

Variétés stables de codimension un pour une classe  
d'équations paraboliques semilinéaires  
presque-périodiques sur  $\mathbb{R}^N$ .

par

Pierre-A. Vuillermot

Max-Planck-Institut  
für Mathematik  
Gottfried-Claren-Straße 26  
D-5300 Bonn 3

Federal Republic of Germany

MPI/90-27

Note soumise aux Comptes Rendus de  
l'Académie des Sciences de Paris.

Rubriques:           Analyse Mathématique et Equations aux Dérivées Partielles.  
Headings:           Mathematical Analysis and Partial Differential Equations.

Variétés stables de codimension un pour une classe d'équations  
paraboliques semilinéaires presque-périodiques sur  $\mathbb{R}^N$ .

par

Pierre-A. Vuillermot

Résumé.   Nous présentons et discutons deux théorèmes nouveaux concernant l'existence de solutions classiques d'équations aux dérivées partielles paraboliques semilinéaires presque-périodiques du type réaction-diffusion sur  $\mathbb{R}^N$ . Nous démontrons en particulier que chaque solution que nous construisons se stabilise exponentiellement rapidement vers un attracteur presque-périodique suivant un mécanisme dépendant fortement de la structure du coefficient presque-périodique des équations. Par exemple, si la primitive du coefficient presque-périodique est elle-même presque-périodique, alors le phénomène de stabilisation est entièrement contrôlé par le processus de diffusion. Si au contraire la moyenne du coefficient presque-périodique est différente de zero, alors le phénomène de stabilisation est contrôlé essentiellement par le processus de réaction. La classe d'équations considérée ici contient en particulier les équations dites de Fisher de la génétique des populations.

\* \* \*

Codimension—One Stable Manifolds for a Class of  
Almost—Periodic Semilinear Parabolic Equations on  $\mathbb{R}^N$ .

Abstract. We present and discuss two new theorems concerning the existence of classical solutions to almost—periodic semilinear parabolic partial differential equations of reaction—diffusion type on  $\mathbb{R}^N$ . We prove in particular that each one of those solutions stabilizes exponentially rapidly around an almost—periodic attractor according to a mechanism whose nature depends on the structure of the almost—periodic coefficient in the equations. For example, if the primitive of the almost—periodic coefficient is itself almost—periodic, then the above stabilization phenomenon is entirely governed by the diffusion process. If, however, the average of the almost—periodic coefficient is different from zero, then the stabilization phenomenon is primarily governed by the reaction process. The class of equations investigated here contains in particular Fisher's type equations of population genetics.

\* \* \*

La discussion d'un grand nombre de questions concernant la migration et la sélection génétiques se réduit fréquemment à l'analyse du comportement asymptotique de certaines solutions classiques de problèmes paraboliques de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + s(t)g(u(x, t)), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \text{Ran}(u) \subseteq (u_0, u_1) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}}(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \quad (1)$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$  [1]. Dans les relations (1), nous notons  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^N$  à frontière suffisamment régulière  $\partial\Omega$ , où  $N \in [2, \infty) \cap \mathbb{N}^+$ . Nous écrivons  $s: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  pour la restriction à  $\mathbb{R}^+$  d'une fonction presque-périodique au sens de Bohr sur  $\mathbb{R}$ , que nous notons également  $s$ . Nous notons  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction suffisamment lisse possédant deux zéros  $u_0 < u_1$  tels que  $g'(u_0) > 0$ ,  $g'(u_1) < 0$  et  $g(u) > 0$  pour chaque  $u \in (u_0, u_1)$ . Finalement,  $\text{Ran}(u)$  désigne le domaine des valeurs de  $u$  et  $\mathfrak{n}$  le vecteur unité normal extérieur à  $\partial\Omega$ . Dans un article à paraître [2] dont nous avons annoncé les résultats dans [3], nous avons montré que si  $t \rightarrow \int_0^t d\xi s(\xi) = o(1)$  lorsque  $|t| \rightarrow \infty$ , et si

$$\lim_{u \rightarrow u_0} G(u) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{u \rightarrow u_1} G(u) = +\infty \quad (3)$$

où  $G$  désigne une primitive quelconque de  $1/g$  sur l'intervalle ouvert  $(u_0, u_1)$ , alors le problème (1) possède les solutions classiques presque-périodiques indépendantes de  $x$

$$\hat{u}(t) = G^{-1} \left\{ \int_0^t d\xi s(\xi) + G(\hat{v}) \right\} \quad (4)$$

pour chaque  $\hat{v} = \hat{u}(0) \in (u_0, u_1)$ . Dans la relation (4) nous avons noté  $G^{-1}$  l'inverse monotone de  $G$ . Nous avons également montré que chaque exposant de Fourier de  $\hat{u}$  est une combinaison linéaire à coefficients entiers des exposants de Fourier de  $s$ , et que les fonctions  $\hat{u}$  restent uniformément éloignées de  $u_0$  et  $u_1$ . Finalement, étant donnée une solution classique du problème (1) existant globalement en  $t$  (cf. la définition 1 ci-dessous), et en supposant de plus que  $s$  soit hõlderienne sur  $\mathbb{R}^+$ , nous avons prouvé qu'il existe toujours une fonction  $\hat{u}$  de la forme (4), dépendant en général de  $u$ , vers laquelle se stabilise  $u$  relativement à une norme de Sobolev convenablement choisie. Dans ces travaux-là, nous n'avons néanmoins jamais considéré le problème de la stabilité de la famille à un paramètre  $\{\hat{u}\}_{\hat{v} \in (u_0, u_1)}$  déterminée par la relation (4). En particulier, étant donné  $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{v} \in (u_0, u_1)}$ , rien n'empêche a priori qu'il n'existe aucune solution classique de (1) se stabilisant vers  $\hat{u}$ . Dans cette note nous présentons et discutons tout d'abord un résultat montrant qu'il n'en est précisément rien: pour n'importe quel  $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{v} \in (u_0, u_1)}$ , il existe toujours une variété lisse de codimension un de solutions classiques du problème (1) se stabilisant exponentiellement vers  $\hat{u}$ . Dans le but de donner une formulation précise de ce résultat, notons  $\mathcal{S}^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions  $z$  telles que  $(x, t) \longrightarrow \partial_t^\gamma D^\alpha z(x, t) \in \mathcal{S}(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  et  $\gamma \in \mathbb{N}$  satisfont à la relation  $\sum_{j=1}^N \alpha_j + 2\gamma \leq 2$ . De façon similaire, soit  $\mathcal{S}^{1,0}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions  $z$  telles que  $D^\alpha z \in \mathcal{S}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  pour chaque  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  satisfaisant à  $\sum_{j=1}^N \alpha_j \leq 1$ . Finalement,

fixons  $p \in (\mathbb{N}, \infty)$ . Dans la suite, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1. Nous appelons solution classique du problème (1) toute fonction  $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{1,0}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  satisfaisant en outre aux conditions suivantes:

(C<sub>1</sub>) Il existe  $c \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$  telle que  $|u(x,t) - u(x,t')| \leq c(x)|t - t'|$  pour chaque  $x \in \Omega$  et chaque  $t, t' \in \mathbb{R}^+$ .

(C<sub>2</sub>)  $x \longrightarrow u(x,t) \in \mathcal{C}^{(2)}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  pour chaque  $t \in \mathbb{R}^+$ .

(C<sub>3</sub>)  $(x,t) \longrightarrow u_t(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et  $t \longrightarrow u_t(x,t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  uniformément en  $x \in \overline{\Omega}$ .

(C<sub>4</sub>)  $u$  satisfait aux relations du problème (1) identiquement.

Soit  $\mathbb{R}_B$  la compactification de Bohr de la droite réelle munie de sa topologie usuelle [4]. Conformément à l'usage nous identifions une fonction  $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  presque-périodique au sens de Bohr à son prolongement unique uniformément continu sur  $\mathbb{R}_B$ , soit  $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_B, \mathbb{R})$ . Nous notons encore  $H^{2,p}(\mathbb{C})$  l'espace de Sobolev usuel de fonctions complexes sur  $\Omega$  et  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{C}) = \{z \in H^{2,p}(\mathbb{C}) : \frac{\partial z}{\partial \bar{z}}(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ . Soit  $\Delta_{\mathcal{N}}$  la réalisation de l'opérateur de Laplace sur le domaine  $\text{Dom}(\Delta_{\mathcal{N}}) = \{z \in H_{\mathcal{N}}^{4,p}(\mathbb{C}) : \Delta z \in H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{C})\}$  et notons  $\lambda_1$  sa plus grande valeur propre négative. Finalement, posons  $\text{Dom}_{\mathbb{R}}(\Delta_{\mathcal{N}}) = \{z \in H_{\mathcal{N}}^{4,p}(\mathbb{R}) : \Delta z \in H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})\}$ , où  $H_{\mathcal{N}}^{4,p}(\mathbb{R})$  et  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})$  sont les composantes réelles de  $H_{\mathcal{N}}^{4,p}(\mathbb{C})$  et  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{C})$ , respectivement.

Théorème 1. Choisissons  $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_B, \mathbb{R})$  telle que  $t \longrightarrow \int_0^t d\xi s(\xi) = 0(1)$  lorsque  $|t| \longrightarrow \infty$ . Supposons en outre que  $s$  soit h"olderienne sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $g \in \mathcal{C}^{(5)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et supposons qu'il existe  $u_{0,1} \in \mathbb{R}$  tels que  $g(u_0) = g(u_1) = 0$ ,  $g(u) > 0$  pour chaque  $u \in (u_0, u_1)$  et  $g'(u_0) > 0$ ,  $g'(u_1) < 0$ . Finalement, supposons que les relations (2) et (3) soient satisfaites et fixons  $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{u} \in (u_0, u_1)}$  de la forme (4). Alors il existe  $\hat{\varepsilon}_0 \in (0, \infty)$ ,  $\hat{k}_0 \in [1, \infty)$ , un sous-espace  $M \subset H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})$  de codimension un et, pour chaque  $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_0)$ , une boule ouverte  $\mathcal{N}_{(2\hat{k}_0)^{-1}\varepsilon}$  de rayon  $(2\hat{k}_0)^{-1}\varepsilon$  centrée à l'origine de  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})$  tels que les assertions suivantes soient valables.

(A<sub>1</sub>) Pour chaque  $\eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_0)^{-1}\varepsilon} \cap M \cap \text{Dom}_{\mathbb{R}}(\Delta_{\mathcal{N}})$ , il existe une solution classique  $(x, t) \longrightarrow u(x, t, \eta)$  du probl"eme (1). De plus, si  $\eta_1 \neq \eta_2$  alors  $u(\cdot, \cdot, \eta_1)$  n'est pas identiquement "egale à  $u(\cdot, \cdot, \eta_2)$ .

(A<sub>2</sub>) Il existe des constantes positives  $c_{1,2}$  d"ependant seulement de  $N$ , de  $p$  et de la g"eom"etrie de  $\Omega$ , telles que les in"egalit"es

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t, \eta) - \hat{u}(t)| \leq c_1 \varepsilon \exp[\lambda_1 t] \quad (5)$$

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u(x, t, \eta)| \leq c_2 \varepsilon \exp[\lambda_1 t] \quad (6)$$

soient valables pour chaque  $\eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_0)^{-1}\varepsilon} \cap M \cap \text{Dom}_{\mathbb{R}}(\Delta_{\mathcal{N}})$  et chaque  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . De plus, pour ces m"emes  $\eta$ ,

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} |x - y|^{-\beta} |u(x, t, \eta) - u(y, t, \eta)| \leq c_1 \varepsilon \exp[\lambda_1 t] \quad (7)$$

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} |x - y|^{-\beta} |\nabla u(x, t, \eta) - \nabla u(y, t, \eta)| \leq c_1 \varepsilon \exp[\lambda_1 t] \quad (8)$$

pour chaque  $t \in \mathbb{R}_0^+$  et chaque  $\beta \in (0, 1 - p^{-1}N]$ .

Idée de la démonstration. Nous transformons le problème (1) en un système dynamique approprié sur  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})$ , pour lequel nous construisons alors une variété stable locale de codimension un au voisinage de  $\hat{u}$  en nous inspirant des méthodes développées dans [5], [6] et [7] pour l'analyse de certains problèmes hyperboliques. ■

La difficulté principale de la démonstration du théorème 1 réside dans le fait que les équations d'évolution sur  $H_{\mathcal{N}}^{2,p}(\mathbb{R})$  associées au problème (1) sont essentiellement non autonomes [8].

Remarques. (1) Puisque les solutions  $u(\cdot, \cdot, \eta)$  du théorème 1 se stabilisent exponentiellement rapidement vers  $\hat{u}$ , et puisque par ailleurs toute solution du problème (1) se stabilise vers un  $\hat{u}$  de la forme (4) en vertu des résultats de [2] et [3], il est tentant de conclure que toute solution du problème (1) se stabilise exponentiellement rapidement vers un  $\hat{u} \in \{\hat{u}\}_{\hat{u} \in (u_0, u_1)}$ . Dans [9], nous montrerons en fait qu'il n'en est rien: ces processus de stabilisation se développent généralement polynomialement rapidement. L'explication de ce phénomène réside dans le fait qu'il existe aussi une variété du centre de dimension un associée au problème (1), puisque zéro est valeur propre de  $\Delta_{\mathcal{N}}$ .



(2) Il est possible de prouver le théorème 1 en choisissant plus généralement  $\eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_0)^{-1}\varepsilon} \cap M$ , à condition de remplacer la continuité de Lipschitz de la condition  $(C_1)$  par la continuité de Hölder d'exposant  $\theta \in (0,1)$  sur tout intervalle de  $\mathbb{R}^+$  situé à une distance positive de l'origine [8].

Bien que le processus de diffusion soit à l'origine du phénomène de stabilisation décrit dans le théorème 1 en vertu des relations (5) - (8), la situation devient essentiellement différente lorsque la moyenne de  $s$  est différente de zéro. Nous notons cette moyenne

$$\mu_B(s) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \ell^{-1} \int_0^\ell d\xi s(\xi). \text{ Notre second résultat est alors le suivant.}$$

Théorème 2. Soit  $s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_B, \mathbb{R})$  telle que  $\mu_B(s) \neq 0$  et supposons en outre que  $t \longrightarrow \int_0^t d\xi \hat{s}(\xi) = o(1)$  lorsque  $|t| \longrightarrow \infty$ , où  $\hat{s} = s - \mu_B(s)$ . Supposons de plus que  $s$  soit hõlderienne sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $g$  satisfasse aux mèmes hypothèses que précédemment. Alors il existe  $\hat{\varepsilon}_1 \in (0, \infty)$ ,  $\hat{k}_1 \in [1, \infty)$  et, pour chaque  $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_1)$ , une boule ouverte  $\mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}$  de rayon  $(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon$  centrée à l'origine de  $H^{2,p}(\mathbb{R})$  tels que les assertions suivantes soient valables.

(A<sub>3</sub>) Si  $\mu_B(s) < 0$ , alors pour chaque  $\eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}^+ = \left\{ \eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon} : \eta > 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \right\}$ , il existe une solution classique  $(x,t) \longrightarrow u(x,t,\eta)$  du problème (1). De plus, si  $\eta_1 \neq \eta_2$  alors  $u(\cdot, \cdot, \eta_1)$  n'est pas identiquement égale à  $u(\cdot, \cdot, \eta_2)$ . Finalement, il existe des constantes positives  $c_{3,4}$  dépendant de  $N$ , de  $p$  et de la géométrie de  $\Omega$ , telles que les inégalités

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t, \eta) - u_0| \leq c_3 \varepsilon \exp [g'(u_0) \mu_B(s) t] \quad (9)$$

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u(x, t, \eta)| \leq c_4 \varepsilon \exp [g'(u_0) \mu_B(s) t] \quad (10)$$

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} |x - y|^{-\beta} |u(x, t, \eta) - u(y, t, \eta)| \leq c_3 \varepsilon \exp [g'(u_0) \mu_B(s) t] \quad (11)$$

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} |x - y|^{-\beta} |\nabla u(x, t, \eta) - \nabla u(y, t, \eta)| \leq c_4 \varepsilon \exp [g'(u_0) \mu_B(s) t] \quad (12)$$

soient valables pour chaque  $\eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}^+$ , chaque  $t \in \mathbb{R}_0^+$  et chaque  $\beta \in (0, 1 - p^{-1}N]$ .

(A<sub>4</sub>) La même conclusion subsiste si  $\mu_B(s) > 0$ , à condition de remplacer  $\mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}^+$

par  $\mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}^- = \left\{ \eta \in \mathcal{N}_{(2\hat{k}_1)^{-1}\varepsilon}^- : \eta < 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \right\}$  et  $u_0$  par  $u_1$  dans les relations (9) - (12).

Le théorème 2 se démontre par une méthode semblable à celle utilisée dans la démonstration du théorème 1.

Remarques. (1) Nous constatons que ce sont ici les zéros  $u_0$  et  $u_1$  qui jouent le rôle d'attracteurs et que les processus de stabilisation correspondants se développent exponentiellement rapidement à un taux déterminé par  $g'(u_0)\mu_B(s)$  et  $g'(u_1)\mu_B(s)$ , respectivement. Ces processus de stabilisation sont donc contrôlés essentiellement par le

processus de réaction. En particulier, la nature du spectre de  $\Delta_{\mathcal{M}}$  ne joue aucun rôle dans le théorème 2.

(2) Il est facile de vérifier que les ensembles  $\mathcal{M}^{\pm} (2k_1)^{-1}_{\varepsilon}$  sont des ouverts non vides de  $H^{2,p}(\mathbb{R})$ . Ce sont donc ces ensembles-là qui jouent le rôle de variétés stables dans le théorème 2.

(3) Les théorèmes 1 et 2 s'appliquent en particulier aux équations dites de Fisher en génétique des populations, avec par exemple  $g(u) = u(1-u)(\alpha u + (1-\alpha)(1-u))$  où  $\alpha \in (0,1)$ . Nous renvoyons le lecteur à [8] pour la discussion d'autres exemples importants.

(4) Nous ne savons pas si nos résultats subsistent lorsque l'hypothèse  $g \in \mathcal{C}^{(5)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$  est remplacée par une condition de différentiabilité plus faible.

#### Références bibliographiques.

- [1] P.C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing systems*. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 28. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979.
- [2] P.A. Vuillermot, *Almost-Periodic Attractors for a Class of Nonautonomous Reaction-Diffusion Equations on  $\mathbb{R}^N$* , I. Global Stabilization Processes. *J. Diff. Equations*, 1991 (sous presse).
- [3] P.A. Vuillermot, *Attracteurs presque-périodiques pour une classe d'équations paraboliques nonlinéaires du type réaction-diffusion sur  $\mathbb{R}^N$* . *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 1990 (soumis).

- [4] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, New York: Wiley 1960.
- [5] B. Scarpellini, P.A. Vuillermot, Smooth Manifolds for Semilinear Wave Equations on  $\mathbb{R}^2$  : On the Existence of Almost-Periodic Breathers. J. Diff. Equations, 77, 1, 1989, p. 123–166.
- [6] P.A. Vuillermot, Quasiperiodic Soliton Solutions to Nonlinear Klein–Gordon Equations on  $\mathbb{R}^2$  . Math. Z. 203, 2, 1990, p. 235–253.
- [7] P.A. Vuillermot, Periodic Soliton Solutions to Nonlinear Klein–Gordon Equations on  $\mathbb{R}^2$  . Differential and Integral Equations 3, 3, 1990, p. 541–570.
- [8] P.A. Vuillermot, Almost-Periodic Attractors for a class of Nonautonomous Reaction–Diffusion Equations on  $\mathbb{R}^N$  , II. Codimension–One Stable Manifolds. J. AMS, 1991 (à paraître).
- [9] P.A. Vuillermot, Almost-Periodic Attractors for a Class of Nonautonomous Reaction–Diffusion Equations on  $\mathbb{R}^N$  , III. Center Curves and Reduced Dynamics, en préparation.

\* \* \* \*

Adresse postale de l'auteur:

Max–Planck–Institut für Mathematik  
Gottfried–Claren–Strasse 26  
D – 5300 Bonn 3 (R.F.A.)

Numéros de téléphone:

0049/228/402/224 (Bureau)  
0049/228/402/1 (Central)

Adresse pour l'envoi  
des épreuves:

Comme ci–dessus.

Telefax:

0049/228/402/277

Affiliations officielles pour  
la fin de la Note:

Max–Planck–Institut für Mathematik  
Gottfried–Claren–Str. 26  
D – 5300 Bonn 3 (R.F.A.)

The University of Texas  
Dept. of Mathematics  
Arlington, Tx. 76019 (USA)