84 1

Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen

von

Robert Sczech

SONDERFORSCHUNGSBEREICH 40

THEORETISCHE MATHEMATIK

UNIVERSITÄT BONN

UND

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BONN

Dedekindsummen mit

elliptischen Funktionen

von

Robert Sczech

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Gottfried Claren Str.26
5300 Bonn 3

MPI/SFB 84-1

Dem Andenken meiner Mutter
Ruth Sczech (1922-1983)

§1.1 Die klassischen Dedekind-Summen s(a,c), für zwei ganze teilerfremde Zahlen a und c, $c \neq 0$, durch

$$s(a,c) = \frac{1}{c} \sum_{0<k<|c|} \cot(\pi\frac{ak}{c})\cot(\pi\frac{k}{c}) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

erklärt, genügen bekanntlich dem Reziprozitätsgesetz

$$s(a,c) + s(c,a) = \frac{1}{3}(\frac{a}{c} + \frac{1}{ac} + \frac{c}{a}) - \operatorname{sign}(ac). \tag{2}$$

Diese bemerkenswerte Formel ist nur ein Spezialfall einer allgemeineren Identität für die Matrixfunktion $\varphi : SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow 1/3\mathbb{Z}$,

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{a+d}{3c} - s(a,c), & c \neq 0 \\ \frac{b}{3d} \ , & c = 0. \end{cases}$$

Für je drei Matrizen $A_j \in SL(2,\mathbb{Z})$, deren Produkt $A_1A_2A_3 = 1$ gleich der Einheitsmatrix ist, gilt nämlich

$$\sum_{j=1,2,3} \varphi(A_j) = -\operatorname{sign}(c_1c_2c_3), \quad A_j = \begin{pmatrix} * & * \\ c_j & * \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Für $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man hieraus die Formel (2). Diese Beziehungen sind von Dedekind entdeckt worden als Folgerung aus dem Transformationsverhalten von $\log \eta(\tau)$, dem Logarithmus der Dedekindschen Etafunktion. Später haben Rademacher u.a. [16,5] diese Formeln vom rein arithmetischen Standpunkt aus bewiesen.
Die Dedekindschen Summen und ihre zahlreichen Verallgemeinerungen haben viele Anwendungen in der Zahlentheorie erfahren, vgl. [17].

In neuerer Zeit sind solche Summen im Zusammenhang mit den Fixpunktsätzen von Atiyah, Bott und Singer auch in der Topologie anzutreffen [11].

1.2 Es sei L ein nichtentartetes Periodengitter in der komplexen Ebene mit dem Multiplikatorenring $\mathcal{O}_L = \{m \in \mathbb{C} \mid mL \subset L\}$, ferner

$$E_k(x) = \sum_{\omega \in L}{}' (\omega+x)^{-k}|\omega+x|^{-s}\Big|_{s=0} \quad , \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Die E_k hängen auf einfache Weise mit den Weierstraßfunktionen ζ und $\wp$ zusammen. In Analogie zu (1) setzen wir für $a,c \in \mathcal{O}_L$ mit $c \neq 0$

$$D(a,c) = \frac{1}{c} \sum_{k \in L/cL} E_1\left(\frac{ak}{c}\right)E_1\left(\frac{k}{c}\right) . \tag{4}$$

Im §4 der vorliegenden Arbeit beweisen wir als Spezialfall von Satz 1 den folgenden

<u>Satz:</u> Für teilerfremde $a,c \in \mathcal{O}_L$ verschieden von Null ist

$$D(a,c) + D(c,a) = E_2(0)I\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{ac} + \frac{c}{a}\right) , \quad I(z) := z-\bar{z}.$$

Diesem Satz entnimmt man insbesondere $D(a,c)=0$ für ganzrationale a,c. Als Verallgemeinerung von φ definieren wir

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} E_2(0)I\left(\frac{a+d}{c}\right) - D(a,c) , & c \neq 0 \\ E_2(0)I\left(\frac{b}{d}\right) , & c=0. \end{cases}$$

<u>Satz:</u> Die Abbildung Φ: $SL(2, \mathcal{O}_L) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist ein Homomorphismus in die additive Gruppe der komplexen Zahlen, der genau dann trivial ist, wenn $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Z}[(-1+\sqrt{-3})/2]$.

Für je drei Matrizen A_j in $\Gamma := SL(2, \mathcal{O}_L)$ mit $A_1A_2A_3=1$ gilt also $\sum \Phi(A_j)=0$. In §5 konstruieren wir allgemeiner einen 1-Kozykel Φ für die Gruppe Γ mit Werten in dem Γ-Modul $F := \{f:(\mathbb{C}/L)^2 \longrightarrow \mathbb{C}\}$ und zeigen, daß Φ eine nichttriviale Kohomologieklasse in $H^1(\Gamma,F)$ repräsentiert. In §6 wird für die Werte von Φ auf unipotenten Elementen in Γ eine sehr einfache Formel aufgestellt.

In §7 zeigen wir, daß bei geeigneter Wahl des Periodengitters L innerhalb seiner Ähnlichkeitsklasse der Homomorphismus Φ ganzalgebraische Werte annimmt. Mit Hilfe dieser Resultate gelingt es uns in §8 den Rang von $\Phi(\Gamma)$ einzugrenzen, dem Bild von Γ unter Φ, welches nach Hurwitz ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist. Als Korollar erhalten wir eine Abschätzung für den Rang r der Faktorkommutatorgruppe Γ^{ab} durch die Idealklassenzahl h von $\mathcal{O}_L$. Es ist $r \geq h-1$ bzw. $r \geq h$, je nachdem der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_L$ gleich $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ oder davon verschieden ist. Dieses Ergebnis ist im Falle einer Maximalordnung $\mathcal{O}$ zuerst von Serre [19] mit topologischen Argumenten bewiesen und kürzlich von N.Krämer (Bonner Dissertation in Vorbereitung) zu $r \geq (5-D)/24$ verbessert worden, $D < -4$ die Diskriminante von $\mathcal{O}$. Unser Beweis ist demgegenüber konstruktiv-arithmetisch und liefert zugleich eine natürliche Interpretation der Werte bestimmter Heckescher L-Reihen an der Stelle $s=1$. In §9 untersuchen wir das Verhalten von Φ unter Hecke-Operatoren. Im abschließendem §10 kehren wir zu unserem Ausgangspunkt in §1.1 zurück und verfolgen weiter die Analogie zu den klassischen Dedekindsummen.

Die Untersuchungen dieser Arbeit kann man in mehreren Richtungen fortsetzen. In einer weiteren Arbeit wollen wir in Verallgemeinerung alter Ergebnisse von Hecke [10,p.290,405] zeigen, wie man die Werte von Φ durch Summation gewisser L-Reihen an der Stelle $s=1/2$ mit Größencharakteren in biquadratischen Zahlkörpern erhält. Dabei wird auch der Bezug zu Harders Arbeiten [8,9] hergestellt, die mit der vorliegenden Arbeit eng zusammenhängen.

§2 Elliptische Funktionen

Es sei $L = \mathbb{Z}w_1+\mathbb{Z}w_2$ ein Periodengitter in der komplexen Ebene mit positiv imaginärer Basisdeterminante $D(L) = w_1\bar{w}_2 - \bar{w}_1 w_2$, also $D(L)/i > 0$. Wir betrachten für $k=0,1,2,\ldots$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Reihe

$$E(s,k,x,y) := \sum_{w \in L}{}' \chi(w\bar{x})(\overline{w+y})^k |w+y|^{-2s-k}$$

mit dem additiven Charakter

$$\chi(z) := \exp(2\pi i \frac{z-\bar{z}}{D(L)}) .$$

Dabei sind x,y komplexe Zahlen und Strich am Summenzeichen bedeutet wie üblich, daß sinnlose Glieder ausgelassen werden. Die Reihe $E(s,k,x,y)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe s-Ebene und genügt der Funktionalgleichung

$$E^*(s,x,y) = \chi(x\bar{y})E^*(1-s,y,x) \tag{5}$$

$$\text{mit} \quad E^*(s,x,y) := \left(\frac{2\pi i}{D(L)}\right)^{-s}\Gamma(s+\tfrac{k}{2})E(s,k,x,y) ,$$

vgl. [22,p.71] oder [24,p.80]. Im folgenden interessieren uns die eingangs genannten Spezialfälle $E_k(u) = E(k/2,k,0,u)$ und

$$\begin{aligned} E(u) &:= \frac{2\pi i}{D(L)} E(0,2,0,u) \\ &= \frac{2\pi i}{D(L)} \sum_{w\in L}{}' \frac{\overline{w+u}}{w+u} |w+u|^{-2s} \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{w\in L}{}' \frac{\chi(w\bar{u})}{w^2} |w|^{-2s} \Big|_{s=0} . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Funktionalgleichung (5), ihr entnimmt man insbesondere $E(0) = E_2(0)$. Wenn das Periodengitter L aus dem Textzusammenhang nicht eindeutig hervorgeht, schreiben wir statt $E_k(x), E(x)$ genauer $E_k(x,L), E(x,L)$. Nach Hecke gilt [10,p.412,451,475]

$$\begin{aligned} E_2(u) &= \sum_m{}' \sum_n{}' (mw_1+nw_2+u)^{-2} - \frac{2\pi i}{D(L)} \frac{\bar{w}_2}{w_2} , \\ E_1(u) &= \zeta(u) - uE_2(0) - \bar{u}\frac{2\pi i}{D(L)} , \qquad\qquad (6) \\ E_0(u) &= \begin{cases} -1 , & u \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit der Weierstraßschen Zetafunktion $\zeta(u)$, die im Gegensatz zu $E_1(u)$ nicht doppeltperiodisch ist. Ferner wird

$$\wp(u) = E_2(u) - E_2(0) \tag{7}$$

die Weierstraßsche $\wp$-Funktion für $u \in \mathbb{C} \setminus L$. Die folgende Formel habe ich in der Literatur nicht finden können,

$$2E(u) = \wp(u) - E_1^2(u) \ , \quad u \in \mathbb{C} \setminus L \ . \tag{8}$$

Zum Beweis leiten wir beide Seiten dieser Gleichung nach u bzw. $\bar{u}$ ab. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\overline{w+u}}{(w+u)|w+u|^{2s}} = -(1+s) \frac{\overline{w+u}}{(w+u)^2|w+u|^{2s}} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\overline{w+u}}{(w+u)|w+u|^{2s}} = \frac{1-s}{(w+u)|w+u|^{2s}}$$

ist
$$\frac{\partial}{\partial u} 2E(u) = -\frac{4\pi i}{D(L)} E(\tfrac{1}{2},3,0,u) \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} 2E(u) = \frac{4\pi i}{D(L)} E_1(u).$$

Andererseits folgt aus (6) und (7)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\wp(u) - E_1^2(u)\right] = 2E_1(u)E_2(u) - 2E_3(u) \ .$$

Nach einem Resultat von Eisenstein, vgl. [24,p.45], ist dies gerade

$$-\frac{4\pi i}{D(L)} E(\tfrac{1}{2},3,0,u) = \frac{\partial}{\partial u} 2E(u).$$

Ebenso folgt aus (6)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left[\wp(u) - E_1^2(u)\right] = \frac{4\pi i}{D(L)} E_1(u) = \frac{\partial}{\partial \bar{u}} 2E(u) \ .$$

Zum Beweis von (8) genügt es daher festzustellen, daß die konstanten Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung nach $u,\bar{u}$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Wegen $\zeta(u) = 1/u + O(u^3)$ ist dieser Koeffizient in $\wp(u)-E_1^2(u)$ gleich $2E_2(0)$, während er in $2E(u)$ ebenfalls gleich $2E(0)=2E_2(0)$ ist. Damit ist (8) bewiesen. Einen weiteren Beweis erhält man aus der für $x,y \in \mathbb{C} \setminus L$ gültigen Formel von Kronecker, vgl. [24,p.71],

$$E(\tfrac{1}{2},1,x,y) = \sum_{w\in L} \frac{\chi(w\bar{x})}{w+y}|w+y|^{-2s}\Big|_{s=0}$$
$$= e^{y(E_1(x)-\zeta(x))}\,\frac{\sigma(x+y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

mit den Weierstraß-Funktionen σ, ζ zum Periodengitter L, denn in der Laurent-Entwicklung $E(\frac{1}{2},1,x,y) = \sum a_k y^k$ ist offenbar $a_1=-E(x)$. Wegen $\sigma(y) = y+O(y^5)$ ist also $E(x)$ gleich dem Koeffizienten von y^2 in

$$-\left(1 + (e-\zeta)y + \frac{(e-\zeta)^2}{2}y^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{\sigma'}{\sigma}y + \frac{\sigma''}{2\sigma}y^2 + \ldots\right)$$

mit $e,\zeta,\sigma = E_1(x),\zeta(x),\sigma(x)$. Wegen $\zeta = \sigma'/\sigma$, $\wp = -\zeta' = \zeta^2 - \sigma''/\sigma$ erhält man wieder $2E(x) = \wp(x)-E_1^2(x)$.

Jetzt können wir die klassische, von Eisenstein entdeckte Additionsformel

$$(\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z))^2 = \wp(x)+\wp(y)+\wp(z)\,,$$

gültig für $x,y,z\in\mathbb{C}\setminus L$ mit $x+y+z=0$, wie folgt schreiben,

$$(E_1(x)+E_1(y)+E_1(z))^2 = \wp(x)+\wp(y)+\wp(z)$$

oder

$$\begin{aligned} &E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(z)+E_1(z)E_1(x) \\ &= E_0(x)E_2(y)+E_0(y)E_2(z)+E_0(z)E_2(x) \\ &+ E(x) + E(y) + E(z)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Diese letzte Formel ist, wie man durch Fallunterscheidungen leicht prüft, für alle x,y,z mit $x+y+z\in L$ gültig. Sie wird für unsere Zwecke noch symmetrischer, wenn x,y,z jeweils durch u_1-u_2, u_3-u_1, u_2-u_3 ersetzt werden. Unter Beachtung von $E_k(-x) = (-1)^k E_k(x)$ erhält man so

$$\sum_{j(3)} \Big[E(u_j-u_{j+1}) + \sum_{k=0,1} E_k(u_j-u_{j+1})E_{2-k}(u_j-u_{j-1})\Big] = 0 \tag{10}$$

für drei unabhängige Variable u_j in $\mathbb{C}/L$, j mod 3.

§3 Gitter in quadratischen Zahlkörpern

Wir nehmen nun an, das Periodengitter $L = \mathbb{Z}w_1+\mathbb{Z}w_2$ besitzt komplexe Multiplikatoren, es gibt also $m \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ mit $mL \subset L$. Dann ist $K=\mathbb{Q}(\tau)$, $\tau=w_1/w_2$, ein imaginärquadratischer Zahlkörper und der volle Multiplikatorenring von L,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_L = \left\{ m \in \mathbb{C} \mid mL \subset L \right\}$$

ist ein Unterring von $\mathcal{O}_K$, dem Ring der ganzen Zahlen von K. Ist etwa $a\tau^2+b\tau+c=0$ mit paarweise teilerfremden $a,b,c \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z} + a\tau\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \frac{D+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \quad \text{mit } D = b^2-4ac.$$

Die natürliche Zahl f in $D = f^2 D_K$, D bzw. D_K die ~~Körper~~Diskriminante von $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}_K$, heißt der Führer von $\mathcal{O}$, sie ist zugleich der Index von $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}_K$. Durch Angabe der Diskriminante D ist also $\mathcal{O}$ eindeutig bestimmt. Zwei Zahlen a,c in $\mathcal{O}$ heißen teilerfremd, wenn $a\mathcal{O}+c\mathcal{O} = \mathcal{O}$ ist. Hieraus folgt

$$aL + cL = (a\mathcal{O} + c\mathcal{O})L = \mathcal{O}L = L ,$$

mit $r+cL$ durchläuft also auch $ar+cL$ alle Restklassen in L/cL. Für teilerfremde $a,c \in \mathcal{O}$, $c \neq 0$ gelten daher die Multiplikationsformeln

$$\sum_{r \in L/cL} E_k\left(\frac{ar+u}{c}\right) = c^k E_k(u) \quad , \tag{11a}$$

$$\sum_{r \in L/cL} E\left(\frac{ar+u}{c}\right) = \frac{c}{\bar{c}} E(u) \quad , \tag{11b}$$

die man unmittelbar der Definition von E_k bzw. E entnimmt. Für ganzrationale, im gewöhnlichen Sinne teilerfremde $a,c \neq 0$ gelten diese Formeln natürlich auch für Periodengitter ohne komplexe Multiplikation. Da in diesem Fall der Multiplikatorenring $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ wird, können wir uns in allen Fällen merken: Die Multiplikationsformeln (11) gelten für teilerfremde $a,c \neq 0$ im Multiplikatorenring des Periodengitters L.

In den Abschnitten 6,7,8 benötigen wir mehrere Tatsachen über Gitter in imaginärquadratischen Zahlkörpern, die wir jetzt

zusammenhängend referieren wollen, vgl. [21,p.147], [4].
Für jedes Gitter $A \subset K$ gilt $A\bar{A} = N(A)\mathcal{O}_A$. Die positive rationale Zahl $N(A)$ heißt die Norm von A, sie ist im Falle $A \subset \mathcal{O}_A$ der Index von A in $\mathcal{O}_A$. Für zwei Gitter $A,B \subset K$ folgt hieraus, daß AB ein Gitter der Norm $N(AB)=N(A)N(B)$ und dem Multiplikatorenring $\mathcal{O}_{AB} = \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B$ ist. Die Gitter in K mit festem Multiplikatorenring $\mathcal{O}$ bilden also eine multiplikative Gruppe $J(\mathcal{O})$, deren Elemente eigentliche $\mathcal{O}$-Ideale genannt werden. Insbesondere ist $A^{-1} = \bar{A}/N(A)$ das Inverse von $A \in J(\mathcal{O})$. Ein Gitter A heißt allgemeiner ein $\mathcal{O}$-Ideal, wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_A$ ist. Die $\mathcal{O}$-Ideale zerfallen in disjunkte Klassen nach den natürlichen Teilern g von f, f der Führer von $\mathcal{O}$, wobei die zu g gehörige Klasse aus eigentlichen $\mathcal{O}_g$-Idealen besteht. Zwei $\mathcal{O}$-Ideale A,B mit $A=\lambda B$, $\lambda \in K^*$, heißen äquivalent oder ähnlich. Die Ähnlichkeitsklassen der eigentlichen $\mathcal{O}$-Ideale bilden die sogenannte Ringklassengruppe $J(\mathcal{O})/K^*$ der Ordnung $h(\mathcal{O})$. Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen aller $\mathcal{O}$-Ideale ist also gleich

$$\sum_{g|f} h(\mathcal{O}_g) .$$

Die Ringklassengruppe $J(\mathcal{O})/K^*$ kann auch als eine Kongruenzklassengruppe im Sinne der Klassenkörpertheorie beschrieben werden. Dazu sei I_f bzw. J_f die Gruppe der eigentlichen, zu f teilerfremden $\mathcal{O}_K$- bzw. $\mathcal{O}$-Ideale. Nach Dedekind gibt es eine multiplikative, normerhaltende Bijektion $j: I_f \longrightarrow J_f$, die auf ganzen Idealen $I \in I_f$, $J \in J_f$ durch $j(I) = I \cap \mathcal{O}$, $j^{-1}(J) = J\mathcal{O}_K$ erklärt ist. Es bezeichne $J_f^o \subset J_f$ die Untergruppe der Hauptideale in J_f. Das Urbild $I_f^o := j^{-1}(J_f^o)$ ist dann eine Kongruenzuntergruppe von I_f,

$$I_f^o = \left\{ (\alpha) \in I_f \;\middle|\; \alpha \equiv r(f\mathcal{O}_K),\ r \in \mathbb{Q} \right\} .$$

Wegen $J_f/J_f^o = J(\mathcal{O})/K^*$ kann also die Ringklassengruppe $J(\mathcal{O})/K^*$ mit der Kongruenzklassengruppe I_f/I_f^o identifiziert werden.

§4 Dedekindsummen

Weiterhin seien L ein Periodengitter (nicht notwendig mit komplexer Multiplikation) und $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{O}_L$ drei paarweise teilerfremde Zahlen verschieden von Null. In der Additionsformel (10) setzen wir

$$u_j = \frac{r_j+z_j}{c_j}\;, \quad j \bmod 3$$

mit Variablen r_j in L/c_jL und komplexen Variablen z_j. Die so entstehenden Relationen summieren wir über alle Klassen in L/c_lL, $l=1,2,3$ unter Beachtung von (11),

$$\frac{1}{c_1c_2c_3} \sum_{\substack{r_l\in L/c_lL\\ l=1,2,3}} E\left(\frac{r_j+z_j}{c_j} - \frac{r_{j+1}+z_{j+1}}{c_{j+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{c_{j-1}\bar{c}_j\bar{c}_{j+1}} \sum_{r_{j-1}} E(c_{j+1}z_j - c_jz_{j+1})$$

$$= \overline{\left(\frac{c_{j-1}}{c_jc_{j+1}}\right)}\, E(c_{j+1}z_j - c_jz_{j+1})\;,$$

da $c\bar{c}$ die Klassenanzahl von L/cL ist. Auf gleiche Weise erhalten wir auch für $k=0,1$

$$\frac{1}{c_1c_2c_3} \sum_{\substack{r_l\in L/c_lL\\ l=1,2,3}} E_k(u_j-u_{j+1})E_{2-k}(u_j-u_{j-1})$$

$$= \frac{c_{j-1}^{1-k}\,c_{j+1}^{k-1}}{c_j} \sum_{r_j\in L/c_jL} E_k(c_{j+1}u_j-z_{j+1})E_{2-k}(c_{j-1}u_j-z_{j-1})$$

$$=: D_k(c_{j+1},c_{j-1},c_j;z)\;.$$

Die D_k sind offenbar Analoga der klassischen Dedekindschen Summen. Diese Analogie wird besonders deutlich im Falle $k=1$, $z=(0,0,0)$:

$$D_1(c_1,c_2,c_3;0) = \frac{1}{c_3} \sum_{r\in L/c_3L} E_1\left(\frac{c_1r}{c_3}\right)E_1\left(\frac{c_2r}{c_3}\right)\;.$$

Als Ergebnis unserer Rechnung erhalten wir eine Reziprozitätsformel für die D_k,

<u>Satz 1</u>
$$\sum_{j(3)} \left[\overline{\left(\frac{c_{j-1}}{c_jc_{j+1}}\right)} E(c_{j+1}z_j - c_jz_{j+1}) + \sum_{k=0,1} D_k(c_{j+1},c_{j-1},c_j;z)\right] = 0\;,$$

die also für drei paarweise teilerfremde, nicht verschwindende Multiplikatoren $c_j \in \mathcal{O}_L$ und drei komplexe Variable z_j, j mod 3, gültig ist. Für $z=0$ erhalten wir insbesondere ein Analogon der Rademacherschen Reziprozitätsformel [16, p. 399, vol. II]

$$\sum_{j(3)} \frac{1}{c_j} \sum_{r \in L/c_j L} E_1\left(\frac{c_{j-1}r}{c_j}\right) E_1\left(\frac{c_{j+1}r}{c_j}\right) \tag{12}$$

$$= E_2(0) \sum_{j(3)} I\left(\frac{c_j}{c_{j-1}c_{j+1}}\right) \quad \text{mit} \quad I(z) := z - \bar{z}.$$

Diese Formeln sind, wie wir gesehen haben, komplizierte Spezialisierungen der Additionsformel (10) mit Hilfe der Multiplikationsformeln (11). Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe dieser Spezialisierungen einen 1-Kozykel Φ für die Gruppe $SL(2,\mathcal{O}_L)$ konstruieren.

Für die in §1.2 eingeführten Summen $D(a,c)$ gilt offenbar

$$D(a,c) = D_1(a,c,1;0) \ .$$

Umgekehrt ist für $c_2^* \in \mathcal{O}_L$ mit $c_2 c_2^* \equiv 1(c_3)$

$$D(c_1 c_2^*, c_3) = D_1(c_1, c_2, c_3; 0) \ ,$$

so daß $D_1(c_1,c_2,c_3;0)$ keine wesentliche Verallgemeinerung gegenüber $D(a,c)$ darstellt. Wir zählen noch einige einfache Eigenschaften von $D(a,c)$ auf,

$$D(a,c) = D(a',c) \quad \text{für } a \equiv a'(c) \tag{13}$$

$$D(-a,c) = D(a,-c) = -D(a,c) \tag{14}$$

$$D(\lambda a, \lambda c) = D(a,c) \text{ für } \lambda \in \mathcal{O}_L,\ \lambda \neq 0 \tag{15}$$

$$D(a,c) = 0 \text{ für } a,c \in \mathbb{Z} \ . \tag{16}$$

Aus (12) folgt nämlich $D(a,c) = -D(c,a)$ für ganzrationale teilerfremde a,c. Zusammen mit (13) folgt hieraus durch Anwendung des euklidischen Algorithmus $D(a,c) = D(0,1) = 0$, also (16). Mit gleichem Beweis erhält man im Falle euklidischer Ringe $\mathcal{O}_L$ die Beziehung $D(a,c) + D(\bar{a},\bar{c}) = 0$. Wir vermuten ganz allgemein $D(\bar{a},\bar{c}) = -D(a,c)$, doch scheint ein Beweis dieser Eigenschaft von $D(a,c)$ nicht einfach zu sein. Zum Beweis von (15) schreiben wir

$$D(\lambda a,\lambda c) = \frac{1}{\lambda c} \sum_{r\in L/\lambda cL} E_1\left(\frac{ar}{c}\right)E_1\left(\frac{r}{\lambda c}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda c} \sum_{p\in L/cL} E_1\left(\frac{ap}{c}\right) \sum_{q\in L/\lambda L} E_1\left(\frac{p}{\lambda c} + \frac{q}{\lambda}\right) \quad , \; r=p+cq \; ,$$

wenden auf die innere Summe (11a) an und erhalten so (15). Diese Eigenschaft legt es nahe, $D(a,c)$ als eine Funktion $D(a/c)$ auf $K/\mathcal{O}_L$ aufzufassen, K der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_L$. Die Eigenschaft (14) besagt dann, daß diese Funktion ungerade ist.

§5 Der Kozykel Φ

Für jede Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ in $SL(2,\mathcal{O}_L)$ definieren wir wie folgt eine Abbildung $\Phi(A) : (\mathbb{C}/L)^2 \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(u,v) := -\overline{\left(\frac{a}{c}\right)}E(u) - \overline{\left(\frac{d}{c}\right)}E(u^*) - \frac{a}{c}E_0(u)E_2(v) \tag{17}$$

$$- \frac{d}{c}E_0(u^*)E_2(v^*) - \frac{1}{c} \sum_{r\in L/cL} E_1\left(\frac{ar+u^*}{c}\right)E_1\left(\frac{r+u}{c}\right)$$

falls $c\neq 0$, und im Falle $c=0$,

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}(u,v) := -\overline{\left(\frac{b}{d}\right)}E(u) - \frac{b}{d}E_0(u)E_2(v) \; .$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $u^*=au+cv$, $v^*=bu+dv$ gesetzt.

<u>Satz 2</u> Die Abbildung $\Phi: SL(2,\mathcal{O}_L) \longrightarrow F := \left\{f:(\mathbb{C}/L)^2 \longrightarrow \mathbb{C}\right\}$, die einer Matrix $A\in SL(2,\mathcal{O}_L)$ das Element $\Phi(A)\in F$ zuordnet, repräsentiert eine nichttriviale Kohomologieklasse in $H^1(SL(2,\mathcal{O}_L),F)$, wenn die $SL(2,\mathcal{O}_L)$-Operation auf F durch $(Af)(x):=f(xA)$ erklärt wird.

Im Falle $ac\neq 0$ besitzt Φ ferner die Eigenschaft

$$\sum_{\substack{k\in L/\alpha L \\ l\in L/\gamma L}} \Phi\begin{pmatrix} a/\alpha & \frac{\gamma}{\alpha} b \\ c/\gamma & \frac{\gamma}{\alpha} d\end{pmatrix}\left(\frac{u+l}{\gamma},\frac{v+k}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\gamma\,\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(u,v)$$

für jeden Teiler $\alpha|a$, $\gamma|c$ in $\mathfrak{O}_L$. Dies folgt unmittelbar aus (11) und wird im folgenden nicht weiter benutzt.

Wir zeigen zunächst, daß Φ kein Korand ist. Dazu genügt es eine Matrix anzugeben, so daß $\Phi(A) \neq Af-f$ für alle f in F wird. Für $A=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{Z}$ ist

$$Af(0,v) - f(0,v) = f(0,v) - f(0,v) = 0,$$

während für $v \notin L$ nach Definition von Φ

$$\Phi(A)(0,v) = b(E_2(v)-E_2(0)) = b\wp(v)$$

wird. Da $\wp$ eine nichtkonstante Funktion ist, kann folglich Φ kein Korand sein. Wir zeigen jetzt, daß Φ ein 1-Kozykel ist, es gilt also

$$\Phi(A_1A_2) = A_1\Phi(A_2) + \Phi(A_1)$$

bzw.

$$\Phi(A_1) + A_1\Phi(A_2) + A_1A_2\Phi(A_3) = 0 \tag{18}$$

für alle $A_1, A_2, A_3 \in SL(2,\mathfrak{O}_L)$ mit

$$A_1A_2A_3 = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Zum Beweis schreiben wir die Gleichung (18) in der Gestalt

$$\Phi(A_1)(u_1,v_1)+\Phi(A_2)(u_2,v_2)+\Phi(A_3)(u_3,v_3) = 0$$

mit $u_{j+1}=a_ju_j+c_jv_j$, $v_{j+1}=b_ju_j+d_jv_j$, $j \bmod 3$ und entnehmen (19) die Relationen

$$a_{j-1}c_{j+1} + d_{j+1}c_{j-1} = -c_j \;, \quad j \bmod 3 \;.$$

Zunächst betrachten wir den Fall paarweise teilerfremder $c_j \neq 0$. Dann lassen sich drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 derart wählen, daß

$$c_jz_{j-1} - c_{j-1}z_j = u_j \;, \quad j \bmod 3$$

zuerst für $j \equiv 1,2$ und dann auch für $j \equiv 3$ wird, da die beiden ersten

Gleichungen die dritte zur Folge haben. Wegen

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} r \equiv -\frac{a_j c_{j-1}}{c_j} r \qquad \bmod L$$

für r in L können wir jetzt schreiben

$$\begin{aligned}
&D_1(c_{j+1}, c_{j-1}, c_j; z)\\
&= -\frac{1}{c_j} \sum_{r \in L/c_j L} E_1\left(c_{j+1}\frac{r+z_j}{c_j} - z_{j+1}\right) E_1\left(z_{j-1} - c_{j-1}\frac{r+z_j}{c_j}\right)\\
&= -\frac{1}{c_j} \sum_{r \in L/c_j L} E_1\left(\frac{a_j r+u_{j+1}}{c_j}\right) E_1\left(\frac{r+u_j}{c_j}\right) .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kommt einfach durch den Variablenwechsel $r \longrightarrow -c_{j-1}r$ zustande. Ebenso wird

$$\begin{aligned}
&D_0(c_{j+1}, c_{j-1}, c_j; z)\\
&= \frac{c_{j-1}}{c_j c_{j+1}} \sum_{r \in L/c_j L} E_0\left(\frac{a_j+u_{j+1}}{c_j}\right) E_2\left(\frac{r+u_j}{c_j}\right) .
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir noch weiter vereinfachen, da $E_0((a_j r+u_{j+1})/c_j)$ höchstens für ein einziges r nicht verschwindet. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $E_0(u_{j+1}) \neq 0$ und

$$r \equiv -d_j(a_j u_j + c_j r_j) = -u_j - c_j(b_j u_j + d_j v_j) \quad \bmod c_j L,$$

also $$\frac{r+u_j}{c_j} \equiv - v_{j+1} \quad \bmod L \text{ wird,}$$

so daß in allen Fällen

$$\begin{aligned}
&D_0(c_{j+1}, c_{j-1}, c_j; z)\\
&= -\left(\frac{a_{j+1}}{c_{j+1}} + \frac{d_j}{c_j}\right) E_0(u_{j+1}) E_2(v_{j+1})
\end{aligned}$$

ist. Aus Satz 1 folgt jetzt

$$\sum_{j(3)} \Phi(A_j)(u_j, v_j)$$

$$= -\sum_{j(3)} \Big[\overline{\left(\frac{a_j}{c_j}\right)} E(u_j) + \overline{\left(\frac{d_j}{c_j}\right)} E(u_{j+1}) + \frac{a_j}{c_j} E_0(u_j) E_2(v_j)$$

$$+ \frac{d_j}{c_j} E_0(u_{j+1}) E_2(v_{j+1}) + \frac{1}{c_j} \sum_{r \in L/c_j L} E_1\left(\frac{a_j r + u_{j+1}}{c_j}\right) E_1\left(\frac{r+u_j}{c_j}\right) \Big]$$

$$= \sum_{j(3)} \Big[\overline{\left(\frac{c_{j+1}}{c_j c_{j-1}}\right)} E(u_j) + \sum_{k=0,1} D_k(c_{j+1}, c_{j-1}, c_j; z) \Big] = 0 \,.$$

Damit ist die Kozykeleigenschaft (18) im Falle paarweise teilerfremder $c_j \neq 0$ bewiesen. Um den Fall nicht paarweise teilerfremder $c_j \neq 0$ auf den obigen Fall zurückzuführen, bestimmen wir eine Hilfsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -b_1 + d_1 m & -d_1 \\ a_1 - c_1 m & c_1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathcal{O}_L)$$

mit $m \in \mathcal{O}_L$ und

1) $(a_1 - c_1 m)\mathcal{O}_L + c_2 \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L$

2) $c(M) := a_1 - c_1 m \neq 0$

3) $c(M^{-1} A_2) := -d_3 - c_3 m \neq 0$.

Um uns von der Existenz eines $m \in \mathcal{O}$ mit der Eigenschaft 1) zu überzeugen, betrachten wir den Ring $R = \mathcal{O}_L / c_2 \mathcal{O}_L$ und benutzen die Tatsache, daß der Restklassenring $R/\mathrm{Jac}(R)$ als halbeinfacher kommutativer Ring ein direktes Produkt von endlichen Körpern K_j ist,

$$R/\mathrm{Jac}(R) = \prod_j K_j \,.$$

Dabei ist $\mathrm{Jac}(R)$ das Jacobson-Radikal von R,

$$\mathrm{Jac}(R) = \left\{ x \in R \;\middle|\; 1 + xr = \text{Einheit für alle } r \in R \right\} \,.$$

Wenn also $y \in R$ eine Einheit und $x \in \mathrm{Jac}(R)$ ist, so wird $y + x = y(1 + x/y)$ wieder eine Einheit in R. Es sei nun π_j die Projektion $\mathcal{O}_L \to K_j$. Da π_j surjektiv ist und a_1, c_1 nach Voraussetzung teilerfremd sind, können $\pi_j(a_1)$ und $\pi_j(c_1)$ nicht zugleich verschwinden. Wähle m in $\mathcal{O}$ so, daß für alle j

$$\pi_j(m) = \begin{cases} 1 \;, & \text{falls } \pi_j(a_1) = 0 \\ 0 \;, & \text{falls } \pi_j(a_1) \neq 0 \end{cases}$$

wird. Dann ist $\pi_j(a_1 - c_1 m) \neq 0$ für alle j, also $a_1 - c_1 m + c_2 \mathcal{O}_L$ eine

Einheit in R und das bedeutet gerade, daß m die Eigenschaft 1) besitzt. Durch geeignete Abänderung von m modulo c_2 können wir schließlich erreichen, daß m allen drei Bedingungen genügt. Für die so gewonnene Matrix M gilt dann

$$A_1M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_1+d_1m & -d_1 \\ a_1-c_1m & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$M^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_1m-a_1 & d_1m-b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -d_3-c_3m & * \end{pmatrix} .$$

Die Zahlen $c(A_1M)$, $c(M^{-1}A_2)$, $c(A_3)$ sind also verschieden von Null und paarweise teilerfremd, daher ist

$$\Phi(A_1A_2) = A_1M\,\Phi(M^{-1}A_2) + \Phi(A_1M) .$$

Da aber auch $c(M^{-1})$, $c(A_2)$, $c(M^{-1}A_2)$ verschieden von Null und paarweise teilerfremd sind, so wird weiter

$$\begin{aligned} A_1M\,\Phi(M^{-1}A_2) &= A_1\,\Phi(A_2) + A_1M\,\Phi(M^{-1}) \\ &= A_1\,\Phi(A_2) - A_1\,\Phi(M) . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus $\Phi(M^{-1}) = -M^{-1}\,\Phi(M)$, diese Eigenschaft entnimmt man direkt der Definition von Φ. Ebenso wird

$$\Phi(A_1M) = A_1\,\Phi(M) + \Phi(A_1) ,$$

also insgesamt

$$\Phi(A_1A_2) = A_1\,\Phi(A_2) + \Phi(A_1) .$$

Damit ist die Kozykeleigenschaft (18) im Falle aller $c_j \neq 0$ bewiesen. Wir haben noch den Fall $c_j = 0$ für ein oder mehrere j zu besprechen. Dann sind a_j, d_j Einheiten in $\mathcal{O}_L$ mit $a_jd_j = 1$ und aus (11) folgt in diesem Fall

$$E(u_{j+1}) = E(a_ju_j) = d_j^2\,E(u_j) , \tag{20}$$

$$E_0(u_{j+1})E_2(v_{j+1}) = E_0(u_j)E_2(d_jv_j) = \overline{d_j^2}\,E_0(u_j)E_2(v_j) .$$

Für die weitere Diskussion können wir ohne Einschränkung $c_3 = 0$ annehmen, dann wird

$$
\begin{aligned}
a_1 &= c_2b_3+d_2d_3 \quad , \quad & b_1 &= -a_2b_3-b_2d_3 \\
c_1 &= -c_2a_3 \quad , \quad & d_1 &= a_2a_3 \ .
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Diesen Gleichungen entnimmt man im Falle aller $c_j=0$, also $d_1d_2d_3=1$,

$$
\sum_{j(3)} \overline{\left(\frac{b_j}{d_j}\right)}E(u_j) = \overline{\left(\frac{b_1}{d_1}\, d_1^2 + \frac{b_2}{d_2} + \frac{b_3}{d_3}\, a_2^2\right)}E(u_2) = 0
$$

und damit auch

$$
\sum_{j(3)} \Phi(A_j)(u_j,v_j) = \sum_{j(3)} \left[\overline{\left(\frac{b_j}{d_j}\right)}E(u_j) + \left(\frac{b_j}{d_j}\right)E_0(u_j)E_2(v_j)\right] = 0.
$$

Wenn dagegen $c_1 \neq 0$, erhält man zunächst aus (21)

$$
\frac{a_2}{c_2} + \frac{d_1}{c_1} = 0 \ , \quad \frac{a_1}{c_1}\, d_3^2 + \frac{d_2}{c_2} = -\frac{b_3}{d_3} \ ,
$$

und daher wegen (20)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1,2} \Bigg[\overline{\left(\frac{a_j}{c_j}\right)}E(u_j) + \overline{\left(\frac{d_j}{c_j}\right)}E(u_{j+1}) \\
&\qquad + \frac{a_j}{c_j}\, E_0(u_j)E_2(v_j) + \frac{d_j}{c_j}\, E_0(u_{j+1})E_2(v_{j+1})\Bigg] \\
&= -\overline{\left(\frac{b_3}{d_3}\right)}E(u_3) - \frac{b_3}{d_3}\, E_0(u_3)E_2(v_3) = \Phi(A_3)(u_3,v_3) \ .
\end{aligned}
$$

Zu zeigen bleibt also

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c_1} \sum_{s\in L/c_1L} E_1\left(\frac{a_1s+u_2}{c_1}\right)E_1\left(\frac{s+u_1}{c_1}\right) \\
&\qquad = -\frac{1}{c_2} \sum_{r\in L/c_2L} E_1\left(\frac{a_2r+u_3}{c_2}\right)E_1\left(\frac{r+u_2}{c_2}\right) \ .
\end{aligned}
$$

In der letzten Summe setze man $r=a_1s$ und beachte

$$
\frac{r+u_2}{c_2} = -a_3\,\frac{a_1s+u_2}{c_1} \ , \quad \frac{a_2r+u_3}{c_2} \equiv -\frac{s+u_1}{c_1} \quad \bmod L \ .
$$

Die obige Gleichung folgt dann aus $E_1(a_3x)=E_1(x)/a_3$. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

§6 Werte von Φ auf unipotenten Elementen

Die Definition von Φ ist nicht gerade einfach und es erhebt sich daher die Frage, ob die Definitionsgleichung (17) zumindestens für Matrizen spezieller Bauart vereinfacht werden kann. In diesem Abschnitt beantworten wir diese Frage für unipotente Elemente in $SL(2,\mathcal{O}_L)$, indem wir für Matrizen der Gestalt

$$U = U(t,a,c) = \begin{pmatrix} 1-tac & ta^2 \\ -tc^2 & 1+tac \end{pmatrix} \in SL(2,\mathcal{O}_L)$$

eine sehr einfache Formel für $\Phi(U)$ ableiten. Dabei sind t,a,c irgendwelche Zahlen im Quotientenkörper von $\mathcal{O}_L$, der also ein imaginärquadratischer oder der Körper der rationalen Zahlen ist. Wir betrachten im folgenden nur den Fall $tac \neq 0$ und nehmen ferner an, daß die Variablen $u,v \in \mathbb{C}/L$ der Bedingung $u^*-u,\ v^*-v \in L$ genügen.

<u>Satz 3</u> $$\Phi(U)(u,v) = -g^{-2}\Big[\bar{t}N(A)^2E(au+cv,AL) + t\,E_0(au+cv,AL)E_2(w,A^{-1}L)\Big] .$$

Dabei ist $A = a\mathcal{O}_L + c\mathcal{O}_L$ und $g = |\mathcal{O}_A/\mathcal{O}_L|$ der Index von $\mathcal{O}_L$ im Multiplikatorenring von A. Das Argument w in E_2 ist im Falle $au+cv \in AL$ eindeutig bestimmt durch

$$\frac{1}{\bar{a}g}(L+v)\cap\frac{1}{cg}(L+u) = w + A^{-1}L .$$

Mit Rücksicht auf $\bar{A}^{-1} = A/N(A)$ wird insbesondere für $u,v \in L$

$$\Phi(U)(0,0) = g^{-2}\left[tE_2(0,A^{-1}L) - \bar{t}\,E_2(0,\bar{A}^{-1}L)\right] . \tag{22}$$

Zum Beweis von Satz 3 genügt es offenbar zu zeigen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{tc^2}\sum_{k\in L/tc^2L} E_1\Big(\frac{(1-tac)k+u^*}{tc^2}\Big)E_1\Big(\frac{k+u}{tc^2}\Big) \\ &= -\overline{\Big(\frac{2}{tc^2}\Big)}E(u,L) - \Big(\frac{2}{tc^2}\Big)E_0(u,L)E_2(v,L) \qquad (23)\\ &\quad - \bar{t}\,g^{-2}N(A)^2E(au+cv,AL) - t\,g^{-2}E_0(au+cv,AL)E_2(w,A^{-1}L) . \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann als Ergänzung der Reziprozitätsformel aus

Satz 1 aufgefaßt werden, der Spezialfall $a/c \in \mathfrak{O}_L$ ist ohnehin in Satz 1 enthalten. Zum Beweis haben wir lediglich die Rechnungen in §4 sinngemäß zu modifizieren. Dazu setzen wir in der Additionsformel (9)

$$x = \frac{k+u}{tc^2}\ , \quad y = \frac{u^*-u-tack}{tc^2}\ , \qquad z = -\frac{(1-tac)k+u^*}{tc^2}$$

und summieren über $k \in L/tc^2L$. Wegen $tac(u-u^*) = tc^2(v-v^*) \in tc^2L$ wird durch die Substitution

$$k \longmapsto (1+tac)(k-u^*+u)$$

die Restklasse von y mod L nicht geändert, jedoch geht z über in

$$-\frac{(1-(tac)^2)(k+u-u^*)+u^*}{tc^2} \equiv -\frac{k+u}{tc^2} = -x \bmod L\ .$$

Die Summe der Glieder $E_1(x)E_1(y)+E_1(y)E_1(z)$ verschwindet also, während $\sum' E_1(z)E_1(x)$ bis auf den Faktor $-1/tc^2$ die linke Seite von (23) ergibt. Andererseits folgt aus (11)

$$\frac{1}{tc^2}\sideset{}{'}\sum_{k}\left[E(x) + E(z)\right] = \overline{\left(\frac{2}{tc^2}\right)}E(u)\ .$$

Weiter, da $E_0(x) \neq 0$ genau dann, wenn $k \equiv -u(tc^2L)$ ist, so wird mit Rücksicht auf $x+y+z=0$

$$\frac{1}{tc^2}\sideset{}{'}\sum_{k}\left[E_0(x)E_2(y) + E_0(z)E_2(x)\right] = \frac{2}{tc^2}E_0(u)E_2(v)\ .$$

Wir betrachten jetzt die Summe

$$\frac{1}{tc^2}\sideset{}{'}\sum_{k} E_0(y)E_2(z) \tag{24}$$

$$= \frac{1}{tc^2}\sideset{}{'}\sum_{k} E_0\left(\frac{a(k+u)+cv}{c}, L\right)E_2\left(\frac{k+u}{tc^2}, L\right)$$

$$= t\sideset{}{'}\sum_{k} E_0\left(\frac{a(k+u)+cv}{c}, L\right)E_2\left(\frac{k+u}{c}, tcL\right)\ ,$$

in der letzten Zeile haben wir die Homogenität $E_2(\lambda u, \lambda L) = \lambda^{-2}E_2(u,L)$ von E_2 ausgenutzt. Hier verschwindet der E_0-Faktor genau dann nicht, wenn

$$\frac{k+u}{c} \in M := \frac{1}{a}(L+v) \cap \frac{1}{c}(L+u)\ .$$

Wenn also M leer ist, liefert die obige Summe keinen Beitrag. Es ist aber $M \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$au+cv \in aL+cL = AL .$$

In diesem Fall wird mit einem $gw \in (L+u)/c$

$$M = gw + \tfrac{1}{a}L \cap \tfrac{1}{c}L = g(w + A^{-1}L) .$$

Zum Beweis der letzten Gleichung

$$X := \tfrac{1}{a}L \cap \tfrac{1}{c}L = gA^{-1}L$$

beachten wir, daß X nach Definition von A das größte Gitter mit der Eigenschaft $XA \subset L$ ist. Hieraus folgt $X = FA^{-1}L$ mit einem Ideal F in $\mathcal{O}_A$. Die Bestimmung von X ist daher gleichbedeutend mit der Auffindung des größten Ideals F in $\mathcal{O}_A$ mit $F \subset \mathcal{O}_L$. Dieses Ideal ist gerade $g\,\mathcal{O}_A$, der Führer von $\mathcal{O}_L$ bzgl. $\mathcal{O}_A$. Die Summe (24) ist daher gleich

$$t\, E_0(au+cv,AL) \sum_{l \in gA^{-1}L/tcL} E_2(gw+l,tcL)$$

$$= g^{-2}\, t\, E_0(au+cv,AL)E_2(w,A^{-1}L) .$$

Als letzte Summe betrachten wir schließlich

$$\frac{1}{tc^2}\sum_k E(y) = \frac{1}{tc^2}\sum_k E\left(\frac{ak+au+cv}{c},L\right)$$

$$= \frac{1}{t} \sum_{k \in aL/tac^2L} E(k+au+cv,cL) .$$

Hier summieren wir zunächst über $k \in (aL \cap cL)/tac^2L$ und erhalten

$$= \frac{1}{t}\left|\frac{aL\cap cL}{tac^2L}\right| \sum_{k \in aL/(aL\cap cL)} E(k+au+cv,cL) .$$

Modulo cL kann aber die Summationsmenge $aL/(aL\cap cL)$ durch $(aL+cL)/cL$ $=AL/cL$ ersetzt werden, also

$$= \frac{1}{t}\left|\frac{gA^{-1}L}{tcL}\right| \sum_{k \in AL/cL} E(k+au+cv,cL)$$

$$= \frac{1}{t}\left|\frac{gA^{-1}L}{tcL}\right| \left|\frac{AL}{cL}\right|^{-1} E(au+cv,AL)$$

$$= \frac{1}{t}\left|\frac{gA^{-1}L}{tAL}\right| E(au+cv,AL) = \bar{t}\, g^{-2}N(A)^2\, E(au+cv,AL) .$$

Damit ist Satz 3 im Falle $tac \neq 0$ bewiesen. Es sei noch vermerkt, daß Satz 3 auch im Falle $tac=0$, aber a,c nicht beide Null, gültig bleibt, wenn $w=v/ag$ im Falle $c=0$ und $w=u/cg$ im Falle $a=0$ gesetzt wird.

§7 Homomorphismen von $SL(2,\mathcal{O})$

7.1 Im Rest der Arbeit studieren wir die Eigenschaften der Homomorphismen $\Phi: SL(2,\mathcal{O}_L) \to \mathbb{C}_+$ gegeben durch $\Phi(M) := \Phi(M)(0,0)$, also

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} I(\frac{a+d}{c})E_2(0) - D(a,c), & c \neq 0 \\ I(\frac{b}{d})E_2(0), & c=0. \end{cases}$$

Da die Faktorkommutatorgruppe von $SL(2,\mathbb{Z})$ gleich $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist, muß Φ im Falle $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}$ identisch verschwinden. Dies können wir auch der obigen Definitionsgleichung entnehmen, denn nach (16) ist $D(a,c)=0$ für ganzrationale a,c. Im Falle $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[i]$ bzw. $\mathbb{Z}[\rho]$, $\rho=(-1+\sqrt{-3})/2$ hat Swan [23] gezeigt, daß $SL(2,\mathcal{O}_L)^{ab}$ gleich $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist. Andererseits folgt aus der Definition der E_k die Gleichung $E_2(0)=w^2E_2(0)$, $D(a,c)=w^2D(a,c)$ für jede Einheit w in $\mathcal{O}_L$, so daß Φ identisch verschwindet, wenn es in $\mathcal{O}_L$ Einheiten verschieden von ± 1 gibt.

Für die weitere Diskussion können wir daher $\mathcal{O}_L \neq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}$ annehmen. In diesen Fällen verschwindet Φ nicht identisch, denn für $b\in\mathcal{O}_L$ mit $b \neq \bar{b}$ wird

$$\Phi\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b-\bar{b})E_2(0,L) \neq 0 .$$

Dies folgt aus einem Resultat von Masser [13,p.38] :

$$E_2(0,L) = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[i] \text{ oder } \mathbb{Z}[\rho].$$

Wegen $\Phi_{\lambda L}=\lambda^{-2}\Phi_L$ ist der Homomorphismus Φ_L im gewissen Sinne nur von der Ähnlichkeitsklasse des Periodengitters L abhängig. Im Falle $\mathcal{O}_L \neq \mathbb{Z}$ kann aber L innerhalb der Ähnlichkeitsklasse so gewählt werden, daß die Zahlen $g_2(L)$, $g_3(L)$ in

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{25}$$

ganzalgebraisch ausfallen. Aus Resultaten von Cassels über die Werte der $\wp$-Funktion in Teilungspunkten von L folgt dann, wie Damerell [2,p.313] gezeigt hat, daß $2\sqrt{D}\,E_2(0,L)$ eine ganzalgebraische Zahl in $F:=\mathbb{Q}(g_2,g_3,\sqrt{D})$ ist, $D=D(\mathcal{O}_L)$ die in §3 erklärte

Diskriminante von $\mathcal{O}_L$. Die Zahlen $E_1(x,L)$, x ein n-Teilungspunkt von L, liegen in der abelschen Erweiterung F_n von F, die man durch Adjunktion der Koordinaten aller n-Teilungspunkte der elliptischen Kurve (25) erhält. Ferner wird die Zahl $n^{5/4}E_1(x,L)$ ganzalgebraisch. Aus diesen Resultaten folgt zunächst im Falle $a,c \neq 0$ und $n=N(c)=c\bar{c}$,

$$2\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{F_n}\left[\frac{1}{n}\right]$$

mit Rücksicht auf $I((a+d)/c) \in (\sqrt{D_L}/n)\mathbb{Z}$. Hier bezeichnet $\mathcal{O}_{F_n}$ den Ring der ganzen Zahlen in F_n. Wegen

$$\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \Phi\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

folgt aus der Teilerfremdheit von $N(a)$, $N(c)$ sogar

$$2\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_F$$

und dies gilt offenbar auch im Falle a oder $c=0$, weil dann notwendig c oder $a=\pm 1$ ist.

Es sei L' ein weiteres Gitter mit dem Multiplikatorenring $\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_L$. Nach dem Hauptsatz der komplexen Multiplikation können wir $g_k(L') = g_k(L)^\sigma$, $k=2,3$, annehmen mit einem Automorphismus σ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Da $E_2(0)$ und $E_1(x)$ für einen Teilungspunkt x über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ rational durch Teilwerte von $\wp$ und $\wp'$ ausgedrückt werden können [2,p.294], gilt folglich $\Phi_{L'} = \Phi_L^\sigma$.

<u>Satz 4</u> Es sei $\mathcal{O}_L \neq \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\rho]$ und L innerhalb seiner Ähnlichkeitsklasse so gewählt, daß $g_2(L)$, $g_3(L)$ ganzalgebraisch werden. Dann ist $2\Phi_L$ ein nichttrivialer Homomorphismus von $SL(2,\mathcal{O}_L)$ mit ganzalgebraischen Werten in dem Zahlkörper $\mathbb{Q}(g_2,g_3,\sqrt{D_L})$. Jedes weitere Gitter L' mit dem Multiplikatorenring $\mathcal{O}_{L'} = \mathcal{O}_L$ kann innerhalb seiner Ähnlichkeitsklasse so gewählt werden, daß $g_k(L')=g_k(L)^\sigma$ wird mit einem Automorphismus σ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Für den zugehörigen Homomorphismus gilt dann $\Phi_{L'} = \Phi_L^\sigma$.

Wir wollen diesen Satz an Hand von zwei Beispielen illustrieren.

1) $\mathcal{O} = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$, $\Omega^2 := \dfrac{5E_6(\mathcal{O})}{3E_4(\mathcal{O})}$, $L = \Omega\,\mathcal{O}$,

$g_2(L) = 35$, $g_3(L) = 49$, $E_2(L) = \frac{1}{2}$,

$2\Phi_L(SL(2,\mathcal{O})) = \sqrt{-7}\,\mathbb{Z}$, $SL(2,\mathcal{O})^{ab} = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/''\mathbb{Z})$.

In diesem Beispiel hat $\mathcal{O}$ die Klassenzahl $h(\mathcal{O})=1$, während in dem folgenden Beispiel $h(\mathcal{O})=2$ ist.

$$2)\quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]\ ,\quad \Omega^2 := \frac{140 g_2 E_6(\mathcal{O})}{60 g_3 E_4(\mathcal{O})}\ ,\quad L = \Omega\mathcal{O},$$

$$g_2 = 2\sqrt{5}\,(4+3\sqrt{5})\ ,\quad g_3 = 4(7+4\sqrt{5})\ ,\quad E_2(L) = \frac{4+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\ ,$$

$$\Phi_L(SL(2,\mathcal{O})) = \mathbb{Z}\sqrt{-2}\oplus\mathbb{Z}\sqrt{-10}\ ,\quad SL(2,\mathcal{O})^{ab} = \mathbb{Z}^3\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\ .$$

Die Aussagen über das Bild von Φ und die Faktorkommutatorgruppe folgen aus den expliziten Präsentationen in [6,23], die Werte von $E_2(L)$ haben wir den Tabellen in [18] entnommen.

7.2 Nach Hurwitz sind die Gruppen $SL(2,\mathcal{O})$ endlich erzeugt, daher ist das Bild von Φ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Aus Satz 4 folgt, daß der Rang dieses $\mathbb{Z}$-Moduls höchstens $2h(\mathcal{O}_L)$ ist, denn L kann so gewählt werden, daß $\mathbb{Q}(g_2,g_3,\sqrt{D})$ mit dem Ringklassenkörper $\mathbb{Q}(j(L),\sqrt{D})$ zusammenfällt, dessen Grad über $\mathbb{Q}$ gleich $2h(\mathcal{O}_L)$ ist. Dabei ist $j=12^3 g_2^3/(g_2^3-27g_3^2)$ die j-Invariante von L. Im folgenden zeigen wir, daß der Rang von Bild Φ mindestens so groß wie $h(\mathcal{O}_L)$ ist. Der Beweis ergibt zugleich die lineare Unabhängigkeit der Φ_A , wenn A ein Repräsentantensystem R derjenigen Idealklassen von $\mathcal{O}$ durchläuft, deren Multiplikatorenring verschieden von $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[\rho]$ ist. Dazu ordnen wir jedem $B=a\mathcal{O}+c\mathcal{O}\in R$ die Standgruppe $\Gamma_B = \Gamma_{a/c}$ der Spitze a/c zu, bestehend aus den Matrizen

$$U_B(t) = \begin{pmatrix} 1-tac & ta^2 \\ -tc^2 & 1+tac \end{pmatrix} \in SL(2,\mathcal{O})\ .$$

Es ist $U_B(t)\in SL(2,\mathcal{O})$ genau dann, wenn $t\in B^{-2}\,|\mathcal{O}_B/\mathcal{O}|$. Daher ist Γ_B ein $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2 und $X_B = \Gamma_B\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum. Mit Γ bzw. X bezeichnen wir die direkte Summe der Γ_B bzw. X_B. Für jedes $A\in R$ und $\varepsilon = \pm 1$ wird durch

$$\Phi_A^{\varepsilon}(U_B(t)) := |\mathcal{O}_{AB}/\mathcal{O}_A|^{-2}\,(tE_2(AB^{-1}) + \varepsilon\bar{t}\overline{E_2(AB^{-1})})$$

ein Homomorphismus $\Phi_A^{\varepsilon} : X \to \mathbb{C}$ erklärt, der ein besonders übersichtliches Verhalten unter komplexer Konjugation aufweist:

$$\Phi_A^{\varepsilon}(\overline{U}) = \varepsilon\,\Phi_A^{\varepsilon}(U)\ . \tag{26}$$

In §6 haben wir gesehen, daß der eingeschränkte Homomorphismus $\Phi_A^-|_\Gamma$ sich auf ganz $SL(2,\mathcal{O}_L)$ fortsetzen läßt, denn laut (22) ist $\Phi_A|_\Gamma = \Phi_A^-|_\Gamma$. Wir werden sehen, daß es für $\Phi_A^+|_\Gamma$ keine solche Fortsetzung gibt.

<u>Satz 5</u> Die Φ_A^ε sind linear unabhängig.

Zum Beweis genügt es wegen (26) zu zeigen, daß die Φ_A^ε mit festem ε linear unabhängig sind. Dazu bestimmen wir zu jedem $B \in R$ ein $U_B \in X_B$ mit

$$\delta(\varepsilon) := \det(\Phi_A^\varepsilon(U_B))_{A,B\in R} \neq 0 \,. \tag{28}$$

Der Beweis von (28) besteht aus zwei Schritten. Zunächst zerlegen wir $\delta(\varepsilon)$ in ein Produkt von Gruppendeterminanten. In §8 zeigen wir dann, daß jede dieser Gruppendeterminanten durch eine Heckesche L-Reihe an der Stelle s=1 ausgedrückt werden kann. Da solche L-Reihenwerte bekanntlich niemals verschwinden können [10,p.215], ist folglich δ ungleich Null.

Die Zerlegung von δ in Faktoren hat ihren Ursprung in der disjunkten Vereinigung

$$R = \dot{\bigcup_{g|f}} R(g) \quad , \quad R(g) := \{A \in R \mid A \text{ eigentliches } \mathcal{O}_g\text{-Ideal}\} \,,$$

g durchläuft alle Teiler von f, dem Führer der Ordnung $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f$. Nach Voraussetzung ist $R(1) = \phi$ im Falle $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ oder $\mathbb{Q}(\sqrt{-4})$. Hier und im folgenden bezeichnet K den Quotientenkörper von $\mathcal{O}$.

Es ist zweckmäßig, die Determinante $\delta(\varepsilon)$ so anzuordnen, daß A,B zunächst R(1) und dann R(g) nach wachsendem g angeordnet durchlaufen. Die Anordnung innerhalb eines einzelnen R(g) lassen wir unbestimmt. Zu jedem $A \in R(g)$ führen wir jetzt die Homomorphismen Ψ_A^ε ein,

$$\Psi_A^\varepsilon := \sum_{d|g} \frac{\mu(d)}{d^2} \Phi_{A\mathcal{O}_e}^\varepsilon \quad , \quad g=de \tag{29}$$

mit der Möbiusfunktion μ. Diese Homomorphismen haben die Eigenschaft, wie sogleich gezeigt wird,

$$\Psi_A^\varepsilon(U_B) = 0 \tag{30}$$

für alle $B \in R(1)$ mit $1 < g$. Mit Rücksicht auf die getroffene Anordnung von $\delta(\varepsilon)$ folgt hieraus

$$\delta(\varepsilon) = \det(\Phi_A^\varepsilon(U_B))_{A,B\in R} \tag{31}$$

$$= \prod_{g|f} \det(\Psi_A^\varepsilon(U_B))_{A,B\in R(g)} \;.$$

Dies ist die gesuchte Zerlegung von $\delta(\varepsilon)$. Den Beweis von (30) gründen wir auf die Eigenschaft

$$\Phi^{\varepsilon}_{A\sigma_e}(U_B) = \frac{t^2}{e^2}\,\Phi^{\varepsilon}_{A\sigma_t}(U_B) \quad , \qquad t := \mathrm{ggT}(e,l) \;.$$

Indem wir dies in (29) eintragen und zunächst über alle d mit festem t summieren, erhalten wir

$$\Psi_A^\varepsilon(U_B) = \sum_{de=g} \frac{\mu(d)}{d^2}\frac{t^2}{e^2}\,\Phi^{\varepsilon}_{A\sigma_t}(U_B)$$

$$= \sum_{t|(g,l)} \frac{t^2}{g^2}\,\Phi^{\varepsilon}_{A\sigma_t}(U_B) \sum_{\substack{de=g\\(e,l)=t}} \mu(d) \;.$$

Um das Verschwinden der inneren Summe in Evidenz zu setzen, sei $g', l' = g/t, l/t$. Für d kommen dann nur Teiler der Gestalt

$$d = g_1 d' \quad \text{mit} \quad d'|g_2, \quad g_2 := g'/g_1 \;,$$

$$g_1 = \prod_{p|l'} p^{\nu_p(g')}$$

in Frage. Im Falle $g_2 \neq 1$ wird die innere Summe

$$\mu(g_1)\sum_{d'|g_2}\mu(d') = 0 \;.$$

Der Fall $g_2=1$, $d=g'$ dagegen kann nur eintreten, wenn g' und l' aus denselben Primzahlen zusammengesetzt sind. Wegen $l' < g'$ gibt es dann eine Primzahl p mit $1 \leq \nu_p(l') < \nu_p(g')$. Im Falle $g_2=1$ ist also $d=g'$ nicht quadratfrei, also $\mu(d)=0$. Damit ist (30) in allen Fällen bewiesen.

§8 Das Bild der unipotenten Elemente in $SL(2,\mathcal{O})^{ab}$

8.1 Es sei J_g die Gruppe der eigentlichen, zu g teilerfremden $\mathcal{O}_g$-Ideale und $\varphi : J_g \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Größencharakter mit $\varphi((\alpha))=\bar{\alpha}/\alpha$. Einen solchen Charakter gibt es genau dann, wenn die Einheiten-gruppe $\mathcal{O}_g^*$ aus ± 1 besteht. Mit $H = J_g^\sim/J_g^o$ bezeichnen wir die Ringklassengruppe von J_g und bilden für $Re(s)>1$ die partielle Heckesche Reihe

$$L(h,\varphi,s) := \sum_{J\in h} \varphi(J)N(J)^{-s}$$

mit Summation über alle ganzen Ideale J in der Klasse $h \in H$. Wie in §3 näher ausgeführt, kann man diese Reihe auch schreiben

$$\sum \varphi_1(I)N(I)^{-s} \quad , \qquad \varphi_1(I) := \varphi(I \cap \mathcal{O}_g)$$

als Summe über alle ganzen $\mathcal{O}_K$-Ideale I in der Kongruenzklasse $j^{-1}(h)$. Für jedes Ideal A in der inversen Klasse h^{-1} gilt nun

$$\begin{aligned} L(h) &:= L(h,\varphi,1) && (32)\\ &= \tfrac{1}{2}\,\overline{\varphi(A)}N(A) \sum_{de=g} \frac{\mu(d)}{d^2}\, E_2(A\mathcal{O}_e) \quad . \end{aligned}$$

Zum Beweis dieser Beziehung kann A ganz angenommen werden. Wegen $JA=(a)$, $a \in A$ für $J \in h$ ist zunächst

$$L(h) = \tfrac{1}{2}\,\overline{\varphi(A)}N(A) \sum_{\substack{a\in A\\(a,g)=1}}{}' \; a^{-2}|a|^{-s}\Big|_{s=0} \quad . \qquad (33)$$

Als gemeinsame Teiler von a und g kommen in $\mathcal{O}_g$ nur die natürlichen Teiler d von g in Frage. Daher ist

$$\begin{aligned} &\{a \mid a\in A,\ a\neq 0\}\\ &= \dot{\bigcup_{d|g}} \{ad \mid ad\in A,\ (ad,g)=(d),\ ad\neq 0\}\\ &= \dot{\bigcup_{de=g}} \{ad \mid a\in A\mathcal{O}_e,\ (a,e)=(1),\ a\neq 0\} \end{aligned}$$

wegen $ad\in A$ mit ganzem a genau dann, wenn $a\in A\mathcal{O}_e$. Mit anderen Worten, es ist

$$E_2(A) = \sum_{de=g} d^{-2} \sum_{\substack{a\in A\mathcal{O}_e\\(a,e)=1}} a^{-2}|a|^{-s}\Big|_{s=0} \quad .$$

Indem wir hierauf die Möbiussche Umkehrformel anwenden und das Ergebnis in (33) eintragen, erhalten wir die Gleichung (32).

Mit Hilfe der speziellen L-Reihenwerte L(h) können wir jetzt die Homomorphismen Ψ_A^ε wie folgt schreiben,

$$\frac{1}{2}\overline{\varphi(A)}N(A)\Psi_A^{\varepsilon}(U_B(t))$$
$$= w\,L(\alpha^{-1}\beta) + \varepsilon\bar{w}\,L(\alpha^{-1}\beta^{-1}) ,$$

wobei $\alpha,\beta\in H$ die Klasse von A,B ist und

$$w := t\,\overline{\varphi(B)}\,N(B)$$

gesetzt wurde. Die Matrizen U_B in (28) wählen wir so, daß w unabhängig von B und w^2 nicht reell wird. Dies ist offenbar stets möglich. Zum Beweis von (28) genügt es jetzt mit Rücksicht auf (31) zu zeigen, daß

$$\Delta(\varepsilon) = \det(wL(\alpha\beta^{-1}) + \varepsilon\bar{w}L(\alpha\beta))_{\alpha,\beta\in H}$$

nicht Null wird. Unser Plan ist, $\Delta(\varepsilon)$ als Determinante

$$\Delta(\varepsilon) = \det(\sum_{\gamma\in G}\rho(\gamma)x_\gamma) \tag{34}$$

einer Darstellung $\rho = \rho(\varepsilon)$ der Gruppe

$$G = H\rtimes \mathbb{Z}_2 = \{\eta,\ \eta\sigma \mid \eta\in H,\ \sigma^2=1,\ \eta\sigma=\sigma\eta^{-1}\}$$

zu schreiben. G kann aufgefaßt werden als die Galoisgruppe $G(F/\mathbb{Q})$ von $F = K(j(\mathcal{O}_g))$ über $\mathbb{Q}$. Als Darstellungsmodul nehmen wir die direkte Summe $V = \coprod \mathbb{C}e_\eta$, $\eta\in H$, und definieren die Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ durch

$$\rho(\alpha)(e_\beta) = e_{\alpha\beta}\ ,\qquad \rho(\alpha\sigma)(e_\beta) = \varepsilon\, e_{\alpha\beta^{-1}}$$

für $\alpha,\beta\in H$. Als Gruppenvariable x_γ, $\gamma\in G$, nehmen wir

$$x_\alpha = wL(\alpha)\quad ,\qquad x_{\alpha\sigma} = \bar{w}L(\alpha)\quad ,\qquad \alpha\in H\ .$$

Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned}
&(\sum_{\gamma\in G}\rho(\gamma)x_\gamma)(e_\beta)\\
&= \sum_{\alpha\in H}(\rho(\alpha)x_\alpha + \rho(\alpha\sigma)x_{\alpha\sigma})(e_\beta)\\
&= \sum_{\alpha\in H}(x_{\alpha\beta^{-1}} + \varepsilon\, x_{\alpha\beta\sigma})(e_\alpha)\ .
\end{aligned}$$

Damit ist (34) in Evidenz gesetzt. Um die Darstellung ρ auszureduzieren, benötigen wir die Kenntnis der irreduziblen Darstellungen von G. Diese lassen sich übersichtlich beschreiben mit Hilfe der

Charaktere χ der Gruppe H, vgl. [20,p.48]. Zu jedem reellen Charakter $\chi = \overline{\chi}$ gehören zwei nichtäquivalente, eindimensionale Darstellungen R_χ^+, R_χ^- von G, gegeben durch

$$R_\chi^{\pm}(\eta) = \chi(\eta) \quad , \quad R_\chi^{\pm}(\eta\sigma) = \pm\chi(\eta) \; .$$

Dagegen gehört zu jedem χ mit $\chi \neq \overline{\chi}$ die irreduzible Darstellung

$$R_\chi(\eta) = \begin{pmatrix} \chi(\eta) & 0 \\ 0 & \overline{\chi}(\eta) \end{pmatrix} \; , \quad R_\chi(\eta\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & \chi(\eta) \\ \overline{\chi}(\eta) & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

wobei noch zu beachten ist, daß R_χ und $R_{\overline{\chi}}$ äquivalent sind.
Der Definition von ρ entnimmt man aber

$$\mathrm{Spur}(\rho(\eta)) = \begin{cases} |H| & , \eta = 1 \\ 0 & , \eta \neq 1 \; , \end{cases}$$

$$\mathrm{Spur}(\rho(\eta\sigma)) = \begin{cases} 0 & , \eta \neq \alpha^2 \\ \varepsilon|H_2| & , \eta = \alpha^2 \; , \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad H_2 := \{\alpha \in H \mid \alpha^2 = 1\} \; .$$

Hieraus folgt, daß ρ direkte Summe der nichtäquivalenten Darstellungen R_χ ist mit $R_\chi = R_\chi^\varepsilon$, falls χ reell. Also

$$\Delta(\varepsilon) = \prod_{R_\chi} \det\Big(\sum_{\gamma \in G} R_\chi(\gamma) x_\gamma\Big) \; .$$

Für eine Darstellung R_χ mit nichtreellem χ wird nun

$$\begin{aligned} &\det\Big(\sum_{\gamma \in G} R_\chi(\gamma) x_\gamma\Big) \\ &= \det \sum_{\eta \in H} \begin{pmatrix} w\chi(\eta)L(\eta) & \overline{w}\chi(\eta)L(\eta) \\ \overline{w}\overline{\chi}(\eta)L(\eta) & w\overline{\chi}(\eta)L(\eta) \end{pmatrix} \\ &= (w^2 - \overline{w}^2)L(\chi\varphi,1)L(\overline{\chi}\varphi,1) \; . \end{aligned}$$

Dabei ist $L(\chi\varphi,1)$ der Wert der Reihe

$$L(\chi\varphi,s) = \sum \chi\varphi(A)N(A)^{-s} \quad , \quad A \in J_g \; , \; A \subset \mathcal{O}_g$$

an der Stelle $s=1$. Für die Darstellungen R_χ mit $\chi = \overline{\chi}$ wird dagegen

$$\det\Big(\sum_{\gamma \in G} R_\chi(\gamma) x_\gamma\Big) = (w + \varepsilon\overline{w})L(\chi\varphi,1) \; .$$

Also $$\Delta(\varepsilon) = (w+\varepsilon\bar{w})^{p_+}(w-\varepsilon\bar{w})^{p_-} \prod_{\chi} L(\chi\varphi,1)$$

mit $p_\pm = (|H| \pm |H_2|)/2$,

das Produkt durchläuft jetzt alle Charaktere χ von H. Nach Wahl von w verschwindet $\Delta(\varepsilon)$ nicht, da alle $L(\chi\varphi,1)$ bekanntlich ungleich Null sind. Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch folgendes. Wie bei Zetafunktionen relativabelscher Zahlkörper wird das Produkt über χ ,

$$\prod_{\chi} L(\chi\varphi,s) = L_F(\varphi_1 \circ N_{F/K},s)$$

die in dem Zahlkörper F gebildete L-Funktion mit dem Größencharakter $\varphi_1 \circ N_{F/K}$, Relativnorm von F über K gefolgt von φ_1. Der obige Beweis ergibt daher eine arithmetische Interpretation der Zahlen $L_F(\varphi_1 \circ N_{F/K},1)$ in Termen der Gruppenkohomologie von $SL(2,\mathcal{O}_g)$.

8.2 Wir kehren nun zu unserem Ausgangspunkt im Anschluß an Satz 4 zurück und setzen die dort begonnene Diskussion fort. Aus Satz 5 folgt, daß die unipotenten Elemente U in $SL(2,\mathcal{O})^{ab}$ eine Untergruppe vom Rang $\geqslant |R|$ erzeugen. Andererseits hat Serre [19,th.9] für solche Elemente gezeigt, daß $(U\bar{U})^6$ ein Kommutator ist. Daher hat das Bild der unipotenten Elemente in $SL(2,\mathcal{O})^{ab}$ genau den Rang $|R|$. Damit ist auch die Nichtfortsetzbarkeit der Φ_A^+ auf $SL(2,\mathcal{O})$ erwiesen.

Die Φ_A^ε , $A \in R(g)$ mit festem g und ε, sind bis auf einen Faktor algebraisch konjugiert. Aus Satz 5 folgt daher Rang $\Phi_A^\varepsilon(\Gamma) \geqslant |R(g)|$ für jedes $A \in R(g)$. Nach Definition von Φ_A^ε ist aber

$$\Phi_A^\varepsilon(\Gamma_B) \simeq \mathbb{Z} ,$$

falls B^2 ein Hauptideal. Ist dagegen B^2 kein Hauptideal, so folgt hieraus

$$\Phi_A^\varepsilon(\Gamma_B) = \Phi_A^\varepsilon(\Gamma_{\bar{B}}) \simeq \mathbb{Z}^2 ,$$

denn andernfalls wäre Rang $\Phi_A^\varepsilon(\Gamma) < |R(g)|$. Damit ist zugleich

$$\text{Rang}\, \Phi_A^\varepsilon(\Gamma) = |R(g)|$$

bewiesen. Als Korollar erhalten wir

Satz 6 Es durchlaufe A ein Repräsentantensystem der $\mathcal{O}$-Idealklassen mit $D(\mathcal{O}_A) \neq -3,-4$. Dann sind die Homomorphismen $\Phi_A : SL(2,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{C}_+$ linear unabhängig und für den Rang r des Bildes $\Phi_A(\Gamma)$ der unipotenten Elemente gilt $r = h(\mathcal{O}_A)$.

Aus der in §3 genannten Vermutung $D(\bar{a},\bar{c}) = -D(a,c)$ würde sogar

$$\text{Rang } \Phi_A(SL(2,\mathcal{O})) = h(\mathcal{O}_A) \qquad (35)$$

folgen. Denn $D(\bar{a},\bar{c}) = -D(a,c)$ ist gleichbedeutend mit $\Phi(\bar{M}) = -\Phi(M)$. Wegen $\overline{\Phi_A(M)} = \Phi_{\bar{A}}(\bar{M})$ wäre dann im Falle $A = \bar{A}$

$$\overline{\Phi_A(M)} = - \Phi_A(M) \quad ,$$

also das Bild von Φ_A rein imaginär und damit (35) nach Satz 4 für alle A gültig.

Es könnte jetzt der Verdacht aufkommen, daß der Bildmodul $\Phi_A(SL(2,\mathcal{O}))$ bereits von den unipotenten Elementen erzeugt wird. Dies ist i.a. nicht der Fall. In dem Beispiel 2) im Anschluß an Satz 4 ist nämlich

$$\Phi_L(\Gamma) = 8\sqrt{-2}\,\mathbb{Z} + (4\sqrt{-2}+\sqrt{-10})\,\mathbb{Z} .$$

§9 Verhalten unter Hecke-Operatoren

Es sei weiterhin $\mathcal{O}$ eine Ordnung in einem imaginärquadratischen Zahlkörper K, ferner Γ^{ab} die Faktorkommutatorgruppe von $\Gamma = SL(2,\mathcal{O})$ und x ein Element in GL(2,K). In dieser Situation kann man wie folgt einen Hecke-Operator $T_x : \Gamma^{ab} \longrightarrow \Gamma^{ab}$ erklären, [19,p.514]. Es sei $\Gamma_x := x\Gamma x^{-1} \cap \Gamma$. Dann ist $T_x = u \circ v$,

$$T_x : \Gamma^{ab} \xrightarrow{\ v\ } \Gamma_x^{ab} \xrightarrow{\ u\ } \Gamma^{ab} \quad ,$$

wo v die Verlagerungsabbildung und u durch $\gamma \longmapsto x^{-1}\gamma x$ induziert ist. Wir fassen jetzt Φ als Homomorphismus von Γ^{ab} auf und fragen nach der zusammengesetzten Abbildung $\Phi \circ T_x$. Es liegt nahe zu vermuten, daß der Homomorphismus $\Phi \circ T_x$ eine Linearkombination der Φ_L mit $\mathcal{O}L \subset L$ ist. Im folgenden beantworten wir diese Frage für Elemente x der Gestalt

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

mit einer Primzahl p in $\mathfrak{o}$, also $p\mathfrak{o}$ ein Primideal in $\mathfrak{o}$. Den zugehörigen Heckeoperator bezeichnen wir mit T_p.

Satz 7 Für jeden Homomorphismus $\Phi = \Phi_L$ mit $\mathfrak{o}L \subset L$ gilt

$$\Phi \circ T_p = (p+\bar{p})\,\Phi .$$

Im Falle $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist ferner $\Phi \circ T_x = -\Phi$. Dies entnimmt man unmittelbar der Definition von Φ und T_x.

Zum Beweis des Satzes sei $R = \{V_k\}$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen Γ/Γ_x. Da $A \in \Gamma$ auf den Nebenklassen operiert, gibt es zu jedem $V_k \in R$ genau ein $V_l \in R$ und ein $A_k \in \Gamma_x$ mit

$$AV_k = V_l A_k \quad , \quad l = l(k) .$$

Nach Definition der Verlagerungsabbildung v ist dann

$$\sum_{V_k \in R} \Phi(x^{-1}A_k x) = (p+\bar{p})\,\Phi(A) \tag{36}$$

zu zeigen. Als Vertreter V_k nehmen wir

$$V_\infty := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad V_r := \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit festgewählten Repräsentanten r der Restklassen $\mathfrak{o}/p\mathfrak{o}$. Für die Matrizen

$$x^{-1}A_k x = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in x^{-1}\Gamma_x x$$

erhalten wir dann die Tabelle $(r,s \neq \infty)$

(k,l)	a_k	b_k	c_k	d_k
(∞,∞)	a	bp	c/p	d
(∞,s)	c	dp	$(sc-a)/p$	$ds-b$
(r,∞)	$ar+b$	$-ap$	$(rc+d)/p$	$-c$
(r,s)	$cr+d$	$-cp$	$(s(rc+d)-ar-b)/p$	$a-cs$

Für $\pm A$ die Einheitsmatrix ist (36) trivialerweise erfüllt. In allen anderen Fällen können wir $c \neq 0$ annehmen, denn es ist

$$\Phi\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) = \Phi\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} .$$

Zunächst betrachten wir den Fall $p|c$, dann kommen für (k,l) nur die Paare (∞,∞) und (r,s) in Frage, also

$$\sum_{V_k \in R} \Phi\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}a & b/p\\ cp & d\end{pmatrix} + \sum_{r \in \mathcal{O}/p\mathcal{O}} \Phi\begin{pmatrix}a-cs & *\\ cp & cr+d\end{pmatrix}$$

$$= I(p\tfrac{a+d}{c})E_2(L) - D(a,c/p)$$

$$+ \sum_r \left[I(\tfrac{a+d}{pc} + \tfrac{r-s}{p})E_2(L) - D(a-cs,cp)\right]$$

$$= (p+\bar{p})I(\tfrac{a+d}{c})E_2(L) - D(a,c/p) - \sum_r D(a-cr,cp) .$$

Die Gleichung (36) ist daher gleichbedeutend mit

$$D(a,\tfrac{c}{p}) + \sum_r D(a-cr,cp) = (p+\bar{p})D(a,c) . \qquad (37)$$

Die Summe über r ist hier aber gleich

$$\frac{1}{cp}\sum_{t\in L/cpL}\sum_r E_1(\tfrac{at}{cp} - \tfrac{rt}{p})E_1(\tfrac{t}{cp})$$

$$= \bar{p}\, D(a,c) + \frac{1}{c}\sum_{\substack{t\in L/pcL\\ t\notin pL}} E_1(\tfrac{at}{c})E_1(\tfrac{t}{cp}) .$$

Die letzte Summe ist $pD(a,c) - D(a,c/p)$, dies folgt durch zweifache Anwendung $(cp \longrightarrow c)$ der Formel (15). Damit ist (37) und also auch (36) im Falle $p|c$ bewiesen. Im Falle $p\nmid c$ durchläuft (k,l) alle Paare (r,s) mit $cr+d \notin p\mathcal{O}$ und (∞,s), (r,∞). Für $(k,l)=(\infty,s)$ ist

$$\Phi\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}-c_k & -d_k\\ a_k & b_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}\frac{a-sc}{p} & *\\ c & dp\end{pmatrix} ,$$

im Falle $(k,l)=(r,\infty)$ wird dagegen

$$\Phi\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}-b_k & a_k\\ -d_k & c_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}ap & *\\ c & \frac{rc+d}{p}\end{pmatrix} .$$

Die linke Seite von (36) ist jetzt also gleich

$$\sum_{V_k\in R}\Phi\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix}\frac{a-sc}{p} & *\\ c & dp\end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix}ap & *\\ c & \frac{cr+d}{p}\end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{\substack{r\in\mathcal{O}/p\mathcal{O}\\ cr+d\notin p\mathcal{O}}} \Phi\begin{pmatrix} a-sc & * \\ cp & cr+d\end{pmatrix}$$

$$= (p+\bar{p})I(\tfrac{a+d}{c})E_2(L) - D(ap,c) - \sum_{r\in\mathcal{O}/p\mathcal{O}} D(a-cr,cp)$$

und dies ist wegen (37) wieder $(p+\bar{p})\,\Phi(A)$.

§10 Grenzfall

In dem Periodengitter $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ lassen wir jetzt τ nach unendlich hinausrücken und betrachten den Grenzfall $\tau = i\infty$. Die E_k entarten dann zu trigonometrischen Funktionen $\pi^k c_k$,

$$c_k(u) = \pi^{-k} \sum_{w\in\mathbb{Z}}{}' (w+u)^{-k}|w+u|^{-s}\Big|_{s=0} ,$$

also nach Euler

$$c_0(u) = \begin{cases} -1 , & u\in\mathbb{Z} \\ 0 , & u\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\end{cases} , \quad c_1(u) = \begin{cases} \cot\pi u , & u\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \\ 0 , & u\in Z ,\end{cases}$$

$$c_2(u) = \begin{cases} \sin^{-2}\pi u , & u\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \\ 1/3 , & u\in\mathbb{Z}\end{cases} \qquad \text{usw.}$$

Ferner nimmt $E(u) = (\wp(u)-E_1^2(u))/2$ im Grenzfall $\tau = i\infty$ den Wert $\pi^2/3$ an, so daß (10) zur Additionsformel der Cotangente entartet:

$$\sum_{j(3)} \sum_{k=0,1} c_k(u_j-u_{j+1})c_{2-k}(u_j-u_{j-1}) = -1 ,$$

gültig für drei unabhängige Variable $u_j\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Auch die Multiplikationsformeln (11a) bleiben sinngemäß für die c_k bestehen, nur die Formel (11b) für $E(u)$ verliert jetzt ihre Gültigkeit. Dies ist der Grund, warum die folgende Definition im Vergleich zu Φ etwas anders ausfällt. Für $A\in SL(2,\mathbb{Z})$ erklären wir nämlich die Abbildung $\varphi(A)\in G := \{f:(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^2\longrightarrow\mathbb{C}\}$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(u,v) = -\tfrac{a}{c}c_0(u)c_2(v) - \tfrac{d}{c}c_0(u^*)c_2(v^*) - \tfrac{1}{c}\sum_{r\in\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}} c_1\Big(\frac{ar+u^*}{c}\Big)c_1\Big(\frac{r+u}{c}\Big)$$

falls $c\neq 0$, im Falle $c=0$ setzen wir dagegen

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = -\frac{b}{d}\, c_0(u)c_2(v) .$$

Die in der Einleitung genannte Rademacher-Funktion φ ist in dieser Definition als Spezialfall $\varphi(A) = \varphi(A)(0,0)$ enthalten. Mit den Überlegungen zum Beweis von Satz 1 und 2 erhalten wir in Verallgemeinerung von (3) jetzt die Beziehung

$$\varphi(A_1)+A_1\,\varphi(A_2)+A_1A_2\,\varphi(A_3) = -\,\mathrm{sign}(c_1c_2c_3) \tag{38}$$

$$\text{für alle } A_j = \begin{pmatrix} * & * \\ c_j & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \text{ mit } A_1A_2A_3 = 1.$$

Die Abbildung $\varphi: SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow G$ ist also eine 1-Kokette mit nichtverschwindendem Korand. Setzt man $\omega(A_1,A_2) := \mathrm{sign}(c_1c_2c_3)$, so folgt aus (38), daß $\omega = \partial\varphi$ ein 2-Kozykel für $SL(2,\mathbb{Z})$ ist, also der Bedingung

$$\omega(A,B) + \omega(AB,C) = \omega(A,BC) + \omega(B,C)$$

für alle $A,B,C \in SL(2,\mathbb{Z})$ genügt. Da $\omega(A_1,A_2)$ eine konstante Funktion in G ist, so wird durch

$$\gamma(A)(u,v) := \varphi(A)(u,v) - \varphi(A)(0,0)$$

ein 1-Kozykel γ erklärt, der wieder eine nichttriviale Kohomologieklasse in $H^1(SL(2,\mathbb{Z}),G)$ repräsentiert. Dieser Kozykel ist in [15] ausführlich untersucht worden.

Die klassischen Dedekindsummen $s(a,c)$ hängen auf einfache Weise mit dem quadratischen Restsymbol $(\frac{a}{c})$ zusammen. Für zwei teilerfremde natürliche Zahlen a und c, c ungerade, gilt nämlich [11]

$$\left(\frac{a}{c}\right) \equiv \frac{c+1}{2} - \frac{3c}{2}\, s(a,c) \qquad (\mathrm{mod}\ 4) .$$

Es sei nun K ein imaginärquadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D_K < -4$, ferner $\Gamma(4) \subset SL(2,\mathcal{O}_K)$ die Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe 4 und $(-)_K$ das quadratische Restsymbol in K. Nach Kubota [12] ist die Abbildung $\chi: \Gamma(4) \longrightarrow \{\pm 1\}$,

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\frac{c}{a}\right)_K & , c \neq 0 \\ 1 & , c = 0 , \end{cases}$$

ein Homomorphismus von $\Gamma(4)$ in die multiplikative Gruppe $\{\pm 1\}$. Additive Homomorphismen von $\Gamma(4)$ haben wir in §5 konstruiert ($4u, 4v \in L$). Wir vermuten unter diesen Homomorphismen eine Linearkombination Ω mit der Eigenschaft $\chi = \exp \circ \Omega$.

Literatur

[1] T.M. Apostol, T.H. Vu, Identities for sums of Dedekind type, Journal of number theory 14, 391-396(1982)

[2] R.M. Damerell, L-functions of elliptic curves with complex multiplication I, II, Acta Arithm. 17, 287-301(1970); 19, 311-317(1971)

[3] R. Dedekind, Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, Ges. math. Werke, erster Band, p.159-173, Braunschweig: Friedrich Vieweg 1930

[4] M. Deuring, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation, Enzyklopädie der Math. Wiss. Band I, 2. Teil, Heft 10, Teil II

[5] U. Dieter, Zur Theorie der Dedekindschen Summen, Dissertation Kiel 1957

[6] D. Flögge, Zur Struktur der PSL_2 über einigen imaginärquadratischen Zahlringen, Math.Z. 183, 255-279(1983)

[7] C. Goldstein, N. Schappacher, Séries d'Eisenstein et fonctions L de courbes elliptiques à multiplication complexe, Journal für Mathematik 327, 184-218(1981)

[8] G. Harder, Period Integrals of Cohomology Classes which are represented by Eisenstein Series, Proc. Bombay Colloquium 1979, Springer 1981, p.41-115

[9] G. Harder, Period Integrals of Eisenstein Cohomology Classes and special values of some L-functions, p.103-142 in: Number theory related to Fermat's last theorem'(N.Koblitz editor), Boston-Basel-Stuttgart, Birkhäuser 1982

[10] E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht 1970

[11] F. Hirzebruch, D. Zagier, The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory, Boston, Publish or Perish 1974

[12] T. Kubota, Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe, Jornal für Mathematik 222, 55-57(1966)

[13] D. Masser, Elliptic Functions and Transcendence, SLN 437, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1975

[14] B. Mazur, On the Arithmetic of special values of L-functions, Inventiones math. 55, 207-240(1979)

[15] W. Meyer, R. Sczech, Über eine topologische und zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruchs Spitzenauflösung, Math. Ann. 240, 69-96(1979)

[16] H. Rademacher, Collected Papers, MIT Press, Cambridge 1974

[17] H. Rademacher, E. Grosswald, Dedekind Sums, Carus Mathematical Monographs Nr. 16, MAA (1972)

[18] G. Robert, Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, Ann. Sci. E.N.S.(4e ser.)11, 279-389(1978)

[19] J.P. Serre, Le problème des groupes de congruence pour SL_2, Ann. of Math. 92, 489-527(1970)

[20] J.P. Serre, Lineare Darstellungen endlicher Gruppen, Berlin, Akademie Verlag 1972

[21] S.I. Borewicz, I.R. Safarevic, Zahlentheorie, Birkhäuser, Basel 1966

[22] C.L. Siegel, Lectures on advanced analytic number theory, Tata Institute Bombay 1961 (reissued 1965)

[23] R.G. Swan, Generators and relations for certain special linear groups, Advances in Math. 6, 1-77(1971)

[24] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976