sur $PH^M(\mathbf{T}^M \setminus X_1 \cup \cdots \cup X_k)$.

Lemme 3.8 *Supposons que un système des équations linéaires*

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta) = -n_a, a \in J_q \subset I, n_a \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \tag{3.3.8}$$

avec $q = p+k$ possède une solution $z = \dot{z}$ telle que $\dot{z}_i \in \mathbf{Z}_{\leq} 0$ pour au moins une indice $i \in \{1,\cdots,k\}$. En plus pour $q = p+k+1$ le système (3.3.8) des équations n'a pas des solutions comme ci-dessus. Alors la monodromie locale de l'intégrale $I^\zeta_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ autour de l'origine $s = 0$ a cellule de Jordan de taille $p+1$.

En vue du lemme ci-dessus, la monodromie locale de l'intégrale $I^{\zeta}_{X^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ autour de l'origine $s=0$ peut avoir une cellule de Jordan de taille $q+1$ pour certains $\gamma \in H_{M-k}(X_s)$. Ce fait entraîne l'énoncé sur la filtration par le poids comme au [36].

Nous formulons une interprétation de notre Théorème 3.7 en se servant de la formulation classique de P.Deligne [8]. Soient $X^{\mathbf{J}^0+\mathbf{1}}y^{\zeta^0+\mathbf{1}}\frac{dX\wedge dy}{dF} \in Gr^W_{M+k-1+q}PH^{M+k-1}(Z_{F(X,0,y)})$ et $(\mathbf{J}^0+\mathbf{1}, \mathbf{z}^0, \zeta^0+\mathbf{1})$ un point qui satisfait l'équation $(3.3.7)'$ tel que les conditions du Théorème 3.7, 2) soient vraies. On considère $\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta)$ comme fonction linéaire définie dans l'espace affine $(\mathbf{J},\mathbf{z}) \in \mathbf{C}^{M+k}$. Nous désignons par $\tilde{X}$ un voisinage ouvert suffisamment petit du point $(\mathbf{J}^0+\mathbf{1},\mathbf{z}^0) \in \mathbf{C}^{M+k}$ (pour chaque $\mathbf{z}$ d'un point $(\mathbf{J},\mathbf{z}) \in \tilde{X}$ les conditions du Théorème 3.7, 2) soient vraies) et par Y_{ν_j} l'hyperplan,

$$Y_{\nu_j} := \{(\mathbf{J}^0+\mathbf{1},\mathbf{z}^0) \in \tilde{X}; \mathcal{L}_{\nu_j}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)=0\}, \;\; 1 \le j \le q.$$

Dès que $1 \le q \le M+k-2$, la reunion des hyperplans,

$$Y := Y_{\nu_1} \cup Y_{\nu_2} \cup \cdots \cup Y_{\nu_q},$$

est un diviseur à croisements normaux. D'après 3.1, [8], on peut définir $\Omega^1_{\tilde{X}} <Y>$ le sous $\mathcal{O}_{\tilde{X}}-$module localement libre engendré par $\Omega^1_{\tilde{X}}$ et $\frac{d_{\mathbf{z},\mathbf{J}}\mathcal{L}_{\nu_j}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)}{\mathcal{L}_{\nu_j}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)}$ en telle sorte que $\Omega^p_{\tilde{X}} <Y> = \bigwedge^p \Omega^1_{\tilde{X}} <Y>$ soit un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}-$module des $p-$formes différentielles sur $\tilde{X}$ à pôle logarithmique le long de Y. Nous considérons une application $M-Res$ (Mellin- Résidu),

$$M-Res : \prod_{a\in I}\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)d\mathbf{z}| \to \sum \bigwedge_{a\in\tilde{I};|\tilde{I}|=M+k,\tilde{I}\subset I^T\cup I^{NT}} \frac{d_{\mathbf{z},\mathbf{J}}\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)}{\mathcal{L}_a(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)} \in \Omega^{M+k}_{\tilde{X}} <Y>.$$

Si on se souvient de la filtration par le poids $W_q(\Omega^p_{\tilde{X}} <Y>)$ du [8], un sous module de $\Omega^p_{\tilde{X}} <Y>$ formé des combinaisons linéaires de produits,

$$\alpha \wedge \frac{d_{\mathbf{z},\mathbf{J}}\mathcal{L}_{\nu_1}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)}{\mathcal{L}_{\nu_1}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)} \wedge \cdots \wedge \frac{d_{\mathbf{z},\mathbf{J}}\mathcal{L}_{\nu_r}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)}{\mathcal{L}_{\nu_r}(\mathbf{J},\mathbf{z},\zeta^0)},$$

avec $\alpha \in \Omega^{M+k-r}_{\tilde{X}}$, $0 \le r \le q$, on a l'inclusion suivante,

$$M-Res(M^{\zeta^0}_{\mathbf{J}}(\mathbf{z})d\mathbf{z}) \subset W_q(\Omega^{M+k}_{\tilde{X}} <Y>). \tag{3.3.9}$$

4 Quelques applications .

4.1. $A-$**Fonction Hypergéométrique de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski**

Si nous remplaçons les variables x' par $s'=(s'_1,\cdots,s'_m)$ considérées comme les variables de déformation des polynômes $f_1(x),\cdots,f_k(x)$, nous pouvons regarder l'intégrale

$$I^{\zeta}_{x^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s') = \int_{\gamma_{s,s'}} (f_1(x,s')+s_1)^{-\zeta_1-1}\cdots(f_k(x,s')+s_k)^{-\zeta_k-1}x^{\mathbf{i}+\mathbf{1}}\frac{dx}{x^{\mathbf{1}}}, \tag{4.1.1}$$

et sa transformée de Mellin

$$M^{\zeta}_{\mathbf{i},\gamma}(\mathbf{z},\mathbf{z}') := \int_{\Pi} s^{\mathbf{z}}s'^{\mathbf{z}'+1}\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s')\frac{ds}{s^{\mathbf{1}}}\wedge\frac{ds'}{s'^{\mathbf{1}}}, \tag{4.1.2}$$

au lieu des (1.3.5) et (1.3.7). En fait, le calcul totalement parallèle à celui du §2 nous donne,

$$M^{\zeta}_{\mathbf{i},\gamma}(\mathbf{z},\mathbf{z}') = g(\mathbf{z},\mathbf{z}')\prod_{a\in I}\Gamma(\mathcal{L}_a(\mathbf{i},\mathbf{z},\mathbf{z}',\zeta)), \tag{4.1.3}$$

où la fonction linéaire $\mathcal{L}_a(\mathbf{i},\mathbf{z},\mathbf{z}',\zeta)$ est définie d 'une façon analogue à (2.1.2). Il s'en déduit que l'intégrale $\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s')$ satisfait le système ci-dessous.

$$(4.1.4)\quad \mathcal{L}_a(\mathbf{i},\mathbf{z},\mathbf{z}',\zeta) := \frac{\sum_{j=1}^{N} A^a_j(i_j+1)+\sum_{\ell=1}^{k}(B^a_\ell z_\ell + D^a_\ell(\zeta_\ell+1))+\sum_{j=1}^{m} C^a_j(z'_j+1)}{\Delta}, a\in I$$

$(4.1.4)_1$

$$\tilde{L}_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'}s,s',\zeta)\tilde{I}^{\zeta}_{X^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s') := \left[\tilde{P}_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) - s_q^{\Delta}Q_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta)\right]\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s') = 0, 1\leq q\leq k$$

avec

$$(4.1.4)_2\qquad \tilde{P}_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) = \prod_{a\in I_q^+}\prod_{j=0}^{B^a_q-1}\big(\mathcal{L}_a(\mathbf{i},-\vartheta_s,-\vartheta_{s'},\zeta)+j\big),$$

$$(4.1.4)_3\qquad \tilde{Q}_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) = \prod_{\bar{a}\in I_q^-}\prod_{j=0}^{-B^{\bar{a}}_q-1}\big(-\mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{i},-\vartheta_s,-\vartheta_{s'},\zeta)-j\big),$$

où $I_q^+, I_q^-, 1\leq q\leq k$ sont les ensembles des indices définis dans la Définition 5.

$$(4.1.4)_4\quad \tilde{L}'_{r,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'}s,s',\zeta)\tilde{I}^{\zeta}_{X^{\mathbf{i}},\gamma}(s,s') := \left[\tilde{P}'_{r,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) - s_r'^{\Delta}Q'_{r,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta)\right]\tilde{I}^{\zeta}_{x^{\mathbf{i}},\gamma}(s) = 0, 1\leq q\leq k$$

$$(4.1.4)_5\qquad \tilde{P}'_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) = \prod_{a\in J_r^+}\prod_{j=0}^{C^a_r-1}\big(\mathcal{L}_a(\mathbf{i},-\vartheta_s,-\vartheta_{s'},\zeta)+j\big)$$

$$(4.1.4)_6\qquad \tilde{Q}_{q,\mathbf{i}}(\vartheta_s,\vartheta_{s'},\zeta) = \prod_{\bar{a}\in J_r^-}\prod_{j=0}^{-C^{\bar{a}}_r-1}\big(-\mathcal{L}_{\bar{a}}(\mathbf{i},-\vartheta_s,-\vartheta_{s'},\zeta)-j\big).$$

Remarque 4 *Comme $m = dim\ \mathbf{D}(\Sigma)-1 = dim\ \mathbf{D}(\tilde{\Sigma})$ (voir (1.4.5)), on peut considérer que le système $(4.1.4)_*$ est défini sur $(\mathbf{C}^\times)^k\times(\mathbf{D}(\Sigma)/\mathbf{C}^\times)$ (resp. $(\mathbf{C}^\times)^k\times\mathbf{D}(\tilde{\Sigma})$) pour $\mathbf{D}(\Sigma)$ (resp. $\mathbf{D}(\tilde{\Sigma})$) le groupe de Néron-Severi.*

D'après le point 2.4 de [15] les expressions $(4.1.3), (4.1.4)_*$ donnent l'uniformisation de Horn du discriminant des polynômes $f_1(x,s')+s_1,\cdots,f_k(x,s')+s_k$.

$$D_{s,s'} = \{(s,s')\in\mathbf{C}^{k+m}; f_1(x,s')+s_1=\cdots=f_k(x,s')+s_k=0, rank\begin{pmatrix} grad_x\ f_1(x,s')\\ \cdots\\ grad_x\ f_k(x,s')\end{pmatrix} < N,$$

pour certain $x\in\mathbf{T}^N\}$.

Soit $\Delta_f(s,s')$ le polynôme qui définit $D_{s,s'}$ sans multiplicité. Pour les fonctions suivantes qui sont $\Delta-$ième racines des fonctions rationelles,

$$\psi_q(z,z') = \left(\frac{\prod_{a\in I_q^+}(\sum_{\ell=1}^k B_\ell^a z_\ell + \sum_{j=1}^m C_j^a z_j')^{B_q^a}}{\prod_{\bar a\in I_q^-}(\sum_{\ell=1}^k -B_\ell^{\bar a} z_\ell - \sum_{j=1}^m C_j^{\bar a} z_j')^{-B_q^{\bar a}}} \right)^{\frac{1}{\Delta}}, 1 \leq q \leq k,$$

$$\phi_r(z,z') = \left(\frac{\prod_{a\in J_r^+}(\sum_{\ell=1}^k B_\ell^a z_\ell + \sum_{j=1}^m C_j^a z_j')^{C_r^a}}{\prod_{\bar a\in J_r^-}(\sum_{\ell=1}^k -B_\ell^{\bar a} z_\ell - \sum_{j=1}^m C_j^{\bar a} z_j')^{-C_r^{\bar a}}} \right)^{\frac{1}{\Delta}}, 1 \leq r \leq m.$$

on définit l'application h,

$$h : \mathbf{C}^{k+m} \setminus \{0\} \to (\mathbf{C}^\times)^{k+m}, \tag{4.1.5}$$

$$(z,z') \to (\psi_1(z,z'), \cdots, \psi_k(z,z'), \phi_1(z,z'), \cdots, \phi_m(z,z')).$$

On se souvient ici que les ensembles $I_q^+ \subset \{1,2,\cdots,k\}$ (resp. I_q^-), $J_r^+ \subset \{1,2,\cdots,m\}$ (resp. J_r^-) ont été introduits dans la Définition 3 du §2.1.

En vue de la propriété (2.1.3), la fonction rationelle $\psi_q(z,z')^\Delta$ (resp. $\phi_r(z,z')^\Delta$) est de poids homogène zéro par rapport aux variables (z,z') et donc on peut la regarder comme l'application de $\mathbf{C}P^{k+m-1}$ au lieu de celle de $\mathbf{C}^{k+m}$. L'application (4.1.5) n'est qu'une application inverse de l'application de Gauss logarithmique;

$$D_{s,s'} \cap (\mathbf{C}^\times)^{k+m} \to \mathbf{C}P^{k+m-1},$$

$$(s,s') \to \big(s_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\Delta_f(s,s') : \cdots : s_k \frac{\partial}{\partial s_k}\Delta_f(s,s') : s_1' \frac{\partial}{\partial s_1'}\Delta_f(s,s') : \cdots : s_m' \frac{\partial}{\partial s_m'}\Delta_f(s,s')\big).$$

Soit

$$\bar f_\ell(x,\mathbf{a}) = a_{1,\ell}x^{\vec\alpha_{1,\ell}} + \cdots + a_{\tau_\ell,\ell}x^{\vec\alpha_{\tau_\ell,\ell}} + a_{0,\ell}.\ 1 \leq \ell \leq k.$$

Pour la simplicité on se sert de la notation $\mathbf{a} := (a_{0,1},\cdots,a_{\tau_k,k}) \in \mathbf{T}^L$. Nous regardons le cobord de Leray $\partial\gamma_\mathbf{a}$ d'un cycle $\gamma_\mathbf{a} \in H_{N-k}(X_\mathbf{a},\mathbf{Z})$ de l'IC $X_\mathbf{a} = \{x \in \mathbf{T}^N; \bar f_1(x,\mathbf{a}) = \cdots = \bar f_k(x,\mathbf{a}) = 0\}$.

Alors on peut définir par

$$\Phi^\zeta_{x^\mathbf{J},\gamma_\mathbf{a}}(a_{0,1},\cdots,a_{\tau_k,k}) :=$$

$$\int_{\partial\gamma_\mathbf{a}} \prod_{\ell=1}^k \bar f_\ell(x,\mathbf{a})^{-\zeta_\ell-1} x^{\mathbf{J}+\mathbf{1}} \frac{dx}{x^\mathbf{1}},$$

une $A-$ fonction hypergéométrique de Gel'fand-Zelevinski-Kapranov [14] associée aux polynômes,

$$f_\ell(x) = x^{\vec\alpha_{1,\ell}} + \cdots + x^{\vec\alpha_{\tau_\ell,\ell}},\ 1 \leq \ell \leq k,$$

$$x^\mathbf{J} = x_1^{I_1}\cdots x_N^{I_N}, x^{\vec\alpha_{j,\ell}} = x_1^{\alpha_{j,\ell,1}}\cdots x_N^{\alpha_{j,\ell,N}}.$$

On impose ici la condition de non-dégénérescence de la Définition 1 pour l'IC $\mathcal{X}_s$ obtenue d'après la procédure décrite dans §1.1 pour n'importe quelle addition des variables supplémentaires x'. Il est commode de considérer la matrice suivante analogue à la matrice L (1.5.5),

$$\mathsf{M}(A) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha_{111} & \cdots & \alpha_{\tau_1 11} & 0 & \alpha_{121} & \cdots & \alpha_{\tau_2 21} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1k1} & \cdots & \alpha_{\tau_k k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{11N} & \cdots & \alpha_{\tau_1 1N} & 0 & \alpha_{12N} & \cdots & \alpha_{\tau_2 2N} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1kN} & \cdots & \alpha_{\tau_k kN} \end{bmatrix}.$$

Nous supposons d'ici bas toujours $rank(\mathsf{M}(A)) = k+N$. En suite, on considère un réseau $\Lambda \subset \mathbf{Z}^L$ des $L-$vecteurs définis par le système linéaire des équations ci-dessus:

$$\sum_{i=0}^{\tau_q} b(j,q,\nu) = 0, \;\; 1 \leq q \leq k,$$

$$\sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{\tau_q} \alpha_{jq\ell} b(j,q,\nu) = 0, 1 \leq \ell \leq N.$$

Ici nous avons noté par $(b(0,1,\nu),\cdots,b(\tau_1,1,\nu),b(0,2,\nu),\cdots,b(\tau_2,2,\nu),\cdots,b(\tau_k,k,\nu))$, $1 \leq \nu \leq m+k$, une $\mathbf{Z}$ base du Λ.

Pour un sous-ensemble $\mathbf{K} \subset \{(0,1),\cdots,(k,\tau_k)\}$ tel que les colonnes $\vec{m}_{j,q}(A),(j,q) \in \mathbf{K}$ de la matrice $\mathsf{M}(A)$ engendrent l'espace $\mathbf{R}^{N+k}$ sur $\mathbf{R}$ et $|\mathbf{K}| = N+k$ on définit d'après [14] l'ensemble des indices (détérminés par la méthode de Frobenius généralisée),

$$\Pi((\zeta+\mathbf{1},\mathbf{J}+\mathbf{1}),\mathbf{K}) = \{((\lambda(0,1,\nu),\cdots,\lambda(\tau_1,1,\nu),\cdots,\lambda(\tau_k,k,\nu))\}_{1 \leq \nu \leq |det(\vec{m}_{j,q}(A))_{(j,q)\in\mathbf{K}}|},$$

qui satisfont le système des équations suivantes,

$$\sum_{j=0}^{\tau_\nu} \lambda(j,q,\nu) + \zeta_q + 1 = 0, \;\; 1 \leq q \leq k,$$

$$\sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{\tau_q} \alpha_{jq\ell}\lambda(j,q,\nu) - (I_\ell+1) = 0, 1 \leq \ell \leq N.$$

Soit T une triangulation du polyèdre de Newton $\Delta(F(x,\mathbf{1},y)+1)$ pour $F(x,\mathbf{1},y)$ défini comme au (1.2.1) selon la définition [14], 1.2. Pourtant on impose la condition que $\lambda(j,q,\nu) \in \mathbf{Z}$ pour $(j,q) \notin \mathbf{K}$. Soient $\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2 \in T$ deux simplexes différents de la triangulation T. On suppose que pour $(\lambda(0,1,\nu_p),\cdots,\lambda(k,\tau_k,\nu_p)) \in \Pi((\zeta+\mathbf{1},\mathbf{J}+\mathbf{1}),\mathbf{K}_p)$, $\lambda(j,q,\nu_p) \in \mathbf{Z}$ pour $(j,q) \notin \mathbf{K}_p$, $(p=1,2)$ avec $1 \leq \nu_p \leq |det(\vec{m}_\rho(A))_{\rho\in\mathbf{K}_p}|$. On introduit la condition de $T-$ non-résonance sur $(\zeta+\mathbf{1},\mathbf{J}+\mathbf{1})$

$$(\lambda(0,1,\nu_1),\cdots,\lambda(k,\tau_k,\nu_1)) \not\equiv (\lambda(0,1,\nu_2),\cdots,\lambda(k,\tau_k,\nu_2)) \; mod\; \Lambda, \tag{4.1.6}$$

pour n'importe quel paire $(\lambda(0,1,\nu_p),\cdots,\lambda(k,\tau_k,\nu_p)) \in \Pi((\zeta+\mathbf{1},\mathbf{J}+\mathbf{1}),\mathbf{K}_p)$, $p=1,2$. Une adaptation du theorem 3 [14] à notre situation peut être formulée comme suit.

Théorème 4.1 *La fonction $\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_a}(\mathbf{a})$ satisfait le système des équations comme suit.*

1)

$$\Big(\sum_{j=0}^{\tau_q} a_{ji}\frac{\partial}{\partial a_{ji}} + \zeta_q + 1\Big)\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_a}(\mathbf{a}) = 0, 1 \leq q \leq k,$$

$$\Big(\sum_{1\leq q\leq k, 1\leq j\leq\tau_q} \alpha_{jq1}a_{jq}\frac{\partial}{\partial a_{jq}} - (I_1+1)\Big)\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_a}(\mathbf{a}) = \cdots = \Big(\sum_{1\leq q\leq k, 1\leq j\leq\tau_q} \alpha_{jqN}a_{jq}\frac{\partial}{\partial a_{jq}} - (I_N+1)\Big)\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_a}(\mathbf{a}) = 0,$$

$$\Big(\prod_{\{(j,q);b(j,q,\nu)>0\}}\big(\frac{\partial}{\partial a_{jq}}\big)^{b(j,q,\nu)} - \prod_{\{(j,q);b(j,q,\nu)<0\}}\big(\frac{\partial}{\partial a_{jq}}\big)^{-b(j,q,\nu)}\Big)\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_a}(\mathbf{a}) = 0, \; 1 \leq \nu \leq L-(k+N).$$

2) La dimension des solutions au point générique de $\mathbf{a} \in \mathbf{T}^L$ du système ci-dessus est égal à $(N+k)!vol_{N+k}\Delta(F(x,\mathbf{1},y)+1)$ si la condition (4.1.6) de T-non-résonance est satisfaite.

Dans la suite nous rangeons les paramètres $\mathbf{a} = (a_{0,1}, \cdots, a_{\tau_k,k})$ par leur ordre d'apparition et définissons les paramètres indexés de nouveau $a_1 = a_{1,1}, \cdots, a_{\tau_1} = a_{\tau_1,1}, a_{\tau_1+1} = a_{0,1}, \cdots, a_{L-1} = a_{\tau_k,k}, a_L = a_{0,k}$. Nous introduisons la notation analogue du (1.5.3),

$$\Xi(A) :=^t (\log\ X_1, \cdots, \log\ X_N, \log\ a_1, \cdots, log\ a_L, \log\ U_1, \cdots, log\ U_k). \tag{4.1.7}$$

$$\log\ T_1 =< \vec{\alpha}_{1,1}, \log\ X > +log\ a_1 + \log\ U_1,$$
$$\vdots$$
$$\log\ T_{\tau_1} =< \vec{\alpha}_{1,\tau_1}, \log\ X > +log\ a_{\tau_1} + \log\ U_1,$$
$$\vdots$$
$$\log\ T_L = log\ a_L + \log\ U_k.$$

On considère l'équation
$$\mathsf{L}(A) \cdot Log\ \Xi(A) = \mathsf{L} \cdot Log\ \Xi,$$
ici la matrice $\mathsf{L}(A)$ est construite comme suit. Les colonnes $\vec{\ell}_i(A) = \vec{w}_i, 1 \leq i \leq N$ avec les vecteurs $\vec{w}_i$ définis comme la colonne de la matrice L dans (1.5.5). Pour les colonnes du numéro $N+1$ à $N+L$ $(\vec{\ell}_{N+1}(A), \cdots, \vec{\ell}_{N+L}(A)) = id_L$. Les colonnes $\vec{\ell}_{N+L+j}(A) =^t (\ \overbrace{0, \cdots, 0, 0,}^{\tau_1+\cdots+\tau_{j-1}+j-1}\ , \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{\tau_j+1}, 0, \cdots, 0), 1 \leq j \leq k$. Autrement dit, la matrice $\mathsf{L}(A)$ est obtenue après l'insertion d'une matrice id_L dans la matrice transposée ${}^t\mathsf{M}(A)$ entre la $k-$ième et la $(k+1)-$ième colonne quitte à des permutations nécessaires des colonnes après l'insertion.

Proposition 4.2 *Il existe un cycle γ_a tel que l'égalité suivante soit vraie pour une intégrale définie dans* (4.1.1),

$$\Phi^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) = B^{\zeta}_{\mathbf{J}}(\mathbf{a}) I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s(\mathbf{a}), s'(\mathbf{a})), \tag{4.1.8}$$

ici
$$s_\ell(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^{L} a_j^{\sigma_{j,N+\ell}}, \quad ,1 \leq \ell \leq k,$$
$$s'_\rho(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^{L} a_j^{\sigma_{j,N+k+\rho}}, \quad ,1 \leq \rho \leq m,$$
$$B^{\zeta}_{\mathbf{J}}(\mathbf{a}) = \prod_{\ell=1}^{N} (\prod_{j=1}^{L} a_j^{\sigma_{j,\ell}})^{I_\ell+1} \prod_{\nu=1}^{k} (\prod_{j=1}^{L} a_j^{\sigma_{j,N+k+m+\nu}})^{\zeta_\nu+1}.$$

Les exposants $\sigma_{j,\ell}$ sont définis par la relation suivante

$$\mathsf{L}^{-1} \cdot \mathsf{L}(A) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{L,1} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \sigma_{1,N} & \cdots & \sigma_{L,N} & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{1,N+1} & \cdots & \sigma_{L,N+1} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{1,N+k+m} & \cdots & \sigma_{L,N+k+m} & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{1,N+k+m+1} & \cdots & \sigma_{L,N+k+m+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{1,L} & \cdots & \sigma_{L,L} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1.7}$$

La transition du cycle $\gamma(a)$ à γ est gérée par les transformations,

$$X_i = (\prod_{j=1}^{L} a_j^{\sigma_{j,i}})^{-1} \cdot x_i.$$

Démonstration Il suffit de remarquer la relation

$$x^{\mathbf{J+1}} y^{\zeta+\mathbf{1}} \frac{dx}{x^{\mathbf{1}}} \wedge \frac{dy}{y^{\mathbf{1}}} = B^{\zeta}_{\mathbf{J}}(\mathbf{a}) X^{\mathbf{J+1}} U^{\zeta+\mathbf{1}} \frac{dX}{X^{\mathbf{1}}} \wedge \frac{dU}{U^{\mathbf{1}}}.$$

C.Q.F.D.

On peut donc conclure que (au moins localement sur une carte $a_j \neq 0$ pour $j \in I, |I| = k+m$) $A-$fonction hypergéométrique du type de GZK (4.1.1) est exprimée au moyen d'une intégrale-fibre annulée par un système de Horn. On peut trouver un pareil énoncé chez [15].

Corollaire 4.3 *Dans le cas où dim* $\mathbf{D}(\Sigma) = 1$, *c.à.d.* $m = 0$ *au (1.5.7), la condition de $T-$non résonance* (4.1.6) *est équivalente à la condition,*

$$x^{\mathbf{J+1}} y^{\zeta+\mathbf{1}} \frac{dx}{x^{\mathbf{1}}} \wedge \frac{dy}{y^{\mathbf{1}}} \in Gr^W_{N+k-1} H^{N+k-1}(Z_{F(x,0,y)})).$$

Corollaire 4.4 *La dimension de l'espace des solutions du système du Théorème 4.1 au point générique est égal à* $|\chi(Z_{F(x,\mathbf{1},y)})|$ *si la condition de $T-$ non-résonance* (4.1.6) *est satisfaite.*

Démonstration Il faut considérer l'envelope convexe des vecteurs qui correspondent aux vertexes des polynômes $y_1(f_1(x)+1)+\cdots+y_k(f_k(x)+1)$. C'est à dire $(\vec{\alpha}_{1,1}, 1, 0, \cdots, 0)$,$\cdots$,$(\vec{\alpha}_{\tau_1,1}, 1, 0, \cdots, 0)$, $(\vec{\alpha}_{1,2}, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(\vec{\alpha}_{\tau_k,k}, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathbf{Z}^{N+k}$. Ils se trouvent sur l'hyperplan $\zeta_1 + \cdots + \zeta_k = 1$. Il est donc possible de regarder le volume $(N+k-1)$ dimensionel $(N+k-1)! vol_{N+k-1}(\Delta(F(x,\mathbf{1},y))$ qui est égal au $(N+k)! vol_{N+k}(\Delta(F(x,\mathbf{1},y)+1)$. Le caractéristique d'Euler est exprimé comme suit

$$|\chi(Z_{F(x,\mathbf{1},y)})| = (N+k-1)! vol_{N+k-1}\big(\Delta(F(x,\mathbf{1},y))\big),$$

d'après Khovanski-Oka [16], [21]. **C.Q.F.D.**

Le corollaire ci-dessus avec la Proposition 4.2 nous donne

Corollaire 4.5 *La dimension du système* $(4.1.4)_1, (4.1.4)_4$ *est égal à* $|\chi(Z_{F(x,\mathbf{1},y)})|$ *si la condition de $T-$non-résonance* (4.1.6) *est satisfaite.*

Remarque 5 *(Compactification de Terasoma)* Dans **3.2** nous avons regardé la relation entre deux systèmes différents de multiplier $L-(N+k)$ termes par nouvelles variables $(x'_1, \cdots, x'_m)$ et $(\tilde{x}'_1, \cdots, \tilde{x}'_m)$. Nous considérons un ensemble des triangulations $\mathcal{J} = \{$ la façon de choisir $(N+k)-$termes de l'expression $y_1 f_1(x) + \cdots + y_k f_k(x)$ $\}$. Alors évidemment un $(N+k)-$simplexe, T_i $i \in \mathcal{J}$ correspond au chaque choix des $L-(N+k)$ termes auxquels les nouvelles variables sont multipliées.

Par exemple dans (1.6.2) les termes de numéros $1, 2, 4, 5, 7$ sont libres de ces variables, pourtant dans (1.6.2) les termes de numéros $1, 2, 4, 7, 8$ les sont. Les deux tores paramétrés par les variables $(s'_1, \cdots, s'_m) \in \mathbf{T}^m = S'_{i_1}$ et $(\tilde{s}'_1, \cdots, \tilde{s}'_m) \in \mathbf{T}^m = S'_{i_2}$ sont ainsi indexés par $i_1, i_2 \in \mathcal{J}$. Terasoma [35] compactifie l'espace $\coprod_{\mathbf{a} \in \mathbf{T}^L}(X_{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ au moyen d'un espace produit $\prod_{i \in \mathcal{J}} \mathbf{P}_\Pi \times \prod_{i \in \mathcal{J}} S'_i$. Ici Π dénote le diagramme de Newton $\Delta(y_1 f_1(x) + \cdots + y_k f_k(x))$ et $\mathbf{P}_\Pi$ la variété torique y associée. Il colle deux chartes $\mathbf{P}_\Pi \times S'_{i_1}$ et $\mathbf{P}_\Pi \times S'_{i_2}$ dans leur compactification (notée par $\tilde{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}$) au moyen de la transition mentionnée dans la Proposition 3.5 quitte à modifier $(x'_1, \cdots, x'_m)$ et $(\tilde{x}'_1, \cdots, \tilde{x}'_m)$ dans $(s'_1, \cdots, s'_m)$ et $(\tilde{s}'_1, \cdots, \tilde{s}'_m)$.

4.2 Application à la symétrie de miroir pour les espaces projectifs
Comme chez Givental' [12] Nous regardons l'intersection complète définie par $r+1$ fonctions:

$$X_s := \{(x_0, \cdots x_n) \in \mathbf{T}^{n+1}; f_0(x)+s=0, f_1(x)+1=0, \cdots, f_r(x)+1=0\}. \tag{4.2.1}$$

où

$$f_0(x) = x_0x_1\cdots x_n, f_i(x) = x_{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}} + \cdots + x_{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}+\ell_i-1} \; 1 \leq i \leq r. \tag{4.2.2}$$

Ici on comprend que $\ell_0 = 0$. On considère la fonction de phase comme au $(1.1.5)'$,

$$y_0(f_0(x)+s) + \sum_{i=1}^{r} y_i(f_i(x)+1) = T_0 + T_1 + \cdots + T_{n+r+3}.$$

La transformée de Mellin de l'intégrale fibre associée à X_s ci-dessus peut être calculé par la matrice; L,

$$Log\, T = \mathsf{L} \cdot Log\, \Xi,$$

ici la notation est comme au §1.

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \overbrace{\cdots}^{\ell_1-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2.3}$$

Alors la transformée de Mellin de l'intégrale fibre associée à X_s ci-dessus peut être calculé par la matrice; $(\mathsf{L})^{-1}$, qui se calcule facilement;
(4.2.4)

$$\mathsf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\ell_1-3} & 0 & -1 & 0 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\ell_2-3} & 0 & 0 & \overbrace{\cdots}^{n+r-\ell_1-\ell_2-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\ell_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\ell_2 & \cdots & -\ell_r \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \ell_1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \ell_2 & \cdots & \ell_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

En résultat nous avons la transofrmée de Mellin $M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z)$ de l'intégrale période $I^{\zeta}_{x^{\mathbf{J}},\gamma}(s)$ pour l'IC (4.2.1) admet une expression comme suit à des fonctions périodiques près,

$$M^{\zeta}_{\mathbf{J},\gamma}(z) = \prod_{i=0}^{n} \Gamma(z - \zeta_0 + I_i) \prod_{j=1}^{r} \Gamma(- \sum_{i=\ell_1+\cdots+\ell_{j-1}}^{\ell_1+\cdots+\ell_j-1} I_i - \ell_j z + \ell_j \zeta_0 + \zeta_j + 1),$$

en particulier

$$M^{0}_{0,\gamma}(z) = \frac{\Gamma(z)^{n+1}}{\prod_{\nu=1}^{r} \Gamma(\ell_\nu z)}, \tag{4.2.5}$$

toujours à des fonctions périodiques près. Cette formule a été reclamée dans [12]. On se sert ici des notations des §2 et §3.

Si on regarde les vecteurs colonnes de la matrice L^{-1} après en avoir dépourvu les $r+2$ vecteurs rayons d'en bas, on obtient une série de vecteurs $(1,0,\cdots,0)$,$(0,1,0,\cdots,0)$, $(0,\cdots,0,\overset{\overset{\ell_1}{\vee}}{1},\cdots,0)$, $(\overbrace{-1,\cdots,-1}^{\ell_1},0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(\overbrace{0,\cdots,0}^{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}-1},1,0,\cdots,0)$, $(\overbrace{0,\cdots,0}^{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}},1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(\overbrace{0,\cdots,0}^{\ell_1+\cdots+\ell_i},1,0,\cdots,0)$, $(\overbrace{0,\cdots,0}^{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{\ell_i},0,\cdots,0)$, $1 \le i \le r$. Ces r groupes des vecteurs donnent naissance à un éventail Σ qui définit lavariété torique $\mathbf{P}_\Sigma = \mathbf{P}^{\ell_1} \times \mathbf{P}^{\ell_2} \times \cdots \times \mathbf{P}^{\ell_r}$. En particulier, on peut constater que l'intégrale-fibre associée à l'IC (4.2.2) avec $r=1$ coincide avec la quantum cohomologie de la variété $\mathbf{P}^n$. Voir [30].

4.3 L'hypothèse de Berglund, Candelas et des autres.

Dans l'article [7] les auteurs ont proposé une hypothèse naturelle sur l'intégrale-fibre associée à la variété de Calabi-Yau X_s qui est une symétrie de miroir par rapport à la variété de Calabi-Yau générique multi-quasihomogène Y de codimension ℓ définie dans le produit des espaces projectifs quasihomogènes $\mathbf{P}^{(\tau_1)}_{(g_1^{(1)},\ldots,g^{(1)}_{\tau_1+1})} \times \ldots \times \mathbf{P}^{(\tau_k)}_{(g_1^{(k)},\ldots,g^{(k)}_{\tau_k+1})}$ dont la codimension est ℓ. Dans cette section, nous verifions leur hypothèse pour le cas $\ell = k$.

Tout dábord nous considérons le système suivant des équations définies dans $(\mathbf{C}^\times)^n$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^{\vec{v}_1^{(1)}} + \cdots + x^{\vec{v}_{\tau_1}^{(1)}}, \\ f_2(x) &= \prod_{j \in I^{(1)}} x_j + 1, \\ &\vdots, \\ f_{2i-1}(x) &= x^{\vec{v}_1^{(i)}} + \cdots + x^{\vec{v}_{\tau_i}^{(i)}}, \\ f_{2i}(x) &= \prod_{j \in I^{(i)}} x_j + 1, \\ &\vdots, \\ f_{2k-1}(x) &= x^{\vec{v}_1^{(k)}} + \cdots + x^{\vec{v}_{\tau_k}^{(k)}}, \\ f_{2k}(x) &= \prod_{j \in I^{(k)}} x_j + 1. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Ici, $I^{(j)}, 1 \leq j \leq k$ sont les ensembles d'indices complémentaires l'un à l'autre tels que $\cup_{q\in[1,k]} I^{(q)} = \{1, \cdots, n\}$ et $I^{(q)} \cap I^{(q')} = \emptyset$ si $q \neq q'$. Dorénavant nous nous serverons des notations $\tilde{\tau}_\nu := |I^{(\nu)}|$ et $b^q := \sum_{\nu=1}^{q} \tau_\nu$. On suppose que

$$\sum_{\nu=1}^{k} \tau_\nu = b^k = n.$$

L'équation $f_{2j-1}(x)$ (resp.$f_{2j}(x)$) est donnée par les monômes avec les puissances $\vec{v}_1^{(j)}, \cdots, \vec{v}_{\tau_j}^{(j)} \in \mathbf{Z}^n$ (resp. $\vec{v}_{\tau_j+1}^{(j)} \in \mathbf{Z}^n$) telles que pour le vecteur poids $\vec{g}^{(q)} = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{b^{q-1}}, g_1^{(q)}, \cdots, g_{\tau_q}^{(q)}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-b^q}) \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$, $1 \leq q \leq k$ la relation ci-dessous soit vraie,

$$Q_j^{(q)} :=< \vec{v}_1^{(j)}, \vec{g}^{(q)} >= \cdots =< \vec{v}_{\tau_j}^{(j)}, \vec{g}^{(q)} >=< \vec{v}_{\tau_{j+1}}^{(j)}, \vec{g}^{(q)} > \quad , 1 \leq j \leq k, \tag{4.3.2}$$

en sorte que $g_{\tau_q+1}^{(q)} = Q_q^{(q)}$. Cela signifie que le point $\vec{v}_{\tau_j+1}^{(j)}$ appartient à l'hyperplan de dimension $\tau_j - 1$ engendré par $\vec{v}_1^{(j)}, \vec{v}_1^{(j)}, \cdots, \vec{v}_{\tau_j}^{(j)}$. L'égalité suivante est demandée si on suppose que X_s soit une variété de Calabi-Yau:

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j^{(q)} = \sum_{i=1}^{\tau_q} g_i^{(q)} =< \vec{g}^{(q)}, (\overbrace{0, \cdots, 0}^{b^{q-1}}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{\tau_q}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-b^q}) >, 1 \leq q \leq k. \tag{4.3.3}$$

On ne suppose pas, pourtant, cette condition dans l'argument suivant.

Du surcroît, on impose que pour chaque élément $\lambda \in Aut(X_j)$, du groupe de l'automorphisme de l'hypersurface $X_j = \{x \in \mathbf{T}^n; f_{2j-1}(x) = 0\}$ la relation $(\lambda_* f_{2j-1})(x) = \lambda_*(x^{\vec{v}_{\tau_j+1}^{(j)}})$ soit valable. Si on applique la technique de Cayley au système ci-dessus, on obtient un polynôme

$$F(x, s, y) = \sum_{j=1}^{k} y_{2j-1}(f_{2j-1}(x) + s_j) + \sum_{j=1}^{k} y_{2j} f_{2j}(x), \tag{4.3.4}$$

avec $L = n + 3k$ termes. Pour faciliter la manipulation avec la matrice L ainsi construite pour $F(x, s, y)$ nous introduisons la notation $a^\nu := \tau_1 + \cdots + \tau_\nu + 3\nu = b^\nu + 3\nu$. En particulier, le $a^{i-1} + 1-$ème terme de $F(x, s, y)$ correspond à $y_{2i-1} x^{\vec{v}_1^{(i)}}$ et le $a^i - 3 = (a^{i-1} + \tau_i)-$ème terme - $y_{2i-1} x^{\vec{v}_{\tau_i}^{(i)}}$. Le $(a^i - 1)-$ème terme - $y_{2i} \prod_{j\in I^{(i)}} x_j$.Le $(a^i - 2)-$ème terme - $y_{2i} s_i$. Le a^i-ème terme - y_{2i}.

On considère l'équation pour $\Xi = (\xi_1, \cdots, \xi_L)$,

$${}^t\mathsf{L} \cdot \Xi =^t (1, \cdots, 1, z_1, \cdots, z_k), \tag{4.3.5}$$

équivalente à la relation,

$$\Xi =^t \mathsf{L}^{-1} \cdot^t (1, \cdots, 1, z_1, \cdots, z_k). \tag{4.3.6}$$

Ainsi on obtient d'expressions linéaires $(\xi_1(z), \cdots, \xi_L(z)) = (\mathcal{L}_1(0, z, 0), \cdots, \mathcal{L}_L(0, z, 0)$ pour $\mathbf{i} = 0, \zeta = 0$ en termes des fonctions linéaires définies dans la Proposition 2.1. Si on reécrit la matrice L en tenant compte des (4.3.1), (4.3.4) on a le vecteur rayon comme suit:

$$\bar{v}_q^{(\nu)} = (v_{q,1}^{(\nu)}, v_{q,2}^{(\nu)}, \cdots, v_{q,\tau_1}^{(\nu)}, \cdots, v_{q,n}^{(\nu)}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{2\nu-2}, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{3k-2\nu+1}), \tag{4.3.7}$$

$1 \leq \nu \leq k, 1 \leq q \leq \tau_\nu$. En se servant des notations du (3.1.13), §3 pour les vecteurs poids de la matrice L^{-1}, on peut déduire les systèmes suivants pour chaque ν et q fixés.

$$\begin{aligned} v^{(\nu)}_{q,1} w_1^{(a^\nu)} + v^{(\nu)}_{q,2} w_2^{(a^\nu)} + \cdots + v^{(\nu)}_{q,n} w_n^{(a^\nu)} &= -1 \ \ pour \ \ a^{(\nu-1)} + 1 \leq q \leq a^{(\nu-1)} + \tau_\nu, \\ &= \qquad\qquad 0 \ \ \text{ailleurs}. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned} & v^{(1)}_{1,j} p^1_q + v^{(1)}_{2,j} p^2_q + \cdots + v^{(1)}_{\tau_1,j} p_q^{(\tau_1)} + v^{(2)}_{1,j} p_q^{(\tau_1+4)} + \cdots + v^{(2)}_{\tau_2,j} p_q^{(\tau_1+\tau_2+3)} + \cdots + v^{(k)}_{\tau_k,j} p_q^{(a^k-3)} \\ & \qquad = \ -1 \ \ pour \ \ j \in I^{(q)} \\ & \qquad = \ \ 0. \ \ pour j \notin I^{(q)} \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Il faut remarquer que le système (4.3.8) pour ν fixé (resp. (4.3.9) pour un q fixé) consiste de $n-$équations linéaires indépendantes par rapport aux inconnus $\{w_1^{(a^\nu)}, \cdots, w_n^{(a^\nu)}\}$, (resp. $\{p_q^{(j)}; j \in I_\Lambda\}$. Ici nous avons noté par I_Λ l'ensemble des indices $\{1, \cdots, L\} \setminus \cup_{\nu=1}^k \{a^\nu - 2, a^\nu - 1, a^\nu\}$. On voit encore des autres conditions nécéssaires sur $w_j^{(a^{\nu-1})}$,

$$\sum_{j \in I^{(\nu)}} w_j^{(a^\nu - 1)} = 1, \tag{4.3.10}$$

$$\sum_{j \in I^{(\nu)}} w_j^{(a^\nu)} = -1, \tag{4.3.11}$$

puisque le produit de la $(a^\nu - 1)-$ième colonne de L^{-1} avec le $(a^\nu - 1)-$ième rayon de L est égal à 1. D'autre part $n + 2\nu-$ième colonne de L avec le $j-$ième rayon $(1 \leq j \leq n+2)$ de L^{-1} est égal à 0 qui signifie $w_j^{(a^\nu - 1)} + w_j^{(a^\nu)} = 0$. En plus on voit que

$$\sum_{j \in I^{(\nu)}} w_j^{(a^{\nu'} - 1)} = \sum_{j \in I^{(\nu)}} w_j^{(a^{\nu'})} = 0,$$

pour $\nu' \neq \nu$. On définit une $(n \times k)-$ matrice V^Λ comme suit:

$$V^\Lambda := ({}^t v^{(1)}_{\tau_1+1}, \cdots, {}^t v^{(k)}_{\tau_k+1}), \tag{4.3.12}$$

où ${}^t v^{(q)}_{\tau_q+1}$ est un $n-$ vecteur qui correspond au $supp(f_{2\nu}) \setminus \{0\}$. En vu de la quasihomogénéité (4.3.2) on peut définir une $k \times k$ matrice comme suivant:

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} & \cdots & Q_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_1^{(k)} & \cdots & Q_k^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{g}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot V^\Lambda. \tag{4.3.13}$$

Pour la simplicité de la formulation, nous nous servons d'une matrice diagonale,

$$G = diag(g_1^{(1)}, \cdots, g_{\tau_1}^{(1)}, g_1^{(2)}, \cdots, g_{\tau_2}^{(2)}, \cdots, g_1^{(k)}, \cdots, g_{\tau_k}^{(k)}). \tag{4.3.14}$$

Dans la suite, nous allons considérer le cas avec $rang(\hat{Q}) = k$. Introduisons une matrice $n \times n$:

$$\mathsf{L}_\Lambda := \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{(1)} \\ \vec{v}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{v}_{\tau_1}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{v}_{\tau_k}^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{4.3.15}$$

Pour la commodité nous nous servons d'une $n \times k$ matrice,

$$\mathbf{Q} := \mathsf{L}_\Lambda({}^t\vec{g}^{(1)}, \cdots {}^t\vec{g}^{(k)}) = \hat{Q} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{g}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot G^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1^{(1)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & Q_1^{(1)} & Q_2^{(1)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & Q_2^{(1)} & \cdots & Q_k^{(1)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & Q_k^{(1)} \\ Q_1^{(2)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & Q_1^{(2)} & Q_2^{(2)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & Q_2^{(2)} & \cdots & Q_k^{(2)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & Q_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_1^{(k)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & Q_1^{(k)} & Q_2^{(k)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & Q_2^{(k)} & \cdots & Q_k^{(k)} & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & Q_k^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Dans cette situation, on déduit du (4.3.9) le système ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vdots \\ \vec{P}_k \end{pmatrix} \cdot \mathsf{L}_\Lambda = - {}^tV^\Lambda, \tag{4.3.16}$$

avec $\vec{P}_q = (p_q^{(1)}, p_q^{(2)}, \cdots, p_q^{(\tau_1)}, \cdots, p_q^{(a^k-3)})$. Si on note par $\check{\mathsf{L}}_j$ le $j-$ème vecteur colonne de la matrice L_Λ, on déduit diréctement du (4.3.16) l'équation:

$$\langle z_1\vec{P}_1 + z_2\vec{P}_1 + \cdots + z_k\vec{P}_k, \check{\mathsf{L}}_j\rangle + z_q = 0 \ \text{ si } \ j \in I^{(q)}.$$

On construit une matrice ${}^T\mathsf{L}$ que l'on obtient de la matrice transposée ${}^t\mathsf{L}$ après des permutations propres des colonnes en telle sorte que chaque rayon de ${}^T\mathsf{L}$ corresponde au vertexe d'un polynôme

$$(4.3.4)^T \qquad {}^TF(x,s,y) = \sum_{j=1}^k y_{2j-1}({}^Tf_{2j-1}(x) + s_j) + \sum_{j=1}^k y_{2j}\, {}^Tf_{2j}(x),$$

pour les polynômes,

$$(4.3.1)^T \qquad {}^Tf_{2q-1}(x) = x^{{}^T\vec{v}_1^{(q)}} + \cdots + x^{{}^T\vec{v}_{\tilde{\tau}_q}^{(q)}},$$

$${}^Tf_{2q}(x) = \prod_{\ell \in {}^TI^{(q)}} x_\ell + 1, \ \ 1 \le q \le k, \ 1 \le q \le k.$$

D'une facon analogue aux (4.3.12) – (4.3.15) on peut définir le système des poids

$$({}^T\vec{g}^{(1)}, \cdots, {}^T\vec{g}^{(k)}),$$

$${}^TQ_j^{(q)} = \langle {}^T\vec{v}_r^{(j)}, {}^T\vec{g}^{(q)}\rangle, \ 1 \le r \le \tilde{\tau}_q, 1 \le j,q \le k.$$

Il est facile à voir que les équations du ${}^T(4.3.1)$ définissent une IC dans $\mathbf{P}^{(\tilde{\tau}_1)}_{({}^Tg_1^{(1)},\ldots,{}^Tg_{\tilde{\tau}_1+1}^{(1)})} \times \ldots \times \mathbf{P}^{(\tilde{\tau}_k)}_{({}^Tg_1^{(k)},\ldots,{}^Tg_{\tilde{\tau}_k+1}^{(k)})}$ avec ${}^Tg_{\tilde{\tau}_q+1}^{(q)} = {}^TQ_q^{(q)}$. Nous introduisons des matrices analogues au cas (4.3.1),

$$(4.3.12)^T \qquad {}^TV^\Lambda := ({}^t({}^Tv_{\tilde{\tau}_1+1}^{(1)}), \cdots, {}^t({}^Tv_{\tilde{\tau}_k+1}^{(k)})),$$

où ${}^T v^{(q)}_{\tau_q+1}$ est un $n-$ vecteur qui correspond au $supp({}^T f_{2q}) \setminus \{0\}$.

$$(4.3.13)^T \qquad {}^T\hat{Q} := \begin{pmatrix} {}^TQ_1^{(1)} & \dots & {}^TQ_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^TQ_1^{(k)} & \dots & {}^TQ_k^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot^T V^\Lambda.$$

$$(4.3.14)^T \qquad {}^TG = diag({}^Tg_1^{(1)}, \cdots, {}^Tg_{\tilde\tau_1}^{(1)}, {}^Tg_1^{(2)}, \cdots, {}^Tg_{\tilde\tau_2}^{(2)}, \cdots, {}^Tg_1^{(k)}, \cdots, \ {}^Tg_{\tilde\tau_k}^{(k)}).$$

$$(4.3.15)^T \qquad {}^T\mathsf{L}_\Lambda := \begin{pmatrix} {}^T\vec{v}_1^{(1)} \\ {}^T\vec{v}_2^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{v}_{\tilde\tau_1}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{v}_{\tilde\tau_k}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

On remarque ici que par la construction ${}^T\mathsf{L}_\Lambda =^t \mathsf{L}_\Lambda$. Enfin on introduit les fonctions linéaires ${}^T\Xi := ({}^T\xi_1(z), \cdots, {}^T\xi_L(z))$, définies par la relation,

$$(4.3.6)^T \qquad {}^T\Xi = \ {}^t({}^T\mathsf{L})^{-1} \cdot^t (1, \cdots, 1, z_1, \cdots, z_k).$$

$${}^T\mathbf{Q} := \ {}^T\mathsf{L}_\Lambda(\ {}^t({}^T\vec{g}^{(1)}), \cdots \ {}^t({}^T\vec{g}^{(k)})).$$

Nous pouvons introduire l'ensemble des indices ${}^TI_\Lambda$ analogue au I_Λ. Nous avons les indices du I_Λ $1 = j_1 < \cdots < j_n = L-4$ et celles du ${}^TI_\Lambda$, $1 = i_1 < \cdots < i_n = L-4$. Dans cette situation, nous considérons deux conditions sur les fonctions (4.3.1),

$$(4.3.17) \qquad \begin{pmatrix} {}^T\xi_{i_1}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi_{i_n}(z) \end{pmatrix} = G \cdot V^\Lambda \cdot \begin{pmatrix} {}^T\xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi^{(k)}(z) \end{pmatrix},$$

pour certaines fonctions linéaires $({}^T\xi^{(1)}(z), \cdots, {}^T\xi^{(k)}(z))$ et

$$(4.3.17)' \qquad \begin{pmatrix} \xi_{j_1}(z) \\ \vdots \\ \xi_{j_n}(z) \end{pmatrix} =^T G \cdot^T V^\Lambda \cdot \begin{pmatrix} \xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ \xi^{(k)}(z) \end{pmatrix},$$

pour des fonctions linéaires $(\xi^{(1)}(z), \cdots, \xi^{(k)}(z))$. En plus nous nous servons de la condition

$$(4.3.17)'' \qquad {}^TV^\Lambda = V^\Lambda,$$

après une permutation propre des variables lors de la construction du polynôme ${}^TF(x,s,y)$ par $(4.3.1)^T$. On remarque que sous la condition $(4.3.17)''$ l'égalité suivante a lieu entre les nombres des termes présents dans (4.3.1) et $(4.3.1)^T$

$$\tau_\nu = \tilde\tau_\nu, \ \ 1 \le \nu \le k,$$

car

$$\overbrace{(1, \cdots, 1)}^{n} \cdot V^\Lambda = (\tilde\tau_1, \cdots, \tilde\tau_k),$$

$$\overbrace{(1,\cdots,1)}^{n}\cdot {}^{T}V^{\Lambda} = (\tau_1,\cdots,\tau_k).$$

En plus nous imposons une condition supplémentaire,

$$rank(\hat{Q}) = rank({}^{T}\hat{Q}) = k. \tag{4.3.17$'''$}$$

Théorème 4.6 *La transformée de Mellin $M^0_{0,\gamma}(z)$ de l'intégrale période $I^0_{x^0,\gamma}(s)$ pour l'IC* (4.3.1) *admet une expression comme suit à des fonctions $\Delta-$ périodiques près, si elle satisfait les conditions* (4.3.17),(4.3.17)$'$,(4.3.17)$''$, (4.3.17)$'''$.

$$M^0_{0,\gamma}(z(\xi)) = \frac{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_\nu}\Gamma(\,{}^{T}g_j^{(\nu)}\xi^{(\nu)})}{\prod_{\nu=1}^{k}\Gamma(\sum_{q=1}^{k}\,{}^{T}Q_q^{(\nu)}\xi^{(q)})}. \tag{4.3.18}$$

Ici $z(\xi) = (z_1(\xi),\cdots,z_k(\xi))$ est une $k-$tuple des fonctions linéaires en variables $\xi = (\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(k)})$ définies par la relation (4.3.6).

D'une façon symétrique $M^0_{0,\,{}^{T}\gamma}(z(\xi))$ pour l'IC, $(4.3.1)^T$ *admet une expression comme suit à des fonctions Δ périodiques près,*

$$M^0_{0,\,{}^{T}\gamma}(z(\xi)) = \frac{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_\nu}\Gamma(g_j^{(\nu)}\,{}^{T}\xi^{(\nu)})}{\prod_{\nu=1}^{k}\Gamma(\sum_{q=1}^{k}Q_q^{(\nu)}\,{}^{T}\xi^{(q)})}. \tag{4.3.18^T}$$

Les ${}^{T}\xi^{(\nu)}$ sont définies par la relation $(4.3.6)^T$.

Afin de faciliter l'argument de l'épreuve, nous formulons un énoncé auxiliaire.

Lemme 4.7 *Sous les conditions du Théorème 4.6, la transformée de Mellin $M^0_{0,\gamma}(z)$ de l'intégrale période $I^0_{x^0,\gamma}(s)$ pour l'IC* (4.3.1) *admet une expression comme suit à des fonctions Δ périodiques près,*

$$M^0_{0,\gamma}(z) = \prod_{i=1}^{k}\Gamma(z_i)\prod_{j\in I_\Lambda}\Gamma(\xi_j(z)).$$

Démonstration Il faut donc démontrer que les solutions spéciales du système (4.3.5) satisfont

$$\xi_{a^\nu-2}(z) = \xi_{a^\nu-1}(z) = z_\nu,\;\; \xi_{a^\nu}(z) = 1 - z_\nu. \tag{4.3.19}$$

Pour le voir, on remarque que le système ci-dessous est une conséquence directe de la relation $\mathsf{L}\mathsf{L}^{-1} = id_L$,

$$\sum_{i=1}^{n} v_{q,i}^{(\nu)}w_i^{(a^\nu)} + q_{2\mu-1}^{(a^\nu)} = 0,\;\; a^{(\mu-1)}+1 \le q \le a^{\mu-1}+\tau_\mu,\;\; \mu\in[1,k]. \tag{4.3.20}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} w_i^{(a^\nu)} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(a^\nu-1)} = 1.$$

La dernière se déduit des (4.3.10) et (4.3.11). Soit $\nu(j)\in[1,k]$ tel que j appartienne au $I^{(\nu(j))}$, alors on a

$$\sum_{i\in I_\Lambda} v_{i,j}^{(\nu(j))}p_q^{(i)} + p_q^{(a^{\nu(j)-1})} = 0, \tag{4.3.21}$$

pour $q \in [1,k]$.

On en déduit les relations suivantes.

$$q_{2\nu-1}^{(a^\nu)} = q_{2\nu}^{(a^\nu)} = 1, \tag{4.3.22}$$

$$q_{2\nu-1}^{(a^{\nu'})} = q_{2\nu}^{(a^{\nu'})} = 0, \quad \text{pour } \nu' \neq \nu. \tag{4.3.23}$$

L'égalité $q_{2\nu}^{(a^{\nu'})} = 0$ se déduit du fait que le produit de la $a^{\nu-1}-$ième colonne de L^{-1} avec le $a^{\nu'}-$ième rayon de L est égal à 0. D'autre part, le produit de la $(n+2\nu)-$ième colonne de L avec le $a^{\nu'}-$ième rayon de L^{-1} est égal à $q_{2\nu-1}^{(a^{\nu'})} + q_{2\nu}^{(a^{\nu'})} = 0$. Cela démontre (4.3.23). Le produit de la $a^\nu-$ième colonne de L^{-1} avec le $a^{\nu'}-$ième rayon de L est égal à $q_{2\nu-1}^{(a^{\nu'})} + p_\nu^{(a^{\nu'})} = 0$. D'où s'entraîne l'égalité $p_\nu^{(a^{\nu'})} = 0$ pour $\nu \neq \nu'$. Le produit de la $(a^\nu - 1)-$ième colonne de L^{-1} avec le $(a^{\nu'} - 2)-$ième rayon de L est égal à $q_{2\nu'-1}^{(a^\nu-1)} + p_{\nu'}^{(a^\nu-1)} = 0$. Par consequence, on a

$$p_{\nu'}^{(a^\nu-1)} = 0 \ \text{ pour } \ \nu \neq \nu', \tag{4.3.24}$$

$$p_\nu^{(a^\nu-1)} = -q_{2\nu-1}^{(a^\nu-1)} = 1, \ \ p_\nu^{(a^\nu)} = -1,$$

car $p_\nu^{(a^\nu)} + p_\nu^{(a^\nu-1)} = 0$. En plus on voit que

$$q_r^{(a^\nu-1)} = 0, \ \ r \neq 2\nu - 1. \tag{4.3.25}$$

En somme, grâce aux (4.3.20), (4.3.22), (4.3.24),

$$\xi_{a^\nu}(z) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(a^\nu)} + \sum_{r=1}^{2k} q_r^{(a^\nu)} + \sum_{q=1}^{k} p_q^{(a^\nu)} z_q = -1 + 1 + 1 - z_\nu = 1 - z_\nu.$$

D'autre part (4.3.20), (4.3.25), (4.3.24), entraînent

$$\xi_{a^\nu-1}(z) = 1 + 0 - 1 + z_\nu = z_\nu.$$

Quant'à la fonction $\xi_{a^\nu-2}(z)$ il est facile de voir que tout les éléments de la $(a^\nu-2)-$ième colonne de L^{-1} consiste des zéros sauf le $(n+2k+\nu)-$ième élément qui est égal à 1.

On a donc l'égalité

$$M_{0,\gamma}^0(z) = \prod_{i=1}^{k} \Gamma(z_i)^2 \Gamma(1-z_i) \prod_{j \in I_\Lambda} \Gamma(\xi_j(z)) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\pi}{sin\ \pi z_i} \Gamma(z_i) \prod_{j \in I_\Lambda} \Gamma(\xi_j(z)).$$

C.Q.F.D.

Démonstration du Théorème 4.6 On démontre la relation suivante,

$$\begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} =^T \hat{Q} \begin{pmatrix} \xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ \xi^{(k)}(z) \end{pmatrix}.$$

En fait

$${}^t({}^T\mathbf{Q}) \cdot^t ({}^T\mathsf{L}_\Lambda)^{-1} \cdot \ {}^TV^\Lambda \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot^T V^\Lambda \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} = \ {}^T\hat{Q} \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix}$$

qui se déduit du $(4.3.6)^T$ et du $(4.3.13)^T$. D'autre part grâce à la condition $(4.3.17)''$ on a

$$ {}^t({}^T\mathbf{Q})\cdot{}^t({}^T\mathsf{L}_\Lambda)^{-1}\cdot {}^TV^\Lambda \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} ={}^t ({}^T\mathbf{Q})\cdot\mathsf{L}_\Lambda^{-1}\cdot V^\Lambda \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} ={}^T \hat{Q} \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot{}^TG^{-1} \begin{pmatrix} {}^T\xi_{j_1}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi_{j_n}(z) \end{pmatrix}. $$

La dernière égalité s'explique par la relation ${}^t({}^T\mathbf{Q}) ={}^T \hat{Q} \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot{}^TG^{-1}$ et par une consequence directe du (4.3.16),

$$ \mathsf{L}_\Lambda^{-1}\cdot V^\Lambda \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^T\xi_{j_1}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi_{j_n}(z) \end{pmatrix}. $$

Le chaîne des égalités ci-dessus est vrai en vue du (4.3.16) et du (4.3.17),

$$ {}^T\hat{Q} \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot{}^TG^{-1} \begin{pmatrix} {}^T\xi_{j_1}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi_{j_n}(z) \end{pmatrix} ={}^T \hat{Q} \begin{pmatrix} \vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot G^{-1} \begin{pmatrix} {}^T\xi_{j_1}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi_{j_n}(z) \end{pmatrix} $$

$$ ={}^T \hat{Q} \begin{pmatrix} \vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot G^{-1}GV^\Lambda \begin{pmatrix} {}^T\xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi^{(k)}(z) \end{pmatrix} = {}^T\hat{Q}\cdot\hat{Q} \begin{pmatrix} {}^T\xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi^{(k)}(z) \end{pmatrix}. $$

L'égalité,

$$ \begin{pmatrix} \vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & 1 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & 0 \\ 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & 0 & 1 & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & 1 & \cdots & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_1-2} & 0 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tau_2-2} & 0 & \cdots & 1 & \overbrace{\cdots}^{\tau_k-2} & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^T\vec{g}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^T\vec{g}^{(k)} \end{pmatrix}\cdot\ {}^TG^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_1-2} & 1 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_2-2} & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_k-2} & 0 \\ 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_1-2} & 0 & 1 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_2-2} & 1 & \cdots & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_k-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_1-2} & 0 & 0 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_2-2} & 0 & \cdots & 1 & \overbrace{\cdots}^{\tilde\tau_k-2} & 1 \end{pmatrix}, $$

est une conséquence des relations $\tau_\nu = \tilde{\tau}_\nu, 1 \leq \nu \leq k$ mentionnées comme corollaire du (4.3.17)".

Grâce à la condition $rank({}^T\hat{Q}) = n$ celui-là signifie

$$ \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ \vdots \\ 1-z_k \end{pmatrix} = \hat{Q} \begin{pmatrix} {}^T\xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ {}^T\xi^{(k)}(z) \end{pmatrix}. $$

D'une façon symétrique, en supposant que $rank(\hat{Q}) = n$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 - z_1 \\ \vdots \\ 1 - z_k \end{pmatrix} = {}^T\hat{Q} \begin{pmatrix} \xi^{(1)}(z) \\ \vdots \\ \xi^{(k)}(z) \end{pmatrix}.$$

On en déduit directement la relation désirée,

$$\prod_{\nu=1}^{k} \Gamma(z_\nu) = \prod_{\nu=1}^{k} \Gamma(1 - \sum_{q=1}^{k} {}^TQ_q^{(\nu)} \xi^{(q)}(z)) = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} \Gamma(\sum_{q=1}^{k} {}^TQ_q^{(\nu)} \xi^{(q)}(z)) sin\left(\pi \sum_{q=1}^{k} {}^TQ_q^{(\nu)} \xi^{(q)}(z)\right)}.$$

D'ailleurs le lemme 4.7 et la condition $(4.1.17)'$ nous donne

$$\xi_{a^{\nu-1}+j} = {}^Tg_j^{(\nu)} \xi^{(\nu)}, \quad j \in [1, \tau_\nu]$$

qui signifie

$$\prod_{j \in I_\Lambda} \Gamma(\xi_j(z)) = \prod_{\nu=1}^{k} \prod_{j=1}^{\tau_\nu} \Gamma({}^Tg_j^{(\nu)} \xi^{(\nu)}).$$

La formule $(4.3.18)^T$ se démontre d'une façon complètement parallèle. **C.Q.F.D.**

Conjecture Le pair $(G{\cdot}V^\Lambda,\ {}^TG{\cdot}\ {}^TV^\Lambda)$ correspond aux symétries quantique (Q_X)et géométrique $(\mathcal{G}_X)$ de l'IC $X, (4.3.1)$ pourtant le pair $({}^TG \cdot\ {}^TV^\Lambda,\ G \cdot V^\Lambda)$ à celles-ci de l'IC $Y, (4.3.1)^T$ au sens de [7].

En fait, dans le cas $k = 1$, on peut facilement voir la dualité comme suit existe

$$Q_X = (\mathbf{Z}_{\hat{Q}}; G), \mathcal{G}_X = (\mathbf{Z}_{{}^T\hat{Q}};\ {}^TG),$$

$$\mathcal{G}_Y = (\mathbf{Z}_{\hat{Q}}; G), Q_Y = (\mathbf{Z}_{{}^T\hat{Q}};\ {}^TG),$$

avec $|G| = \hat{Q}$ qui se déduit de la condition de Calabi-Yau.

En liaison avec la symétrie de miroir, on considère l'algèbre structurel de l'IC de dimension $n-k$ notée par X et définie par (4.3.1),

$$A_X := \frac{\mathbf{C}[x]}{(f_1 + f_2 - 1, \cdots f_{2k-1} + f_{2k} - 1)\mathbf{C}[x]},$$

et la filtration naturelle sur lui,

$$A_X^j := \{x^\alpha \in A_X; \sum_{q=1}^{k} \langle \alpha, \vec{g}^{(q)} \rangle = j\},$$

avec le polynôme de Poincaré,

$$P_{A_X}(\lambda) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} dim(A_X^j) \lambda^j.$$

D'une manière analogue, on définit les notions correspondantes de l'IC de la même dimension notée par Y et définie par $(4.3.1)^T$,

$$A_Y := \frac{\mathbf{C}[x]}{({}^Tf_1 + {}^Tf_2 - 1, \cdots {}^Tf_{2k-1} + {}^Tf_{2k} - 1)\mathbf{C}[x]},$$

$$A_Y^j := \{x^\alpha \in A_Y; \sum_{q=1}^k \langle \alpha, {}^T\vec{g}^{(q)}\rangle = j\},$$

$$P_{A_Y}(\lambda) = \sum_{j\in \mathbf{Z}_{\geq 0}} dim(A_Y^j)\lambda^j.$$

Alors le résultat classique du [10] nous donne,

$$P_{A_X}(\lambda) = \frac{\prod_{q=1}^k \prod_{\nu=1}^k (1-\lambda^{Q_q^{(\nu)}})}{\prod_{\nu=1}^k \prod_{j=1}^{\tau_\nu}(1-\lambda^{g_j^{(\nu)}})}, P_{A_Y}(\lambda) = \frac{\prod_{q=1}^k \prod_{\nu=1}^k (1-\lambda^{{}^TQ_q^{(\nu)}})}{\prod_{\nu=1}^k \prod_{j=1}^{\tau_\nu}(1-\lambda^{{}^Tg_j^{(\nu)}})}. \tag{4.3.26}$$

En suite on introduit les variables $(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbf{T}^k$ telles que

$$\prod_{\nu=1}^k s_\nu^{{}^TQ_q^{(\nu)}} = t_q, \;\; 1 \leq q \leq k.$$

Grâce à la condition $(4.3.17)''$, cett'équation est toujours resoluble par rapport aux variables $s = s(t)$. On considère la transformée de Mellin inverse de $M^0_{0,\gamma}(z(\xi))$ associée à l'IC (4.3.1),

$$U_\alpha(s) = \int_{\check{\Pi}_\alpha} \frac{\prod_{\nu=1}^k \prod_{j=1}^{\tau_\nu} \Gamma(\,{}^Tg_j^{(\nu)}\xi^{(\nu)}(z))}{\prod_{\nu=1}^k \Gamma(\sum_{q=1}^k \,{}^TQ_q^{(\nu)}\xi^{(q)}(z))} s^{-\mathbf{z}+\mathbf{1}} d\mathbf{z},$$

où $\check{\Pi}_\alpha \subset \mathbf{T}^k$ est un cycle qui évite les lieux singuliers de l'intégrand. Il est facile de voir que

$$U_\alpha(s(t)) = det({}^T\hat{Q})^{-1} \int_{{}^T\hat{Q}^{-1}(\check{\Pi}_\alpha)} \frac{\prod_{\nu=1}^k \prod_{j=1}^{\tau_\nu} \Gamma(\,{}^Tg_j^{(\nu)}\xi^{(\nu)})}{\prod_{\nu=1}^k \Gamma(\sum_{q=1}^k \,{}^TQ_q^{(\nu)}\xi^{(q)})} t_1^{-\xi^{(1)}} \cdots t_k^{-\xi^{(k)}} d\xi^{(1)} \wedge \cdots \wedge d\xi^{(k)}.$$

La transformée de Mellin inverse $U_\alpha(s(t))$ est annulée par le système suivant d'équations différentielles,

$$L_\nu(t_\nu, \vartheta_t)U_\alpha(s(t)) = 0, \;\; 1 \leq \nu \leq k,$$

où

$$L_\nu(t_\nu, \vartheta_t) = \left(\prod_{j=1}^{\tau_\nu} \prod_{r=0}^{{}^Tg_j^{(\nu)}-1} (-{}^Tg_j^{(\nu)}\vartheta_{t_\nu} + r) - t_\nu \prod_{\mu=1}^k \prod_{r=0}^{{}^TQ_\nu^{(\mu)}-1} (\sum_{q=1}^k \,{}^TQ_q^{(\mu)}\vartheta_{t_q} - r) \right), \;\; 1 \leq \nu \leq k.$$

Nous notons par $|\chi(\tilde{X}_\nu)|$ le dégré de l'opérateur $L_\nu(t, \vartheta_t) : |\chi(\tilde{X}_\nu)| = \sum_{\mu=1}^k \,{}^TQ_\nu^{(\mu)} = \sum_{j=1}^{\tau_\nu} \,{}^Tg_j^{(\nu)} = {}^Tg^{(\nu)}_{\tau_\nu+1}$. On définit la restriction de l'opérateur $L_\nu(t, \vartheta_t)$ au tore $\mathbf{T} = \{t \in \mathbf{C}^k; t_i = 0, i \neq \nu\} \backslash \{t_\nu = 0\}$ comme suit,

$$\tilde{L}_\nu(t_\nu, \vartheta_{t_\nu}) := \left(\prod_{j=1}^{\tau_\nu} \prod_{r=0}^{{}^Tg_j^{(\nu)}-1} (-{}^Tg_j^{(\nu)}\vartheta_{t_\nu} + r) - t_\nu \prod_{\mu=1}^k \prod_{r=0}^{{}^TQ_\nu^{(\mu)}-1} (\,{}^TQ_\nu^{(\mu)}\vartheta_{t_\nu} - r) \right).$$

Sur l'espace de dimension $|\chi(\tilde{X}_q)|$ des solutions annulées par $\tilde{L}_q(t_q, \vartheta_{t_q})$, on considère la monodromie $M_q^{(0)} \in GL(|\chi(\tilde{X}_q)|, \mathbf{C})$ (resp. $M_q^{(\infty)} \in GL(|\chi(\tilde{X}_q)|, \mathbf{C})$) autour du point $t_q = 0$ (resp. $t_q = \infty$). Alors l'expression ci-dessus de l'opérateur $\tilde{L}_\nu(t_\nu, \vartheta_{t_\nu})$ entraîne,

$$det(M_q^{(\infty)} - \lambda_q \cdot id_{|\chi(\tilde{X}_q)|}) = \prod_{\nu=1}^k (1-\lambda_q^{{}^TQ_q^{(\nu)}}), det(M_q^{(0)} - \lambda_q \cdot id_{|\chi(\tilde{X}_q)|}) = \prod_{j=1}^{\tau_q} (1-\lambda_q^{{}^Tg_j^{(q)}}).$$

Par conséquence la fonction rationelle définie par

$$M_X(\lambda_1,\cdots\lambda_k) := \prod_{q=1}^{k} \frac{det(M_q^{(\infty)} - \lambda_q \cdot id_{|\chi(\tilde{X}_q)|})}{det(M_q^{(0)} - \lambda_q \cdot id_{|\chi(\tilde{X}_q)|})}$$

s'exprime

$$M_X(\lambda_1,\cdots\lambda_k) = \frac{\prod_{q=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{k}(1-\lambda_q^{{}^T Q_q^{(\nu)}})}{\prod_{q=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_q}(1-\lambda_q^{{}^T g_j^{(q)}})}. \tag{4.3.27}$$

Pour la fonction rationelle $M_Y(\lambda_1,\cdots\lambda_k)$ définie d'une manère analogue à la fonction $M_X(\lambda_1,\cdots\lambda_k)$, on a

$$M_Y(\lambda_1,\cdots\lambda_k) = \frac{\prod_{q=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{k}(1-\lambda_q^{Q_q^{(\nu)}})}{\prod_{q=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_q}(1-\lambda_q^{g_j^{(q)}})}.$$

Soit $\bar{Y}$ la compactification de l'IC $Y \subset \mathbf{T}^n$ dans le produit des espaces projectifs quasihomogègenes $\mathbf{P} := \mathbf{P}^{(\tau_1)}_{({}^T g_1^{(1)},\ldots,{}^T g_{\tau_1+1}^{(1)})} \times \ldots \times \mathbf{P}^{(\tau_k)}_{({}^T g_1^{(k)},\ldots,{}^T g_{\tau_k+1}^{(k)})}$. On peut définir le faisceau cohérent $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\zeta)$, $\zeta = (\zeta_1,\cdots,\zeta_k)$ dont la section sur un ouvert $U_I = \{x \in \mathbf{C}^n; x_i \neq 0, i \in I\}$ est donnée par

$$\Gamma(U_I, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\zeta)) := \{x^\alpha; \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathbf{Z}^n, \alpha_i \geq 0 \; pour \; i \notin I, \langle {}^T g^{(q)}, \alpha\rangle = \zeta_q, 1 \leq q \leq k\}.$$

On définit le faisceau cohérent $\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)$ par la section sur l'ouvert U_I,

$$\Gamma(U_I, \mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)) := \{x^\alpha \in A_Y; \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathbf{Z}^n, \alpha_i \geq 0 \;\; pour \;\; i \notin I, \langle {}^T g^{(q)}, \alpha\rangle = \zeta_q, 1 \leq q \leq k\}.$$

Pour lui on introduit le caractéristique d'Euler,

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)) := \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i dim H^i(\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)).$$

D'après [10], [13] le polynôme de Poincaré du caractéristique d'Euler,

$$P\mathcal{O}_{\bar{Y}}(t_1,\cdots,t_k) := \sum_{\zeta \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^k} \chi(\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)) t_1^{\zeta_1}\cdots t_k^{\zeta_k}$$

admet une expression comme suit,

$$P\mathcal{O}_{\bar{Y}}(t_1,\cdots,t_k) = \frac{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{q=1}^{k}(1-t_\nu^{{}^T Q_q^{(\nu)}})}{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_\nu}(1-t_\nu^{{}^T g_j^{(\nu)}})}. \tag{4.3.28}$$

Pour le faisceau $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\zeta)$ défini d'une façon analogue au $\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\zeta)$, on définit

$$P\mathcal{O}_{\bar{X}}(t_1,\cdots,t_k) := \sum_{\zeta \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^k} \chi(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\zeta)) t_1^{\zeta_1}\cdots t_k^{\zeta_k}.$$

Pour celui-là on a,

$$P\mathcal{O}_{\bar{X}}(t_1,\cdots,t_k) = \frac{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{q=1}^{k}(1-t_\nu^{Q_q^{(\nu)}})}{\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{j=1}^{\tau_\nu}(1-t_\nu^{g_j^{(\nu)}})}.$$

Si on compare (4.3.26), (4.3.27) et (4.3.28) on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 4.8 *Pour les IC X et Y définies par* (4.3.1) *et* $(4.3.1)^T$ *on a la relation suivante,*

$$M_X(\lambda, \cdots, \lambda) = P\mathcal{O}_{\bar{Y}}(\lambda, \cdots, \lambda) = P_{A_Y}(\lambda),$$

$$M_Y(\lambda, \cdots, \lambda) = P\mathcal{O}_{\bar{X}}(\lambda, \cdots, \lambda) = P_{A_X}(\lambda).$$

Exemple 4.3.1, La variété de Schimmrigk Comme exemple simple, mais peu trivial, on regarde l'exemple suivant étudié dans [7],

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{3} x_i^3, f_2(x) = x_1x_2x_3 + 1,$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i x_{i+3}^3, f_4(x) = x_0x_4x_5x_6 + 1.$$

Alors on a les matrices ci-dessous,

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 2/9 & -1/9 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & -1/9 & 2/9 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & -1/27 & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & 0 & -1/9 & 1/9 & 2/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/9 & \frac{2}{27} & -1/27 & \frac{2}{27} & 0 & -1/9 & 1/9 & -1/9 & 2/9 & -1/9 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/9 & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & -1/27 & 0 & -1/9 & 1/9 & -1/9 & -1/9 & 2/9 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la construction $(4.3.4)^T$ basée sur la matrice transposée ${}^t(\mathsf{L})$ il est facile de voir que ${}^T f_\ell(x) = f_\ell(x), 1 \leq \ell \leq 4$. La matrice ${}^T\mathsf{L}^{-1} = \mathsf{L}^{-1}$ nous donne les fonctions linéaires

$$\xi^{(1)} = -\frac{1}{3}(z_1 - 1) + \frac{1}{9}(z_2 - 1), \xi^{(2)} = -\frac{1}{3}(z_2 - 1).$$

On en déduit facilement que pour $f(x)$ ainsi que ${}^T f(x)$ on a la transformée de Mellin de la période,

$$M^0_{0,\gamma}(z) = \Gamma(-\frac{1}{3}(z_1 - 1) + \frac{1}{9}(z_2 - 1))^3 \Gamma(-\frac{1}{3}(z_2 - 1))^4 \Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \frac{\Gamma(\xi^{(1)})^3 \Gamma(\xi^{(2)})^4}{\Gamma(3\xi^{(1)} + \xi^{(2)})\Gamma(3\xi^{(2)})},$$

à des fonctions $27-$périodiques près.

D'une manière analogue, on peut considérer l'IC,

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^n, f_2(x) = x_1 x_2 \cdots x_n + 1,$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+n}^n, f_4(x) = x_0 x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} + 1,$$

dont l'intégrale fibre est exprimée par

$$M^0_{0,\gamma}(z) = \frac{\Gamma(\xi^{(1)})^n \Gamma(\xi^{(2)})^{n+1}}{\Gamma(n\xi^{(1)} + \xi^{(2)})\Gamma(n\xi^{(2)})},$$

à des fonctions n^n-périodiques près.

Il faut remarquer que notre matrice L satisfait une condition intéressante ci-dessous.

La condition de carré magique Pour chaque $q \in [1, k]$ fixé, on peut trouver une application univalente $\sigma : b \in I_\Lambda \to \{1, \cdots, n\}$ telle que

$$p_q^b = w_{\sigma(b)}^{a^q}, \text{pour tout } b \in I_\Lambda.$$

Cette condition joue un rôle central lors de l'interpretation de la dualité bizarre d'Arnol'd sur l'échange des nombres de Gabrielov et de Dolgachev de point de vue de la symétrie de miroir [17].

Exemple 4.3.2 Nous considérons un exemple d'une hypersurface étudié dans [7]. Avec les notations ci-dessus, nous avons les données suivantes.

$$f_1(x) = x_1^7 + x_2^7 x_4 + x_3^7 x_5 + x_4^3 + x_5^3, \quad f_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{49} & -1/49 & -1/49 & -\frac{2}{49} & -\frac{2}{49} & 0 & 1/7 & -1/7 \\ -\frac{2}{147} & \frac{19}{147} & -\frac{2}{147} & -\frac{11}{147} & -\frac{4}{147} & 0 & 2/21 & -2/21 \\ -\frac{2}{147} & -\frac{2}{147} & \frac{19}{147} & -\frac{4}{147} & -\frac{11}{147} & 0 & 2/21 & -2/21 \\ -1/21 & -1/21 & -1/21 & \frac{5}{21} & -2/21 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/21 & -1/21 & -1/21 & -2/21 & \frac{5}{21} & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 2/7 & 2/7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/7 & -1/7 & -1/7 & -2/7 & -2/7 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On a donc la transformée de Mellin de la période associée à l'IC $\{x \in (\mathbf{C}^\times)^5; f_1(x) + s_1 = 0, f_2(x) + 1 = 0\}$ exprimée ci-dessous à des 7−fonctions périodiques près,

$$M^0_{0,\gamma}(z) = \Gamma(-\frac{1}{7}(z_1 - 1))^3 \Gamma(-\frac{2}{7}(z_1 - 1))^2 \Gamma(z_1) = \frac{\Gamma(\xi^{(1)})^3 \Gamma(2\xi^{(1)})^2}{\Gamma(7\xi^{(1)})}.$$

D'après la construction $(4.3.4)^T$ on voit que

$$^T f_1(x) = x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 + x_2 x_4^3 + x_3 x_5^3, \quad ^T f_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

On a alors la transformée de Mellin de la période associée à l'IC $\{x \in (\mathbf{C}^\times)^5;\ ^T f_1(x) + s_1 = 0,\ ^T f_2(x) + 1 = 0\}$ exprimée ci-dessous à des 147−fonctions périodiques près,

$$M^0_{0,\gamma}(z) = \Gamma(-\frac{1}{7}(z_1 - 1))\Gamma(-\frac{2}{21}(z_1 - 1))^2 \Gamma(-\frac{1}{3}(z_1 - 1))^2 \Gamma(z_1) = \frac{\Gamma(3\xi^{(1)})\Gamma(2\xi^{(1)})^2 \Gamma(7\xi^{(1)})^2}{\Gamma(21\xi^{(1)})}.$$

References

[1] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I,* Math. Ann. **213 (1)**, (1975), pp.1-32.

[2] P.Appell and J.Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques,* Paris, 1926.

[3] D.Barlet et H.M.Maire *Asymptotiques des intégrales fibres,* Ann. Inst.Fourier **43**,no.5, (1993), 1267-1299.

[4] V.V.Batyrev *Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori ,* Duke Math.J. **69**,no.2, (1993), 349-409.

[5] V.V.Batyrev et D. van Straten *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toric varieties ,* Comm.Math.Phys. **168**,(1995), 493-533.

[6] V.V.Batyrev et D.Cox *On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties ,* Duke Math.J. **75**,no.2, (1994), 293-338.

[7] P.Berglund,Ph.Candelas,X.de la Ossa, A.Font,T.Hübsch, D.Jancic et F.Quevedo *Period of a Calabi-Yau variety and Landau-Ginzburg potential ,* Nuclear Physics **B 419**, (1994), pp.352.

[8] P.Deligne, *Théorie de Hodge II*, Publication IHES **40**, (1972), pp. 5- 57.

[9] A.Dimca, *Residues and cohomology of complete intersections* Duke Math.J. **74**, no.1, (1995), pp. 89- 100.

[10] I.Dolgachev, *Weighted projective varieties ,* Lecture Notes in Math. **956**, pp. 34- 71. Springer Verlag, 1982.

[11] V.Danilov, A.G.Khovanski, *Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers ,* Math.USSR Izv. **29** (1987),No.2, pp.279-298.

[12] A.Givental', *A mirror theorem for toric complete intersections ,*Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), pp.141–175, Progr. Math., 160, Birkäuser Boston, Boston, MA, 1998

[13] V.V.Golyshev, *Riemann-Roch Variations ,* Izvestia Math. **65** (2001), no. 5, pp.853-887.

[14] I.M.Gel'fand, M.M.Kapranov, A.V.Zelevinsky, *Hypergeometric functions and toric varieties ,* Functional analysis and its appl. **23**, no.1, (1989), pp. 12-26.

[15] M.Kapranov, *A characterization of $A-$discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map ,* Math. Ann.**290**,(1991),pp.277-285.

[16] A.G.Khovanski, *Newton polyhedra and the genus of complete intersections,* Functional Anal.Appl. **12** (1978), pp. 51- 61.

[17] M.Kobayashi, *Duality of weights, Mirror symmetry and Arnold's strange duality,* alg-geom/9502004.

[18] F.Loeser, C.Sabbah, *Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes ,* Comment.Math.Helvetici **66** (1991), pp. 458- 503.

[19] A. Mavlyutov, *Cohomology of complete intersections in toric varieties,* Pacific J.Math. **191**, (1999), No.1, 133-144.

[20] I.Nörlund, *Hypergeometric functions,* Acta Math. **94**, (1955/56), pp.289-349.

[21] M.Oka, *Principal zeta function of non-degenerate complete intersection singularity,* J.Fac.Sci.Univ.Tokyo **37**, (1990), pp.11-32.

[22] M.Passare,A.K.Tsikh et O.N.Zhdanov *A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals* , in Aspects of mathematics **26**, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, Vieweg, 1994.

[23] M.Passare, T.Sadykov, A.G.Tsikh, *Nonconfluent hypergeometric functions in several variables and their singularities,* preprint Max Planck Institut für Mathematik, (2000).

[24] F.Pham, *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau,* Gauthier-Villars, 1967.

[25] C.Sabbah, *Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module -,* Compositio Math. **62** (1987), p p. 283- 328.

[26] C.Sabbah, *Proximité évanescente, II. Equations fonctionelles pour plusieurs fonctions analytiques* , Compositio Math. **64** (1987), pp. 213- 241.

[27] C.Sabbah, *Lieu des pôles d'un système holonome d'équations aux différences finies* , Bull.Soc.Math.France **120** (1992), pp. 371- 396.

[28] T.Sadykov, *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type* , preprint, to appear in Math.Scand.

[29] S.Tanabé, *Transformée de Mellin des intégrales- fibres associées aux singularités isolées d'intersection complète quasihomogènes* , Compositio Math. **130**(2002), no.2, pp. 119-160..

[30] S.Tanabé, *Invariant of the hypergeometric group associated to the quantum cohomology of the projective space.* preprint, math.AG/0201090.

[31] S.Tanabé *Hodge structure of fibre integrals associated to the affine hypersurface in a torus,* preprint, math.AG/0206126.

[32] T.Terasoma, *Infinitesimal variation of Hodge structures and the weak global Torelli theorem for complete intersections* , Annals of Math. **132** , (1990),pp. 213-235.

[33] T.Terasoma, *Cohomological Radon transform and mixed twisted Ehrhart polynomial,* Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 999 (1997), pp. 44–48.

[34] T.Terasoma, *Hodge structure of Gel'fand-Kapranov-Zelevinski hypergeometric integral and twisted Ehrhart polynomial,* Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), pp.453–476, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[35] T.Terasoma, *On compactificationi of total fibered space,* manuscrit, 2002.

[36] A.N.Varchenko, *Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology* , Math.USSR Izvestiya **18** (1982),No.3, pp. 471- 512.

[37] V.A.Vassiliev, *Ramified integrals, singularities and Lacunas,*Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

Indepent University of Moscow
Bol'shoj Vlasievskij pereulok 11,
Moscow, 121002,
Russia
E-mails: tanabe@mccme.ru,
tanabe@mpim-bonn.mpg.de